

# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

---

## THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

**Spécialité : « Mécanique des Milieux Géophysiques et Environnement »**

préparée au Laboratoire des Images et des Signaux de Grenoble

dans le cadre de l'École Doctorale « Terre, Univers, Environnement »

présentée et soutenue publiquement

par

**Sebastian MIRON**

le 25 octobre 2005

Titre :

**MÉTHODES MULTILINÉAIRES ET HYPERCOMPLEXES  
EN TRAITEMENT D'ANTENNE MULTICOMPOSANTE  
HAUTE RÉOLUTION**

**Directeurs de thèse : Jérôme I. MARS et Nicolas LE BIHAN**

## **JURY**

Monsieur	M. Campillo,	Président
Monsieur	P. Comon,	Rapporteur
Monsieur	J.-J. Fuchs,	Rapporteur
Monsieur	S. J. Sangwine,	Examineur
Monsieur	P. Chevalier,	Examineur
Monsieur	J. I. Mars,	Directeur de thèse
Monsieur	N. Le Bihan,	Co-encadrant



*à Gina*

*« La vérité appartient à ceux qui la cherchent et non point à ceux qui prétendent la détenir. »*

*(Condorcet / Discours sur les conventions nationales, avril 1791 )*



# AVANT-PROPOS

*Je tiens à remercier ici, tous ceux qui ont croisé ma route ces dernières années et qui ont contribué, d'une manière ou d'une autre, à ce travail.*

Je remercie tout d'abord M. Jean-Marc Chassery, directeur du laboratoire, pour m'avoir accueilli au LIS.

J'adresse mes sincères remerciements aux membres de mon jury de thèse :

- M. Michel Campillo qui a accepté de présider ce jury,
- M. Pierre Comon et M. Jean-Jacques Fuchs pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de mon travail et pour les critiques constructives qu'ils y ont apportées,
- M. Pascal Chevalier pour l'intérêt qu'il a porté à ces travaux et pour ses remarques intéressantes,
- M. Stephen J. Sangwine qui a fait le voyage depuis l'Angleterre spécialement pour ma soutenance, et pour sa fabuleuse classe Matlab « quaternion » qui m'a beaucoup simplifié la vie,
- M. Jérôme I. Mars et M. Nicolas Le Bihan qui m'ont guidé durant ces trois années sur le sentier (parfois caillouteux) menant à ce travail de thèse. Je leurs suis profondément reconnaissant de m'avoir donné le goût pour la recherche et de m'avoir fait confiance pendant les périodes difficiles.

Mes remerciements de coeur vont à tous les thésards (et pas seulement) que j'ai côtoyé pendant ces trois années :

- à la longue suite de co-bureaux : Antoine, pour son attitude et sa tenue de vrai chercheur, Jani, pour ses leçons de japonais, ses mex-files et parce-ce qu'il m'a appris qu'on travaille plus efficacement la nuit au laboratoire, Anthony, pour ses conseils pertinents, ses proverbes et ses saucissons stéphanois, Cedric, (« the godfather »), pour les conversations très instructives en anglais ;
- Vali, pour son amitié et pour son assistance scientifique ;
- Caroline, pour sa chaleur humaine, ses encouragements, son esprit d'équipe et pour sa phrase mémorable « Pour moi, écrire c'est pas un problème ... » ;
- Cedric G., pour sa disponibilité et sa patience sans limites ;
- Vincent, pour sa positive attitude. Grâce à lui je sais maintenant où se trouve l'Ar-

change ... ;

- Fred, pour sa gentillesse et ses blagues auvergnates ;
- Sylvain, pour les jeux vidéos et pour ses efforts de me sensibiliser à sa musique bizarre ;
- Ben, qui m’a incité à jouer au foot (... sans beaucoup de succès) ;
- et à tous ceux avec qui j’ai passé des moments très agréables à la cafet, aux barbecues, au RU où ailleurs : Barbara, Isabelle, Eric, Alexandro, Amine, Cyril, Jocelyn, Jérémy, Grégoire, Meryem, Max, Matthieu, Julien, ... Merci à tous !

Encore une fois, un grand merci à Jérôme, qui a été pour moi à la fois mon directeur de thèse, mon ami et mon « parrain français » et à Nicolas qui m’a appris que faire les choses à moitié « c’est pas possible ».

Merci aux braves informaticiens Hervé et Jean-Marc pour leur professionnalisme et leur opérativité.

J’exprime ma reconnaissance à M. Lambert Pierrat et M. Michel Lexcelent sans l’aide desquels je n’aurais jamais été là.

Merci à tous mes copains roumains (où roumains dans l’âme) : Diana, Bogdan, Marcela, Eric, Daniela, Dan, Oana, Manu, Dinu, pour leurs support et pour les inoubliables soirées passées ensemble.

Je remercie de tout mon coeur ma famille qui m’a toujours soutenu et encouragé et particulièrement ma femme pour son amour, sa compréhension et pour avoir été à mes cotés dès le début.

Et puis merci à tous les autres qui ne sont pas cités ici, mais que je n’ai pas oublié ...

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Antennes vectorielles et signaux polarisés</b>	<b>13</b>
1.1	Antennes . . . . .	15
1.1.1	Antennes monocapteur . . . . .	15
1.1.2	Antennes multicapteurs . . . . .	16
1.1.3	Antennes multicomposantes . . . . .	17
1.1.4	Acquisitions multicomposantes . . . . .	17
1.2	Signaux polarisés . . . . .	24
1.2.1	Les ondes sismiques . . . . .	24
1.2.2	Les ondes électromagnétiques . . . . .	27
1.2.3	Modélisation des signaux captés par une antenne vectorielle . . . . .	29
	Conclusion . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Algorithmes de traitement d'antenne scalaire</b>	<b>37</b>
2.1	Historique . . . . .	39
2.2	Rappels d'algèbre linéaire . . . . .	40
2.2.1	Espace de Hilbert . . . . .	40
2.2.2	Indépendance, sous-espaces vectoriels, base et dimension . . . . .	41
2.2.3	Rang d'une matrice, image, noyau . . . . .	41
2.2.4	Produit scalaire, norme . . . . .	42
2.2.5	Orthogonalité, projections orthogonales, décomposition en valeurs propres . . . . .	42
2.3	Méthodes à haute résolution, MUSIC . . . . .	43
2.3.1	Modèle du signal . . . . .	44
2.3.2	La matrice interspectrale . . . . .	47
2.3.3	MUSIC (Multiple Signal Classification) . . . . .	49
2.4	Méthodes existantes de traitement d'antenne vectorielle . . . . .	53
2.4.1	Paramétrisation d'un signal polarisé . . . . .	55
2.4.2	Modélisation « long-vecteur » d'une antenne multicomposante . . . . .	57
	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Traitement d'antenne vectorielle : une approche tensorielle</b>	<b>61</b>
3.1	Notions d'algèbre multilinéaire . . . . .	63
3.1.1	Tableaux multidimensionnels, tenseurs et espace de Hilbert . . . . .	63

3.1.2	Opérations élémentaires sur les tenseurs . . . . .	64
3.1.3	Représentations matricielles d'un tenseur . . . . .	65
3.1.4	Rang des tenseurs . . . . .	67
3.1.5	Produit scalaire et orthogonalité des tenseurs . . . . .	68
3.1.6	Décompositions tensorielles orthogonales . . . . .	69
3.2	Traitement multilinéaire d'antenne vectorielle . . . . .	73
3.2.1	Modèle tensoriel de la polarisation . . . . .	73
3.2.2	Tenseur interspectral . . . . .	75
3.2.3	Algorithmes tensoriels en traitement d'antenne vectorielle à haute résolution . . . . .	76
3.2.4	Simulations, résultats et discussion . . . . .	78
	Conclusion . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Traitement d'antenne vectorielle : une approche hypercomplexe</b>	<b>91</b>
4.1	Les quaternions . . . . .	93
4.1.1	Opérations élémentaires . . . . .	94
4.1.2	Autres représentations d'un quaternion . . . . .	96
4.1.3	Vecteurs et matrices de quaternions . . . . .	99
4.2	MUSIC quaternionique 2C . . . . .	104
4.2.1	Les quaternions en traitement du signal . . . . .	105
4.2.2	Modèle quaternionique de la polarisation . . . . .	105
4.2.3	Matrice interspectrale quaternionique . . . . .	108
4.2.4	L'orthogonalité des vecteurs de quaternions et l'orthogonalité des vecteurs complexes . . . . .	111
4.2.5	L'estimateur MUSIC quaternionique . . . . .	116
4.2.6	Comparaison entre la complexité de calcul pour l'approche quater- nionique et l'approche long-vecteur . . . . .	118
4.2.7	La borne de Cramer-Rao pour le modèle quaternionique d'un signal 2C . . . . .	120
4.2.8	Simulations et résultats . . . . .	122
4.3	Les biquaternions . . . . .	128
4.3.1	Vecteurs et matrices de biquaternions . . . . .	132
4.3.2	Décomposition en valeurs propres d'une matrice biquaternionique .	134
4.4	MUSIC biquaternionique 3C/4C . . . . .	138
4.4.1	Modèle biquaternionique de la polarisation . . . . .	138
4.4.2	Matrice interspectrale biquaternionique . . . . .	140
4.4.3	L'orthogonalité des vecteurs de biquaternions et l'orthogonalité des vecteurs complexes . . . . .	141
4.4.4	L'estimateur MUSIC biquaternionique . . . . .	142
4.4.5	Simulations, résultats et discussion . . . . .	143
	Conclusion . . . . .	147
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>149</b>

---

Annexes	153
A Matrices dépliantes carrées	155
B Variables aléatoires quaternioniques	157
C Calcul de la borne de Cramer-Rao pour le modèle quaternionique	159



# Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des complexes
$\mathbb{H}$	Ensemble des quaternions
$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$	Ensemble des biquaternions
$\mathbb{R}^N$	Espace vectoriel de taille $N$ sur $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^N$	Espace vectoriel de taille $N$ sur $\mathbb{C}$
$\mathbb{H}^N$	Espace vectoriel de taille $N$ sur $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$	Espace vectoriel de taille $N$ sur $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$
$\mathbb{R}^{N \times M}$	Espace vectoriel de taille $N \times M$ sur $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^{N \times M}$	Espace vectoriel de taille $N \times M$ sur $\mathbb{C}$
$\mathbb{H}^{N \times M}$	Espace vectoriel de taille $N \times M$ sur $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times M}$	Espace vectoriel de taille $N \times M$ sur $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$
$a, A$	scalaire
$\mathbf{a}$	vecteur colonne
$\underline{q}$	vecteur associé au quaternion pur $q$
$\mathbf{A}$	matrice
$\mathcal{A}$	tableau de dimension supérieure à 2
$a_m$	élément $m$ du vecteur $\mathbf{a}$
$a_{mn}$	élément $(m, n)$ de la matrice $\mathbf{A}$
$a_{m_1 m_2 \dots}$	élément $(m_1, m_2, \dots)$ du tableau $\mathcal{A}$
$\mathbf{I}_N$	matrice unité de taille $N \times N$
$\vec{E}$	vecteur champ électrique
$\vec{B}$	vecteur induction magnétique
$\mathcal{TF}(\cdot)$	transformée de Fourier d'un vecteur
$\delta$	le symbole de Kronecker
$\wedge$	produit vectoriel
$\cdot$	produit scalaire de vecteurs
$\cdot^T$	transposé d'une matrice ou vecteur
$\cdot^*$	conjugué d'une matrice ou vecteur
$*$	produit de convolution
$\cdot^{\triangleleft}$	conjugué complexe d'un biquaternion
$\bar{\cdot}$	le dual d'un biquaternion
$\cdot^\dagger$	transposé-conjugué

---

$\langle, \rangle$	produit scalaire
$ \cdot $	norme (module) d'un nombre complexe/quaternion/biquaternion
$\ \cdot\ $	norme d'un vecteur
$E[\cdot]$	espérance mathématique
$\{\cdot\}$	ensemble (collection) d'objets de même type
$i$	unité imaginaire complexe
$i, j, k$	unités imaginaires quaternioniques
$\Re(\cdot)$	partie réelle d'un nombre complexe
$\Im(\cdot)$	partie imaginaire d'un nombre complexe
$!$	factoriel
$S(\cdot)$	partie scalaire d'un quaternion/biquaternion
$V(\cdot)$	partie vectorielle d'un quaternion/biquaternion
$a(t)$	signal dépendant d'un paramètre $t$
$Image(\cdot)$	image d'une matrice
$Noyau(\cdot)$	noyau d'une matrice
$Rang(\cdot)$	rang d'une matrice
$Dim(\cdot)$	dimension d'un espace/ sous-espace vectoriel
$min(\cdot)$	valeur minimale
$max(\cdot)$	valeur maximale

# Liste de sigles

1C	Monocomposante
2C	Deux-composantes
3C	Trois-composantes
4C	Quatre-composantes
2D	Bi-dimensionnel
ALU	Antenne Linéaire Uniforme
ACP	Analyse en Composantes Principales
BCR	Borne de Cramer-Rao
BQ-MUSIC	Biquaternion-MUSIC
CVAE	Covariance of Vector Angular Error
DDA	Direction D'Arrivée
ECORS	Étude Continentale et Océanique par Réflexion et réfraction Sismiques
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Technique
EVD	EigenValue Decomposition
FV	Formation de Voies
HR	Haute Résolution
HOS	Higher-Order Statistics
HO-MUSIC	Higher-Order MUSIC
HOSVD	Higher-Order Singular Value Decomposition
IES-MUSIC	Improved Sequential MUSIC
MIT	Massachusetts Institute of Technology
MUSIC	MUltiple SIgnal Classification
MSAE	Mean-Square Angular Error
OBS	Ocean Bottom Seismometer
OBC	Ocean Bottom Cable
ondes P	Ondes de pression (Primaire)
ondes S	Ondes de cisaillement (Secondaire)
ondes SV	Ondes de cisaillement Verticale
ondes SH	Ondes de cisaillement Horizontale
PSA	Polarization Smoothing Algorithm

Q-MUSIC	Quaternion-MUSIC
RADAR	RAdio Detection And Ranging
RAP-MUSIC	Recursively Applied and Projected MUSIC
SVD	Singular Value Decomposition
TAM	Toeplitz Approximation Method
V-MUSIC	Vector-MUSIC

# Introduction

La localisation des sources sonores, lumineuses et vibratoires à l'aide de l'ouïe, de la vue ou du toucher, joue un rôle essentiel dans la survie de tout être vivant. L'homme a toujours essayé de repousser les limites physiologiques de ses sens par des outils spécialement conçus à ces fins. Les premiers témoignages remontent à l'antiquité avec les études de Pythagore sur la nature et la propagation du son. Depuis, les connaissances ont énormément évolué et nous disposons aujourd'hui d'outils nous permettant de détecter des sources dont le champ émis échappe à la perception humaine (ex : les ondes électromagnétiques non-lumineuses, les infrasons, les ultrasons, etc). Des capteurs physiques ont « substitué » nos sens, et le traitement réalisé par notre cerveau a été remplacé par les algorithmes de traitement des signaux enregistrés par ces capteurs. Ces algorithmes, ayant pour but d'extraire les informations sur les sources (nombre, localisation, intensité, etc. ) à partir des signaux enregistrés sur un ensemble de capteurs (une antenne), sont connues sous l'appellation générique de méthodes de *traitement d'antenne*.

Les méthodes de traitement d'antenne sont utilisées dans des domaines tels que la prospection sismique, la sismologie, les télécommunications, l'imagerie médicale, le contrôle non-destructif, etc., pour caractériser des sources de natures diverses. Les capteurs employés classiquement enregistrent les oscillations du champ étudié suivant une seule direction de l'espace physique. On les appelle capteurs *monocomposante* ou capteurs *scalaires*. De plus en plus, les capteurs scalaires font place aux capteurs *vectoriels* (ou *multicomposante*) qui enregistrent des oscillations dans deux ou dans trois directions de l'espace. Un ensemble de ces capteurs forme une *antenne vectorielle* (ou *multicomposante*) et les signaux enregistrés sont appelés signaux *vectoriels* (ou *multicomposante* ou *polarisés*). Ces nouveaux types de capteurs donnent accès à une autre caractéristique importante des sources : leur *polarisation*. Des triphones<sup>1</sup> sont utilisées en sismique et en sismologie pour capter la polarisation des ondes élastiques se propageant dans le sous-sol. En électromagnétisme, des dipôles et des boucles co-localisés permettent d'enregistrer les trois composantes du champ électrique et du champ magnétique. Le supplément d'information qu'apportent les capteurs vectoriels se traduit par un accroissement du volume et de la complexité des données à traiter.

L'objectif de ce travail de thèse est de développer des méthodes dédiées à l'étude des sources polarisées, à partir des signaux captés par une *antenne vectorielle*. Nous appellerons celles-ci méthodes de *traitement d'antenne vectorielle*. La spécificité des signaux vectoriels fait que les techniques classiques de traitement d'antenne ne leurs sont pas adaptées car

---

<sup>1</sup>capteurs permettant d'enregistrer le mouvement du sous-sol suivant trois axes prédéfinis.

elles n'exploitent pas toute la richesse d'informations qu'ils renferment.

Dans le premier chapitre, nous présentons une introduction aux antennes scalaires et vectorielles et aux techniques d'acquisition des signaux polarisés en sismique et électromagnétisme. Nous introduisons ensuite quelques éléments de la physique des ondes élastiques et électromagnétiques et illustrons leurs principaux types de polarisation. Ce premier chapitre finit par une présentation de la modélisation mathématique d'un signal polarisé capté par une antenne à trois composantes.

Afin de développer des algorithmes de traitement d'antenne vectorielle, il est nécessaire de comprendre d'abord le fonctionnement des algorithmes de traitement pour les signaux monocomposante. Le deuxième chapitre fait un tour d'horizon des méthodes de traitement d'antenne scalaire. Parmi les techniques existantes nous nous intéressons aux algorithmes à haute résolution (HR) et nous exposons le principe de fonctionnement de l'algorithme MUSIC. Les principaux outils d'algèbre linéaire, sur lesquels s'appuient ces algorithmes, sont également présentés. Nous introduisons ainsi des notions liées aux espaces vectoriels et à la décomposition en valeurs propres (EVD) d'une matrice à valeurs complexes. Dans la dernière partie du deuxième chapitre nous réalisons un état de l'art des méthodes de traitement d'antenne vectorielle existantes dans la littérature. Nous exposons brièvement leurs avantages et leurs inconvénients.

Les deux derniers chapitres sont dédiés à la présentation des algorithmes développés dans le cadre de la thèse. Dans le troisième chapitre nous proposons une approche multilinéaire en traitement d'antenne vectorielle, permettant de conserver la nature multimodale des signaux. Le *tenseur interspectral* est introduit pour modéliser la covariance des données recueillies sur une antenne multicomposante. Nous proposons deux algorithmes de type MUSIC (V-MUSIC et HO-MUSIC) basés sur deux décompositions orthogonales différentes du tenseur interspectral. Ces algorithmes permettent l'estimation conjointe des directions d'arrivées et des paramètres de polarisation des ondes. Nous comparons les performances des deux algorithmes dans des simulations et montrons comment les méthodes proposées améliorent les résultats de l'estimation par rapport à MUSIC classique.

Le chapitre 4 illustre l'utilisation des algèbres hypercomplexes en traitement d'antenne multicomposantes. Il est structuré en deux parties correspondant aux deux approches hypercomplexes proposées : *quaternionique* et *biquaternionique*. Dans la première partie nous introduisons les quaternions, les vecteurs et les matrices à valeurs quaternioniques ainsi que leurs principales propriétés. Nous proposons ensuite un modèle quaternionique pour un signal polarisé enregistré sur une antenne à deux composantes (2C) et nous introduisons la matrice de covariance associée (la *matrice interspectrale quaternionique*). Un algorithme quaternionique (Q-MUSIC) de traitement d'antenne 2C est proposé et ses performances sont évaluées dans des simulations. Nous dérivons ensuite la borne de Cramer-Rao pour le modèle quaternionique introduit dans le cas déterministe. Dans la deuxième partie du chapitre, le traitement est étendu aux antennes à trois et quatre composantes (3C et 4C) à l'aide des *biquaternions* (des quaternions à coefficients complexes). Nous introduisons les définitions *du produit scalaire, de la norme et de l'orthogonalité des vecteurs de biquaternions* ainsi qu'une technique de *décomposition en valeurs propres d'une matrice de biquaternions*. Finalement, nous proposons un algorithme (BQ-MUSIC) de traitement d'antenne

---

3C/4C basé sur un modèle biquaternionique d'un signal polarisé. Cette dernière partie traduit le potentiel de nombres hypercomplexes de grande dimension dans la modélisation et le traitement des signaux multidimensionnels. Pour les algorithmes proposés, nous montrons que l'utilisation des algèbres hypercomplexes améliore la résolution des estimateurs et réduit le temps de calcul et la taille de la mémoire nécessaire pour la représentation des données.



# Chapitre 1

## Antennes vectorielles et signaux polarisés

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Antennes</b> . . . . .	<b>15</b>
1.1.1	Antennes monocapteur . . . . .	15
1.1.2	Antennes multicapteurs . . . . .	16
1.1.3	Antennes multicomposantes . . . . .	17
1.1.4	Acquisitions multicomposantes . . . . .	17
1.1.4.1	Acquisitions multicomposantes dans le domaine de la sismique . . . . .	17
1.1.4.2	Antennes polarisées en électromagnétisme . . . . .	21
<b>1.2</b>	<b>Signaux polarisés</b> . . . . .	<b>24</b>
1.2.1	Les ondes sismiques . . . . .	24
1.2.2	Les ondes électromagnétiques . . . . .	27
1.2.3	Modélisation des signaux captés par une antenne vectorielle . . .	29
1.2.3.1	Considérations statistiques . . . . .	30
1.2.3.2	Modélisation géométrique . . . . .	31
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>34</b>

---



Avant d'étudier les algorithmes de traitement d'antenne proposés dans ce mémoire, il est nécessaire de définir le cadre du travail et les modèles mathématiques utilisés dans les chapitres suivants. Après une présentation générale des antennes de capteurs scalaires et vectoriels, nous montrerons quelques applications de celles-ci en sismique et en électromagnétisme. Nous n'entrerons pas dans les détails d'acquisition spécifiques à chaque domaine d'activité; le lecteur intéressé par ces aspects pratiques pourra consulter les références concernant chacun des domaines présentés.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous introduirons les signaux polarisés. Nous présenterons d'abord quelques considérations physiques sur la propagation des ondes élastiques et électromagnétiques et illustrerons ensuite quelques types de polarisation spécifiques de ces champs d'ondes.

La fin de ce chapitre sera consacrée à une description des modèles mathématiques de la polarisation, ayant pour but de faire le lien entre la polarisation des ondes observées et les signaux vectoriels enregistrés.

## 1.1 Antennes

D'une manière générale *une antenne* est définie comme étant *le moyen utilisé pour observer les caractéristiques d'une réalité physique dépendant d'un certain nombre des paramètres (ex : espace, temps, polarisation, etc.)*.

Le plus souvent, par réalité physique, nous considérons un champ d'ondes qui se propage dans un milieu et nous appellerons *antenne*, un dispositif permettant d'enregistrer ce champ d'ondes. Du point de vue physique, une antenne réalise la conversion de l'énergie du champ incident en un autre type d'énergie (électrique dans la plupart des cas). Celle-ci est ensuite enregistrée sous forme de signaux dont l'étude permet d'extraire des informations utiles concernant les sources engendrant le champ d'ondes et/ou des informations sur les milieux traversés. Une antenne est sensible, selon le cas, à divers types de grandeurs physiques (retard, distance, polarisation, etc.).

Le traitement d'antenne auquel nous nous intéressons dans ce mémoire se place dans ce cadre. À partir des signaux enregistrés, l'objectif du traitement d'antenne sera de donner une description de la situation physique observée. Ceci est possible, à condition que les signaux enregistrés soient fonctions des paramètres recherchés.

Après avoir défini une antenne, nous nous intéressons par la suite à quelques types particuliers de celles-ci, plus précisément nous décrirons les antennes monocapteur, multicapteurs et multicomposantes.

### 1.1.1 Antennes monocapteur

Le cas le plus simple que nous pouvons imaginer est l'antenne composée d'un seul capteur. Ce type d'antenne fournit un signal monodimensionnel (scalaire)  $a(t)$  caractérisant en un point de l'espace l'évolution du champ d'ondes au cours du *temps*. Une telle antenne est appelée aussi *capteur scalaire*. En pratique, un capteur est un dispositif physique qui a

sa propre fonction de transfert et sa directivité. Il agit comme un filtre fréquentiel, spatial et de polarisation entre les signaux réels qui arrivent sur le capteur et le signal enregistré. Ces aspects de filtrage, bien que très importants, ne seront pas étudiés dans ce mémoire. Nous considérons par la suite que le comportement des capteurs est idéal, de type "passe-tout", et qu'ils sont omnidirectionnels<sup>1</sup> (sauf si précisé autrement). Dans la pratique, la majorité des signaux enregistrés sont échantillonnés en temps et numérisés. Nous supposons que les conditions du théorème de Shannon sont respectées.

L'antenne monocapteur ne fournit aucune information spatiale sur les signaux enregistrés. Pour rendre l'antenne sensible à la structure spatiale du champ d'ondes on doit rajouter une dimension dépendant de l'espace.

### 1.1.2 Antennes multicapteurs

Si nous ajoutons une dimension spatiale à l'antenne décrite précédemment, celle-ci devient sensible à la structure spatiale du champ d'ondes. Le signal bi-dimensionnel (2D) ainsi enregistré  $a(t, \mathbf{x})$  décrit temporellement et spatialement l'évolution du champ. Si la dimension spatiale est discrète, nous parlons d'un *réseau de capteurs*, dispositif le plus utilisé dans la pratique. Dorénavant, le terme *antenne* désignera un *réseau de capteurs*. Un réseau dont les capteurs sont disposés en ligne droite est nommé antenne *linéaire*. Si la distance entre deux capteurs consécutifs est constante, l'antenne est *uniforme*.

Nous allons nous intéresser dans les chapitres suivants à l'*antenne linéaire uniforme* (ALU) pour laquelle l'expression du signal en sortie devient  $a(t, x)$  où  $x$  est un paramètre discret. Une ALU est complètement caractérisée par le nombre total des capteurs  $N_x$  et la distance inter-capteurs  $\Delta x$ . L'*ouverture* physique de l'ALU, représentant sa longueur physique totale est définie comme le produit  $\Delta x(N_x - 1)$ . (Fig. 1.1).

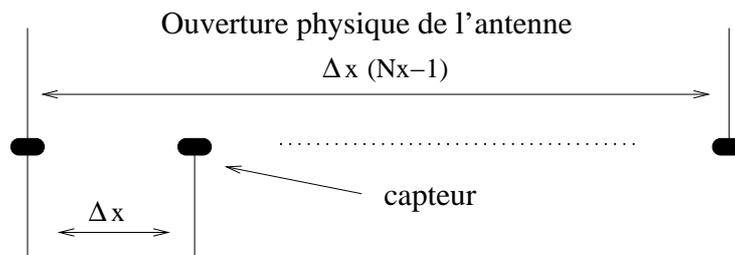


FIG. 1.1 – Antenne linéaire uniforme

Une antenne linéaire est capable de donner une description du champ d'ondes dans un plan. Pour avoir une localisation des sources dans l'espace tridimensionnel, un déploiement 2D des capteurs est nécessaire. En fonction du domaine d'activité et du but recherché, les antennes peuvent avoir des géométries très variées. Nous distinguons des antennes 2D à géométrie :

<sup>1</sup>La sensibilité du capteur ne dépend pas de la direction d'arrivée de l'onde.

- *irrégulière* : le positionnement des capteurs ne respecte pas de contraintes géométriques précises. C'est le cas des réseaux de grande taille, déployés dans des endroits difficiles du point de vue géographique (réseaux sismologiques, océaniques, télécommunications, etc. ).
- *régulière* : les capteurs respectent des contraintes géométriques strictes (réseaux sismiques par exemple). En font partie les réseaux de type matriciel, les antennes en croix, circulaires, en spirale, ... .

### 1.1.3 Antennes multicomposantes

Les sources engendrant le champ d'ondes présentent souvent des directions préférentielles d'oscillation. En effet, en un point du champ, l'énergie des ondes reçues par l'antenne a une distribution suivant des axes privilégiés. Nous disons alors qu'il s'agit d'un champ *vectoriel* ou *polarisé*. C'est le cas de la majorité des ondes rencontrées dans la nature (ondes élastiques, électromagnétiques). Un capteur omnidirectionnel comme celui décrit précédemment ne sera pas sensible à cette caractéristique du champ d'ondes. Pour rendre compte de la polarisation, des capteurs *multicomposantes* ou *vectoriels* sont utilisés.

Un *capteur vectoriel* est un dispositif permettant de décrire ponctuellement l'évolution du vecteur du champ d'ondes. Un capteur vectoriel (*multicomposantes*) est composé habituellement de deux ou trois capteurs directionnels qui enregistrent les oscillations dans des directions orthogonales de l'espace physique. Il existe aussi des capteurs à quatre ou six composantes, capables de caractériser en même temps deux champs de natures différentes : un champ vectoriel et un champ scalaire (ex : champ élastique et pression) ou deux champs vectoriels (ex : électrique et magnétique).

Une antenne de capteurs vectoriels (*antenne vectorielle* ou *antenne polarisée*) fournit une information très complète sur le champ incident. Le signal ainsi enregistré  $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$  donne des informations sur l'évolution dans le *temps*, la structure *spatiale* et la *polarisation* du champ d'ondes.

### 1.1.4 Acquisitions multicomposantes

Dans la majorité des domaines qui utilisent des antennes comme moyen d'observation nous avons affaire à des champs d'ondes polarisées. Ceci justifie l'utilisation des antennes vectorielles pour la caractérisation des sources. Malgré cela, pendant longtemps les capteurs vectoriels ont été très peu utilisés du fait de leurs imperfections, de leurs coût élevé et du manque d'algorithmes permettant de gérer la quantité importante de données ainsi acquises. En sismique, ce n'est qu'au début des années 90, que les capteurs vectoriels ont commencé à remplacer les capteurs scalaires [Caldwell99].

#### 1.1.4.1 Acquisitions multicomposantes dans le domaine de la sismique

La prospection sismique est utilisée pour la cartographie et l'identification des structures géologiques, pour rechercher et localiser les gisements de pétrole, de gaz ou les dépôts miniers. Le principe d'une acquisition sismique est fondé sur la génération de micro-séismes

artificiels à des instants et en des endroits prédéterminés. Les ondes élastiques engendrées se propagent dans les couches du sous-sol, elles sont réfléchies ou réfractées par les discontinuités rencontrées et enregistrées finalement à l'aide des réseaux de capteurs sismiques déployés de façon à couvrir la zone d'intérêt. La répartition des points de tir (l'emplacement des sources) et la forme de l'antenne sismique définissent la géométrie d'acquisition [Sheriff95]. Les réseaux rectilignes sont utilisés la plupart du temps, mais en fonction des conditions géographiques et des informations recherchées, d'autres types d'antennes (à géométrie irrégulière, circulaire, etc.) peuvent être déployés.

En fonction du milieu dans lequel se fera l'acquisition, nous différencions des acquisitions *terrestres* et des acquisitions *marines*. Lors d'une campagne d'acquisition marine, les capteurs sont montés dans des *flûtes sismiques* (streamer), antennes rectilignes tractées par un bateau, dans des OBS (*Ocean Bottom Seismometer* - voir Fig. 1.2) ou OBC (*Ocean Bottom Cable* - voir Fig. 1.3) déposés au fond de l'eau (à l'interface eau - sol). Les OBC sont de plus en plus utilisés en défaveur des flûtes sismiques car ils permettent d'obtenir une meilleure image du sous-sol [Stewart04].

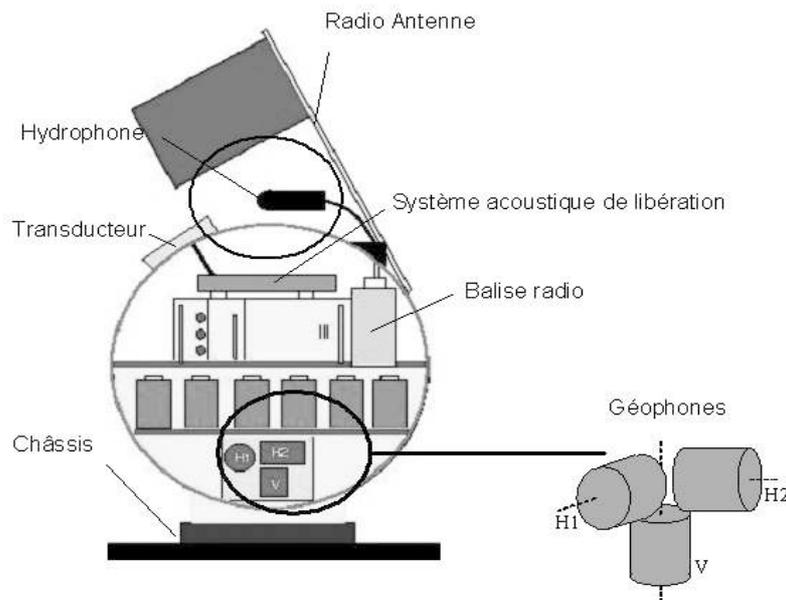


FIG. 1.2 – OBS (Ocean Bottom Seismometer)

En fonction des méthodes d'acquisition employées et des objectifs désirés, il existe plusieurs **catégories d'acquisitions sismiques** [Lavergne86, Sheriff91, Coppens01].

*La sismique réflexion* est utilisée pour caractériser les couches superficielles de la croûte terrestre. Elle est basée sur l'analyse des ondes réfléchies par les interfaces géologiques illustrant des changements d'impédance acoustique dans le sous-sol (voir Fig. 1.4). Les ondes envoyées dans le milieu peuvent avoir un contenu fréquentiel très varié : de quelques Hz à plusieurs kHz, selon la profondeur d'investigation et la résolution (niveau de détails dans l'image des structures) désirées. Quand la fréquence croît, les ondes ne pénètrent pas

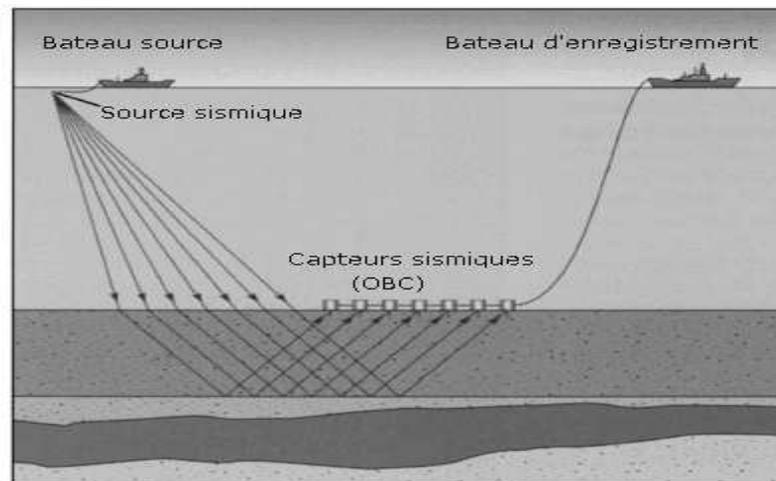


FIG. 1.3 – Campagne sismique marine

profondément dans le sous-sol du fait de l'atténuation proportionnelle avec la fréquence  $\nu$  (loi d'atténuation en  $\nu^2$ ). Ainsi, avec des fréquences de quelques Hz, on peut investiguer jusqu'aux profondeurs d'environ 10 km avec une résolution de l'ordre de 10 m tandis que l'utilisation des fréquences de quelques kHz permet d'obtenir une résolution de l'ordre de 0.1m à des profondeurs de quelques dizaines de mètres. Les domaines d'application principale de la sismique réflexion sont la géophysique, le génie civil et la surveillance (monitoring) des réservoirs souterrains [Waters78, Yilmaz01].

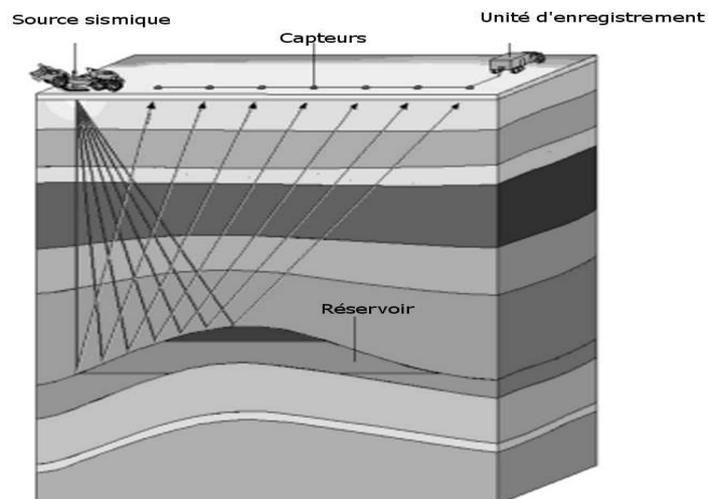


FIG. 1.4 – Acquisition en sismique réflexion

La *sismique réfraction* [Sheriff91, Coppens01] est utilisée généralement pour imager les structures géologiques profondes. Le principe de base est l'étude d'ondes réfractées

qui naissent lorsqu'une onde sismique arrive sur une interface géologique avec un angle égal ou supérieur à l'*angle critique* [Born80]. L'onde réfractée se propage alors le long de l'interface, avec la vitesse du milieu inférieur, et remonte ensuite à la surface apportant ainsi des informations sur la couche parcourue. Des campagnes menées en mer ont permis des investigations sismiques pouvant aller jusqu'à des profondeurs de 50 km [Sheriff91]. Les grands profils ECORS (*Étude Continentale et Océanique par Réflexion et réfraction Sismiques*) [ECORS88] effectués en France dans les années 80 ont été acquis en sismiques réfraction. La sismique réfraction est utilisée par les géophysiciens car elle permet d'estimer aisément les vitesses de propagation des ondes dans les couches du sous-sol.

Un autre type d'acquisition est la *sismique de puits*. Cette technique consiste à forer un puits vertical ou horizontal dans lequel des capteurs sont placés à différentes profondeurs [Gilpatrick89, Coppens01]. Si la source est placée à la surface et à la verticale du puits, l'opération porte le nom de *profil sismique vertical (PSV)*. Elle a une résolution verticale métrique à décimétrique et une capacité d'investigation latérale de quelques dizaines à plusieurs centaines de mètres. Si la source est placée à une certaine distance de la gueule du puits, nous parlons de *profil sismique oblique (PSO)* [Mari89]. Si la source se trouve à l'intérieur d'un autre puits, en profondeur, il s'agit de la *sismique puits à puits (crosswell)* [Hardage92]. La sismique de puits a une investigation latérale limitée à quelques centaines de mètres et elle est généralement utilisée pour affiner la prospection et contrôler les transferts entre puits injecteur et puits producteur. Elle est également utilisée dans le domaine du génie civil pour préciser la répartition des vitesses sismiques dans les couches du sous-sol proches de la surface [Mari98].

Les **sources sismiques** ont pour but de provoquer une déformation ponctuelle du milieu, qui crée une énergie qui se propage ensuite sous forme d'ondes élastiques. En fonction de la nature de l'acquisition et de l'objectif de la campagne, plusieurs types de sources sont envisageables. En *sismique terrestre*, dans les régions peu habitées, *les explosifs* sont la source préférée car la quantité d'énergie libérée est importante et la signature temporelle du signal brève. En zone urbaine, *les camions vibreurs* et *les chutes de masses* [Sheriff91] sont préférés aux explosions pour des raisons évidentes de sécurité et de limitation des effets sur l'environnement.

En *acquisition maritime*, nous retrouvons comme source sismique *les explosifs* qui sont depuis quelques années de moins en moins utilisés à cause de leurs effets destructeurs sur l'environnement. On leur substitue *des canons à air* ou *des canons à eau* basés sur l'expulsion de l'air (ou de l'eau) sous pression dans l'eau à une profondeur définie. Pour une description plus détaillée de ces dispositifs nous renvoyons à [Sheriff91].

Les **capteurs sismiques** sont des convertisseurs d'énergie mécano-électriques qui transforment le mouvement du milieu en signal électrique. Ce signal, échantillonné et numérisé, est enregistré sous forme de documents sismiques constituant l'outil de travail d'interprétation des géophysiciens. Il existe essentiellement deux types de capteurs sismiques.

Les *géophones* (ou *séismomètres*) sont des capteurs directionnels utilisés pour mesurer les mouvements du sous-sol, composés d'un aimant fixe autour duquel une bobine mobile peut coulisser. En fonction de leur construction, ils peuvent traduire la vitesse ou l'accélération du mouvement du milieu suivant un axe. Ils sont utilisés seuls pour ca-

ractériser le mouvement suivant une direction (verticale ou horizontale), en doublets pour décrire la polarisation des ondes dans un plan ou en triplets afin de préciser la polarisation dans l'espace physique tridimensionnel [Sheriff91]. C'est la raison pour laquelle ils sont dénommés *capteurs vectoriels*.

Pour les acquisitions marines, on peut utiliser des *hydrophones* qui sont des *capteurs scalaires* piézo-électriques, capables de transformer les variations de pression auxquelles ils sont soumis en courant électrique [Sheriff91]. Ils sont classiquement utilisés dans les OBS et OBC ou placés dans des *flûtes sismiques* (streamer), antennes rectilignes flottantes tractées par un bateau.

### Antennes sismiques multicomposantes

Après cette brève description des éléments d'une acquisition, nous présentons quelques configurations de base d'antennes multicomposantes destinées aux campagnes sismiques. L'information de polarisation est très importante dans la prospection sismique puisqu'elle permet de faire la différence entre divers types d'ondes élastiques (ondes de volume, ondes de surface, ondes de conversion, etc.) (cf. sous-section 1.2.1), qui sont la marque d'un événement sismique particulier [Sheriff91, Ewing57]. Connaître la polarisation, permet une identification plus fine du type d'onde et, par conséquent, une description plus exacte des structures du sous-sol investigué.

En *sismique terrestre*, pour caractériser l'aspect vectoriel du champ d'ondes sismiques, des doublets (2C) ou des triplets (3C) de géophones sont utilisés. Ils sont positionnés de façon à enregistrer le mouvement du sous-sol dans des directions orthogonales de l'espace. En acquisition terrestre, souvent, une des composantes est verticale, une autre est dans la direction de propagation et la troisième est dans la direction perpendiculaire à l'antenne.

Pour les acquisitions multicomposantes en *environnement marin*, les *antennes vectorielles marines* (OBC) (voir figure 1.5) sont utilisées. Les unités de base des OBC sont les OBS (voir Fig. 1.2), des capteurs à quatre composantes (4C) placés à des intervalles réguliers au fond de l'eau. Un OBS est composé d'un hydrophone et d'un triplet de géophones formant un trièdre. Il est donc capable de donner une description riche des champs d'ondes qui se propagent à l'interface entre l'eau et le sous-sol marin. Ces enregistrements en *pression* (P) et en champ *élastique* (Z), sont essentiellement pour l'élimination des multiples [Barr89]. Il permet d'enregistrer à la fois, le champ scalaire d'ondes de pression se propageant dans l'eau, et le champ d'ondes élastiques polarisées se propageant dans le sous-sol marin. En géophysique, les acquisitions multicomposantes sont en plein développement, et ouvrent de nouvelles perspectives en imagerie et caractérisation sismique (voir [Gaiser96, Stewart03]). Le lecteur intéressé par la technologie multicomposante est invité à consulter les ouvrages suivants [Caldwell99, Gaiser01, DeAngelo04].

#### 1.1.4.2 Antennes polarisées en électromagnétisme

Un autre domaine potentiellement intéressant et comportant des ondes multicomposantes est l'électromagnétisme. En effet, le *champ électromagnétique* est composé de deux

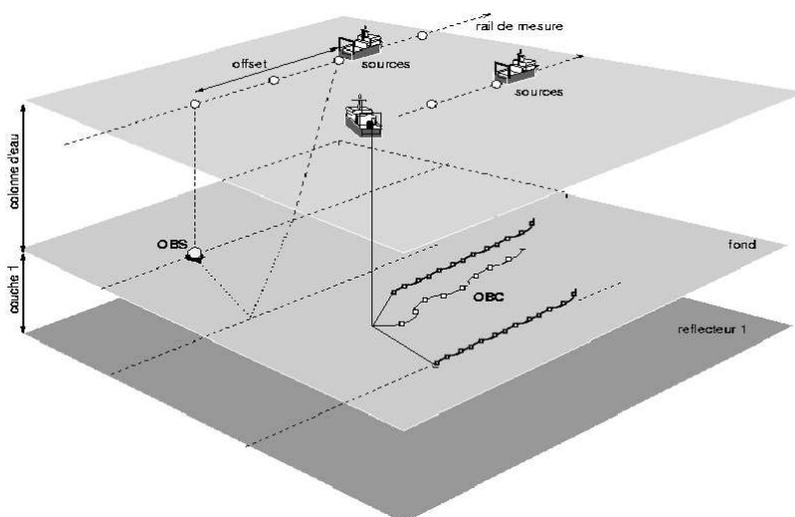


FIG. 1.5 – Acquisition en environnement marin

champs vectoriels, un champ *électrique* et un *champ magnétique* qui sont liés par les équations de Maxwell. Depuis quelques années, de réels efforts sont faits pour améliorer les performances des systèmes par la prise en compte de la polarisation du champ électromagnétique, notamment dans les domaines des *communications mobiles* [Vaughan03] et de la *localisation active de cibles (RADAR)* [Wang99].

Un **capteur électromagnétique vectoriel** est constitué de six antennes non-isotropiques, co-localisées, qui mesurent les six composantes du champ électromagnétique incident, trois électriques et trois magnétiques. Les capteurs électromagnétiques vectoriels ont des configurations différentes selon le fabricant. Nous évoquons ici les capteurs CART manufacturés par Flam and Russel, Inc. of Horsham, PA [Farina90, Hatke92]. Ce type de capteur est composé de trois dipôles courts orientés orthogonalement, et de trois boucles magnétiques orthogonales tous co-localisés dans l'espace. Des algorithmes permettant de traiter simultanément les six composantes existent depuis quelques années dans la littérature [Nehorai94, Li93a], mais il y a très peu d'applications pratiques utilisant conjointement les six composantes. La majorité des traitements utilisés ne se sert que de la partie électrique du champ électromagnétique (et souvent d'une ou de deux de ses trois composantes seulement).

Aujourd'hui, certains systèmes de communication utilisent pleinement l'aspect polarisation. Les *communications mobiles* sont basées sur le concept de cellularisation, consistant à diviser une aire géographique large en cellules plus petites. En fonction de leur taille, les cellules peuvent être classifiées en : *macro-cellules* (rayon de 1-20 km), *micro-cellules* (rayon 0.1-1 km) ou *pico-cellules*, inférieures à 0.1 km (intérieur des bâtiments). Chaque cellule peut réutiliser la bande allouée (ou une partie de celle-ci), assurant ainsi la liaison avec plusieurs utilisateurs, en dépit des limitations du spectre, car le principal problème des systèmes de communications mobiles reste la limitation du spectre alloué (limitation de la capacité). Pour augmenter la capacité du système, différentes techniques d'accès mul-

multiple ont été développées, basées sur la diversité temporelle (TDMA), spatiale (SDMA), fréquentielle (FDMA), diversité de codes (CDMA) ou une combinaison de toutes celles-ci [Vaughan03]. Dans ce contexte, la diversité de polarisation joue un rôle important permettant d'augmenter, jusqu'à tripler la capacité des systèmes de communication [Andrews01]. La technique employée fait appel à des antennes composées de deux ou trois dipôles orientés suivant des axes orthogonaux dans l'espace, capables d'émettre des signaux dont les polarisations linéaires sont orthogonales.

Un autre problème important dans les télécommunications, qui peut être partiellement résolu par l'utilisation de la polarisation, est celui des dégradations introduites par le canal : les distorsions d'amplitude et de phase du signal (sélectivité en fréquence du canal), dues aux multiples trajets de propagation et le phénomène d'évanouissement (*fading*), dû aux non-stationnarités temporelles des trajets de propagation. L'analyse exacte de ce phénomène est une tâche très complexe et, en pratique, une description statistique s'avère souvent plus utile. Une technique bien établie pour palier ce problème est d'utiliser la *diversité* de l'antenne. L'idée est d'utiliser deux ou plusieurs canaux - chacun avec ses distorsions - et de les combiner de façon à avoir un canal statistiquement fiable [Vaughan03]. Il est très important que, pour les canaux utilisés, les distorsions et le *fading* ne soient pas corrélés. Afin d'améliorer la qualité de la transmission plusieurs types de diversité d'antennes sont exploités : la *diversité spatiale*, la *diversité angulaire*, la *diversité de polarisation* (voir Fig.1.6). Cette dernière est une solution robuste car les distorsions sur les composantes

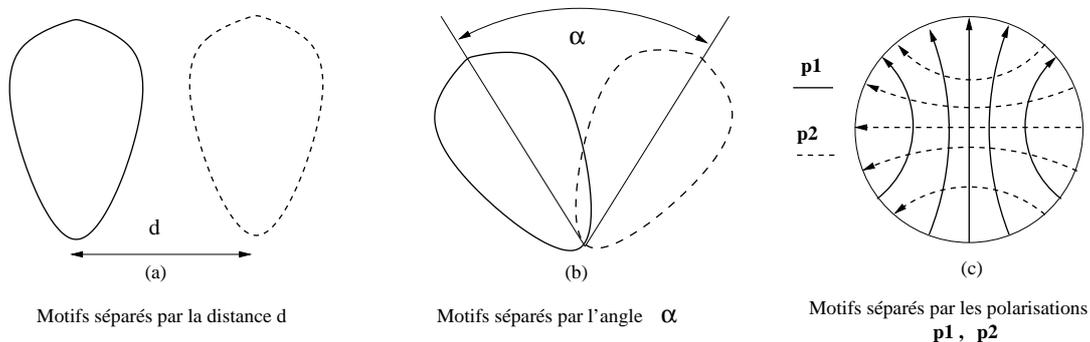


FIG. 1.6 – Trois types différents de diversité d'antenne : (a) spatiale, (b) angulaire et (c) de polarisation (d'après [Vaughan03])

orthogonales sont très peu corrélées. L'avantage de la diversité d'antenne est d'augmenter la qualité ou la capacité du canal sans utiliser un surplus de bande. Les inconvénients sont : le coût supplémentaire et la présence physique des antennes additionnelles.

Les *communications par satellite* utilisent la *polarisation circulaire* à cause de la rotation Faraday de la polarisation dans l'ionosphère. Cette rotation crée une orientation variable des polarisations linéaires [Vaughan03]. Dans ces conditions, les antennes linéaires fixes ne sont pas capables de maintenir une bonne efficacité de transmission, tandis que pour la polarisation circulaire, la rotation n'a pas d'effet gênant. Les antennes à polarisation

circulaire sont, en général, plus difficiles à construire que les antennes à polarisation linéaire, raison pour laquelle, dans les terminaux portables, on préfère utiliser ces dernières, malgré une importante baisse de performances.

Un autre domaine d'utilisation des antennes polarisées est *la localisation active de cibles (RADAR)*. Le fonctionnement est basé sur le fait que chaque cible a une signature de polarisation différente [Wang99]. Le RADAR exploite cette information pour mieux discriminer les objets visés et pour rendre le système globalement plus performant.

## 1.2 Signaux polarisés

Après avoir présenté, dans leurs grandes lignes, les dispositifs d'acquisition et quelques applications de la polarisation en sismique et électromagnétisme, nous allons nous intéresser aux principales caractéristiques des signaux polarisés dans les domaines mentionnés. Cette étude est nécessaire pour développer des algorithmes de traitement adaptés à la nature particulière des signaux polarisés. Nous présenterons d'abord quelques considérations physiques sur les ondes polarisées et ensuite, nous aborderons la représentation mathématique des signaux enregistrés sur un réseau de capteurs vectoriels.

### 1.2.1 Les ondes sismiques

Les ondes sismiques se déplaçant dans le sol sont des ondes élastiques qui peuvent se propager sur des distances très importantes : par exemple, les ondes créées par un tremblement de terre peuvent être enregistrées à plusieurs milliers de kilomètres de l'épicentre. Pour mieux comprendre le phénomène de polarisation des ondes sismiques, nous allons faire un bref rappel sur la propagation des ondes élastiques [Ewing57].

Supposons que le milieu traversé par les ondes soit homogène, isotrope et élastique. Les équations des ondes qui naissent dans un tel milieu sont données par les solutions de l'équation différentielle qui relie les contraintes et les déformations dans le solide (loi de Hooke) :

$$(\lambda + \mu)\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur déplacement d'un point du milieu traversé par l'onde élastique,  $\mu$  et  $\lambda$  sont les paramètres de Lamé [Mari98, Mari99] et  $\rho$  caractérise la densité du milieu traversé. Si nous remplaçons le vecteur déplacement par sa décomposition de Helmholtz :

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\psi} \quad (1.2)$$

où  $\phi$  est le potentiel de dilatation (scalaire) et  $\vec{\psi}$  le potentiel de cisaillement (vectoriel), les solutions de l'équation (1.1) sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta\phi = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} & \text{avec : } v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \\ \Delta\psi = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} & \text{avec : } v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ces équations correspondent aux deux modes fondamentaux de propagation d'une onde dans un milieu élastique (onde de volume). La première décrit une onde de compression (Onde P ou Primaire<sup>2</sup>) de vitesse  $v_p$  et la seconde une onde de cisaillement (Onde S ou Secondaire<sup>3</sup>) de vitesse  $v_s$ . Après ce bref rappel de la physique des ondes élastiques, nous allons présenter les différents types d'ondes sismiques et leurs polarisations.

### La polarisation des ondes sismiques

En fonction de la source émise et de la nature du milieu traversé, les ondes sismiques peuvent avoir plusieurs types de polarisation. La polarisation d'une onde est donnée par les directions préférentielles de mouvement d'une particule élémentaire du milieu au passage de l'onde. Ce mouvement peut être enregistré à l'aide des capteurs vectoriels (géophones) à deux ou trois composantes, comme nous l'avons vu dans la section 1.1.1. La polarisation d'une onde est confinée dans un plan appelé *plan de polarisation*, qui peut être stationnaire ou changer d'orientation au cours du temps et en fonction de la distance.

#### *Les ondes de volume*

Les *ondes P* et les *ondes S* sont issues directement des solutions de l'équation des ondes élastiques (1.1). Pour les *ondes P*, le mouvement des particules du sous-sol est rectiligne et colinéaire à la direction de propagation de l'onde (voir Fig. 1.7). On dit qu'elles présentent une *polarisation linéaire, longitudinale*.

Dans le cas des *ondes S*, les particules se déplacent dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation des ondes. Ces ondes sont dites à *polarisation transverse*. En fonction de la direction d'oscillation dans ce plan, nous distinguons les *ondes SV*, pour celles qui oscillent dans le plan vertical contenant la direction de propagation, et les *ondes SH*, si le mouvement des particules est confiné dans le plan horizontal (cf. Fig. 1.7).

#### *Les ondes de surface et les ondes guidées*

Lors de la propagation des ondes sismiques dans les couches sédimentaires du sous-sol ou des couches d'eau (sismique marine), la variation des vitesses de propagation des ondes P et S avec la profondeur ou/et les réflexions sur les interfaces géologiques favorisent la naissance des phénomènes de guide d'ondes et de mélanges de champs d'ondes. Cela fait apparaître de nouveaux types d'ondes avec des polarisations elliptiques (ondes de surface).

Les *ondes de surface* (ou les *ondes guidées*) apparaissent lorsqu'un milieu est limité

<sup>2</sup>en anglais : *P-wave*

<sup>3</sup>en anglais : *Shear wave* ou *S-wave*

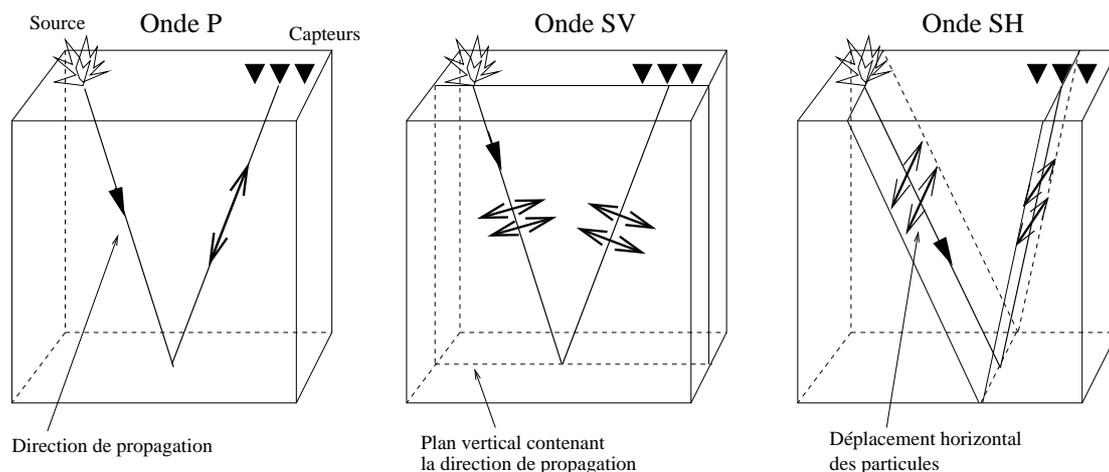


FIG. 1.7 – Polarisations des ondes P et S

par une surface libre, et leur énergie décroît très vite avec la profondeur. Plusieurs types d'ondes de surface peuvent être distingués, en fonction de la topologie du milieu qui favorise leur état de polarisation.

Les plus connues dans ce sens sont les *ondes de Rayleigh*, qui naissent des interférences entre des ondes P et des ondes SV, dans un milieu homogène, semi-infini à vitesse constante [Lavergne86, Sheriff91]. En fait, on ne rencontre jamais vraiment des ondes de Rayleigh. Dans la réalité, la vitesse est variable avec la profondeur et on préfère alors parler d'*ondes de pseudo-Rayleigh* [Mari98]. La vitesse de propagation de ces ondes est faible et elles présentent un fort caractère dispersif (la vitesse de propagation dépend de la fréquence). Les ondes de pseudo-Rayleigh sont caractérisées par une polarisation elliptique contenue dans le plan vertical de propagation (Fig. 1.8).

Les *ondes de Love* (interférences entre ondes SH et ondes P) résultent de l'interférence constructive des multiples réflexions des ondes SH à la surface libre.

Dans les puits, les ondes de surface sont représentées par un mélange d'*ondes de Stoneley*<sup>4</sup> et de pseudo-Rayleigh.

L'ensemble de ces ondes de surface forme le *ground-roll* [Sheriff91, Mari99].

Puisqu'elles se propagent dans les couches superficielles, les ondes de surface ne contiennent pas d'informations sur les structures géologiques profondes que l'on veut identifier en sismique pétrolière. Cependant, étant très énergétiques, elles gênent l'interprétation des documents sismiques et on cherche à les enlever dans les phases de pré-traitement des données [Mars04]. Par contre, en génie civil ou pour une sismique de sub-surface, ces ondes sont extrêmement intéressantes et on cherche à les identifier le plus finement possible.

<sup>4</sup>Ondes d'interface ou de surface, de grande amplitude, se propageant à l'interface solide-fluide. Les ondes de Stoneley constituent une source importante de « bruit » en sismique de puits [Sheriff91].

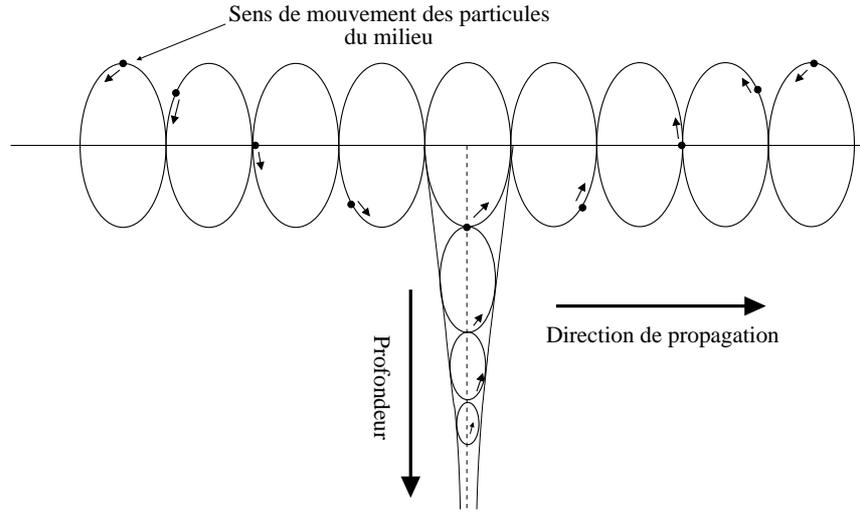


FIG. 1.8 – Polarisation des ondes de pseudo-Rayleigh

### 1.2.2 Les ondes électromagnétiques

L'état d'excitation de l'espace physique dû à la présence des charges électriques, constitue un *champ électromagnétique*. Celui-ci est représenté par deux vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , appelés *vecteur champ électrique* et *vecteur induction magnétique*. Les dérivées par rapport à l'espace et par rapport au temps de ces deux vecteurs sont liées par les *équations de Maxwell*, qui dans le vide, en l'absence de charges et de courants, prennent la forme suivante [Born80, Purcell65] :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \text{div} \vec{E} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

avec  $\varepsilon_0$  la permittivité électrique et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide. Compte tenu des relations  $\text{div} \vec{E} = 0$  et  $\text{div} \vec{B} = 0$  et sachant que  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  (la vitesse de la lumière), les équations (1.4) peuvent s'écrire comme :

$$\begin{cases} \vec{\Delta} \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \\ \vec{\Delta} \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

avec  $\vec{\Delta}$  le Laplacien vectoriel<sup>5</sup>. Ce type d'équation porte le nom d'équation d'onde ou *équation de d'Alembert*. Comme solutions particulières du système (1.5), on retrouve *les ondes planes* et *les ondes sphériques* [Born80].

<sup>5</sup>Le Laplacien d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  est un vecteur défini par le Laplacien scalaire de chacune des composantes du champ vectoriel, ainsi en coordonnées cartésiennes, il est défini par :

Nous allons nous intéresser aux ondes planes, qui peuvent être aussi une bonne approximation des autres types d'ondes (sphériques, elliptiques, etc.) pour une distance importante par rapport à la source et sur une portion relativement petite du front d'onde. Pour une telle onde, se propageant dans la direction définie par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$ , les vecteurs  $\mathbf{n}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  forment un trièdre direct [Bertin86] et sont liés par :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \vec{E} \quad (1.6)$$

où  $\wedge$  est le produit vectoriel de deux vecteurs. Cette relation porte le nom de *relation de structure de l'onde plane progressive*.

### Polarisation d'une onde plane

Considérons un repère  $Oxyz$  et une onde plane se propageant suivant l'axe  $Ox$  (de vecteur unitaire  $\mathbf{n}$ ) (Fig. 1.9). Dans le cas le plus général, le champ  $\vec{E}$  a une composante  $E_y$  sur  $Oy$  et une composante  $E_z$  sur  $Oz$ . La composante sur  $Ox$  est nulle, puisque les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'une onde plane sont nécessairement transversaux [Bertin86]. Pour cette onde plane progressive, harmonique, l'expression la plus générale du champ électrique  $\vec{E}$  est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{oy} \cos(kx - \omega t + \varphi_1) \\ E_z = E_{oz} \cos(kx - \omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (1.7)$$

avec  $E_{oy}$  et  $E_{oz}$  (les amplitudes du champ électrique sur  $Oy$  et  $Oz$ ) d'une part,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  (les phases initiales de  $E_y$  et  $E_z$ ) d'autre part (constantes a priori différentes) (voir Fig. 1.9). Par la relation (1.6), ces expressions caractérisent uniquement le champ électromagnétique :

Pour décrire la polarisation de ce champ, il est classique de se placer dans le plan  $x = 0$  et d'analyser l'évolution du vecteur  $\vec{E}$  dans ce plan. En un point donné de ce plan, l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  décrit une courbe comprise dans un rectangle de côtés  $2E_{oy}$  et  $2E_{oz}$ , décrite par les équations suivantes :

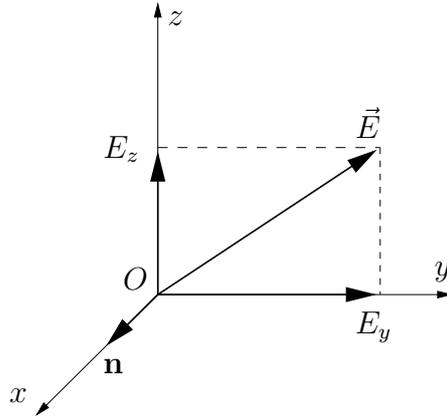
$$\begin{cases} E_y = E_{oy} \cos(\omega t - \varphi_1), \\ E_z = E_{oz} \cos(\omega t - \varphi_2) \end{cases} \quad (1.8)$$

Plusieurs cas correspondant à différents types de polarisations sont envisageables :

1° Si  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0 \Rightarrow \frac{E_y}{E_z} = \frac{E_{oy}}{E_{oz}}$ , autrement dit l'onde électromagnétique présente une *polarisation rectiligne*, la direction de polarisation étant celle du vecteur  $\vec{E}$ .

---


$$\vec{\Delta} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

FIG. 1.9 – Onde plane se propageant dans la direction  $Ox$ 

2° Si  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \Rightarrow \frac{E_y}{E_z} = -\frac{E_{oy}}{E_{oz}}$ , le champ  $\vec{E}$  garde encore une direction fixe, et l'onde est encore polarisée rectilignement.

3° Dans le cas général, où  $\varphi_2 - \varphi_1$  n'est pas un multiple de  $\pi$ , l'extrémité de  $\vec{E}$  décrit une ellipse donnée par l'équation :

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1.9)$$

Dans ce cas, nous disons que l'onde présente une *polarisation elliptique*. Suivant la valeur de  $\varphi_2 - \varphi_1$ , cette ellipse est décrite dans un sens ou dans l'autre. La figure 1.10 représente les différents cas possibles. Elle présente ce qu'observerait un expérimentateur placé sur  $Ox$ , face à la direction de propagation.

Dans le cas particulier où  $E_{oy} = E_{oz}$  et  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  ou  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$ , la *polarisation* de l'onde est *circulaire*.

Si l'hypothèse de front d'onde plan n'est pas respectée, la représentation générale de la polarisation d'une onde électromagnétique est plus compliquée et nous ne la présenterons pas ici. Le lecteur intéressé par ce problème pourra consulter les références suivantes [Born80, Purcell65].

### 1.2.3 Modélisation des signaux captés par une antenne vectorielle

Dans la section précédente nous avons vu quels étaient les types d'ondes observables à l'aide d'une antenne vectorielle. Afin de développer des algorithmes de traitement pour ce type de données, des modèles mathématiques doivent être adoptés pour les signaux multicomposantes.

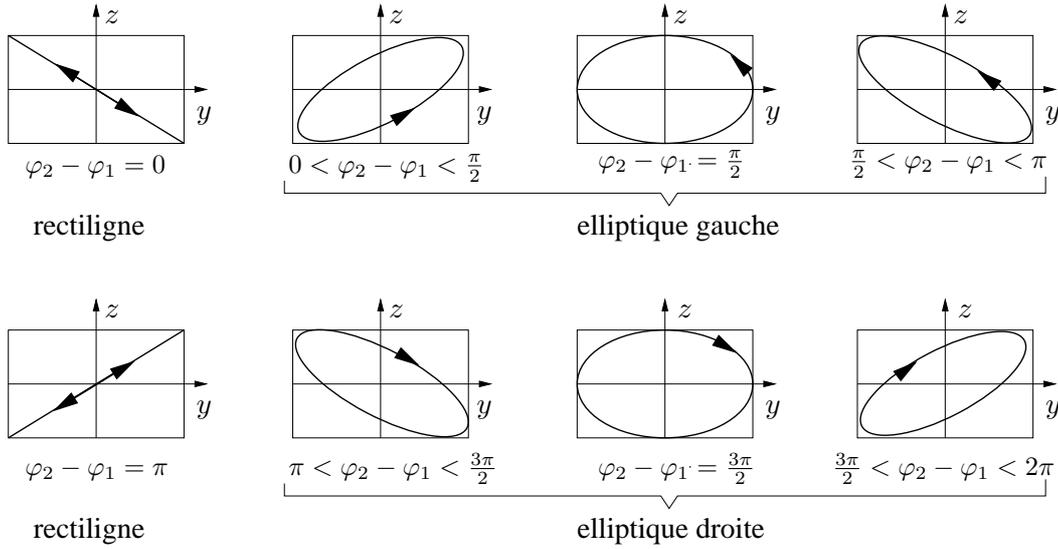


FIG. 1.10 – États de polarisation du champ électrique

### 1.2.3.1 Considérations statistiques

Les signaux enregistrés à l'aide d'une antenne sont porteurs d'informations (directions d'arrivée, polarisations, etc.) concernant les sources et/ou le milieu traversé. Le plus souvent, dans la pratique, nous ne disposons pas assez d'information sur les sources (les formes d'onde des signaux émis, leurs amplitudes, etc.), ou sur le milieu de propagation, ce qui ne permet pas d'envisager une modélisation déterministe du problème. Nous utilisons alors les statistiques des signaux enregistrés afin de trouver les paramètres recherchés. Dans ce mémoire, nous allons nous limiter aux moments d'ordre deux des signaux et nous allons considérer que leurs moments d'ordre un sont nuls (les signaux étant centrés). Si ce n'est pas le cas, les signaux seront centrés dans une phase de pré-traitement. Des algorithmes de traitement d'antenne utilisant les statistiques d'ordres supérieurs (trois ou quatre) ont été déjà proposés [Lacoume97], mais ils ne seront pas abordés dans ce travail.

Considérons un champ d'ondes engendré par  $K$  sources, ayant des paramètres de localisation  $\theta_1, \dots, \theta_K$  et des paramètres de polarisation  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_K$ . Suivant le cas, les paramètres de localisation  $\theta_k$  peuvent être des vecteurs (par exemple les coordonnées sphériques : azimut, élévation des sources) ou des scalaires (ex : direction d'arrivée dans un plan contenant l'antenne). En fonction de la modélisation adoptée, les paramètres de polarisation  $\mathbf{p}_k$  peuvent représenter, par exemple, des déphasages et des rapports d'amplitudes entre les composantes ou des coordonnées sur la sphère de Poincaré [Poincaré92]. Ce champ d'ondes est enregistré par une antenne composée de  $N_x$  capteurs vectoriels à  $N_c$  composantes (Fig. 1.11).

Puisque les algorithmes présentés dans ce mémoire sont basés sur les statistiques d'ordre deux des signaux reçus, nous supposons que les bruits sur les capteurs sont des processus

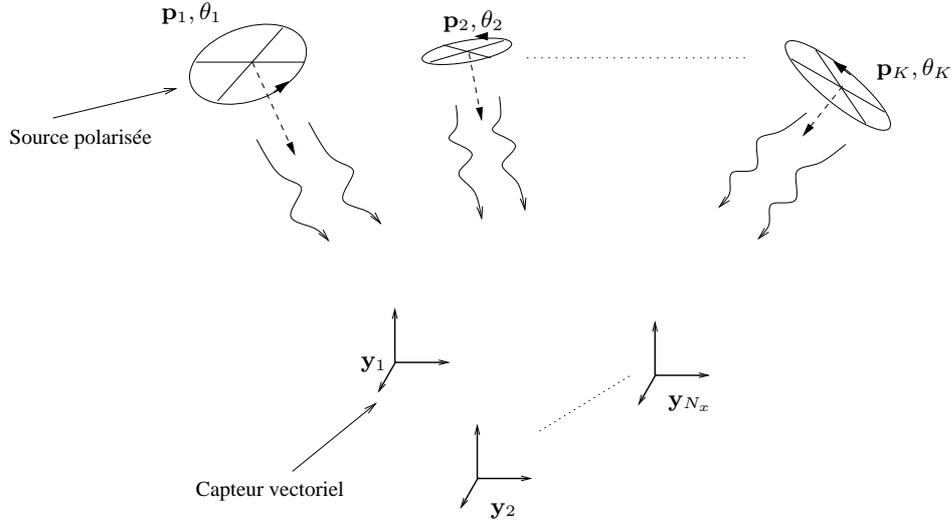


FIG. 1.11 – Observation d'un champ d'ondes polarisées par une antenne vectorielle

aléatoires gaussiens, complètement décrits par leurs statistiques d'ordre deux, centrés et que les formes d'onde des sources sont déterministes mais inconnues. À partir des signaux enregistrés (les observations), nous devons estimer les paramètres  $\boldsymbol{\theta}_k$  et  $\mathbf{p}_k$ , avec  $k = 1 \dots K$ . Le signal enregistré par l'antenne peut être modélisé par un processus aléatoire [Miller74], qui dépend de deux paramètres physiques  $\mathbf{x}$  et  $t$  (*espace et temps*) et des paramètres déterministes  $\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_K, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_K$ . Nous faisons l'hypothèse simplificatrice que les paramètres caractérisant les sources  $\boldsymbol{\theta}_k$  et  $\mathbf{p}_k$  sont déterministes, afin de limiter la quantité d'information a priori sur les paramètres des sources.

Les observations sont constituées alors de l'ensemble des signaux enregistrés sur chaque capteur  $\{\mathbf{y}_n(t, \mathbf{x})\}$ ,  $n = 1 \dots N_x$  dépendant du temps et de l'espace. Le signal enregistré sur le  $n^{\text{ième}}$  capteur  $\mathbf{y}_n$  est constitué à son tour de l'ensemble des signaux enregistrés sur les  $N_c$  composantes  $\{y_c(t)\}$ ,  $c = 1 \dots N_c$ . Ces données multicomposantes ont une structure complexe qui comporte quelques directions de cohérence (ou modes) par suite de la cohérence *spatiale, temporelle et de polarisation* des signaux sources.

### 1.2.3.2 Modélisation géométrique

Nous avons vu quelles étaient les hypothèses statistiques faites sur les signaux polarisés. Analysons maintenant les relations entre les paramètres de polarisation déterministes des sources et les signaux enregistrés par un capteur vectoriel. Il existe dans la littérature différents modèles de polarisation, adaptés aux ondes électromagnétiques à six composantes [Nehorai94] ou sismiques [Anderson96, Samson81]. Nous présentons dans cette partie le cas général d'un champ vectoriel, enregistré par un capteur à trois composantes.

Considérons un capteur à trois composantes placé à l'origine d'un repère orthonormé

direct ( $Oxyz$ ) de l'espace physique, ayant les composantes orientées suivant les vecteurs de cette base. La polarisation d'une onde plane qui arrive sur le capteur est caractérisée par quatre paramètres : les angles  $\theta_1$  (azimut) et  $\theta_2$  (élévation) (voir Fig. 1.12), qui définissent le plan de polarisation, et deux autres angles ( $\theta_3$  et  $\theta_4$ ) qui décrivent l'orientation et l'excentricité de l'ellipse de polarisation (voir Fig. 1.13).

Nous faisons les hypothèses suivantes :

**H1** : La distance entre le capteur et la source (considérée ponctuelle) est largement supérieure à la longueur d'onde maximale du signal et les dimensions du capteur, petites devant la longueur minimale d'onde contenue dans le signal. Ces considérations peuvent être résumées par l'hypothèse d'*onde plane reçue sur le capteur*.

**H2** : Le signal est à *bande limitée*; il existe deux valeurs de fréquence  $\nu_m$  et  $\nu_M$  telles que pour toutes les fréquences  $\nu$  contenues dans le signal, on a  $\nu_m < \nu < \nu_M$ .

**H3** : La polarisation de l'onde est stationnaire en temps et la même pour toutes les fréquences.

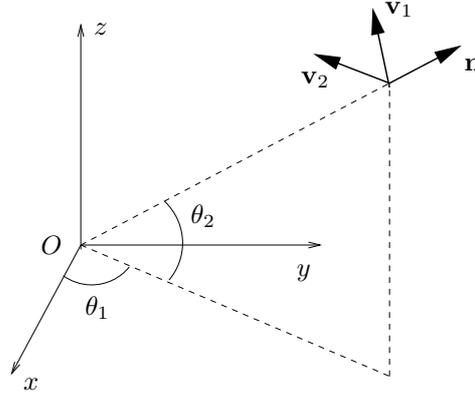


FIG. 1.12 – Base orthonormée dans le plan de polarisation  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Dans un souci de garder une notation simple et compacte, et de pouvoir modéliser des déphasages directement dans le domaine temporel, nous allons travailler sur les signaux analytiques<sup>6</sup>. Pour retrouver les signaux réels associés, il suffit de considérer les parties réelles de ces signaux complexes.

Soit

$$\mathbf{y}_e(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (1.10)$$

le signal enregistré par le capteur vectoriel, avec  $\mathbf{y}(t) = [y_x(t), y_y(t), y_z(t)]^T$  la contribution du signal polarisé sur les trois composantes du capteur et  $\mathbf{b}(t)$  le terme de bruit additif. L'orientation du plan de polarisation est donnée par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^3$  (voir Fig. 1.12), normal au plan et dont les coordonnées dans  $Oxyz$  sont :

<sup>6</sup>Le *signal analytique*  $s_A(t)$  d'un signal monodimensionnel réel  $s(t)$  est le signal complexe donné par  $s_A(t) = s(t) + i\mathcal{H}(s(t))$ , où  $\mathcal{H}(\cdot)$  désigne la transformée de Hilbert d'un signal réel [Gabor46, Ville48].

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Une fois le plan de polarisation identifié, nous pouvons exprimer  $\mathbf{y}(t)$  dans une base orthonormée  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  du plan de polarisation comme :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{V}\boldsymbol{\xi}(t) \quad (1.12)$$

avec  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^2$  qui déterminent les composantes de  $\mathbf{y}$  dans le plan défini par  $\mathbf{V}$ . Le choix des vecteurs unitaires  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  doit se faire en respectant les contraintes suivantes :  $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{n}$  et  $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{n}$ . La base  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  peut se construire à partir des dérivées partielles de  $\mathbf{n}$  par rapport à  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , comme :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\cos \theta_1} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta_1} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta_2} \quad (1.14)$$

L'expression de la matrice  $\mathbf{V}$  devient alors :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Il est facile de montrer par le calcul que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{n}$  forment un trièdre direct.

Considérons le cas général où l'extrémité du vecteur du champ vectoriel incident décrit une ellipse dans le plan de polarisation défini par (1.15). L'orientation du grand axe de l'ellipse dans ce plan est donnée par l'angle  $\theta_3$  par rapport au vecteur  $\mathbf{v}_1$  (voir Fig. 1.13).

Soit  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  la base orthonormée du plan de polarisation défini par les deux axes de l'ellipse (Fig. 1.13). Alors, la matrice de passage entre  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  et  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  est donnée par la matrice de rotation :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

L'excentricité de l'ellipse de polarisation est caractérisée par l'angle  $\theta_4$  (Fig. 1.13) ; les composantes du signal exprimées dans la base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  sont alors proportionnelles à  $\cos \theta_4$  et  $\sin \theta_4$ . Si  $s(t)$  est le signal analytique (complexe) émis par la source, l'expression du signal dans le plan de polarisation devient :

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \cos \theta_4 \\ i \sin \theta_4 \end{pmatrix} s(t) \quad (1.17)$$

Si (1.17) est introduit dans (1.12) et si nous notons :

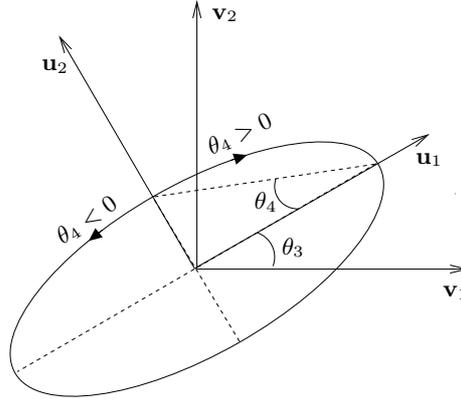


FIG. 1.13 – Paramètres de l'ellipse de polarisation

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \cos \theta_4 \\ i \sin \theta_4 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

le vecteur de transfert entre le signal complexe de la source et les axes de l'ellipse de polarisation [Nehorai94], nous obtenons, pour le signal enregistré par le capteur vectoriel (1.10), l'expression suivante :

$$\mathbf{y}_e(t) = \mathbf{V}(\theta_1, \theta_2) \mathbf{Q}(\theta_3) \mathbf{w}(\theta_4) s(t) + \mathbf{b}(t) \quad (1.19)$$

Le signe de  $\theta_4$  détermine aussi le type de polarisation elliptique (*droite* ou *gauche*). Notons :  $\mathbf{p}(\theta_3, \theta_4) = \mathbf{Q}(\theta_3) \mathbf{w}(\theta_4)$ . L'équation (1.19) devient :

$$\mathbf{y}_e(t) = \mathbf{V}(\theta_1, \theta_2) \mathbf{p}(\theta_3, \theta_4) s(t) + \mathbf{b}(t) \quad (1.20)$$

La matrice  $\mathbf{V}(\theta_1, \theta_2)$  définit le plan de polarisation et le vecteur  $\mathbf{p}(\theta_3, \theta_4)$  décrit la polarisation de l'onde dans son plan de polarisation.

Dans cette partie nous avons illustré la modélisation d'une onde plane enregistrée par un capteur à trois composantes. Dans le cas général de  $K$  ondes arrivant sur un réseau irrégulier de  $N_x$  capteurs à  $N_c$  composantes, la description mathématique est plus compliquée et le nombre de paramètres à gérer croît proportionnellement à  $KN_c$ . La représentation devient lourde et n'est pas prise en compte dans la suite de ce mémoire. Une paramétrisation plus simple sera proposée dans le chapitre suivant lors de la présentation des algorithmes de traitement d'antenne vectorielle.

## Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de présenter des notions de base sur les antennes et les signaux multicomposantes, nécessaires à la compréhension des méthodes qui seront

développées dans la suite de ce mémoire. Nous avons montré quelques applications des antennes polarisées en sismique et en télécommunications, ainsi que les dispositifs utilisés dans ces domaines pour enregistrer la polarisation des ondes. Nous avons présenté une description élémentaire de la physique des champs d'ondes élastiques et électromagnétiques et des principaux types de polarisation de ces ondes.

En fin de chapitre, nous avons développé quelques considérations mathématiques sur les signaux polarisés enregistrés sur une antenne multicomposantes, en vue d'introduire dans les chapitres suivants les algorithmes d'antenne vectorielle. Une modélisation géométrique, permettant de relier les paramètres de l'ellipse de polarisation d'une onde, aux signaux enregistrés par un capteur à trois composantes, a aussi été présentée.

Les notions physiques et les considérations mathématiques introduites dans ce chapitre restent valables dans d'autres domaines où la polarisation des ondes élastiques ou électromagnétiques est utilisée, tels que la télédétection et la polarimétrie radar [Egan85] ou le contrôle non-destructif [Halmshaw91, Blitz96].



# Chapitre 2

## Algorithmes de traitement d'antenne scalaire

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Historique</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Rappels d'algèbre linéaire</b> . . . . .	<b>40</b>
2.2.1	Espace de Hilbert . . . . .	40
2.2.2	Indépendance, sous-espaces vectoriels, base et dimension . . . . .	41
2.2.3	Rang d'une matrice, image, noyau . . . . .	41
2.2.4	Produit scalaire, norme . . . . .	42
2.2.5	Orthogonalité, projections orthogonales, décomposition en valeurs propres . . . . .	42
<b>2.3</b>	<b>Méthodes à haute résolution, MUSIC</b> . . . . .	<b>43</b>
2.3.1	Modèle du signal . . . . .	44
2.3.2	La matrice interspectrale . . . . .	47
2.3.3	MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) . . . . .	49
<b>2.4</b>	<b>Méthodes existantes de traitement d'antenne vectorielle</b> . . . . .	<b>53</b>
2.4.1	Paramétrisation d'un signal polarisé . . . . .	55
2.4.2	Modélisation « long-vecteur » d'une antenne multicomposante . . . . .	57
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>58</b>

---



Le second chapitre de ce mémoire concerne le traitement d'antenne scalaire, notamment l'algorithme MUSIC (**MU**ltiple **SI**gnal **C**lassification). Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, une antenne est un dispositif permettant d'observer les caractéristiques d'une situation (réalité) physique. Le *traitement d'antenne* est l'ensemble des techniques permettant d'extraire ces caractéristiques, à partir des observations (des signaux enregistrés par l'antenne). L'idée est d'utiliser la cohérence des signaux enregistrés sur différents capteurs et/ou composantes afin de décrire le champ d'ondes incident.

Nous pouvons identifier deux grands types d'objectifs dans lesquels le traitement d'antenne peut intervenir : *la détection et la localisation (caractérisation)*. Le premier va essayer de répondre à la question : « Une source, est-elle présente ? » et le deuxième, à la question : « Quelles sont les caractéristiques de la source (direction d'arrivée (DDA), puissance, polarisation, etc.) ? ». Avant de débattre de ces problèmes nous ferons un court historique sur le traitement d'antenne, afin d'illustrer les étapes principales qui ont permis d'arriver aux algorithmes de traitement d'antenne à haute résolution utilisés aujourd'hui et présentés par la suite.

Dans une deuxième partie, des notions élémentaires d'algèbre linéaire, nécessaires pour illustrer la mise en œuvre des algorithmes de traitement d'antenne à *haute résolution* seront introduites.

Nous présenterons ensuite la famille des méthodes à haute résolution en traitement d'antenne scalaire (monocomposante) et nous montrerons le principe de fonctionnement de l'algorithme MUSIC. Dans ce but la matrice interspectrale sera introduite ainsi que sa décomposition en valeurs et vecteurs propres.

La dernière partie de ce chapitre fera un tour d'horizon des méthodes de traitement d'antenne vectorielle existant actuellement dans la littérature. Nous proposerons ensuite une paramétrisation pour les signaux polarisés enregistrés sur une antenne vectorielle, et présenterons le modèle long-vecteur d'un signal polarisé (inconvénients et avantages).

## 2.1 Historique

Historiquement, les premiers essais de localisation de source à l'aide d'antennes sont mentionnés dans le domaine acoustique. Leonard de Vinci est le précurseur du sonar passif tel qu'on le connaît aujourd'hui [Burdic84]. Il s'est rendu compte du fait que les navires en mouvement engendrent des sons dans l'eau qui peuvent se propager à des distances considérables. Il a décrit un dispositif d'écoute sous forme d'un tube rempli d'air, capable de transformer les ondes se propageant dans l'eau en ondes sonores aériennes. A l'aide de ce dispositif, il était possible de détecter les bateaux à des distances importantes.

Néanmoins, le premier à avoir compris et intégré le rôle de la diversité spatiale dans la localisation des sources est Lord Rayleigh [Rayleigh09]. Jusqu'au *XIX<sup>ème</sup>* siècle, il était généralement admis que la localisation d'une source de bruit par l'homme était liée aux différences d'intensité du signal acoustique arrivant sur les oreilles droite et gauche. Lord Rayleigh montra que ce principe n'est pas suffisant, notamment pour les fréquences très basses. Sa conclusion fut que, en plus des différences d'intensité, l'ensemble oreilles et

cerveau est sensible aux retards (ou aux déphasages) entre les signaux reçus sur les deux oreilles. À partir de ce principe, des appareils astucieux ont été construits pendant la première guerre mondiale pour détecter et localiser les avions et autres aéronefs (les ballons dirigeables par exemple)[Burdic84]. En 1917, le physicien français Paul Langevin a fait la première démonstration d'un sonar actif. Cette idée a été ensuite reprise et développée aux États-Unis, au Naval Research Laboratory, pour créer des systèmes destinés à la détection et localisation des sous-marins. La deuxième guerre mondiale et les besoins technologiques associés ont permis l'apparition du RADAR (développé au MIT Radiation Laboratory, USA) et ont ainsi étendu le traitement d'antenne aux signaux électromagnétiques.

Un progrès important dans le traitement d'antenne fut l'apparition des techniques de traitement numérique du signal dans les années soixante. Une des premières applications numériques en acoustique sous-marine a été la réalisation du système DIMUS [Anderson60] qui utilisait des registres pour retarder les signaux afin de réaliser *une formation de voie*. Cette méthode classique (la formation de voies) est encore utilisée aujourd'hui grâce à sa robustesse et sa mise en œuvre facile. Elle consiste à remettre les signaux en phase pour une direction d'intérêt, et à les sommer avec l'espoir que la sommation multipliera l'amplitude du signal d'un facteur bien plus important que le facteur d'amplification du bruit.

L'introduction des transformées de Fourier rapides, ainsi que l'évolution technologique dans le domaine numérique ont permis l'implémentation de systèmes de localisation entièrement numériques à la fin des années soixante et au début des années soixante-dix.

Dans ce contexte, un nouvel outil technique a fait son apparition; il est connu aujourd'hui sous le nom de *méthode à haute résolution (HR)*. Les méthodes HR sont essentiellement basées sur des techniques matricielles. Afin de faciliter la présentation de leur principe de fonctionnement, nous considérons utile un rappel de principales notions d'algèbre linéaire.

## 2.2 Rappels d'algèbre linéaire

Une partie des notions et concepts introduits dans cette section, sera reconsidérée, adaptée et généralisée dans les chapitres suivants dans le cas multilinéaire et hypercomplexe.

### 2.2.1 Espace de Hilbert

Nous travaillerons, dans ce manuscrit, dans des espaces vectoriels normés, munis d'un produit scalaire [Scharf91]. Les vecteurs représentant les signaux en fréquence, enregistrés sur un réseau de  $N_x$  capteurs, font partie de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^{N_x}$ . Les matrices de taille  $N_x \times N_c$  appartiennent à l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^{N_x \times N_c}$ . Enfin, lorsque nous traiterons des tableaux 4D de taille  $N_x \times N_c \times N_x \times N_c$ , ceux-ci appartiendront à l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^{N_x \times N_c \times N_x \times N_c}$ .

Afin de garder une certaine homogénéité dans les notations, nous utiliserons dans la partie qui suit des vecteurs de taille  $I$ , des matrices de taille  $I_1 \times I_2$  et des tableaux de

dimension  $N$  de taille  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$ .

### 2.2.2 Indépendance, sous-espaces vectoriels, base et dimension

Soit  $\mathbb{C}^I$  l'espace linéaire des vecteurs de taille  $I$  sur  $\mathbb{C}$ . Un sous-ensemble de vecteurs  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$  de  $\mathbb{C}^I$  est dit *linéairement dépendant* [Golub91] s'il existe un jeu de coefficients non-nuls  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  dans  $\mathbb{C}$ , tel que

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{v}_n = 0. \quad (2.1)$$

Dans le cas contraire, les vecteurs sont *linéairement indépendants*.

Un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^I$  formant un espace vectoriel est appelé *sous-espace vectoriel* de  $\mathbb{C}^I$ . Si  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_N$  sont des sous-espaces de  $\mathbb{C}^I$ , alors leur *somme* est le sous-espace défini par :

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_N : \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}_n, n = 1 \dots N\} \quad (2.2)$$

Si tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  a une représentation unique  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_N$ , alors  $\mathbf{V}$  est une *somme directe* de  $\mathbf{V}_n$  :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_N \quad (2.3)$$

Le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants d'un sous-espace vectoriel représente *la dimension* du sous-espace vectoriel. Un tel ensemble de vecteurs forme *une base* du sous-espace considéré.

### 2.2.3 Rang d'une matrice, image, noyau

Une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2}$  définit deux sous-espaces vectoriels importants : *l'image* et *le noyau*.

L'image de  $\mathbf{A}$  est définie comme :

$$Image(\mathbf{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{I_1} : \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \text{ pour } \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{I_2}\} \quad (2.4)$$

et son *noyau* par :

$$Noyau(\mathbf{A}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{I_2} : \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}\} \quad (2.5)$$

Le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  est alors défini comme étant la dimension de l'image de  $\mathbf{A}$  :

$$Rang(\mathbf{A}) = Dim(Image(\mathbf{A})) \quad (2.6)$$

Pour une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2}$ , les relations suivantes sont vraies :

$$Rang(\mathbf{A}) \leq \min(I_1, I_2) \quad (2.7)$$

$$Rang(\mathbf{A}) = Rang(\mathbf{A}^T) \quad (2.8)$$

$$Dim(Noyau(\mathbf{A})) + Rang(\mathbf{A}) = I_2 \quad (2.9)$$

### 2.2.4 Produit scalaire, norme

Soit deux vecteurs complexes  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^I$ . Le *produit scalaire* de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  est une forme bilinéaire  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  définie comme :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^\dagger \mathbf{u} \quad (2.10)$$

avec  $\mathbf{v}^\dagger$  le transposé-conjugué de  $\mathbf{v}$ . Le produit scalaire ainsi défini engendre une *norme*  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \quad (2.11)$$

$\mathbb{C}^I$  avec la norme ainsi définie forme un *espace métrique*, avec les notions bien connues d'ouvert, de voisinage, de convergence, etc.

La *norme d'une matrice* complexe par exemple  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2}$  est également utilisée dans ce manuscrit. Il existe plusieurs définitions pour la norme d'une matrice [Golub91], mais la plus fréquemment utilisée est la *norme de Frobenius* donnée par :

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} |a_{i_1 i_2}|^2} \quad (2.12)$$

Une autre famille de normes matricielles, dérivée directement des normes vectorielles, sont les *p-normes* [Golub91].

### 2.2.5 Orthogonalité, projections orthogonales, décomposition en valeurs propres

La notion d'orthogonalité joue un rôle essentiel dans les algorithmes proposés dans ce mémoire. Un ensemble de vecteurs  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N\}$  est *orthogonal* si  $\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n \rangle = 0$ , pour tout  $m \neq n$ . L'ensemble est dit *orthonormal* si  $\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n \rangle = \delta_{mn}$ , avec  $\delta_{mn}$  le symbole de Kronecker.

Soit  $\mathbf{S}$  un sous-espace de  $\mathbb{C}^I$ . On dit que  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{I \times I}$  est un *projecteur orthogonal* sur  $\mathbf{S}$ , si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $\text{Image}(\mathbf{P}) = \mathbf{S}$
- $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$
- $\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}$

Une autre notion très importante pour la suite de ce mémoire est la *décomposition en valeurs propres* (EVD<sup>1</sup>) d'une matrice complexe et plus précisément d'une matrice hermitienne. La décomposition en valeurs propres est un outil très largement utilisé en traitement du signal, notamment pour réaliser l'analyse en composantes principales (ACP) [Jolliffe86] avec ses nombreuses applications (biomédical, sismique, séparation de sources, analyse de données, image, etc). Dans la suite de ce manuscrit, des décompositions directement liées à l'EVD matricielle seront présentées.

<sup>1</sup>en anglais : *EigenValue Decomposition*

Toute matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times I}$  peut se décomposer avec une probabilité 1 comme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\dagger \quad (2.13)$$

avec  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{I \times I}$ , une matrice dont les colonnes  $\mathbf{u}_i$  sont les *vecteurs propres* de  $\mathbf{A}$ , et  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_I\}$  une matrice diagonale contenant les *valeurs propres* de  $\mathbf{A}$ . Si  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{u}_i$  est son vecteur propre associé, alors :

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i \quad (2.14)$$

Si la matrice  $\mathbf{A}$  est *hermitienne* ( $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ ), ses *valeurs propres sont réelles* et ses *vecteurs propres sont orthogonaux*. Soit  $\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_R] \in \mathbb{C}^{I \times R}$ , la matrice construite à partir des  $R$  premiers vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ , le projecteur orthogonal sur le sous-espace  $\text{Image}(\mathbf{V})$  est défini par :

$$\mathbf{P}_V = \mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger \quad (2.15)$$

Après avoir introduit ces notions élémentaires d'algèbre linéaire, nous ferons dans la suite un tour d'horizon des plus importantes techniques HR et présenterons le principe de fonctionnement de l'algorithme MUSIC.

## 2.3 Méthodes à haute résolution, MUSIC

Dans les années 1970 - 80, lorsqu'il était question des *méthodes HR*, cette dénomination était acceptée pour toute méthode facilitant l'obtention d'une résolution angulaire meilleure que celle du traitement classique associée à la formation de voie. Cette appellation s'est révélée rapidement obsolète, avec l'arrivée d'un très grand nombre de techniques permettant d'améliorer la résolution : antenne adaptative (formulation de Widrow ou de Capon) [Capon69], prédiction linéaire (maximum d'entropie ou analyse AR) [Makhoul75], décomposition harmonique [Pisarenko73], goniomètre (MUSIC) [Schmidt79, Bienvenu79], ESPRIT [Paulraj86], Tuft-Kumaresan [Kumaresan83], méthode du propagateur [Munier87], technique de représentation déterministe ou stochastique (TAM) [Kung83], déconvolution (WB2), méthode de Bresler-Macovski, etc. (voir [Adnet90, Marcos98]). Nous décrirons brièvement quelques-unes des méthodes évoquées ci-dessus.

L'*estimateur de Capon* consiste à estimer la puissance du signal par construction d'un filtre adapté à la direction de visée. Ce filtre minimise la contribution des autres sources, tout en gardant un gain unitaire dans la direction de visée. L'estimateur de Capon a été repris par la suite et généralisé par Lagunas [Lagunas84].

*ESPRIT*<sup>2</sup> est une méthode de localisation de sources à bande étroite s'appliquant dans le cas particulier d'un réseau de capteurs, constitué de deux sous-antennes identiques et déduites l'une de l'autre par une translation dont le vecteur caractéristique est supposé connu. Cette méthode [Paulraj86] permet d'éviter la recherche (numériquement lourde) des maxima d'une puissance de sortie, implicitement liée à des algorithmes comme MUSIC.

<sup>2</sup>*Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Technique*

La méthode de *Tuft-Kumaresan* consiste à minimiser l'erreur entre les données et le modèle de prédiction linéaire pour une longueur du filtre de prédiction supérieure au nombre de sources contenues dans le signal. Cette minimisation de l'erreur de prédiction mène à la résolution d'un système d'équation de Yule-Walker-Toeplitz, dont on choisit la solution à norme minimale.

Proposée par Munier [Munier87], la méthode du *propagateur* utilise directement un partitionnement de la matrice de covariance des observations sans passer par ses éléments propres. Elle exploite le fait que les premières  $(N_x - K)$  lignes de la matrice des vecteurs source ( $N_x$  : nombre de capteurs,  $K$  : nombre de sources) sont une combinaison linéaire des  $K$  dernières lignes. En utilisant cette décomposition de la matrice de propagation, il est alors possible d'accéder à la matrice de transformation entre les premières  $(N_x - K)$  lignes et les  $K$  dernières. La construction du propagateur passe ensuite par l'optimisation d'un critère en fonction des paramètres recherchés.

*T A M (Toeplitz Approximation Method)* exploite la structure particulière des vecteurs propres engendrant l'espace signal de la matrice de corrélation. L'intérêt de cette méthode est de remplacer le calcul des racines d'un polynôme par la recherche de valeurs propres d'une matrice de dimension égale au nombre de composantes du signal.

Aujourd'hui l'expression *méthodes HR* fait référence à un ensemble de techniques dont les performances sont asymptotiquement « illimitées ». Ces performances, asymptotiquement illimitées, seront atteintes dans le cas idéal où la modélisation reste indéfiniment valable, ce qui est irréaliste du point de vue pratique. Dans ce mémoire nous allons nous intéresser à cette classe de méthode, et plus précisément aux méthodes de type MUSIC.

MUSIC ou *goniomètre adaptatif* a été le premier traitement digne du label « HR » au sens précisé ci-dessus. Il a été développé en même temps et de manière indépendante en France [Bienvenu79] et aux États-Unis [Schmidt79]. L'algorithme MUSIC reste encore aujourd'hui un traitement de référence et il constitue le point de départ pour toute une famille de technique HR (Root-MUSIC [Barabell83], IES-MUSIC [Stoica95], RAP-MUSIC [Mosher97], etc.). Pour illustrer les principes des techniques HR dans ce mémoire, nous avons choisi l'algorithme MUSIC, car c'est le plus utilisé dans la pratique, parmi toutes les méthodes HR.

### 2.3.1 Modèle du signal

Considérons un champ d'ondes qui arrive sur une antenne de capteurs (voir Fig. 2.1). Nous faisons les hypothèses suivantes :

**H1 :** L'antenne linéaire uniforme (ALU) est composée de  $N_x$  capteurs omnidirectionnels, espacés d'une distance  $\Delta x$ . L'hypothèse sur la géométrie de l'antenne n'est pas fondamentale, mais elle permet de simplifier notablement la modélisation.

**H2 :** Le milieu de propagation entre les sources et l'antenne est homogène et isotrope.

**H3 :** La dimension de l'antenne est largement inférieure à sa distance par rapport à la source et à la longueur d'onde des signaux captés. Ceci nous permet d'approximer le front d'onde arrivant sur l'antenne par un *front d'onde plan*.

**H4** : Les signaux enregistrés par l'antenne proviennent de  $K$  sources, toutes situées dans un plan qui contient aussi l'antenne de capteurs. Si une source n'est pas contenue dans ce plan, nous estimons la DDA de la projection de cette source sur ce plan.

**H5** : Les sources  $\{s_1, s_2, \dots, s_K\}$  sont décorrélées statistiquement et cohérentes spatialement.

**H6** : Les sources sont considérées comme des processus déterministes inconnus, centrés.

**H7** : Le nombre de capteurs est supérieur au nombre de sources ( $N_x > K$ ).

**H8** : Le bruit affectant les capteurs est centré, spatialement et temporellement blanc et non corrélé avec les sources.

La justification de ces hypothèses sera présentée par la suite, lorsqu'elles interviendront dans la description de l'algorithme.

Les signaux reçus sur les  $N_x$  capteurs d'une antenne, constituent les composantes d'un vecteur  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{N_x}$ , superposition de  $K$  signaux émis par les sources non-corrélées et d'un bruit  $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^{N_x}$ . Si nous notons  $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^{N_x}$ , le vecteur qui contient les réponses impulsionnelles du milieu entre la  $k^{\text{ième}}$  source et les capteurs de l'antenne, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_k(u) * s_k(t - u) + \mathbf{b}(t) \quad (2.16)$$

avec  $*$ , le produit de convolution, et  $s_k(t)$ , le signal rayonné par la source  $k$ . Suite à l'hypothèse **H4**, la *direction d'arrivée* (DDA) d'une source est caractérisée par un seul paramètre  $\alpha$  (Fig. 2.1), représentant l'angle d'incidence de la source, dans le plan qui contient l'antenne. Si  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T$ , est le vecteur des DDA de  $K$  sources, la relation (2.16) peut être alors mise sous forme matricielle :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}, u) * \mathbf{s}(t - u) + \mathbf{b}(t) \quad (2.17)$$

avec  $\mathbf{A}(u, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{N_x \times K}$ ,  $\mathbf{A}(u, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{a}_1(u, \alpha_1), \dots, \mathbf{a}_K(u, \alpha_K))$ , une matrice qui décrit la position de toutes les sources ;

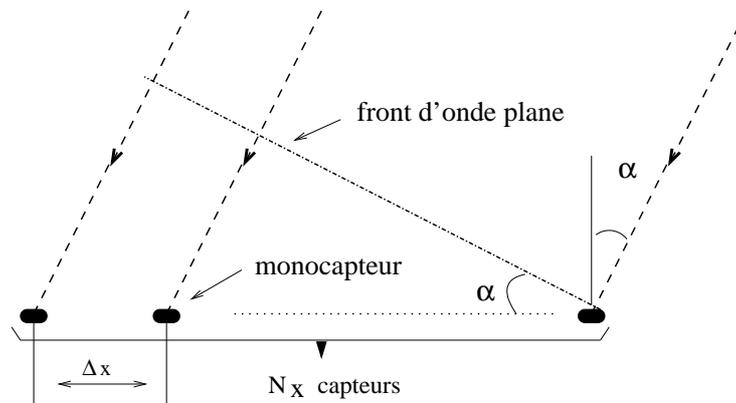


FIG. 2.1 – Arrivée d'une onde plane sur une antenne linéaire uniforme (ALU)

$$\mathbf{s}(t-u) = \begin{pmatrix} s_1(t-u) \\ s_2(t-u) \\ \vdots \\ s_K(t-u) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

est un vecteur dont les composantes sont les divers signaux provenant de  $K$  sources.

Dans le domaine temporel, la relation (2.18) correspond à un problème de mélange convolutif assez compliqué à résoudre. D'où l'idée de passer dans le domaine spectral et d'utiliser les vecteurs obtenus à partir d'une transformation de Fourier des signaux temporels. En fréquence, l'équation (2.17) devient :

$$\mathbf{x}(\nu) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}, \nu)\mathbf{s}(\nu) + \mathbf{b}(\nu) \quad (2.19)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\nu) \in \mathbb{C}^{N_x}, & x_n(\nu) = \mathcal{TF}(x_n(t)) & n = 1 \dots N_x \\ \mathbf{s}(\nu) \in \mathbb{C}^K, & s_k(\nu) = \mathcal{TF}(s_k(t)) & k = 1 \dots K \\ \mathbf{b}(\nu) \in \mathbb{C}^{N_x}, & b_n(\nu) = \mathcal{TF}(b_n(t)) & n = 1 \dots N_x \end{cases} \quad (2.20)$$

et  $\mathbf{A}(\nu, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{C}^{N_x \times K}$ ,  $\mathbf{A}(\nu, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{a}_1(\nu, \alpha_1), \dots, \mathbf{a}_K(\nu, \alpha_K))$ . Dans (2.20) les vecteurs  $\mathbf{a}_k(\nu, \alpha_k) \in \mathbb{C}^{N_x}$  décrivent le comportement des ondes sur l'antenne et sont nommés *vecteurs source*.

Le passage dans le domaine fréquentiel transforme le problème de mélange convolutif en un problème de mélange instantané (2.19), du ressort des méthodes algébriques usuelles.

Compte tenu des hypothèses **H1**, **H2** et **H3**, pour une source donnée  $k$ , le retard entre deux capteurs consécutifs  $\tau_k$  reste constant le long de l'antenne. Si le premier capteur de l'antenne est choisi comme référence, le signal enregistré sur le  $n^{\text{ième}}$  capteur, provenant de la source  $k$ , peut s'exprimer en temps en fonction du signal enregistré sur le premier capteur comme :

$$s_{kn}(t) = s_{k1}(t - (n-1)\tau_k) \quad (2.21)$$

et en fréquentiel, comme :

$$s_{kn}(\nu) = s_{k1}(\nu) \exp(-2\pi i(n-1)\tau_k\nu) \quad (2.22)$$

Si on appelle  $\Delta x$ , la distance entre deux capteurs, et  $v_k$ , la vitesse de propagation des ondes à la fréquence  $\nu$ , le retard inter-capteurs  $\tau_k$  peut alors s'exprimer comme :

$$\tau_k = \frac{\Delta x \sin \alpha_k}{v_k} \quad (2.23)$$

avec  $\alpha_k$ , l'angle d'incidence du front d'onde correspondant à la source  $k$ . Avec ces notations, l'expression du vecteur source  $\mathbf{a}_k(\nu, \alpha_k)$  est donnée par :

$$\mathbf{a}_k(\nu, \alpha_k) = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(-2\pi\nu i \frac{\Delta x \sin \alpha_k}{v_k}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-2\pi\nu i (N_x - 1) \frac{\Delta x \sin \alpha_k}{v_k}\right) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

On appelle  $\theta_k$ , la quantité :

$$2\pi\nu \frac{\Delta x \sin \alpha_k}{v_k}, \quad (2.25)$$

qui représente le déphasage inter-capteurs pour une source ayant une DDA égale à  $\alpha_k$ .

Pour s'affranchir des paramètres physiques  $\Delta x$  et  $v_k$ , nous allons, par la suite, utiliser le déphasage intercapteurs  $\theta_k$ , à la place de  $\alpha_k$ , pour caractériser la direction d'arrivée d'une onde  $k$  sur l'antenne. Afin d'alléger les notations, nous allons supposer que l'on travaille à une fréquence donnée ( $\nu = \nu_0$ ) et nous allons omettre l'argument  $\nu$ . Avec ces notations, la relation (2.19) s'écrit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{s} + \mathbf{b} \quad (2.26)$$

avec  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{a}_1(\theta_1), \dots, \mathbf{a}_K(\theta_K))$ , la matrice des vecteurs source :

$$\mathbf{a}_k(\theta_k) = (1, e^{-i\theta_k}, \dots, e^{-i(N_x-1)\theta_k})^T \quad (2.27)$$

et  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_K)^T$ , le vecteur des amplitudes complexes des sources. Dans ce cas, le but des algorithmes de traitement d'antenne est d'estimer le vecteur de paramètre  $\boldsymbol{\alpha}$  (ou  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)^T$ ) à partir des observations  $\{\mathbf{x}_i\}$  sur l'antenne.

### 2.3.2 La matrice interspectrale

Étant données les hypothèses **H6** et **H8**, les observations  $\{\mathbf{x}_l\}$ , ( $l = 1 \dots L$ ,  $L$  le nombre de réalisations) sur l'antenne peuvent être vues comme les réalisations d'un processus aléatoire vectoriel  $\mathbf{x}$ , dépendant des paramètres déterministes  $\boldsymbol{\alpha}$ . Pour estimer les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ , nous faisons appel aux statistiques d'ordre deux des signaux reçus sur l'antenne, en l'occurrence la matrice de covariance des vecteurs aléatoires  $\mathbf{x}$ .

La *matrice interspectrale* [Mermoz76] définit les relations statistiques à l'ordre deux entre les signaux enregistrés sur tous les capteurs, deux à deux. Si nous considérons le vecteur des observations  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_x}$ , la matrice interspectrale  $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$  est définie par :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{E} [\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger] \quad (2.28)$$

Par construction,  $\boldsymbol{\Gamma}$  présente une symétrie hermitienne,  $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^\dagger$ . Compte tenu des hypothèses **H5** et **H8**, et de la relation (2.26), l'expression matricielle de  $\boldsymbol{\Gamma}$  est donnée par :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}\mathbf{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B} \quad (2.29)$$

avec  $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{K \times K}$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{E}[\mathbf{ss}^\dagger]$ , la matrice de covariance des sources et  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{E}[\mathbf{bb}^\dagger]$  la matrice de covariance du bruit. Si les hypothèses de décorrélation **H5**, **H8** sont respectées, les deux matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{B}$  ont des structures diagonales :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_K \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

avec  $\sigma_1, \dots, \sigma_K$ , les puissances des sources et  $\mathbf{B} = \sigma_b \mathbf{I}_{N_x}$ , où  $\sigma_b$  désigne la puissance du bruit sur un capteur. La relation (2.29) peut être réécrite sous forme d'une somme de  $K$  termes source de rang 1 plus un terme dû au bruit :

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_{k=1}^K \sigma_k \mathbf{a}_k(\theta_k) \mathbf{a}_k^\dagger(\theta_k) + \mathbf{B} \quad (2.31)$$

Les signaux émis par la source sont contenus dans un sous-espace vectoriel de dimension  $K$  de l'espace vectoriel de dimension  $N_x$  engendré par les observations.

### Estimation de la matrice interspectrale

En pratique nous avons accès à une estimation de la matrice interspectrale  $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ . En fonction de la nature du signal enregistré, et du domaine d'application, l'opérateur d'espérance mathématique  $\mathbf{E}[\cdot]$  peut être implémenté de différentes façons. Dans le cas général, si on dispose de  $L$  observations  $\{\mathbf{x}_l\}$  de  $\mathbf{x}$  :

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}_l \mathbf{x}_l^\dagger \quad (2.32)$$

Les performances d'un tel estimateur dépendent du nombre d'observations  $L$  et de la corrélation entre les réalisations  $\{\mathbf{x}_l\}$ .

Il est souvent difficile en pratique d'avoir accès à plusieurs réalisations indépendantes du même processus aléatoire. Dans ce cas, nous pouvons améliorer le conditionnement de la matrice interspectrale à l'aide de techniques de moyennage adaptées à la nature spécifique des signaux enregistrés [Marcos98].

Si nous disposons d'un enregistrement de longue durée d'un signal stationnaire, comme c'est souvent le cas en électromagnétisme, les propriétés d'ergodicité peuvent être utilisées. La moyenne des réalisations peut être remplacée par une moyenne sur plusieurs fenêtres temporelles du signal, vues comme des réalisations distinctes du processus aléatoire. En fonction du degré de chevauchement des fenêtres, ces « réalisations » sont plus ou moins indépendantes.

En sismique, la nature impulsionnelle des sources rend les signaux enregistrés fortement non-stationnaires. Pour des signaux de ce type, l'emploi d'une moyenne ergodique n'est pas valable. Dans ce cas, des techniques de *lissage*, faisant appel à la diversité fréquentielle et

à la polarisation des signaux, peuvent être utilisées pour estimer la matrice interspectrale. Pour des signaux électromagnétiques, des méthodes de lissage sont présentées dans [Evans81, Godara90]. En géophysique, l'amélioration du conditionnement de la matrice interspectrale par lissage spatial et fréquentiel a été introduite dans [Mars87]. Le *lissage spatial* consiste à appliquer un filtre moyennneur pour lisser la diagonale principale et les sous-diagonales de la matrice interspectrale initiale. Ceci revient à effectuer des moyennes sur des sous-antennes de taille égale à la longueur du filtre de lissage. Une seconde technique [Krolik90] concerne le découpage du domaine spatial et le traitement indépendant de chacun de ces domaines. L'inconvénient de cette méthode est la réduction de l'ouverture effective de l'antenne et implicitement une baisse de performances des algorithmes utilisés.

Une autre méthode, pour résoudre le problème de conditionnement de la matrice interspectrale, est le *lissage fréquentiel*. Le caractère large-bande des signaux est alors exploité pour effectuer une moyenne de la matrice interspectrale sur plusieurs fréquences voisines. Une autre technique [Wang85] consiste à utiliser la connaissance approximative des directions d'arrivées et à appliquer un opérateur permettant d'obtenir une moyenne en fréquence cohérente. La difficulté majeure de ces méthodes de lissage fréquentiel réside dans la dépendance du déphasage inter-capteurs de la fréquence :

$$\theta_j = 2\pi\nu_j\tau \quad (2.33)$$

où  $\theta_j$  représente le déphasage inter-capteurs à la fréquence  $\nu_j$  en fonction de retard inter-capteurs  $\tau$ , pour une source donnée. Une moyenne en fréquence entraîne une perte d'information sur la phase, information essentielle pour la mesure de la direction d'incidence. Ainsi, les techniques d'estimation par lissage fréquentiel conduisent à l'obtention d'une base vectorielle biaisée de l'espace signal, ce qui revient à une destruction et à un mélange des ondes présentes. Cependant, la direction à incidence nulle, c'est à dire normale à l'antenne, ne présente pas cet inconvénient. Des techniques de traitement d'antenne qui exploitent cette propriété, ont été développées [Guillet90].

### 2.3.3 MUSIC (MULTiple Signal Classification)

L'algorithme MUSIC est basé sur la décomposition en deux sous-espaces signal et bruit de la matrice interspectrale. Nous avons vu (2.31) que les observations  $\{\mathbf{x}_l\}$ , sont contenues dans un espace vectoriel de dimension  $N_x$  ( $N_x$  : le nombre de capteurs). Dans cet espace vectoriel, les signaux sources forment un sous-espace de dimension  $K$  ( $K$  : le nombre de sources). La contribution de chaque source dans la matrice interspectrale est donnée par un terme de rang 1, comme nous pouvons le constater dans la relation (2.31). Si nous parvenons à trouver une décomposition en  $K$  termes de rang 1 de la matrice interspectrale (comme montré dans la figure 2.2) et si cette décomposition est unique, le problème d'estimation des DDAs est résolu.

Pour une matrice de rang  $K$ , sa décomposition en termes de rang 1 n'est pas unique. Pour démontrer ceci, il suffit de prouver que chaque terme de rang 1 de la décomposition de la figure (2.2) peut s'écrire de plusieurs manières différentes.

$$\boxed{\hat{\Gamma}} = \left| \begin{array}{c} \lambda_1 \overline{\mathbf{u}_1^\dagger} \\ \mathbf{u}_1 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{c} \lambda_K \overline{\mathbf{u}_K^\dagger} \\ \mathbf{u}_K \end{array} \right| + \boxed{\mathbf{B}}$$

FIG. 2.2 – Décomposition en  $K$  termes de rang 1 de  $\hat{\Gamma}$ 

Si  $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$  est une matrice unitaire,  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^\dagger$ , alors :

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger = \mathbf{u}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^\dagger = (\mathbf{u}\mathbf{M})(\mathbf{M}^\dagger\mathbf{u}^\dagger) = (\mathbf{u}\mathbf{M})(\mathbf{u}\mathbf{M})^\dagger = \mathbf{v}\mathbf{v}^\dagger \quad (2.34)$$

avec  $\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N_x}$ . Dans (2.34), une infinité de décompositions différentes de  $\hat{\Gamma}$  peuvent être envisagées selon les choix des matrices  $\mathbf{M}$ , pour chacun de termes de rang 1. Afin d'assurer l'unicité, une contrainte supplémentaire doit être ajoutée : l'orthogonalité des vecteurs  $\mathbf{u}_k$  de la décomposition. Cela nous amène à la décomposition en valeurs propres (voir 2.2.5) de la matrice interspectrale. Nous n'insisterons pas sur les algorithmes de décomposition en valeurs propres d'une matrice complexe puisqu'il existe une vaste littérature qui traite ce sujet (voir par exemple [Golub91]).

Si  $\hat{\Gamma}$  est la matrice interspectrale estimée, sa décomposition en valeurs propres s'écrit sous la forme :

$$\hat{\Gamma} = \sum_{k=1}^{N_x} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\dagger \quad (2.35)$$

dans laquelle les vecteurs propres  $\mathbf{u}_k$  forment une base normée dans l'espace vectoriel engendré par les observations  $\{\mathbf{x}_l\}$ , et les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres associées rangées par ordre décroissant. Puisque  $\hat{\Gamma}$  est une matrice complexe hermitienne, ses valeurs propres sont réelles et ses vecteurs propres orthogonaux. D'une façon générale, les vecteurs  $\mathbf{u}_k$  ainsi trouvés (2.35), ne correspondent pas aux vecteurs sources  $\mathbf{a}_k$  (2.31) sauf cas particulier [Thirion95]. Cependant, compte-tenu du fait que le signal est spatialement cohérent et que le bruit ne l'est pas, nous pouvons considérer que les  $K$  premiers vecteurs propres, de covariance maximale, définissent une base orthonormée dans le sous-espace signal, tandis que les autres  $N_x - K$  correspondent au sous-espace bruit. Il est alors possible de décomposer la matrice interspectrale en deux sous-espaces orthogonaux, *signal* et *bruit*, engendrés par les vecteurs propres correspondant aux  $K$  premières valeurs propres  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$  pour le sous-espace signal et aux  $N_x - K$  dernières valeurs propres pour le sous-espace bruit. Le choix du nombre de sources  $K$  résulte de l'étude de la courbe de décroissance des valeurs propres  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_x}\}$ . Une décroissance rapide marque la séparation des sous-espaces signal et bruit. Des critères statistiques tels que AIC <sup>3</sup> [Akaike74] ou MDL <sup>4</sup> [Rissanen78] peuvent

<sup>3</sup>Akaike Information Criterion

<sup>4</sup>Minimum Description Length

aussi être utilisés pour estimer  $K$ , mais ils s'avèrent peu fiables en présence d'un niveau important de bruit. Nous considérons par la suite le nombre de sources connu et nous invitons le lecteur intéressé par cet aspect à consulter la référence [Marcos98] pour plus d'informations.

Définissons deux matrices  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{N_x \times K}$  et  $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{N_x \times (N_x - K)}$  telles que :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K) \\ \mathbf{G} &= (\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_{N_x})\end{aligned}\quad (2.36)$$

$\mathbf{P}$  contient les vecteurs propres correspondant au sous-espace signal et  $\mathbf{G}$ , ceux correspondant au sous-espace bruit. Si nous multiplions l'équation (2.29) à droite par  $\mathbf{G}$ , et sachant que  $\mathbf{B} = \sigma_b \mathbf{I}_{N_x}$ , on obtient :

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{G} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S} \mathbf{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{G} + \sigma_b \mathbf{G} \quad (2.37)$$

La matrice  $\mathbf{\Gamma}$  peut s'exprimer en fonction de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{G}$  comme :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{P} \mathbf{D}_s \mathbf{P}^\dagger + \sigma_b \mathbf{G} \mathbf{G}^\dagger \quad (2.38)$$

avec  $\mathbf{D}_s$  la matrice des valeurs propres correspondant aux vecteurs de  $\mathbf{P}$ . Si nous introduisons (2.38) dans (2.37) et compte tenu de l'orthogonalité des vecteurs de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{G}$  et du fait que  $\mathbf{G}^\dagger \mathbf{G} = \mathbf{I}_{N_x - K}$ , nous obtenons la relation suivante :

$$\sigma_b \mathbf{G} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S} \mathbf{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{G} + \sigma_b \mathbf{G} \quad (2.39)$$

ce qui implique

$$\mathbf{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{G} = \mathbf{0}. \quad (2.40)$$

Dans (2.40)  $\mathbf{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{G}$  est une matrice de zéros de taille  $K \times (N_x - K)$ . Il convient, ensuite, de multiplier (2.40) à droite par  $(\mathbf{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{G})^\dagger$  et de l'exprimer sous la forme suivante en fonction des colonnes de  $\mathbf{A}$ , vecteurs source  $\mathbf{a}_k$  :

$$\mathbf{a}_k^\dagger(\theta_k) \mathbf{G} \mathbf{G}^\dagger \mathbf{a}_k(\theta_k) = 0 \quad (2.41)$$

ceci pour toute valeur de  $\theta_k$  qui correspond à la direction d'arrivée d'une onde. Nous appelons la matrice  $\mathbf{\Pi}_B = \mathbf{G} \mathbf{G}^\dagger$  le *projecteur sur le sous-espace bruit*.

L'idée de base de l'algorithme MUSIC est d'exploiter la propriété (2.41) de la matrice  $\mathbf{G}$ . Dans la pratique, nous ne disposons que d'une estimation de  $\mathbf{G}$ , notée  $\hat{\mathbf{G}}$ , issue de la décomposition de la matrice spectrale estimée  $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ . Soit  $\hat{\mathbf{\Pi}}_B = \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^\dagger$  et

$$\mathbf{s}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N_x}} (1, e^{-i\theta}, \dots, e^{-i(N_x-1)\theta})^T \quad (2.42)$$

un vecteur unitaire qui modélise l'arrivée d'une onde de DDA  $\theta$  sur l'antenne. Le vecteur  $\mathbf{s}(\theta)$  est souvent appelé *vecteur directionnel*<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> *steering vector* en anglais

Les estimations des directions d'arrivées des sources présentes dans le signal sont données par  $K$  valeurs de  $\theta$  qui minimisent la fonctionnelle suivante :

$$f(\theta) = \mathbf{s}^\dagger(\theta) \widehat{\mathbf{\Pi}}_B \mathbf{s}(\theta) \quad (2.43)$$

Souvent en pratique, il est préférable de maximiser l'inverse de  $f(\theta)$ . Nous retrouvons ainsi la forme classique de la fonctionnelle MUSIC :

$$F(\theta) = \frac{1}{\mathbf{s}^\dagger(\theta) \widehat{\mathbf{\Pi}}_B \mathbf{s}(\theta)} \quad (2.44)$$

Les  $K$  directions d'arrivées estimées sont alors données par :

$$\theta_k = \arg \left\{ \max_{\theta} (F(\theta)) \right\} \quad (2.45)$$

La maximisation de la fonctionnelle MUSIC dans la relation (2.44) est réalisée habituellement par une recherche selon  $\theta$  dans un intervalle  $[\theta_{MIN}, \dots, \theta_{MAX}]$ , avec un pas d'itération choisi [Marcos98].

Il existe plusieurs variantes de l'algorithme MUSIC décrit ci-dessus (voir [Sharman86, Ofranidis86, Kumaresan83]), ainsi que quelques implémentations optimisées en terme de coût de calcul ([Schreiber86, Tufts86]).

Les algorithmes de type MUSIC présentent un pouvoir de résolution nettement supérieur à celui des algorithmes classiques de type formation de voies. La figure 2.3 présente une comparaison entre les courbes en fonction de  $\theta$  issues des deux algorithmes (MUSIC et formation de voies), dans le cas d'un signal composé de cinq sources décorréélées ayant des DDA's et des puissances différentes. Pour MUSIC, la largeur des lobes de détection est

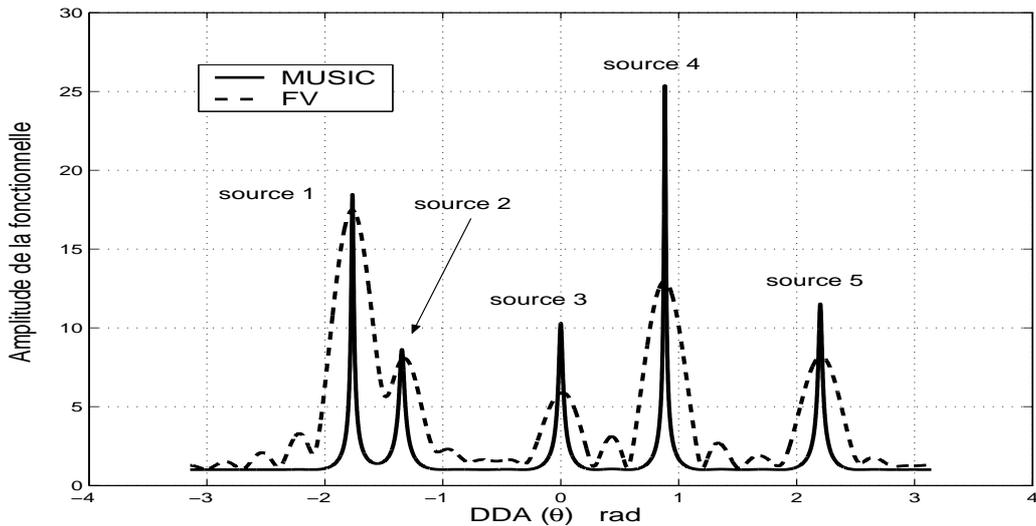


FIG. 2.3 – Comparaison des pouvoirs de résolution des algorithmes MUSIC et formation de voies (FV) dans le cas de cinq sources décorréélées.

beaucoup plus faible, ce qui traduit un meilleur pouvoir séparateur.

Il existe dans la littérature un nombre important d'ouvrages qui traitent des performances des algorithmes de type MUSIC. Des analyses partielles, sur la résolubilité de l'algorithme ou sur ses performances dans des cas particuliers, peuvent être trouvées dans [Sharman84, Jeffries85, Kaveh86]. Stoica et Nehorai [Stoica89, Stoica90], ont déterminé la borne de Cramer-Rao (BCR) pour la matrice de covariance de tout estimateur non-biaisé de  $\theta$ , et ont étudié la relation entre l'estimateur MUSIC et celui du maximum de vraisemblance (MV). Ils ont démontré également que, dans le cas de signaux non-corrélés, pour un nombre important de capteurs et de réalisations, la variance de l'estimateur MUSIC atteint la borne de Cramer-Rao mais que, pour des signaux corrélés, l'estimateur est statistiquement inefficace. Ils ont montré aussi que, pour un grand nombre d'observations, si les sources sont décorréelées, l'estimateur MUSIC est une réalisation de MV.

Dans les chapitres qui suivent, nous étudierons comment étendre d'une manière judicieuse le principe de l'algorithme MUSIC aux signaux polarisés. Avant de passer à la description proprement-dite des algorithmes proposés, il est nécessaire de passer en revue les modèles et les méthodes existants dans la littérature pour le traitement d'antenne vectorielle.

## 2.4 Méthodes existantes de traitement d'antenne vectorielle

L'utilisation croissante, dans la dernière décennie, des techniques d'acquisition multicomposantes (voir chapitre 1), a fait apparaître le besoin d'algorithmes capables d'extraire et d'utiliser l'information supplémentaire fournie par les signaux vectoriels. Des algorithmes de traitement d'antenne polarisée ont été développés, la plupart d'entre eux dans le cadre de l'électromagnétisme. Un intéressant tour d'horizon des applications de la polarisation en traitement d'antenne a été réalisé par Wong dans [Wong97b].

Une des premières applications de la polarisation en traitement de signal est mentionnée dans le domaine de la géophysique [Means72]. En ce qui concerne les méthodes HR, les premières extensions aux signaux vectoriels ont été faites par Schmidt [Schmidt81] et Ferrara [Ferrara83] pour l'algorithme MUSIC. Li et Compton ont introduit ESPRIT pour les antennes multicomposantes [Li91a, Li91b, Li92a, Li92b, Li93a, Li93b]. Des algorithmes pour estimer les DDA des sources polarisées en électromagnétisme ont été proposés aussi dans [Hua93, Swindlehurst93, Li94, Li96].

Tous ces travaux n'utilisent que deux ou trois composantes sur les six disponibles dans le cas d'un signal électromagnétique. Les premiers algorithmes utilisant les six composantes conjointement ont été développés séparément par Nehorai et Paldi [Nehorai91, Nehorai94] et Li [Li93a]. Nehorai et Paldi [Nehorai91] ont suggéré aussi d'estimer la DDA d'une source à partir d'un seul capteur multicomposante. Leur méthode est inspirée du théorème de Poynting et consiste à former le produit vectoriel du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  et du

vecteur complexe conjugué du champ magnétique  $\vec{B}^*$ ,

$$\mathbf{n} = \vec{E} \wedge \vec{B}^* \quad (2.46)$$

et de le moyenner en temps. Le vecteur résultant est normalisé et représente une estimation du vecteur indiquant la direction de la source. L'utilisation d'un seul capteur (avec des composantes co-localisées) permet de s'affranchir de l'hypothèse d'onde plane, irréaliste pour des distances petites entre la source et l'antenne.

Hochwald [Hochwald94] a employé les capteurs multicomposantes pour la modélisation polarimétrique et Nehorai et Tichavsky [Nehorai99] pour le suivi des sources. Des algorithmes de traitement d'antenne vectorielle en RADAR ont été proposés dans [Sato95, Wang99]. Les problèmes d'identifiabilité et d'unicité pour les antennes polarisées sont analysés dans [Hatke93, Ho95, Hochwald96, Tan96]. L'estimateur produit vectoriel [Nehorai91] a été adapté à ESPRIT par Wong et Zoltowski [Wong96b, Wong97a]. Ils ont introduit aussi le premier algorithme permettant d'estimer les directions d'arrivées des sources multiples, basé sur la décomposition en sous-espaces propres des signaux enregistrés par un seul capteur vectoriel [Wong97b]. Les mêmes auteurs ont développé des algorithmes de type MUSIC [Wong00b, Wong96a, Wong99] ou ESPRIT [Wong00a, Wong01, Zoltowski00] pour diverses configurations et applications des antennes polarisées.

Récemment, Rahamin [Rahamim04] a proposé d'utiliser l'information de polarisation pour décorréler les sources dans la matrice interspectrale par *lissage sur les composantes* (PSA<sup>6</sup>). L'avantage de cette technique par rapport aux techniques de lissage spatial est qu'elle peut être appliquée à toutes les configurations géométriques d'antenne sans diminuer son ouverture effective. L'inconvénient est la perte d'information sur les paramètres de polarisation des ondes.

Plusieurs auteurs se sont intéressés aux performances des antennes vectorielles. Weiss et Friedlander [Weiss91] ont été les premiers à quantifier l'avantage d'utiliser la diversité de polarisation. Ils ont calculé une forme analytique approchée de la borne de Cramer-Rao pour l'estimation des DDAs dans le cas vectoriel, forme qui a été ensuite validée par simulations. Une expression compacte et générale de la BCR pour le cas *sources multiples - capteurs vectoriels multiples* a été dérivée par Nehorai et Paldi [Nehorai94]. Ils ont introduit deux autres mesures de qualité : la *moyenne quadratique de l'erreur angulaire*<sup>7</sup> et la *covariance du vecteur des erreurs angulaires*<sup>8</sup> ainsi que leurs BCRs. La conclusion générale de ces travaux est que l'utilisation des antennes vectorielles améliore les performances des algorithmes d'estimation de DDAs. Elle augmente le pouvoir de résolution et diminue la variance de l'estimateur.

En géophysique, des applications des techniques de traitement d'antenne vectorielle peuvent être trouvées dans [Picheral03].

Néanmoins, les méthodes de traitement d'antenne multicomposantes existant dans la littérature sont fondées sur des modèles de signaux de type *long-vecteur*. Nous allons montrer par la suite que cette modélisation, qui consiste à concaténer les composantes de

<sup>6</sup>**Polarization Smoothing Algorithm**

<sup>7</sup>en anglais : **Mean-Square Angular Error** (MSAE)

<sup>8</sup>en anglais : **Covariance of Vector Angular Error** (CVAE)

l'antenne dans un vecteur de grande taille, n'exploite pas au mieux l'information de polarisation. Avant de présenter le principe des méthodes *long-vecteur*, nous explicitons les paramètres que nous tenterons d'estimer pour caractériser la polarisation d'une onde enregistrée.

### 2.4.1 Paramétrisation d'un signal polarisé

Comme nous l'avons déjà vu dans le premier chapitre, la polarisation d'une onde est directement liée à la nature de la source et au milieu traversé. Pour caractériser complètement la polarisation à partir des signaux enregistrés, il est nécessaire de connaître la direction de propagation de l'onde et la position du plan de polarisation par rapport à celle-ci. Une modélisation plus exacte dépend de la nature particulière des signaux enregistrés.

Afin de s'affranchir des connaissances a priori sur les sources et donner ainsi un caractère général aux algorithmes développés, nous allons utiliser une paramétrisation valable pour tout champ d'onde vectoriel. L'estimation de ces paramètres nous fournira une image partielle (mais suffisante dans certains cas) de la polarisation des ondes enregistrées. Une mise en correspondance des paramètres estimés avec des informations concernant la nature et la position des sources observées pourra nous donner une description complète de la polarisation.

La paramétrisation proposée est basée sur l'hypothèse que, pour les signaux à bande étroite, entre deux composantes différentes du même capteur, les signaux enregistrés diffèrent en termes de déphasage et de rapport d'amplitude. Cette modélisation est valable pour tout type de polarisation et pour un nombre quelconque  $N_c$  de composantes.

Soit une onde polarisée bande étroite incidente sur un capteur à  $N_c$  composantes et  $s$ , le signal (en fréquence), enregistré sur la première composante (choisie par convention), le signal sur la  $c^{\text{ième}}$  composante est une copie de  $s$  amplifiée d'un facteur réel, positif  $\rho_c$  et déphasée d'un angle  $\varphi_c$ . Nous pouvons alors décrire les signaux enregistrés sur les composantes, par un vecteur à  $N_c$  éléments, comme :

$$(s, s\rho_1 \exp(i\varphi_1), \dots, s\rho_{N_c-1} \exp(i\varphi_{N_c-1})) \quad (2.47)$$

Si nous normalisons (2.47) par rapport à la première composante, nous obtenons le *vecteur de polarisation*  $\mathbf{p}$  qui décrit le comportement de l'onde sur les composantes d'un capteur vectoriel :

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = (1, \rho_1 \exp(i\varphi_1), \dots, \rho_{N_c-1} \exp(i\varphi_{N_c-1}))^T \quad (2.48)$$

où  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_{N_c-1})^T$  et  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N_c-1})^T$  sont les vecteurs dont les paramètres sont à estimer. Pour caractériser la polarisation d'une source sur un capteur à  $N_c$  composantes, nous devons donc estimer  $2(N_c - 1)$  paramètres.

Considérons maintenant une antenne linéaire, uniforme, composée de  $N_x$  capteurs vectoriels à  $N_c$  composantes. Une source polarisée arrivant sur l'antenne, sera décrite par un ensemble de  $N_c$  vecteurs  $\mathbf{a}^c(\rho_c, \varphi_c, \theta)$ ,  $c = 1 \dots N_c - 1$ , chacun caractérisant la propagation de l'onde sur une composante de l'antenne. L'expression du vecteur  $\mathbf{a}^1(\theta)$ , qui donne le

comportement de l'onde sur la composante de référence, est la même que celle donnée par la relation (2.27) pour le cas scalaire. Les autres vecteurs s'écrivent en fonction de  $\mathbf{a}^1(\theta)$  comme :

$$\mathbf{a}^c(\theta, \rho_c, \varphi_c) = \mathbf{a}^1(\theta) \rho_c \exp(i\varphi_c) \quad (2.49)$$

où  $\theta$  est la DDA de la source (le déphasage inter-capteurs) et  $\rho_c, \varphi_c$  représentent le rapport d'amplitude, respectivement le déphasage entre la  $c^{\text{ième}}$  et la première composante.

En conclusion, pour caractériser une source polarisée sur une ALU de  $N_x$  capteurs à  $N_c$  composantes, nous devons estimer  $2N_c - 1$  paramètres. Les paramètres de polarisation estimés  $(\rho, \varphi)$  permettent de décrire l'ellipse de polarisation d'une onde (l'excentricité et l'inclinaison de son grand axe) dans le plan de polarisation. Prenons le cas d'un capteur à deux composantes orthogonales, ( $N_c = 2$ ) qui forment un repère orthogonal  $(OXY)$  dans le plan de polarisation (voir Fig. 2.4). Dans le cas général, les signaux enregistrés sur les deux composantes, dessinent une ellipse dans  $(OXY)$ , inscrite dans un rectangle de côtés  $2a, 2b$ .

Soit  $2a'$  et  $2b'$  le grand axe, respectivement le petit axe de l'ellipse. Les paramètres caractérisant l'ellipse de polarisation dans le plan  $(OXY)$  sont l'inclinaison du grand axe  $\Psi$  ( $0 < \Psi < \pi$ ) (Fig. 2.4) et l'ellipticité, définie comme le rapport entre les deux axes,  $e = \frac{b'}{a'}$ . Soit  $\rho$  et  $\varphi$ , le rapport d'amplitude et le déphasage entre les signaux enregistrés

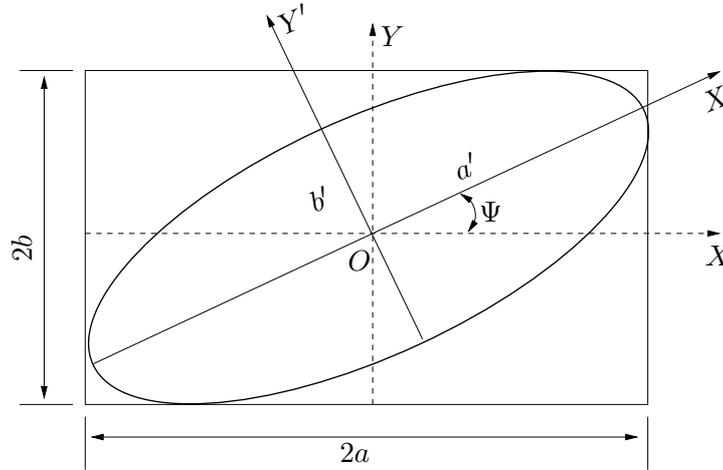


FIG. 2.4 – Paramètres de l'ellipse de polarisation

sur les deux composantes du capteur. On peut montrer (voir [Born80]) que les paramètres estimés  $\rho$  et  $\varphi$  sont liés aux paramètres de l'ellipse par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \tan \frac{b}{a} = \rho \\ \tan 2\Psi = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \cos \varphi \\ \frac{e}{1+e^2} = \frac{\rho}{1+\rho^2} \sin \varphi \end{cases} \quad (2.50)$$

Des relations analogues peuvent être obtenues aussi pour le cas d'un capteur à trois composantes. L'estimation des paramètres  $\boldsymbol{\rho}$  et  $\boldsymbol{\varphi}$  permet de calculer l'orientation et la forme de l'ellipse dans le plan de polarisation. La connaissance de la position du plan par rapport à la direction de propagation de l'onde permet de donner une description quasi-complète de la polarisation d'une telle onde.

### 2.4.2 Modélisation « long-vecteur » d'une antenne multicomposante

Comme nous l'avons déjà dit dans la première partie de cette section, la majorité des méthodes existantes de traitement d'antenne vectorielle reposent sur une modélisation de type *long-vecteur* des signaux enregistrés. Considérons une antenne linéaire composée de  $N_x$  capteurs à  $N_c$  composantes. L'observation sur une composante  $c$  de l'antenne, s'écrit dans le domaine fréquentiel sous la forme d'un vecteur  $\mathbf{x}_c \in \mathbb{C}^{N_x}$  (voir section 2.3.1). Soit  $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{N_c}$ , les vecteurs correspondants aux observations sur les  $N_c$  composantes de l'antenne. L'approche *long-vecteur* consiste en une concaténation des composantes dans un vecteur de grande taille,  $\mathbf{x}_{long} \in \mathbb{C}^{N_x N_c}$  telle que :

$$\mathbf{x}_{long} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N_c} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Les algorithmes classiques de traitement d'antenne, développés dans le cas scalaire (ex : MUSIC), peuvent s'appliquer au vecteur  $\mathbf{x}_{long}$ , sans modification. Une antenne vectorielle à  $N_c$  composantes, est vue dans ce cas comme une antenne scalaire ayant une ouverture  $N_c$  fois plus importante par rapport à son ouverture réelle. L'expression de la matrice interspectrale pour le nouveau vecteur  $\mathbf{x}_{long}$  est :

$$\boldsymbol{\Gamma}_{long} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{11} & \dots & \boldsymbol{\Gamma}_{1N_c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{N_c 1} & \dots & \boldsymbol{\Gamma}_{N_c N_c} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

avec  $\boldsymbol{\Gamma}_{kl}$  la matrice de covariance des vecteurs  $\mathbf{x}_l$  et  $\mathbf{x}_k$ .  $\boldsymbol{\Gamma}_{long}$  contient les relations statistiques à l'ordre deux, entre toutes les composantes de tous les capteurs. L'augmentation artificielle, par concaténation, de la taille de l'antenne, permet d'améliorer les performances des algorithmes utilisés.

L'avantage d'une telle modélisation est sa simplicité, et son adaptabilité aux algorithmes développés dans le cas scalaire.

Le désavantage majeur du modèle *long-vecteur* est la destruction de l'information sur la structure locale (ponctuelle) du champ d'ondes. Ce modèle ne prend en compte que la cohérence globale des signaux enregistrés sur l'antenne, ce qui équivaut à une antenne scalaire de taille  $N_c$  fois plus importante. En réalité, les signaux polarisés enregistrés sur

une antenne vectorielle présentent trois modes (directions de cohérence), une cohérence *temporelle*, une cohérence *spatiale* (suivant la dimension capteurs, de taille  $N_x$ ) et une cohérence *de polarisation* (suivant la dimension composante, de taille  $N_c$ ). Une manière plus naturelle d'organiser les données serait alors d'utiliser les tableaux tridimensionnels (voir chapitre 3), qui permettent de garder la cohérence trimodale des données. Il a été montré [Le Bihan01a, Le Bihan04a] que, pour utiliser toute l'information de cohérence disponible nous avons besoin des trois *matrices dépliantes* (voir chapitre suivant). Le modèle long-vecteur présenté ci-dessus correspond à une seule de ces matrices, donc l'information contenue dans les signaux enregistrés n'est pas complètement exploitée.

Un autre problème, dans la relation (2.52), est l'hétérogénéité du modèle. En effet, nous pouvons remarquer que la matrice  $\mathbf{\Gamma}_{long}$  est formée de plusieurs matrices distinctes mises ensembles, ayant des comportements indépendants vis-à-vis des techniques de traitement employées. Par exemple, le lissage spatial (voir section 2.3.2), appliqué à la matrice  $\mathbf{\Gamma}_{long}$ , en vue de décorrélérer les sources présentes dans les enregistrements, se ramène au lissage sur les diagonales et les sous-diagonales de chacune des sous-matrices  $\mathbf{\Gamma}_{kl}$ , considérées séparément. Cette hétérogénéité rend la manipulation du modèle long-vecteur assez difficile et peu efficace.

Le but du travail de recherche présenté dans cette thèse est de proposer, pour l'analyse des ondes polarisées, des modèles et des techniques capables d'exploiter d'une manière plus performante et compacte l'information multicomposante.

## Conclusion

Ce chapitre, composé de deux sections, a permis d'illustrer le principe des méthodes à haute résolution (plus particulièrement MUSIC) en traitement d'antenne scalaire, et de faire un tour d'horizon des méthodes de traitement d'antenne vectorielle existant dans la littérature.

Dans une première partie, nous avons présenté un court historique du traitement d'antenne dans lequel nous avons montré les principales étapes qui ont conduit au développement des algorithmes à haute résolution (HR). Nous avons ensuite présenté brièvement la famille des méthodes HR. Le fonctionnement de l'algorithme MUSIC classique (scalaire) a été détaillé afin d'illustrer les idées de base des algorithmes à haute résolution. Dans ce cadre, nous avons introduit la matrice interspectrale des observations ainsi que sa décomposition en valeurs propres.

Une étude des travaux de recherche déjà effectués sur les antennes vectorielles, nous a permis de constater, dans la seconde section, que ces méthodes n'utilisent pas d'une manière optimale l'information de polarisation des signaux enregistrés sur une antenne vectorielle. Elle sont fondées, en quasi-totalité, sur des modélisations de type *long-vecteur* dont le principe consiste à concaténer les  $N_c$  composantes dans un vecteur de grande taille. Néanmoins, les algorithmes de traitement d'antenne multicomposantes existants se limitent souvent aux signaux électromagnétiques, et sont difficilement adaptables à d'autres types d'acquisition, par exemple en sismique.

Dans le chapitre suivant nous étudierons des modèles et des algorithmes pour le traitement des signaux vectoriels, ayant une applicabilité plus large et exploitant l'information de polarisation d'une manière plus efficace.



# Chapitre 3

## Traitement d'antenne vectorielle : une approche tensorielle

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Notions d'algèbre multilinéaire</b>	<b>63</b>
3.1.1	Tableaux multidimensionnels, tenseurs et espace de Hilbert	63
3.1.2	Opérations élémentaires sur les tenseurs	64
3.1.3	Représentations matricielles d'un tenseur	65
3.1.4	Rang des tenseurs	67
3.1.5	Produit scalaire et orthogonalité des tenseurs	68
3.1.6	Décompositions tensorielles orthogonales	69
3.1.6.1	Décomposition en valeurs propres d'un tenseur symétrique	69
3.1.6.2	Décomposition en valeurs singulières d'un tenseur	70
3.1.6.3	Approximation de rang $(R_1, \dots, R_N)$ d'un tenseur et projecteurs orthogonaux multilinéaires	71
<b>3.2</b>	<b>Traitement multilinéaire d'antenne vectorielle</b>	<b>73</b>
3.2.1	Modèle tensoriel de la polarisation	73
3.2.2	Tenseur interspectral	75
3.2.3	Algorithmes tensoriels en traitement d'antenne vectorielle à haute résolution	76
3.2.3.1	Estimateur « Vector-MUSIC » (V-MUSIC)	76
3.2.3.2	Estimateur « Higher-Order MUSIC » (HO-MUSIC)	77
3.2.4	Simulations, résultats et discussion	78
3.2.4.1	Applications du Vector-MUSIC en sismique	78
3.2.4.2	Comparaison entre V-MUSIC et HO-MUSIC	85
	<b>Conclusion</b>	<b>88</b>

---



Comme nous l'avons constaté dans le chapitre précédent, les méthodes de type *long vecteur* n'utilisent pas d'une manière efficace la diversité de polarisation des signaux multicomposantes. Nous proposons, dans ce chapitre, une approche multilinéaire en traitement d'antenne vectorielle, permettant de conserver la structure multi-modale des signaux polarisés, enregistrés sur un réseau de capteurs multicomposantes. Nous montrerons comment les tenseurs permettent de modéliser des signaux polarisés, et comment les contraintes d'orthogonalité imposées par les décompositions tensorielles, améliorent les performances des algorithmes de traitement d'antenne.

Dans la première section de ce chapitre nous définirons les tenseurs, leurs propriétés les plus importantes et les opérations élémentaires nécessaires à la manipulation des tenseurs. Les notions d'orthogonalité et de rang d'un tenseur également seront introduites, ainsi que les représentations matricielles d'un tenseur. Nous présenterons ensuite deux décompositions tensorielles orthogonales, ainsi que la notion de projecteur multilinéaire orthogonal.

Dans la seconde partie, nous proposerons deux algorithmes de traitement d'antenne à haute résolution, basés sur un modèle multilinéaire d'une onde polarisée. Les méthodes introduites permettront l'estimation conjointe des paramètres de polarisation et des directions d'arrivée des ondes. Les performances des deux algorithmes seront comparées sur des simulations.

## 3.1 Notions d'algèbre multilinéaire

Cette première partie a pour but d'introduire les outils algébriques utilisés pour l'élaboration des algorithmes de traitement d'antenne vectorielle proposés plus loin dans ce chapitre. Nous présentons les définitions des principales notions d'algèbre multilinéaire, et les décompositions tensorielles utilisées dans les méthodes proposées.

### 3.1.1 Tableaux multidimensionnels, tenseurs et espace de Hilbert

De façon générale, un *tableau multidimensionnel* est un ensemble dont les éléments sont référencés par plus de deux indices. On notera  $\mathcal{A}$ , un tableau d'ordre supérieur à deux :

$$\mathcal{A} = \{a_{i_1 i_2 \dots i_N}\} \quad (3.1)$$

L'*ordre* d'un tableau est le nombre de dimensions du tableau. Par exemple, un scalaire est un tableau d'ordre zéro, un vecteur est un tableau d'ordre un, une matrice d'ordre deux, un cube d'ordre trois, etc.

Un *tenseur* est un tableau multidimensionnel qui présente la propriété de *multilinéarité* [Lichnerowicz50, Comon94] lors d'un changement de coordonnées. Afin d'illustrer la notion de *multilinéarité*, considérons un exemple avec un tenseur d'ordre trois  $\mathcal{T} = \{t_{i_1 i_2 i_3}\}$ , et un changement de coordonnées défini par trois matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ . Alors, dans le nouveau

système de coordonnées, le tenseur  $\mathcal{T}'$  peut s'écrire en fonction de  $\mathcal{T}$ , comme :

$$t'_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i_1 i_2 i_3} a_{i_1\alpha} b_{i_2\beta} c_{i_3\gamma} t_{i_1 i_2 i_3} \quad (3.2)$$

avec  $a_{i_1\alpha}, b_{i_2\beta}, c_{i_3\gamma}$ , les éléments des trois matrices. Dans le cadre de l'algèbre tensorielle, on distingue deux types d'indices : les indices covariants et les indices contravariants, en fonction du rôle qu'ils jouent lors d'un changement de coordonnées [Lichnerowicz50]. Dans un souci de simplifier la présentation, nous n'accorderons pas d'importance à cet aspect dans notre manuscrit, car il n'est pas essentiel pour le travail effectué.

L'ensemble des tenseurs à valeurs complexes  $I_1 \times \dots \times I_N$  définit un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  [Lichnerowicz50, De Lathauwer97].

### 3.1.2 Opérations élémentaires sur les tenseurs

Ajouté à la somme de deux tenseurs et à la multiplication d'un tenseur par un scalaire (nécessaires pour l'existence de l'espace vectoriel), on définit le produit tensoriel, le produit contracté de deux tenseurs ainsi que le produit d'un tenseur par une matrice.

Le *produit tensoriel*  $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  d'un tenseur à valeurs complexes  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_M}$  et un tenseur à valeurs complexes  $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{J_1 \times \dots \times J_N}$ , est défini par :

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})_{i_1 \dots i_M j_1 \dots j_N} \stackrel{\text{déf}}{=} a_{i_1 \dots i_M} b_{j_1 \dots j_N} \quad (3.3)$$

pour toutes les valeurs des indices. Le produit tensoriel est à la base de la définition du rang d'un tenseur, comme nous le verrons plus loin.

Le *produit contracté* de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  selon un indice commun  $i_m = j_n = u$ , noté  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle_{m,n}$ , est défini comme :

$$(\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle_{m,n})_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_M j_1 \dots j_{n-1} i_{n+1} \dots j_N} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_u a_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_M} b_{j_1 \dots j_{n-1} i_{n+1} \dots j_N} \quad (3.4)$$

Il est possible de définir le produit contracté selon plusieurs indices.

Le produit d'un tenseur par une matrice est un cas particulier du produit contracté. Il permet d'exprimer l'effet d'une transformation de coordonnées pour un tenseur. Le *n-mode produit* d'un tenseur  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  et d'une matrice  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{J_n \times I_n}$ , noté  $\mathcal{A} \bullet_n \mathbf{U}$ , est un tenseur de taille  $(I_1 \times \dots \times J_n \times \dots \times I_N)$  donné par :

$$(\mathcal{A} \bullet_n \mathbf{U})_{i_1 \dots j_n \dots i_N} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i_n} a_{i_1 \dots i_n \dots i_N} u_{j_n i_n} \quad (3.5)$$

La figure 3.1 visualise l'équation :

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \bullet_1 \mathbf{U}^{(1)} \bullet_2 \mathbf{U}^{(2)} \bullet_3 \mathbf{U}^{(3)} \quad (3.6)$$

pour les tenseurs d'ordre trois  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times J_3}$  et  $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  et les matrices  $\mathbf{U}^{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times J_n}$ . Le  $n$ -mode produit comporte deux propriétés intéressantes liées à la commutativité et à

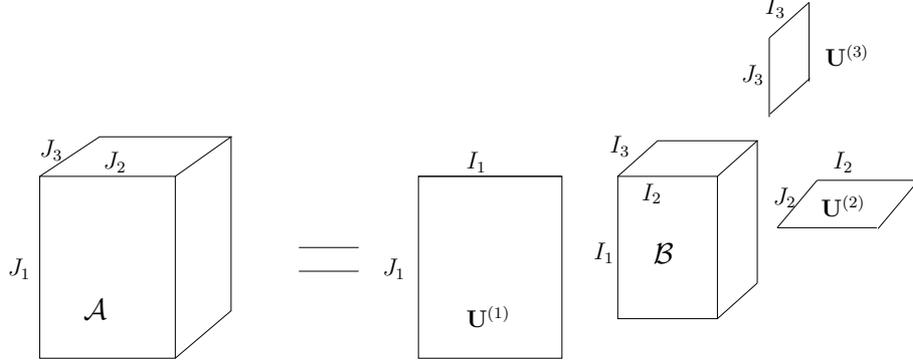


FIG. 3.1 – Visualisation de l'équation (3.6) pour un tenseur  $\mathcal{A}$  d'ordre trois

l'associativité décrites ci-après.

Soit un tenseur  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  et les matrices  $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{J_n \times I_n}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{J_m \times I_m}$ ,  $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{K_n \times J_n}$ , alors les relations suivantes sont vraies [De Lathauwer97] :

$$(\mathcal{A} \bullet_n \mathbf{E}) \bullet_m \mathbf{F} = (\mathcal{A} \bullet_m \mathbf{F}) \bullet_n \mathbf{E} = \mathcal{A} \bullet_n \mathbf{E} \bullet_m \mathbf{F} \quad (3.7)$$

$$(\mathcal{A} \bullet_n \mathbf{E}) \bullet_n \mathbf{G} = \mathcal{A} \bullet_n (\mathbf{G} \cdot \mathbf{E}) \quad (3.8)$$

Ces propriétés seront utilisées ultérieurement lors de la définition du projecteur orthogonal multilinéaire.

### 3.1.3 Représentations matricielles d'un tenseur

Les opérations sur les tenseurs sont souvent plus facile à gérer si on utilise des représentations matricielles d'un tenseur. Il est utile alors, de réécrire le contenu d'un tenseur d'ordre plus grand que deux sous forme matricielle, par *dépliage* [Tucker64, Tucker66]. De Lathauwer [De Lathauwer97] propose une méthode générale pour construire des matrices dépliantes. Nous allons illustrer deux cas particuliers : *les matrices dépliantes standard* et *les matrices dépliantes carrées*.

La représentation d'un tenseur d'ordre  $N$  à l'aide de  $N$  *matrices dépliantes standard* peut être résumée par :

$$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_{(1)} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 I_3 \dots I_N} \\ \mathbf{A}_{(2)} \in \mathbb{C}^{I_2 \times I_1 I_3 \dots I_N} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{(N)} \in \mathbb{C}^{I_N \times I_1 I_2 \dots I_{N-1}} \end{cases} \quad (3.9)$$

Pour un tableau trimodal, les trois matrices dépliantes sont représentées schématiquement sur la figure 3.2. Elles sont obtenues par « découpage en tranches » suivant les trois dimensions du cube.

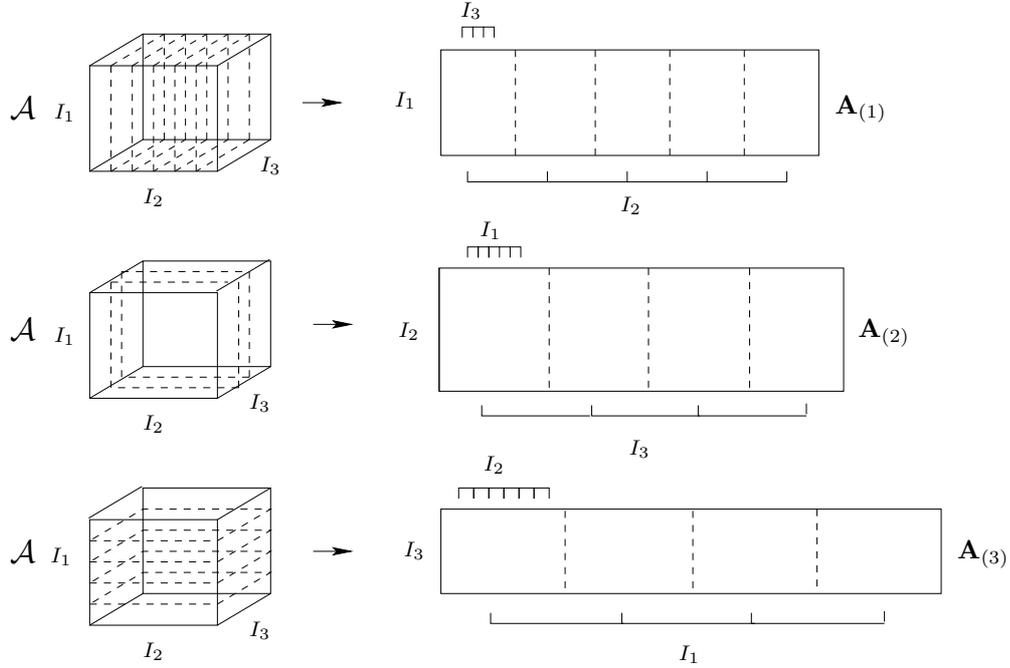


FIG. 3.2 – Matrices dépliantes pour un tenseur  $\mathcal{A}$  de dimension trois

Nous présentons maintenant la construction des matrices dépliantes standard pour un tenseur d'ordre quatre, qui sera utilisée dans la suite du manuscrit.

Soit un tenseur d'ordre quatre,  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4}$ . On définit alors les quatre matrices dépliantes :  $\mathbf{A}_{(1)} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 I_3 I_4}$ ,  $\mathbf{A}_{(2)} \in \mathbb{C}^{I_2 \times I_1 I_3 I_4}$ ,  $\mathbf{A}_{(3)} \in \mathbb{C}^{I_3 \times I_1 I_2 I_4}$  et  $\mathbf{A}_{(4)} \in \mathbb{C}^{I_4 \times I_1 I_2 I_3}$ . Le tableau 3.1 montre comment les éléments du tenseur  $a_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  sont rangés dans les quatre matrices (les relations entre les indices  $i_1, i_2, i_3, i_4$  et les indices de ligne et de colonne des matrices).

$a_{i_1 i_2 i_3 i_4}$	indice ligne	indice colonne
$\mathbf{A}_{(1)}$	$i_1$	$(i_2 - 1)I_3 I_4 + (i_3 - 1)I_4 + i_4$
$\mathbf{A}_{(2)}$	$i_2$	$(i_1 - 1)I_3 I_4 + (i_3 - 1)I_4 + i_4$
$\mathbf{A}_{(3)}$	$i_3$	$(i_1 - 1)I_1 I_2 + (i_2 - 1)I_4 + i_4$
$\mathbf{A}_{(4)}$	$i_4$	$(i_1 - 1)I_2 I_3 + (i_2 - 1)I_3 + i_3$

TAB. 3.1 – Construction des quatre matrices dépliantes pour un tenseur d'ordre quatre

Une autre manière de faire le dépliage est d'obtenir des matrices carrées (voir annexe

A). Ces matrices sont importantes notamment pour des tenseurs présentant une symétrie spéciale.

Nous reviendrons sur l'intérêt de ces matrices dépliantes plus tard, lorsque nous parlerons de décompositions tensorielles.

### 3.1.4 Rang des tenseurs

Comme pour les matrices, le rang d'un tenseur est un paramètre très important. Mais il existe des différences majeures entre le rang d'une matrice et le rang d'un tenseur notamment en ce qui affectent les décompositions tensorielles.

Pour une matrice  $\mathbf{A}$ , son rang a été défini comme  $\text{Dim}(\text{Image}(\mathbf{A}))$  (voir section 2.2.3), ou comme le nombre minimal de matrices de rang 1 qui, par combinaison linéaire, donnent la matrice  $\mathbf{A}$ . Pour un tenseur  $\mathcal{A}$ , son rang noté  $\text{Rang}(\mathcal{A})$  est égal au nombre *minimal* de tenseurs de rang 1, qui redonnent le tenseur par combinaison linéaire. Un tenseur  $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ , est de rang 1 s'il est égal au produit extérieur de  $N$  vecteurs  $\mathbf{u}^{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n}$ ,  $n = 1, \dots, N$  :

$$\mathcal{B} = \mathbf{u}^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{u}^{(N)} \quad (3.10)$$

Une autre définition du rang est liée aux *n-mode vecteurs* (vecteurs obtenus à partir du tenseur d'origine en faisant varier le  $n^{\text{ième}}$  indice et en fixant tous les autres). Le *n-rang* d'un tenseur  $\mathcal{A}$ , noté  $\text{Rang}_n(\mathcal{A})$ , est défini comme étant la dimension de l'espace vectoriel engendré par les *n-mode* vecteurs. Les  $N$  *n-rangs* d'un tenseur d'ordre  $N$  ne sont pas forcément égaux (contrairement au cas matriciel). Il existe une relation d'inégalité entre le rang d'un tenseur et ses *n-rangs* [De Lathauwer97] :

$$\text{Rang}(\mathcal{A}) \geq \text{Rang}_n(\mathcal{A}) \quad (3.11)$$

Les *n-rangs* des tenseurs peuvent être déterminés à l'aide de techniques matricielles. Il a été montré [De Lathauwer97] que les *n-mode* vecteurs d'un tenseur  $\mathcal{A}$  sont les vecteurs colonne des matrices dépliantes standards :

$$\text{Rang}_n(\mathcal{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A}_{(n)}) \quad (3.12)$$

La détermination des *n-rangs* d'un tenseur se fait donc facilement et d'une façon unique à l'aide des matrices dépliantes standards. Le calcul du rang global d'un tenseur est un problème beaucoup plus difficile, et dans le cas général d'un tenseur de taille  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$ , le problème reste toujours ouvert. Des études ont montré [Comon04] que le rang d'un tenseur dépend du corps ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), dans lequel ses éléments sont représentés, et des symétries du tenseur. Des bornes pour le rang des tenseurs symétriques, ont été obtenues [Comon96], prouvant que le rang d'un tenseur peut être plus grand que la plus grande de ses dimensions.

Avant de montrer comment ces notions permettent de généraliser les décompositions matricielles aux tenseurs, il est nécessaire d'introduire quelques concepts géométriques tels que le produit scalaire et l'orthogonalité des tenseurs.

### 3.1.5 Produit scalaire et orthogonalité des tenseurs

Pour deux tenseurs  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ , leur *produit scalaire* est défini comme :

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_N} b_{i_1 \dots i_N}^* a_{i_1 \dots i_N} \quad (3.13)$$

Il en découle la norme de Frobenius d'un tenseur  $\mathcal{A}$ , égale à :

$$\|\mathcal{A}\| = \sqrt{\langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle} \quad (3.14)$$

Un tenseur est dit *unitaire* si sa norme de Frobenius vaut 1.

La définition du produit scalaire nous permet de définir *l'orthogonalité au sens de la norme de Frobenius* (où *l'orthogonalité* tout court) des tenseurs. On dit que deux tenseurs sont *orthogonaux* si leurs produit scalaire (3.13) est égal à 0. Cette définition proposée dans [De Lathauwer97] est une extension directe de la définition de l'orthogonalité des vecteurs. À cause de la sommation sur tous les indices (dans 3.13), cette définition ne tient pas compte de la structure multimodale des tenseurs. Par exemple, si les éléments des tenseurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (3.13) étaient rangés dans des vecteurs de taille  $I_1 I_2 \dots I_N$  en non pas dans des tableaux multidimensionnels, le résultat du produit scalaire serait le même.

Des définitions mieux adaptées à la nature multimodale des tenseurs ont été proposées dans [Kolda01], pour le cas des tenseurs de rang 1.

Soit  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ , deux tenseurs d'ordre  $N$  et de rang 1, donnés par :

$$\mathcal{U} = \mathbf{u}^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{u}^{(N)} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{V} = \mathbf{v}^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{v}^{(N)} \quad (3.16)$$

Nous supposons, sans perte de généralité, que les vecteurs  $\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}^{(n)}$ ,  $n = 1 \dots N$  sont unitaires et que  $\|\mathcal{U}\| = \|\mathcal{V}\| = 1$ . Nous dirons que  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont :

1. *orthogonaux* (ou *simplement orthogonaux*) ( $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$ ) si :

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle = \prod_{n=1}^N \langle \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}^{(n)} \rangle = 0 \quad (3.17)$$

Cette définition est un cas particulier, pour les tenseurs de rang 1, de la définition de l'orthogonalité proposée en début de cette section. Il suffit d'avoir une seule paire de vecteurs orthogonaux  $\mathbf{u}^{(n)} \perp \mathbf{v}^{(n)}$  pour que les deux tenseurs soient orthogonaux.

2. *fortement orthogonaux* ( $\mathcal{U} \perp_f \mathcal{V}$ ) s'ils sont *orthogonaux* et pour tout  $n = 1 \dots N$  :

$$\mathbf{u}^{(n)} = \pm \mathbf{v}^{(n)} \text{ ou } \mathbf{u}^{(n)} \perp \mathbf{v}^{(n)} \quad (3.18)$$

3. *complètement orthogonaux* ( $\mathcal{U} \perp_c \mathcal{V}$ ) si pour tout  $n = 1 \dots N$  :

$$\mathbf{u}^{(n)} \perp \mathbf{v}^{(n)} \quad (3.19)$$

Il est évident qu'entre les différents types d'orthogonalité décrits ci-dessus il existe les relations suivantes :

$$\mathcal{U} \perp_c \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} \perp_f \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} \perp \mathcal{V} \quad (3.20)$$

Les notions d'orthogonalité présentées dans cette section sont intimement liées à la définition des décompositions tensorielles orthogonales.

### 3.1.6 Décompositions tensorielles orthogonales

Dans ce manuscrit, nous appelons décomposition tensorielle, la décomposition d'un tenseur comme une somme de produits de tenseurs de rang et/ou ordre inférieur au tenseur de départ. La littérature sur les décompositions tensorielles est assez limitée (voir [Comon94, De Lathauwer97, Comon00, Kolda01]). Dans ces travaux, nous nous intéresserons seulement aux *décompositions orthogonales* (décompositions pour lesquelles les tenseurs résultants sont orthogonaux selon un critère fixé).

Les décompositions tensorielles figurant ici généralisent, sous certaines conditions, la décomposition en valeurs propres (EVD) et la décomposition en valeurs singulières (SVD) bien connues dans le cas matriciel. L'extension directe de la SVD matricielle aux tenseurs permettrait d'écrire un tenseur d'ordre supérieur à deux comme une somme de tenseurs de rang 1 *complètement orthogonaux*. Il a été démontré [De Lathauwer97] que, pour des tenseurs de rang plus grand que deux (matrices), cette décomposition n'existe pas en général.

Nous décrivons, dans la suite, deux décompositions orthogonales qui serviront à la construction des algorithmes de traitement d'antenne vectorielle proposés dans la deuxième partie de ce chapitre.

#### 3.1.6.1 Décomposition en valeurs propres d'un tenseur symétrique

Cette décomposition est une extension directe de la décomposition matricielle en valeurs propres (voir sous-section 2.2.5). Elle est seulement applicable dans le cas des tenseurs  $\mathcal{A}$ , comportant une symétrie des dimensions de type  $I_1 \times \dots \times I_N \times I_1 \times \dots \times I_N$ . Si, en plus :

$$a_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_N} = a_{j_1 \dots j_N i_1 \dots i_N}^* \quad (3.21)$$

pour toutes les valeurs des indices, on dit que  $\mathcal{A}$  présente une *symétrie hermitienne*, et c'est le cas que nous étudierons dans la suite. Il a été montré [Cardoso90, De Lathauwer97] qu'un tel opérateur linéaire admet une décomposition en valeurs propres (EVD) :

$$\mathcal{A} = \sum_{p=1}^P \lambda_p \mathcal{U}_p \circ \mathcal{U}_p^* \quad (3.22)$$

Il existe exactement  $P = \prod_{n=1}^N I_n$  valeurs propres réelles et  $P$  tenseurs propres orthonormés  $\mathcal{U}_p \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  (au sens de l'*orthogonalité* donnée par (3.13)). Les  $P$  tenseurs  $\mathcal{U}_p$  forment une base orthonormée dans  $\mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ . Le tenseur  $\mathcal{A}$ , avec le produit contracté des tenseurs selon les  $N$  derniers indices, définit un endomorphisme sur  $\mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ . Les tenseurs  $\mathcal{U}_p$  sont simplement « amplifiés » d'un facteur  $\lambda_p$  par la transformation définie par  $\mathcal{A}$ .

La décomposition (3.22) peut être calculée à l'aide des *matrices dépliantes carrées* introduites dans la sous-section 3.1.3. Pour calculer les tenseurs  $\mathcal{U}_p$ , il suffit de déplier  $\mathcal{A}$  et de calculer la EVD des matrices résultantes, et « replier » ensuite les vecteurs propres ainsi obtenus.

Pour un tenseur d'ordre quatre,  $\mathcal{A}^{I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4}$ , parmi les quatre façons de déplier présentées, seulement (A.1) et (A.4) permettent d'obtenir des valeurs propres réelles et des tenseurs orthogonaux. Grâce à la symétrie du tenseur, les deux manières de déplier donnent des résultats équivalents.

La technique illustrée ci-dessus donne une décomposition en tenseurs orthogonaux d'un ordre deux fois plus petit par rapport à l'ordre du tenseur de départ. Cependant, elle est limitée aux tenseurs présentant une symétrie très spéciale, et les tenseurs obtenus ne sont pas de rang 1. La méthode s'appuie sur la EVD d'une seule matrice dépliant, elle n'exploite donc pas toute l'information sur la structure du tenseur. L'algorithme exposé dans la sous-section suivante corrige en partie ces inconvénients.

### 3.1.6.2 Décomposition en valeurs singulières d'un tenseur

La décomposition présentée dans cette partie est une généralisation tensorielle de la décomposition en valeurs singulières (SVD) d'une matrice. Introduite par Tucker en psychométrie [Tucker64, Tucker66] pour chercher des relations dans des tableaux réels 3D, elle a été généralisée plus tard par De Lathauwer [De Lathauwer97, De Lathauwer00a] pour les tenseurs complexes d'ordre quelconque sous le nom de *décomposition d'ordre supérieur en valeurs singulières (HOSVD)*<sup>1</sup>. De Lathauwer a montré qu'il existe des similarités entre les propriétés de la HOSVD et celles de la SVD matricielle classique.

D'après [De Lathauwer00a], tout tenseur  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  peut s'écrire comme un produit :

$$\mathcal{A} = \mathcal{N} \bullet_1 \mathbf{U}^{(1)} \dots \bullet_N \mathbf{U}^{(N)} \quad (3.23)$$

avec  $\mathbf{U}^{(n)} = (\mathbf{u}_1^{(n)} \dots \mathbf{u}_{I_n}^{(n)})$  des matrices unitaires de taille  $I_n \times I_n$  et  $\mathcal{N} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  un tenseur complexe appelé *noyau*. Le noyau possède, en général, des valeurs non-nulles hors de sa diagonale, mais il obéit à deux contraintes intéressantes :

- la *tout-orthogonalité* : entre deux sous-tenseurs pris dans la même direction (ou même mode), et cela quel que soit le mode, on a :  $\langle \mathcal{N}_{i=\alpha}, \mathcal{N}_{i=\beta} \rangle = 0$ , pour tout  $\alpha \neq \beta$
- la décroissance de la norme des « tranches » de  $\mathcal{N}$  pour des indices fixés, pris en ordre croissant :  $\|\mathcal{N}_{i=1}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{N}_{i=I_n}\| \geq 0$  pour toutes les directions  $I_n$ ,  $n = 1 \dots N$ .

<sup>1</sup>en anglais : *Higher-Order Singular Value Decomposition*

L'analogie avec la SVD matricielle est évidente : l'orthogonalité des vecteurs singuliers est remplacée dans le cas tensoriel par la tout-orthogonalité des sous-tenseurs obtenus en fixant un indice du noyau et la décroissance des normes de ces sous-tenseurs prend la place de la décroissance des valeurs singulières matricielles.

La relation (3.23) peut se réécrire sous la forme d'une somme de tenseurs de rang 1 comme :

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_N} n_{i_1 \dots i_N} \mathbf{u}_{i_1}^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_{i_N}^{(N)} \quad (3.24)$$

Puisque le noyau n'est pas hyper-diagonal, les mêmes vecteurs  $\mathbf{u}_{i_n}^{(n)}$  peuvent apparaître plusieurs fois dans la décomposition. L'équation (3.24) met en évidence le fait que la HOSVD est une décomposition en tenseurs *fortement orthogonaux*.

Afin de calculer les éléments du tenseur noyau  $\mathcal{N}$ , il suffit de passer les  $n$ -mode produits dans (3.23) dans l'autre membre de l'égalité :

$$\mathcal{A} \bullet_1 \mathbf{U}^{(1)\dagger} \dots \bullet_N \mathbf{U}^{(N)\dagger} = \mathcal{N} \quad (3.25)$$

Les matrices unitaires  $\mathbf{U}^{(n)}$  se calculent comme les matrices de vecteurs singuliers gauches des matrices dépliantes standard  $\mathbf{A}_{(n)}$  [De Lathauwer97]. On peut, ainsi, trouver la HOSVD d'un tenseur d'ordre  $N$  par le calcul de  $N$  SVD matricielles et  $N$   $n$ -mode produits.

### 3.1.6.3 Approximation de rang $(R_1, \dots, R_N)$ d'un tenseur et projecteurs orthogonaux multilinéaires

Dans le cas matriciel, la SVD permet de trouver par troncature de rang la « meilleure approximation de rang  $R$  » d'une matrice au sens de moindres carrés. Pour les tenseurs, notons que la troncature de rang  $(R_1, \dots, R_N)$  des matrices  $\mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N)}$  (3.23) n'est pas la meilleure approximation au sens de moindres carrés [Kroonenberg83, De Lathauwer00b]. Pour obtenir « la meilleure » approximation de rang  $(R_1, \dots, R_N)$  de  $\mathcal{A}$ , la troncature de la HOSVD doit être suivie par une étape itérative de moindres carrés alternés. La différence entre le résultat obtenu après l'étape itérative et la troncature directe est peu significative,  $\|\mathcal{A} - \widehat{\mathcal{A}}\|^2$  respectée. Nous ne détaillerons pas ce point ici. La troncature de rang  $(R_1, R_2, R_3)$  pour un tenseur  $\mathcal{A}$  d'ordre trois est représentée schématiquement sur la figure 3.3.

Nous focalisons notre intérêt sur les *projections orthogonales multimodales*. Considérons un tenseur  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  de rang plein (par rapport à la définition des  $n$ -mode rangs) et sa décomposition en valeurs singulières donnée par (3.23). Par troncature de rang  $(R_1, \dots, R_N)$ , nous pouvons écrire  $\mathcal{A}$  comme :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_S + \mathcal{A}_B \quad (3.26)$$

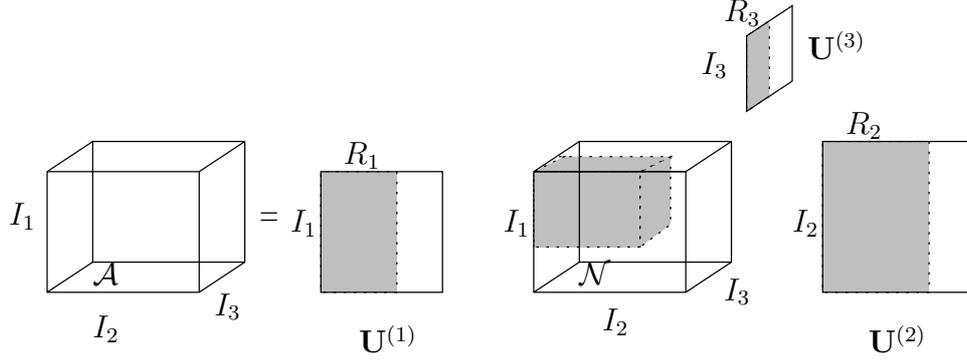


FIG. 3.3 – Représentation schématique de la HOSVD d'un tenseur 3D. Les parties grisées illustrent la troncature de  $Rang(R_1, R_2, R_3)$  du tenseur.

où les indices  $S$  et  $B$  désignent le sous-espaces *signal* et *bruit*, qui seront utilisés dans le cadre des algorithmes développés dans la deuxième partie de ce chapitre. Les expressions de  $\mathcal{A}_S$  et  $\mathcal{A}_B$  sont données par :

$$\mathcal{A}_S = \mathcal{N}_S \bullet_1 \mathbf{U}_S^{(1)} \dots \bullet_N \mathbf{U}_S^{(N)} \quad (3.27)$$

$$\mathcal{A}_B = \mathcal{N}_B \bullet_1 \mathbf{U}_B^{(1)} \dots \bullet_N \mathbf{U}_B^{(N)} \quad (3.28)$$

où les matrices  $\mathbf{U}_S^{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times R_n}$  sont obtenues à partir de premiers  $R_n$  vecteurs singuliers de  $\mathbf{U}^{(n)}$  et les  $\mathbf{U}_B^{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times (I_n - R_n)}$  à partir de  $I_n - R_n$  vecteurs singuliers restants. Le tenseur  $\mathcal{N}_S$  est de dimension  $R_1 \times \dots \times R_N$  et  $\mathcal{N}_B$  de dimension  $(I_1 - R_1) \times \dots \times (I_N - R_N)$ .

Dans [Le Bihan04a], l'expression du projecteur orthogonal sur le sous-espace « signal » a été déduite pour le cas d'un tenseur d'ordre trois. En vue de développer des méthodes de type MUSIC nous nous intéresserons par la suite au sous-espace « bruit ». Nous en déduirons l'expression du projecteur orthogonal multilinéaire sur ce sous-espace dans le cas général d'un tenseur d'ordre  $N$ .

Pour calculer l'expression de  $\mathcal{N}_B$ , il suffit de remplacer (3.27) et (3.28) dans (3.26) et de multiplier ensuite les deux membres de l'égalité ainsi obtenue par  $\bullet_1 \mathbf{U}_B^{(1)\dagger} \dots \bullet_N \mathbf{U}_B^{(N)\dagger}$ . Compte-tenu des propriétés (3.7) et (3.8) du  $n$ -mode produit et de l'orthogonalité des vecteurs colonnes des matrices  $\mathbf{U}_S^{(n)}$  et  $\mathbf{U}_B^{(n)}$ , nous aurons comme résultat :

$$\mathcal{N}_B = \mathcal{A} \bullet_1 \mathbf{U}_B^{(1)\dagger} \dots \bullet_N \mathbf{U}_B^{(N)\dagger} \quad (3.29)$$

Si nous introduisons (3.29) dans (3.28), en utilisant (3.7) et (3.8), on obtient :

$$\mathcal{A}_B = \mathcal{A} \bullet_1 \mathbf{U}_B^{(1)} \mathbf{U}_B^{(1)\dagger} \dots \bullet_N \mathbf{U}_B^{(N)} \mathbf{U}_B^{(N)\dagger} \quad (3.30)$$

Dans (3.30), les matrices  $\mathbf{U}_B^{(n)} \mathbf{U}_B^{(n)\dagger} \in \mathbb{C}^{I_n \times I_n}$  définissent les projecteurs orthogonaux appelés  $\mathbf{P}^{(n)}$  (voir sous-section 2.2.5) sur les sous-espaces vectoriels  $Image(\mathbf{U}_B^{(n)})$ . La « partie bruit »,  $\mathcal{A}_B$ , s'exprime alors comme une projection multilinéaire (multimodale) du tenseur de départ  $\mathcal{A}$  sur le sous-espace « bruit » défini par la troncature de rang  $(R_1, \dots, R_N)$  de  $\mathcal{A}$ . L'expression du *projecteur orthogonal multilinéaire* sur un sous-espace  $\mathcal{A}_B$ , obtenu par la méthode décrite ci-dessus, est :

$$\mathcal{P}_{\langle \mathcal{A}_B \rangle} : \bullet_1 \mathbf{P}^{(1)} \dots \bullet_N \mathbf{P}^{(N)} \quad (3.31)$$

Ce projecteur comporte des propriétés similaires à celles du projecteur orthogonal de l'algèbre linéaire (voir sous-section 2.2.5).

Dans la section suivante nous verrons comment les décompositions tensorielles et les concepts précédemment introduits nous permettront de proposer des méthodes de traitement d'antenne vectorielle basées sur l'algèbre multilinéaire.

## 3.2 Traitement multilinéaire d'antenne vectorielle

Les décompositions des tableaux de données (d'ordre plus grand que deux) s'utilisent dans beaucoup de domaines d'application diverses comme l'économie, psychologie, chimométrie, traitement du signal, etc. (voir [Kroonenberg83, Comon00]). En traitement du signal, les décompositions tensorielles sont généralement requises lors de l'utilisation des *statistiques d'ordre supérieur* ( $HOS$ )<sup>2</sup>, qui sont intrinsèquement des objets tensoriels. Les techniques de séparation et déconvolution dites « aveugles » font généralement appel aux HOS, avec des applications en SONAR, RADAR, sismique, électrocardiographie, traitement de la parole, télécommunications, etc. [Lacoume97].

En traitement d'antenne, des algorithmes multilinéaires basés sur des approches déterministes [van der Veen96, Sidiropoulos00] ou sur les statistiques d'ordre supérieur [Lacoume97, Comon98] ont été proposés. Des modèles multilinéaires ont été employés en sismique et acoustique marine pour réaliser de la séparation/ débruitage d'ondes polarisées enregistrées sur une antenne multicomposante [Le Bihan01a, Le Bihan04a].

Dans ce chapitre nous présentons une approche en traitement d'antenne vectorielle basée sur une représentation multilinéaire des statistiques d'ordre deux des signaux polarisés.

### 3.2.1 Modèle tensoriel de la polarisation

Considérons une source polarisée qui émet un champ d'onde stationnaire dans un milieu isotrope et homogène. Ce champ d'ondes est enregistré sur une antenne linéaire et uniforme de  $N_x$  capteurs à  $N_c$  composantes. Comme notre champ d'application est essentiellement tourné vers des antennes de capteurs à deux ou trois composantes, et par un souci de simplification d'écriture, nous développerons la théorie des algorithmes proposés seulement

<sup>2</sup>en anglais : **H**igher-**O**rders **S**tatistics

pour deux et trois composantes. Néanmoins, il n'y a pas de limitations pour généraliser cette théorie au cas  $N$  composantes.

Par la suite, nous choisirons la première composante du premier capteur de l'antenne comme référence et nous exprimerons les paramètres  $(\theta, \rho, \varphi)$  des signaux captés, par rapport à celle-ci.

Nous considérons que le signal enregistré sur la  $c^{\text{ième}}$  composante, provenant d'une source, est affecté d'une amplification d'un facteur réel  $\rho_c$  et un déphasage  $\varphi_c$  par rapport à la première composante (voir sous-section 2.4.1). À une fréquence donnée  $\nu = \nu_0$ , le modèle d'une onde polarisée enregistrée par un capteur à  $N_c$  composantes est donné alors par le vecteur  $\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \in \mathbb{C}^{N_c}$  :

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 e^{i\varphi_1} \\ \vdots \\ \rho_{N_c-1} e^{i\varphi_{N_c-1}} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

où  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_{N_c-1})^T$  et  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N_c-1})^T$  contiennent les rapports d'amplitude et les déphasages inter-composantes à estimer.

L'information sur la direction d'arrivée (DDA) de l'onde est contenue dans le vecteur  $\mathbf{a}(\theta) \in \mathbb{C}^{N_x}$  qui modélise la propagation de l'onde le long de l'antenne :

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\theta} \\ \vdots \\ e^{-i(N_x-1)\theta} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Tout comme dans le cas scalaire, nous considérerons le déphasage inter-capteur  $\theta$  comme paramètre de localisation de la source. En utilisant le formalisme tensoriel, le comportement global de l'onde sur l'antenne est alors modélisé par un tenseur d'ordre deux de rang 1, noté  $\mathbf{A}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c}$  et défini par :

$$\mathbf{A}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{a}(\theta) \circ \mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \quad (3.34)$$

Considérons maintenant le cas de  $K$  sources polarisées qui arrivent sur l'antenne. Les sources sont supposées décorrélées, spatialement cohérentes et contenues dans le plan de l'antenne. Le bruit sur les capteurs est spatialement blanc et non-polarisé<sup>3</sup>. À une fréquence donnée, une observation sur l'antenne peut s'écrire sous la forme d'un tenseur  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c}$ , dont les colonnes correspondent aux signaux enregistrés sur les  $N_c$  composantes et les lignes correspondent aux  $N_x$  capteurs.

<sup>3</sup>Considérons un bruit centré  $\mathbf{b}(m) = (b_1(m), b_2(m))^T$  enregistré sur un capteur 2C, avec  $b_1(m), b_2(m)$  des bruits gaussiens de variance  $\sigma_1, \sigma_2$ . Un tel bruit est *non-polarisé* si sa matrice de covariance  $\mathbf{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger] = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$ .

Soit  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^K$  le vecteur contenant les amplitudes complexes (à une fréquence donnée) des sources, sur la composante de référence, exprimé par :

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_K)^T \quad (3.35)$$

Le tenseur d'observation s'écrit comme le 3-mode produit d'un tenseur d'ordre trois  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c \times K}$  par le vecteur  $\mathbf{s}^T$ , plus un terme de bruit comme :

$$\mathbf{X} = \mathcal{A}(\theta_1, \dots, \theta_K, \boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_K, \boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_K) \bullet_3 \mathbf{s}^T + \mathbf{B} \quad (3.36)$$

Le tenseur  $\mathcal{A}$  contient toute l'information sur les DDAs et les polarisations des sources. Les « tranches » de  $\mathcal{A}$ , obtenues en fixant l'indice de la dimension de taille  $K$ , sont les matrices  $\mathbf{A}_k$  (3.34) caractérisant la propagation de la  $k^{\text{ième}}$  onde sur l'antenne. La matrice  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c}$  contient la contribution du bruit sur les  $N_c$  composantes des  $N_x$  capteurs.

Une autre façon d'écrire le tenseur d'observation  $\mathbf{X}$ , mettant plus clairement en évidence la contribution des  $K$  sources, est :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k(\theta_k, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\varphi}_k) s_k + \mathbf{B} \quad (3.37)$$

Nous observons que, par rapport au modèle *long-vecteur* décrit dans le chapitre 2, le modèle tensoriel présenté ci-dessus préserve la nature bimodale *distance (capteurs) - composantes* des données.

Pour conserver cette structure multimodale, nous considérerons les statistiques d'ordre deux des signaux captés sur l'antenne par le moyen d'un *tenseur interspectral*.

### 3.2.2 Tenseur interspectral

En traitement d'antenne multicomposante, dans les approches de type « long-vecteur », la matrice interspectrale (2.52) décrit l'ensemble des relations statistiques à l'ordre deux, entre toutes les composantes de tous les capteurs. Nous introduisons ici la notion équivalente pour le modèle tensoriel proposé, appelé *le tenseur interspectral*  $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c \times N_x \times N_c}$  et défini par :

$$\mathcal{T} = \mathbb{E}[\mathbf{X} \circ \mathbf{X}^*] \quad (3.38)$$

Un élément  $t_{i_1 i_2 j_1 j_2}$  de  $\mathcal{T}$  est donné par :

$$t_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \mathbb{E}[x_{i_1 i_2} x_{j_1 j_2}^*] \quad (3.39)$$

Les problèmes d'estimation du tenseur interspectral sont les mêmes que ceux présentés pour la matrice interspectrale (voir sous-section 2.3.2). Un avantage du tenseur interspectral est que les techniques de lissage spatial sont faciles à mettre en œuvre, ce qui n'est pas le cas pour la matrice interspectrale long-vecteur. Le lissage spatial se réduit à un lissage suivant les hyper-diagonales du tenseur interspectral [Miron04].

Nous pouvons montrer facilement que  $t_{i_1 i_2 j_1 j_2} = t_{j_1 j_2 i_1 i_2}^*$  [Miron05d]. Le tenseur interspectral comporte donc (d'après la définition introduite dans la sous-section (3.1.6.1)) une *symétrie hermitienne d'ordre supérieur*.

Si nous exprimons le tenseur interspectral en fonction du tenseur d'observation précédemment défini et compte-tenu des hypothèses de décorrélation entre les  $K$  sources et entre les  $K$  sources et le bruit, nous obtenons pour  $\mathcal{T}$  l'expression suivante :

$$\mathcal{T} = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{A}_k \circ \mathbf{A}_k^* + \mathcal{B} \quad (3.40)$$

avec  $\sigma_k^2 = \mathbf{E}[s_k s_k^*]$ , la puissance de la source  $k$  sur la première composante de l'antenne et  $\mathcal{B} = \mathbf{E}[\mathbf{B} \circ \mathbf{B}]$  un tenseur d'ordre quatre contenant les statistiques d'ordre deux du bruit.

Basés sur cette représentation multilinéaire des données, nous proposons dans la suite deux algorithmes de traitement d'antenne vectorielle de type MUSIC [Schmidt79], permettant l'estimation des DDAs et des paramètres de polarisation.

### 3.2.3 Algorithmes tensoriels en traitement d'antenne vectorielle à haute résolution

Établissant que le tenseur interspectral comporte une *symétrie hermitienne d'ordre supérieur*, nous avons montré (section 3.1.6) que pour un tel type de tenseur, deux décompositions orthogonales sont possibles. Nous basant sur celles-ci, nous proposons deux algorithmes de traitement d'antenne vectorielle à haute résolution : Vector-MUSIC (V-MUSIC) et Higher-Order MUSIC (HO-MUSIC).

#### 3.2.3.1 Estimateur « Vector-MUSIC » (V-MUSIC)

La décomposition du tenseur interspectral en tenseurs *orthogonaux au sens de la norme de Frobenius* à l'aide de la décomposition tensorielle en valeurs propres, décrite dans la sous-section 3.1.6.1, s'écrit :

$$\mathcal{T} = \sum_{p=1}^P \lambda_p \mathbf{U}_p \circ \mathbf{U}_p^* \quad (3.41)$$

avec  $P = N_x N_c$  et  $\lambda_p$  des valeurs propres réelles. Par identification de (3.40) avec (3.41), nous associons les  $K$  premières valeurs propres au sous-espace signal et les  $P - K$  dernières au sous-espace bruit. Nous construisons ensuite le projecteur orthogonal  $\mathcal{P}_B$  sur le sous-espace bruit :

$$\mathcal{P}_B = \sum_{p=K+1}^P \mathbf{U}_p \circ \mathbf{U}_p^* \quad (3.42)$$

La projection d'un tenseur d'ordre deux (une matrice)  $\mathbf{M}$  de taille  $N_x \times N_c$  sur le sous-espace bruit est définie alors comme le produit contracté de  $\mathcal{P}_B$  et  $\mathbf{M}$ , selon les deux

derniers indices [De Lathauwer97].  $\mathcal{P}_B$  est un projecteur orthogonal linéaire (sous-section 2.2.5).

Nous construisons ensuite un *tenseur directionnel*  $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c}$ , modélisant l'arrivée d'une onde de DDA  $\theta$  et de paramètres de polarisation  $\boldsymbol{\rho}$  et  $\boldsymbol{\varphi}$  sur l'antenne par :

$$\mathbf{M}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{a}(\theta) \circ \mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \quad (3.43)$$

où  $\mathbf{a}(\theta)$  et  $\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$  sont donnés par (3.33) et (3.32). L'expression de la fonctionnelle Vector-MUSIC, appelée  $V(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$  est ensuite calculée par projection du tenseur directionnel  $\mathbf{M}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$  sur le sous-espace bruit :

$$V(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\| \langle \mathcal{P}_B, \mathbf{M}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \rangle_{i_3 i_4} \|} \quad (3.44)$$

avec  $\|\cdot\|$ , la norme de Frobenius. Dans (3.44), la projection du tenseur directionnel sur le sous-espace bruit est effectuée comme un produit contracté de  $\mathcal{P}_B$  et  $\mathbf{M}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$  selon les deux derniers indices  $i_3, i_4$  de  $\mathcal{P}_B$ .

Classiquement, cette fonctionnelle (3.44) a des maxima locaux pour des valeurs  $(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$  correspondant aux sources présentes dans le signal :

$$\{\theta_k, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\varphi}_k\} = \arg \left\{ \max_{\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}} (V(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})) \right\} \quad (3.45)$$

En faisant varier  $\theta$  et les paramètres des vecteurs  $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}$  dans un intervalle donné de valeurs, avec un pas choisi, une hyper-surface paramétrique est alors calculée. Les paramètres estimés des sources correspondent aux  $K$  premiers maxima de cette surface. Supposant que le pas d'itération est suffisamment petit pour un échantillonnage correct de l'hyper-surface, la recherche des maxima locaux est réalisée par comparaison de chaque point de la surface avec ses voisins. Ainsi, l'estimation des paramètres  $\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}$  est dite non-supervisée. Toutefois, des informations a priori sur les sources permettent d'optimiser la recherche et de réduire ainsi le temps de calcul nécessaire pour cet algorithme.

### 3.2.3.2 Estimateur « Higher-Order MUSIC » (HO-MUSIC)

Une autre manière de décomposer le tenseur interspectral est d'utiliser la HOSVD, présentée dans la sous-section 3.1.6.2. Cette décomposition permet d'imposer des contraintes d'orthogonalité entre les vecteurs de chacun des quatre modes, *indépendamment*. Étant donnée la symétrie du tenseur, sa décomposition en valeurs singulières s'écrit comme :

$$\mathcal{T} = \mathcal{N} \bullet_1 \mathbf{U}^{(1)} \bullet_2 \mathbf{U}^{(2)} \bullet_3 \mathbf{U}^{(1)*} \bullet_4 \mathbf{U}^{(2)*} \quad (3.46)$$

avec le noyau  $\mathcal{N} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c \times N_x \times N_c}$  et les matrices unitaires  $\mathbf{U}^{(1)} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$  et  $\mathbf{U}^{(2)} \in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}$ . Les colonnes de ces matrices forment des bases orthonormées dans les dimensions capteurs et composantes des signaux enregistrés par l'antenne. Si on suppose que les sources ont des DDAs et des polarisations différentes, le projecteur sur le sous-espace bruit s'obtient à

partir des matrices  $\mathbf{U}_B^{(1)}$  et  $\mathbf{U}_B^{(2)}$  construites avec les derniers  $N_x - K$  respectivement  $N_c - K$  vecteurs propres des  $\mathbf{U}^{(1)}$  et  $\mathbf{U}^{(2)}$  :

$$\mathcal{P}_{\langle B \rangle} : \bullet_1 \mathbf{U}_B^{(1)} \mathbf{U}_B^{(1)\dagger} \bullet_2 \mathbf{U}_B^{(2)} \mathbf{U}_B^{(2)\dagger} \bullet_3 \mathbf{U}_B^{(1)*} \mathbf{U}_B^{(1)T} \bullet_4 \mathbf{U}_B^{(2)*} \mathbf{U}_B^{(2)T} \quad (3.47)$$

Afin de projeter le *tenseur directionnel* (3.43) sur le sous-espace bruit, il est nécessaire de construire d'abord le tenseur d'ordre quatre  $\mathcal{M}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c \times N_x \times N_c}$  :

$$\mathcal{M}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{M}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \circ \mathbf{M}^*(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \quad (3.48)$$

L'expression de la fonctionnelle HO-MUSIC prend alors la forme suivante :

$$H(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\|\mathcal{M}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \bullet_1 \mathbf{U}_B^{(1)} \mathbf{U}_B^{(1)\dagger} \bullet_2 \mathbf{U}_B^{(2)} \mathbf{U}_B^{(2)\dagger} \bullet_3 \mathbf{U}_B^{(1)*} \mathbf{U}_B^{(1)T} \bullet_4 \mathbf{U}_B^{(2)*} \mathbf{U}_B^{(2)T}\|} \quad (3.49)$$

Identiquement à l'algorithme V-MUSIC, les paramètres estimés des  $K$  sources sont donnés par :

$$\{\theta_k, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\varphi}_k\} = \arg \left\{ \max_{\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}} (H(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})) \right\} \quad (3.50)$$

En conclusion, nous observons que les deux algorithmes imposent des contraintes d'orthogonalité différentes entre les sous-espaces « signal » et « bruit ». Dans le cas de V-MUSIC, la contrainte imposée est globale, de type *orthogonalité au sens de la norme de Frobenius*, tandis que pour HO-MUSIC, la contrainte d'orthogonalité est effective pour chacun des modes séparément (*orthogonalité forte* (3.18)). Concernant le nombre maximal de sources séparables, pour V-MUSIC celui-ci est égal à  $N_x N_c - 1$ , tandis que pour HO-MUSIC, il est égal à  $\min(N_x, N_c) - 1$ .

Dans la section suivante, nous étudierons le comportement de ces deux algorithmes sur des simulations.

### 3.2.4 Simulations, résultats et discussion

Dans un premier temps, afin de montrer l'importance de la prise en compte de l'information de polarisation en traitement d'antenne, nous comparons les résultats donnés par l'algorithme MUSIC classique et V-MUSIC sur des données sismiques simulées. Dans une deuxième partie, une étude entre V-MUSIC et HO-MUSIC (deux algorithmes multilinéaires) sera effectuée et leurs pouvoirs de résolution comparés. Nous utiliserons dans la suite du manuscrit, comme mesure pour la résolution des méthodes étudiées, la largeur du lobe de détection à 3 dB.

#### 3.2.4.1 Applications du Vector-MUSIC en sismique

Considérons deux ondes sismiques enregistrées sur une antenne à deux composantes ( $N_c = 2$ ) (Fig. 3.4). La polarisation des sources est caractérisée dans ce cas par deux paramètres  $\rho$  et  $\varphi$  fixés à  $\rho = 2$ ,  $\varphi = -1.4 \text{ rad}$  pour la première source, et  $\rho = 3$ ,

$\varphi = 1.04 \text{ rad}$ , pour la deuxième source. Les déphasages inter-capteurs  $\theta$  correspondant aux DDA des deux sources sont  $-0.18 \text{ rad}$  et  $0.58 \text{ rad}$ . Les simulations ont été effectuées pour une antenne de  $N_x = 20$  capteurs et  $N_t = 128$  échantillons temporels. Du bruit gaussien, blanc, stationnaire à l'ordre deux a été ajouté avec un rapport signal sur bruit<sup>4</sup>  $S/B = -7 \text{ dB}$ , pour la première composante et  $12 \text{ dB}$ , pour la deuxième (illustrant le fait que la composante verticale est toujours plus sensible que l'autre).

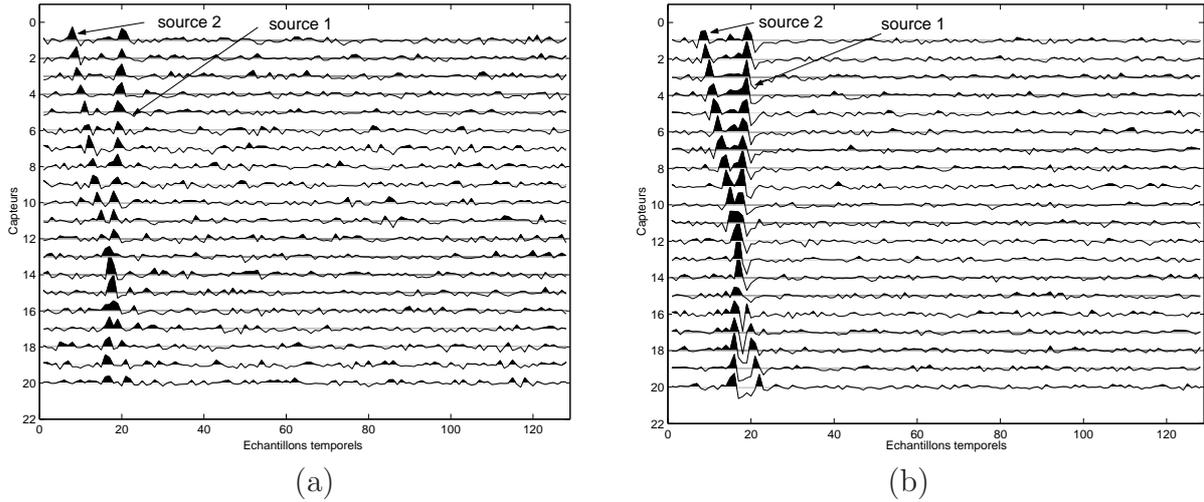


FIG. 3.4 – Section sismique à deux composantes : (a) première composante et (b) deuxième composante

Pour l'estimation du tenseur interspectral nous avons utilisé un lissage sur cinq canaux en fréquence (voir section 2.3.2). Cette technique de moyennage induit un biais dans l'estimation de  $\theta$  et  $\varphi$ , et renforce la détection des sources ayant une DDA proche de zéro, comme c'est le cas de la première source.

Pour la section sismique montrée en 3.4, nous avons calculé la fonctionnelle MUSIC scalaire (2.44) pour chaque composante séparément, ainsi que la fonctionnelle V-MUSIC. Pour la DDA  $\theta$ , nous avons utilisé un pas de calcul de 0.01 dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ , pour  $\rho$  un pas de calcul de 0.1 dans l'intervalle  $[0.1; 10]$  et pour  $\varphi$  un pas de 0.1 dans  $[-\pi; \pi]$ .

Nous montrons les résultats de l'algorithme MUSIC classique sur chacune des composantes séparément sur la figure 3.5 (a) et (b). Sur la première composante, les deux sources ne sont pas identifiées (Fig. 3.5 (a)). Sur la deuxième composante, où le rapport  $S/B$  est plus grand, la détection est meilleure (Fig. 3.5 (b)), même si le taux de fausses alarmes, qui pourraient masquer les vraies DDA des sources, reste important.

La figure 3.6 montre V-MUSIC pour des valeurs de paramètres de polarisation  $\rho$ ,  $\varphi$  fixées. La ligne continue correspond à  $\rho = 2$ ,  $\varphi = -1.4 \text{ rad}$  (les paramètres de polarisation de la première source) et la ligne en pointillé, à la deuxième source ( $\rho = 3$ ,  $\varphi = 1.04 \text{ rad}$ ).

<sup>4</sup>Le  $S/B$  est défini comme l'énergie du signal sur l'énergie du bruit sur toute la section sismique.

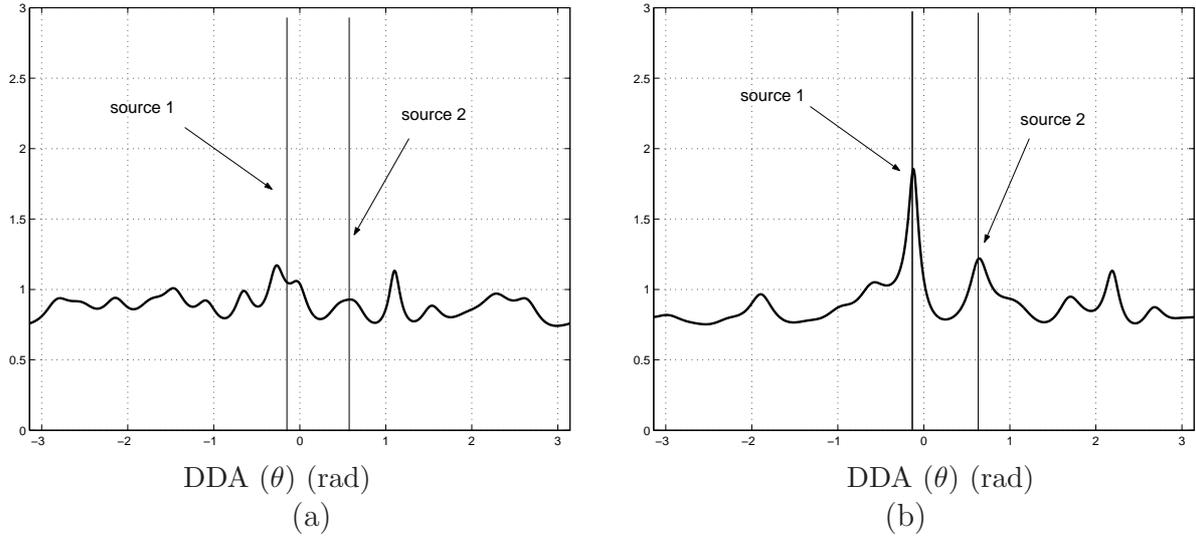


FIG. 3.5 – MUSIC scalaire appliqué sur chacune des composantes : (a) première composante et (b) deuxième composante (lissage fréquentiel sur 5 canaux)

Comme on peut observer, les deux courbes de détection sont beaucoup plus lisses par rapport au cas scalaire (les rebonds sont beaucoup atténués). La prise en compte de l'information multicomposante rend l'estimateur V-MUSIC plus robuste vis-à-vis de la corrélation des sources que MUSIC [Miron05d].

Une fois les paramètres  $\theta$  fixés, on peut retrouver les paramètres  $\rho$  et  $\varphi$  de polarisation. Pour cela, nous avons fixé les valeurs des  $\theta$  correspondant aux DDAs des sources ( $-0.18 \text{ rad}$ ) et ( $0.58 \text{ rad}$ ) et nous avons représenté la hypersurface  $(\rho; \varphi)$  pour les deux sources (Fig. 3.7 (a) et (b)). On retrouve les paramètres de polarisation légèrement biaisés à cause du lissage en fréquence. Pour la première source l'erreur sur  $\rho$  et  $\varphi$ , par rapport aux valeurs théoriques, est de  $0.1$  et  $-0.2 \text{ rad}$  et pour la deuxième  $0$  et  $0.16 \text{ rad}$ .

Nous avons vu que l'estimateur V-MUSIC est plus robuste à la corrélation des sources que sa version scalaire. Nous comparons maintenant les pouvoirs séparateurs de ces deux algorithmes.

Considérons, à présent, que les deux ondes ont les mêmes paramètres de polarisation que dans l'exemple précédent mais avec des DDAs très proches (Fig. 3.8) ( $0.2 \text{ rad}$  et  $0.5 \text{ rad}$ ). Dans ce cas, le lissage sur cinq canaux en fréquence n'est pas un bon choix à cause du biais important résultant. Nous avons employé un lissage en fréquence sur trois canaux suivi par un lissage spatial sur trois capteurs. Les résultats de MUSIC scalaire pour les deux composantes sont présentés sur la figure 3.9 (a) et (b). Les valeurs théoriques de DDAs sont marquées par deux lignes verticales. On observe que pour la première composante, MUSIC scalaire ne présente qu'un seul « pic », correspondant à une valeur moyenne des DDAs de deux sources. Sur la deuxième composante, les sources sont correctement estimées, mais

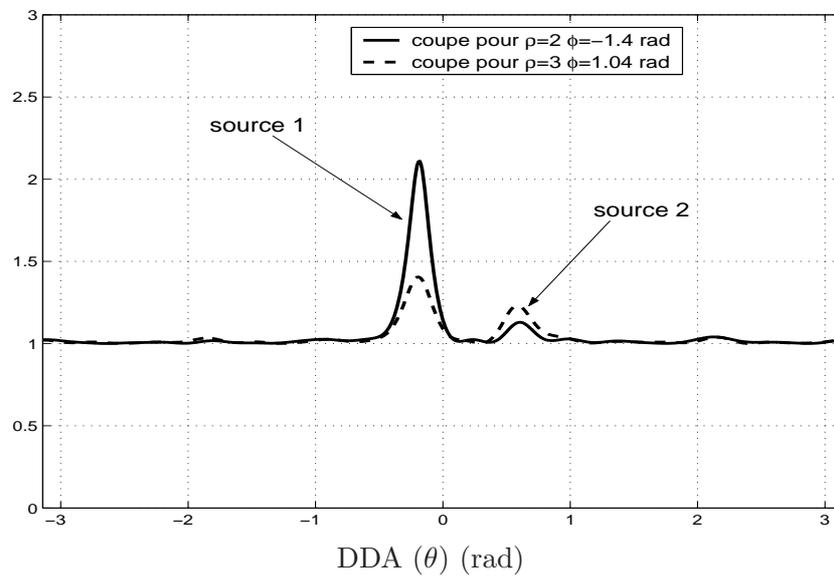


FIG. 3.6 – V-MUSIC avec lissage en fréquence (sur 5 canaux) du tenseur interspectral

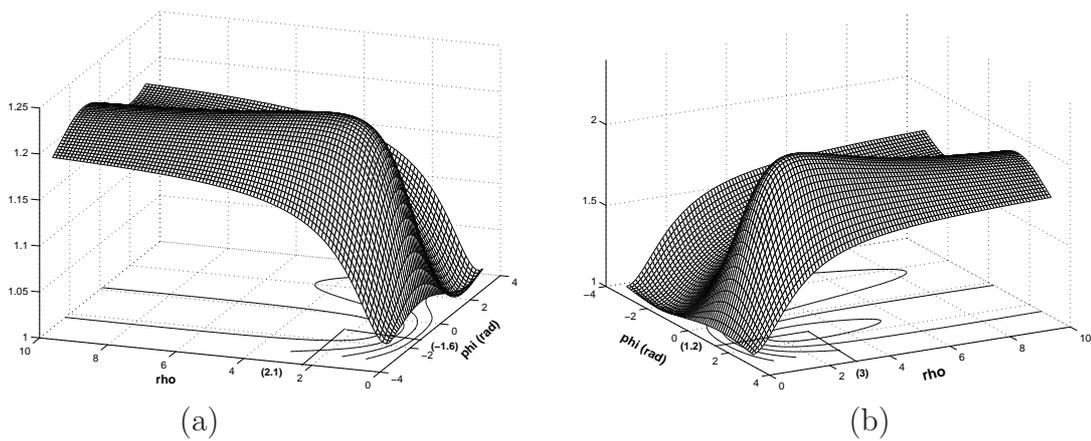


FIG. 3.7 – V-MUSIC pour (a)  $\theta = -0.18 \text{ rad}$  et (b)  $\theta = 0.58 \text{ rad}$

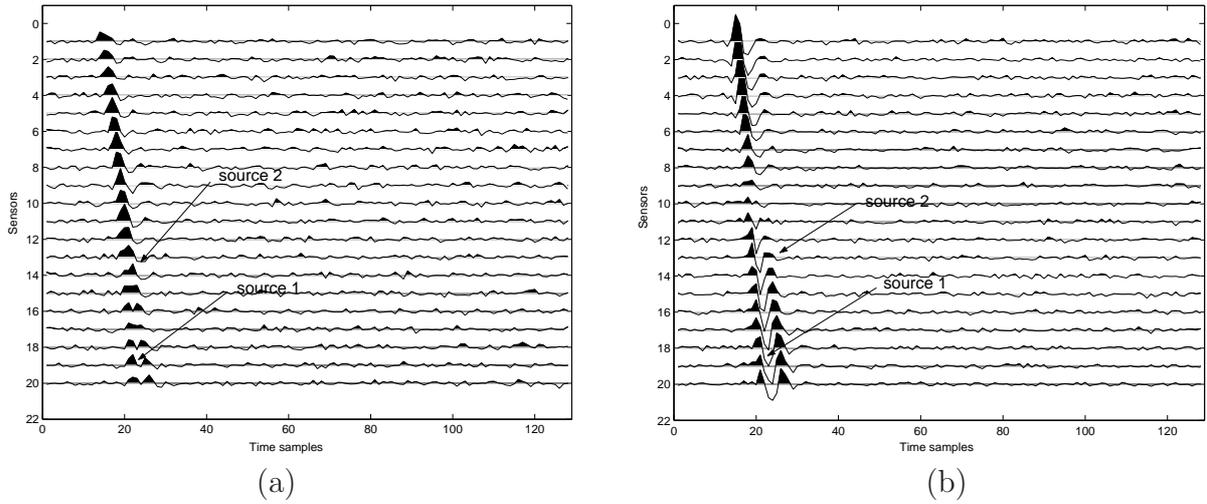


FIG. 3.8 – Section sismique à deux composantes (DDAs proches) : (a) première composante et (b) deuxième composante

les lobes de détection sont partiellement superposés.

Vector-MUSIC réalise une détection plus nette, en isolant chaque source (Fig. 3.10).

Si nous continuons à rapprocher les DDAs de deux sources ( $0.3 \text{ rad}$  et  $0.5 \text{ rad}$ ), MUSIC scalaire n'arrive plus à les séparer, même sur la deuxième composante comportant un meilleur rapport signal à bruit (Fig. 3.11), alors, que l'algorithme multilinéaire continue lui à effectuer une détection correcte (3.12).

L'explication est la prise en compte de l'information de cohérence entre les deux composantes et l'augmentation de la dimension de l'espace de représentation des ondes, ce qui permet une meilleure séparation des signaux.

V-MUSIC effectue une moyenne entre les deux composantes et il devrait être utilisé seulement si le rapport signal à bruit est comparable sur les deux composantes. Une composante très bruitée détériore les performances globales de l'algorithme.

Sur la figure (3.13) nous avons représenté l'erreur quadratique moyenne pour l'estimation de la DDA des deux algorithmes (MUSIC scalaire et V-MUSIC). Nous avons considéré le cas de deux sources polarisées, de puissance égale et de phase initiale aléatoire, arrivant sur une antenne composée de dix capteurs à deux composantes. Les DDAs des sources sont  $0.08 \text{ rad}$ , pour la première source et  $0.17 \text{ rad}$ , pour la deuxième. Elles ont les paramètres de polarisation suivants  $\rho = 2, \varphi = -0.26 \text{ rad}$  (première source) et  $\rho = 3, \varphi = 0.34 \text{ rad}$  (deuxième source). Une centaine de réalisations a été utilisées pour l'estimation du tenseur interspectral. Cinq cents réalisations différentes des estimateurs ont été utilisées pour chaque point sur la figure. Nous avons ajouté un bruit gaussien dans divers rapports  $S/B$ .

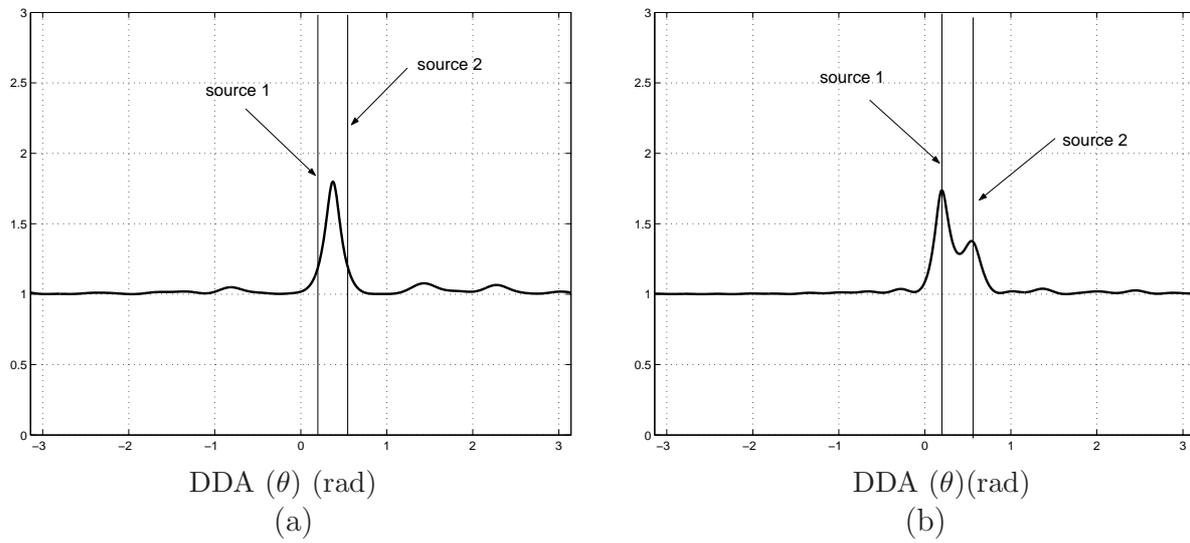


FIG. 3.9 – MUSIC scalaire : (a) première composante et (b) deuxième composante

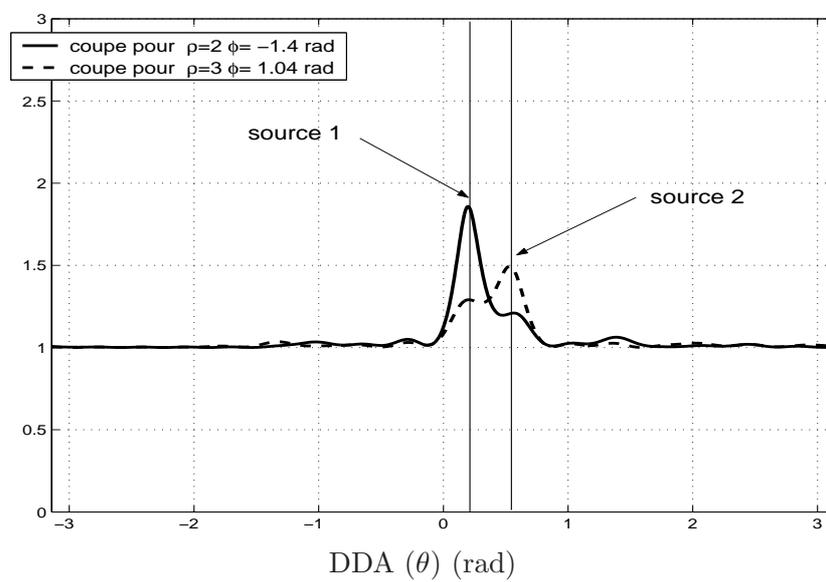


FIG. 3.10 – V-MUSIC pour la section sismique dans la figure 3.8

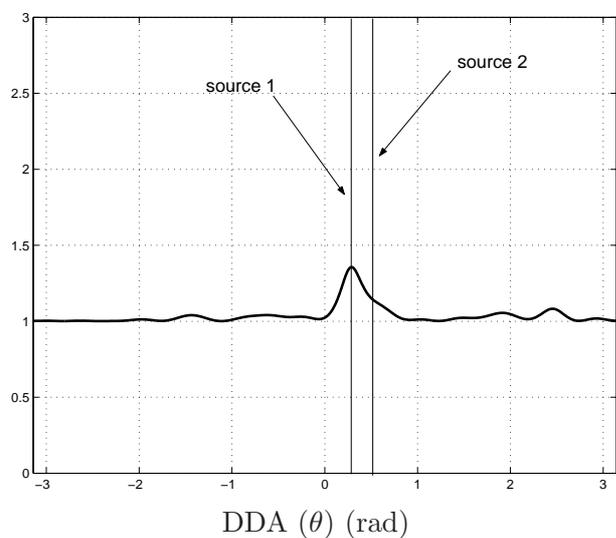


FIG. 3.11 – MUSIC scalaire sur la deuxième composante, pour des DDA très proches

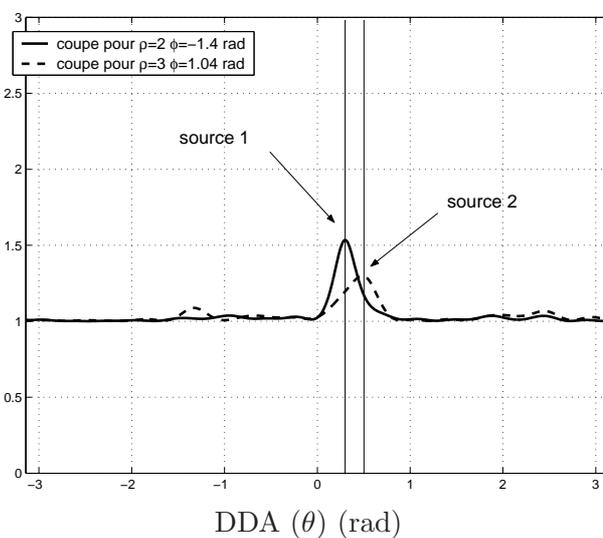


FIG. 3.12 – V-MUSIC pour des DDA très proches

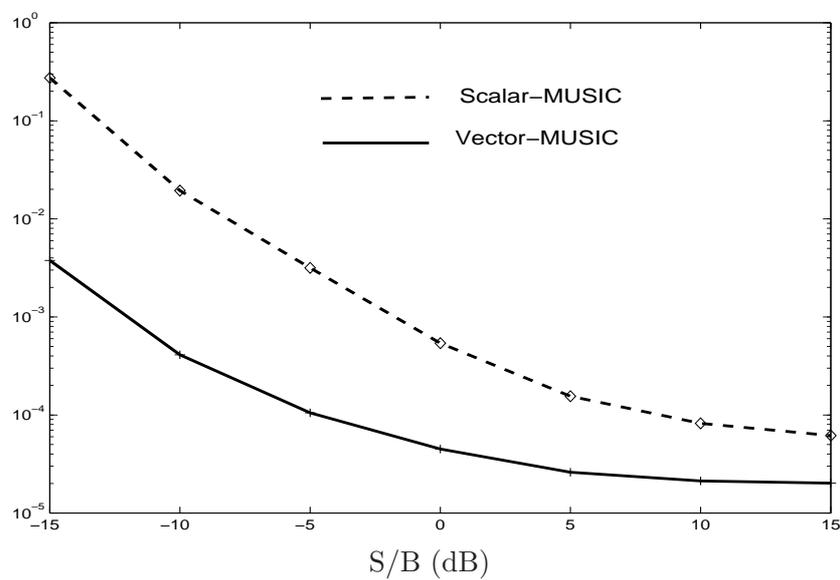


FIG. 3.13 – Erreur quadratique moyenne d'estimation pour la DDA

L'erreur quadratique moyenne d'estimation pour  $\theta$  est définie comme la moyenne quadratique des erreurs d'estimation pour les DDA des deux sources. Pour MUSIC classique, nous avons opéré une moyenne sur les deux composantes.

La figure (3.13) montre que la prise en compte de l'information de polarisation améliore les performances statistiques de l'estimateur de la DDA.

L'algorithme V-MUSIC, n'exploite pas pleinement la structure multimodale du tenseur interspectral. La contrainte de *orthogonalité* imposée aux tenseurs issus de la décomposition est équivalente à l'*orthogonalité des long-vecteurs*. Les performances de l'algorithme sont, par conséquent, équivalentes aux celles des algorithmes de type long-vecteur. C'est la raison pour laquelle, dans la suite du manuscrit, les appellations Vector-MUSIC (V-MUSIC) et MUSIC long-vecteur seront utilisées pour désigner le même algorithme (estimateur). Nous verrons dans la suite comment la contrainte d'*orthogonalité forte*, imposée par l'algorithme HO-MUSIC, améliore les performances de l'estimateur, en exploitant mieux la structure multimodale du tenseur interspectral.

### 3.2.4.2 Comparaison entre V-MUSIC et HO-MUSIC

Considérons d'abord le cas d'une antenne de  $N_x = 20$  capteurs à  $N_c = 2$  composantes. Pour une telle configuration, l'algorithme V-MUSIC est capable de détecter jusqu'à  $N_x N_c - 1$  sources (39 dans le cas considéré) tandis que HO-MUSIC, théoriquement, peut détecter  $\min(N_x, N_c) - 1$  sources (une seule dans ce cas). Pour une source de DDA  $\theta = 0.19 \text{ rad}$  et de paramètres de polarisation  $\rho = 1$  et  $\varphi = 0 \text{ rad}$  nous avons calculé les fonctionnelles à trois paramètres  $V(\theta, \rho, \varphi)$  (3.44) issue de V-MUSIC et  $H(\theta, \rho, \varphi)$  issue de HO-MUSIC (3.49). Trois cents réalisations ont été utilisées pour estimer le tenseur interspectral.

Sur la figure 3.14 nous avons représenté les deux fonctionnelles en fixant les paramètres de polarisation de la source. Elles ont été normalisées par rapport à leurs valeurs maximales, afin de faciliter la comparaison. On observe (fig. 3.14) que la largeur du lobe de détection correspondant à l'algorithme HO-MUSIC est inférieure à celle du V-MUSIC, signifiant un meilleur pouvoir de résolution pour le premier algorithme.

Sur une antenne 2C, l'algorithme HO-MUSIC peut détecter maximum une source. Nous avons analysé le comportement de deux algorithmes quand on a deux sources présentes dans le signal. On cherche à estimer une seule source, et la deuxième est vue comme du bruit cohérent sur les capteurs. En fixant les paramètres de polarisation de la première onde, on obtient pour  $\theta$  la courbe présentée sur la figure 3.15. On remarque (Fig. 3.15) que les lobes de détection s'élargissent un peu, mais HO-MUSIC reste plus résolutif que l'autre méthode. Il est donc possible, même dans un scénario avec plusieurs sources, d'utiliser cet algorithme, afin d'estimer la DDA pour une source de polarisation connue.

La figure 3.16 présente le plan des paramètres de polarisation  $(\rho, \varphi)$  pour les deux algorithmes, correspondant à la DDA de la source. On remarque que la résolution de HO-MUSIC est largement meilleure par rapport à celle de l'algorithme V-MUSIC. Ceci s'explique par le fait que HO-MUSIC force l'orthogonalité des deux modes indépendamment,

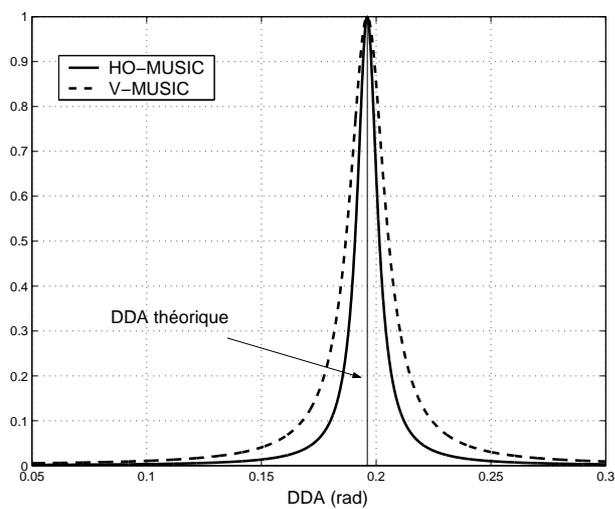


FIG. 3.14 – Détection de la DDA  
pour  $\rho$  et  $\varphi$  fixés  
(une seule source présente dans le signal)

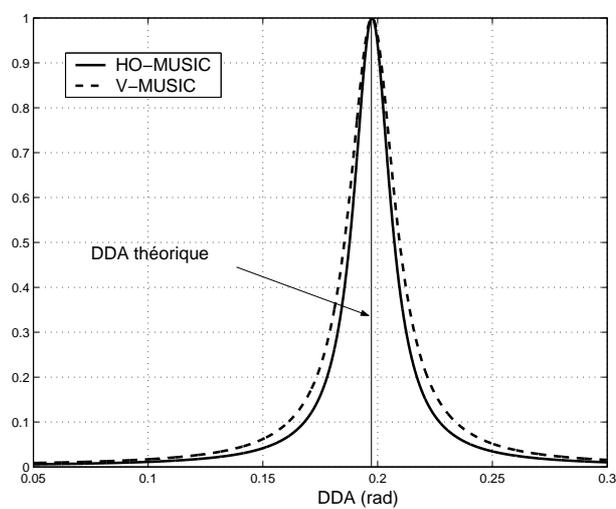


FIG. 3.15 – Détection de la DDA  
pour  $\rho$  et  $\varphi$  fixés  
(deux sources présentes dans le signal)

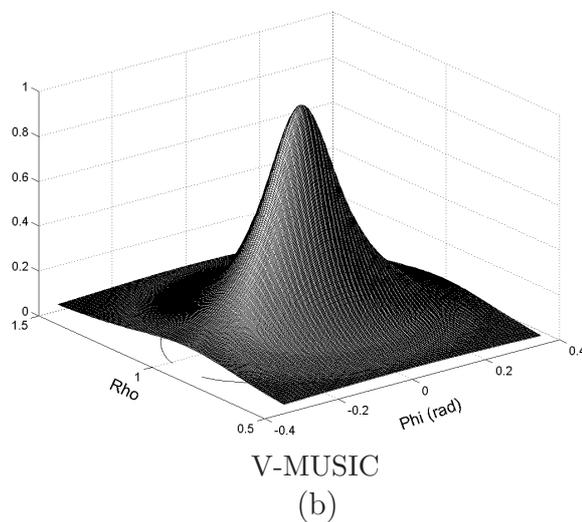
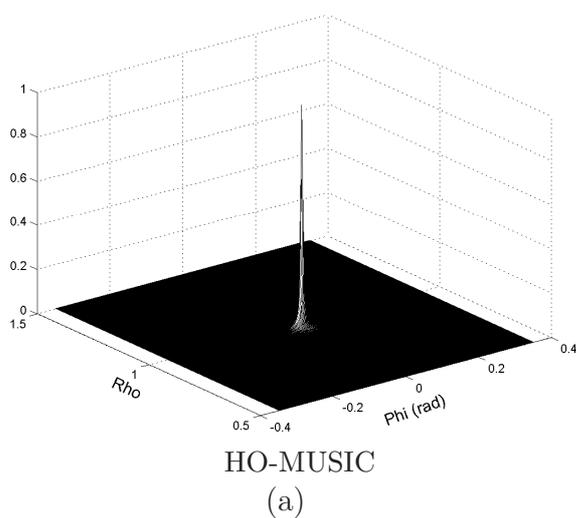


FIG. 3.16 – Le plan des paramètres de polarisation

tandis que V-MUSIC impose une orthogonalité globale des sous-espaces estimés.

Dans le cas d'une antenne à trois composantes, HO-MUSIC permet de détecter jusqu'à deux sources [DosSantos05]. Nous avons simulé deux sources, avec les DDAs :  $0.19 \text{ rad}$  pour la première et  $-0.38 \text{ rad}$  pour la deuxième. Les paramètres de polarisation de la première source sont :  $\rho_1 = 0.5$  et  $\varphi_1 = 0.17 \text{ rad}$  pour la deuxième composante (par rapport à la première) et  $\rho_2 = 3$  et  $\varphi_2 = 0.78 \text{ rad}$  pour la troisième composante. Pour la deuxième source, les paramètres sont  $\rho_1 = 4$  et  $\varphi_1 = -0.52 \text{ rad}$  et  $\rho_2 = 0.5$  et  $\varphi_2 = -0.08 \text{ rad}$ .

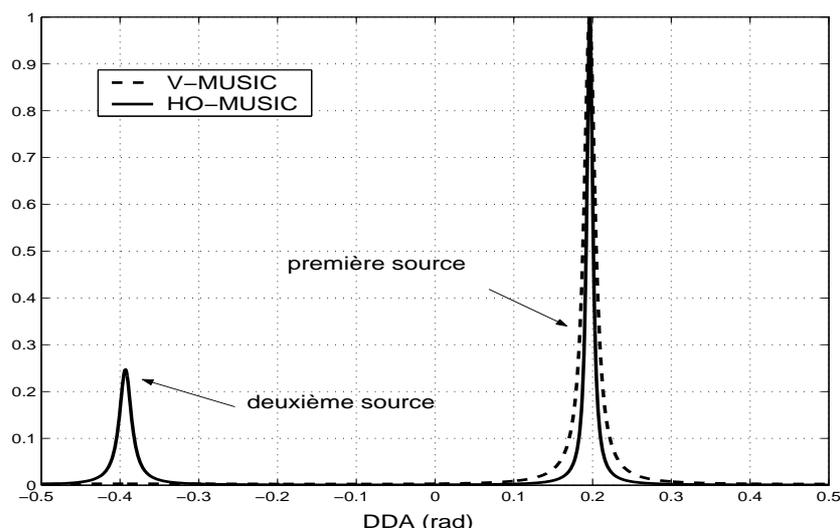


FIG. 3.17 – Estimation de la DDA pour deux sources sur trois composantes (coupe pour  $\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2$  fixés, correspondant à la première source)

Pour les paramètres de polarisation de la première source, les courbes de détection des DDAs des deux algorithmes sont données dans la figure 3.17. On observe que HO-MUSIC est toujours plus résolutif, mais il présente aussi une réponse faible correspondant à la DDA de la deuxième source. Concernant les paramètres de polarisation, la situation reste la même que dans le cas 2C. Sur la figure 3.18, nous avons représenté le plan des paramètres de polarisation pour la première composante de la première source. La largeur du « cône » de détection pour HO-MUSIC reste beaucoup moins importante que celle de V-MUSIC.

Dans la figure 3.19, nous avons tracé l'erreur quadratique moyenne d'estimation de la DDA d'une onde en fonction du rapport signal à bruit, pour les deux algorithmes. Le cas d'une seule onde enregistrée par une antenne à deux composantes a été considéré. Pour l'estimation du tenseur interspectral, cent réalisations indépendantes ont été utilisées, et nous avons calculé l'erreur quadratique sur cent réalisations de l'estimateur, pour chaque point de la figure. On remarque, que, pour le scénario considéré, les deux algorithmes ont des performances similaires. Pour un rapport S/B faible, l'erreur d'estimation pour V-MUSIC est légèrement moins importante que celle de HO-MUSIC.

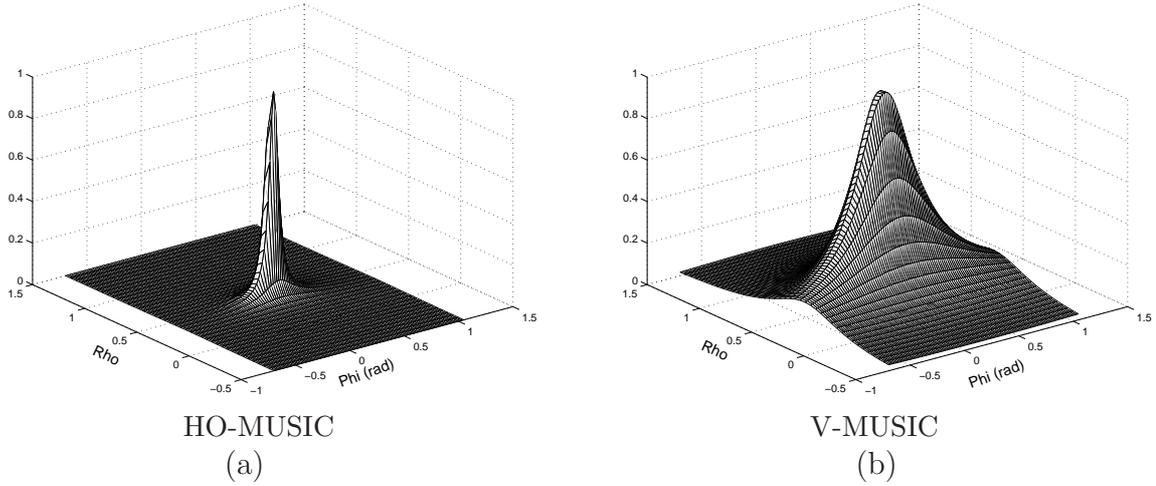


FIG. 3.18 – Le plan des paramètres de polarisation pour la première source (première composante). Les valeurs de  $\theta$ ,  $\rho_2$ ,  $\varphi_2$  ont été fixées

Nous avons vu que, l'utilisation plus complète de l'information multimodale par l'algorithme HO-MUSIC a comme résultat un meilleur pouvoir séparateur de l'algorithme. Cependant, la recherche de sous-espaces orthogonaux suivant chacun des modes limite fortement le nombre maximal des sources que l'on peut détecter, et rend l'algorithme un peu plus sensible au bruit. Un inconvénient de la méthode HO-MUSIC est qu'elle est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que V-MUSIC. Par rapport à ce dernier, où il faut diagonaliser une seule matrice dépliant du tenseur interspectral, le calcul de la HOSVD demande la diagonalisation des quatre matrices. De même, pour la projection orthogonale sur le sous-espace bruit, dans le cas de HO-MUSIC, quatre  $n$ -mode produits sont effectués. Néanmoins, des simplifications seraient envisageables, compte-tenu de la symétrie du tenseur interspectral et pourront faire l'objet de recherches futures.

## Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une nouvelle approche en traitement d'antenne vectorielle, basée sur l'algèbre multilinéaire et, plus précisément sur une représentation multimodale des statistiques d'ordre deux des signaux multicomposantes (le *tenseur interspectral*). Deux algorithmes de traitement d'antenne à haute résolution (*Vector-MUSIC*) et (*Higher-Order MUSIC*), fondés sur des décompositions orthogonales du tenseur interspectral ont été proposés. Ces méthodes permettent d'estimer conjointement la direction d'arrivée et les paramètres de polarisation des ondes captées par une antenne à plusieurs composantes.

Au vu des résultats obtenus sur des simulations, l'apport de l'information contenue dans les relations inter-composantes des capteurs est précieux, car il permet d'améliorer

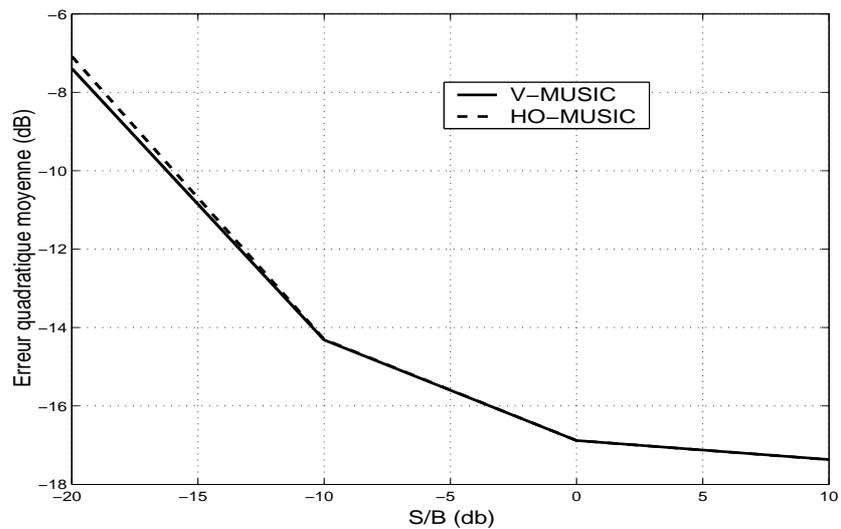


FIG. 3.19 – Erreur quadratique moyenne pour l'estimation de la direction d'arrivée (une seule onde sur une antenne 2C)

les performances des estimateurs par rapport aux méthodes classiques de type MUSIC composante à composante. En fonction du type de contrainte d'orthogonalité (*forte* ou *simple*) imposée entre les sous-espaces « signal » et « bruit » lors de la décomposition du tenseur interspectral, l'information multimodale est utilisée dans une mesure plus ou moins importante. L'orthogonalité suivant chaque mode, imposée par HO-MUSIC, conduit à une meilleure résolution de l'estimateur par rapport à V-MUSIC, mais limite le nombre des sources que l'on peut détecter.

Les améliorations apportées par les modèles et les techniques proposées dans ce chapitre sont dues à leur excellente adéquation à la nature intrinsèquement multimodale des données multicomposantes.



# Chapitre 4

## Traitement d'antenne vectorielle : une approche hypercomplexe

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Les quaternions</b>	<b>93</b>
4.1.1	Opérations élémentaires	94
4.1.2	Autres représentations d'un quaternion	96
4.1.2.1	Représentations scalaire-vecteur	96
4.1.2.2	Représentation polaire	97
4.1.2.3	Représentation de Cayley-Dickson	97
4.1.2.4	Représentations matricielles	98
4.1.2.5	Classes d'équivalence sur $\mathbb{H}$	99
4.1.3	Vecteurs et matrices de quaternions	99
4.1.3.1	Espace de Hilbert des vecteurs à valeurs quaternioniques	99
4.1.3.2	Matrices de quaternions	100
4.1.3.3	Décomposition en valeurs propres d'une matrice quaternionique	102
<b>4.2</b>	<b>MUSIC quaternionique 2C</b>	<b>104</b>
4.2.1	Les quaternions en traitement du signal	105
4.2.2	Modèle quaternionique de la polarisation	105
4.2.3	Matrice interspectrale quaternionique	108
4.2.4	L'orthogonalité des vecteurs de quaternions et l'orthogonalité des vecteurs complexes	111
4.2.5	L'estimateur MUSIC quaternionique	116
4.2.6	Comparaison entre la complexité de calcul pour l'approche quaternionique et l'approche long-vecteur	118
4.2.7	La borne de Cramer-Rao pour le modèle quaternionique d'un signal 2C	120
4.2.8	Simulations et résultats	122

<b>4.3</b>	<b>Les biquaternions</b>	<b>128</b>
4.3.1	Vecteurs et matrices de biquaternions	132
4.3.1.1	Vecteurs de biquaternions	132
4.3.1.2	Matrices de biquaternions	132
4.3.1.3	Matrice quaternionique adjointe d'une matrice biquaternionique	133
4.3.2	Décomposition en valeurs propres d'une matrice biquaternionique	134
4.3.2.1	Décomposition en valeurs propres d'une matrice biquaternionique hermitienne	136
<b>4.4</b>	<b>MUSIC biquaternionique 3C/4C</b>	<b>138</b>
4.4.1	Modèle biquaternionique de la polarisation	138
4.4.2	Matrice interspectrale biquaternionique	140
4.4.3	L'orthogonalité des vecteurs de biquaternions et l'orthogonalité des vecteurs complexes	141
4.4.4	L'estimateur MUSIC biquaternionique	142
4.4.5	Simulations, résultats et discussion	143
	<b>Conclusion</b>	<b>147</b>

---

Ce chapitre propose une nouvelle approche en traitement d'antenne vectorielle. L'utilisation des quaternions et des biquaternions (quaternions à coefficients complexes) sera introduite pour coder les échantillons fréquentiels des signaux reçus sur des capteurs à deux, trois et quatre composantes (2C / 3C / 4C). Nous montrerons comment les quaternions / biquaternions, extensions des nombres complexes dans les espaces à quatre/huit dimensions, permettent de modéliser des signaux vectoriels complexes.

Dans la première partie, nous définirons les quaternions, leurs propriétés et celles des matrices à valeurs quaternioniques. Nous exposerons le principe de calcul de la *décomposition en valeurs propres* d'une matrice quaternionique (QEVD) et analyserons le cas particulier d'une matrice quaternionique hermitienne. Les variables aléatoires quaternioniques seront introduites ainsi que l'extension de la notion de circularité des variables aléatoires complexes aux variables aléatoires quaternioniques.

Dans la seconde partie, nous introduirons un algorithme de type MUSIC pour les signaux à deux composantes, basé sur un modèle quaternionique des ondes reçues sur une antenne vectorielle. Cet algorithme permettra l'estimation conjointe des DDAs et des paramètres de polarisation des ondes enregistrées sur un capteur 2C. Nous dériverons une expression semi-analytique de la borne de Cramer-Rao de l'estimateur proposé et nous comparerons les performances de l'algorithme à celles du MUSIC classique (une composante) et MUSIC long-vecteur pour des signaux 2C.

Les deux dernières parties seront consacrées à l'extension du traitement quaternionique aux antennes vectorielles 3C/4C. Les biquaternions et leurs propriétés seront introduits dans la troisième section. Nous proposerons une méthode pour calculer la décomposition en valeurs propres d'une matrice de biquaternions, et nous démontrerons quelques propriétés des matrices à coefficients biquaternioniques. Dans la section 4, nous introduirons une modélisation des ondes polarisées, enregistrées sur un capteur à trois composantes, basée sur les biquaternions. À partir de ce modèle, un algorithme MUSIC sera proposé, permettant l'estimation des directions d'arrivées et des paramètres de polarisation des sources sur une antenne à trois/quatre composantes.

## 4.1 Les quaternions

Les *quaternions* sont une extension des nombres complexes à l'espace à quatre dimensions (4D). Ils ont été « découverts » par Sir W. R. Hamilton en 1843 [Hamilton43]. Après de vains efforts pour tenter de généraliser les nombres complexes à trois dimensions, il s'est rendu compte qu'une algèbre tridimensionnelle n'est pas suffisante pour décrire les opérations de multiplication et division. La preuve théorique à ce constat arrive quelques dizaines d'années plus tard quand les mathématiciens allemands Frobenius (en 1878) et Hurwitz (en 1896) montrent que les seules valeurs possibles pour les dimensions des algèbres *associatives de division, normées* avec l'élément *identité* sont 1,2,4 et 8 [Kantor89]. Les quaternions peuvent être aussi vus comme un cas spécial des *nombres hypercomplexes* [Kantor89].

Un quaternion  $q$  est un nombre hypercomplexe de dimension quatre à coefficients sur  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des quaternions, noté  $\mathbb{H}$ , forme une algèbre dont le centre<sup>1</sup> est  $\mathbb{R}$ , et de base  $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $q$  a une partie réelle et trois parties imaginaires. Un quaternion est défini par :

$$q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (4.1)$$

où  $q_0, \dots, q_3 \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sont des *unités imaginaires* obéissant aux lois de multiplication suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1, \\ \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j}\mathbf{i} &= -\mathbf{k}, \\ \mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i}\mathbf{k} &= -\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\mathbf{j} &= -\mathbf{i}, \\ \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} &= -1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Un quaternion dont la partie réelle est nulle est appelé *quaternion pur*. Un quaternion pur  $q = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$  définit un vecteur  $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$  dans le repère orthonormé direct  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

Nous passons à présent en revue quelques propriétés des quaternions.

### 4.1.1 Opérations élémentaires

L'ensemble des quaternions avec la multiplication et l'addition des quaternions forme un *corps non-commutatif* [Ward97].

#### Égalité et addition de deux quaternions

Soient deux quaternions  $q$  et  $p \in \mathbb{H}$  :

$$\begin{aligned} q &= q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \\ p &= p_0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec  $q_0, \dots, q_3, p_0, \dots, p_3 \in \mathbb{R}$ .

L'égalité  $q = p$  est vraie si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = p_0 \\ q_1 = p_1 \\ q_2 = p_2 \\ q_3 = p_3 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

L'addition de  $q$  et  $p$  s'écrit :

$$q + p = (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)\mathbf{i} + (q_2 + p_2)\mathbf{j} + (q_3 + p_3)\mathbf{k} \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup>Le centre d'une algèbre est le sous-ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments de l'algèbre.

L'addition des quaternions est commutative et associative.

### Multiplication de deux quaternions

La *multiplication* de  $q$  par un scalaire  $s \in \mathbb{R}$  est donnée par :

$$sq = qs = sq_0 + sq_1 \mathbf{i} + sq_2 \mathbf{j} + sq_3 \mathbf{k} \quad (4.6)$$

La *multiplication entre deux quaternions* est définie à partir des relations (4.2) comme :

$$\begin{aligned} qp &= (q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) + (q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2) \mathbf{i} \\ &+ (q_0 p_2 - q_1 p_3 + q_2 p_0 + q_3 p_1) \mathbf{j} + (q_0 p_3 + q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_0) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.7)$$

En général, le produit de deux quaternions n'est pas commutatif :

$$qp \neq pq \quad (4.8)$$

Une relation intéressante est obtenue pour le produit des deux quaternions purs  $q$  et  $p$  :

$$qp = -\underline{q} \cdot \underline{p} + \underline{q} \wedge \underline{p} \quad (4.9)$$

où  $\underline{q} \cdot \underline{p}$  est le produit scalaire des vecteurs  $\underline{q}$  et  $\underline{p}$  et  $\underline{q} \wedge \underline{p}$  est leur produit vectoriel. Le produit de deux quaternions purs est un quaternion pur si et seulement si leurs vecteurs associés sont orthogonaux.

À cause de la non commutativité du produit, la généralisation des outils de traitement du signal développés dans le cas complexe (ex : transformée de Fourier complexe, décomposition en valeurs propres des matrices complexes, etc.) aux quaternions devra se faire avec précaution.

### Conjugué d'un quaternion

Tout comme pour les nombres complexes, il est possible de définir un *conjugué* :

$$q^* = q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k} \quad (4.10)$$

L'égalité  $q = q^*$  est obtenue pour  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ . Le quaternion est alors un nombre réel. La conjugaison sur  $\mathbb{H}$  est une anti-involution, c'est à dire :

$$(qp)^* = p^* q^* \quad (4.11)$$

### Norme d'un quaternion

On définit la *norme* (ou *le module*) d'un quaternion par :

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q} \quad (4.12)$$

Lorsque cette norme est égale à un, on parle de *quaternion unitaire*. Une propriété importante est liée à la norme d'un produit de quaternions :

$$|qp| = |q||p| \quad (4.13)$$

signifiant que l'algèbre des quaternions est *normée*.

### Inverse d'un quaternion

Pour tout quaternion non nul, il existe un inverse donné par :

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} \quad (4.14)$$

Puisque les quaternions sont une généralisation des nombres complexes, les nombres complexes ainsi que les nombres réels peuvent être vus comme des sous-ensembles de  $\mathbb{H}$ . Considérons un quaternion  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ . Si  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ , on obtient  $q = q_0 \in \mathbb{R}$ , qui définit le corps des réels comme un sous-ensemble de  $\mathbb{H}$ .

Trois autres sous-ensembles  $\mathbb{C}_i$ ,  $\mathbb{C}_j$ ,  $\mathbb{C}_k$ , isomorphes aux complexes  $\mathbb{C}$ , sont obtenus en annulant deux des trois coefficients imaginaires de  $q$  :

$$\begin{cases} q_i = q_0 + \mathbf{i}q_1 \in \mathbb{C}_i \subset \mathbb{H} \\ q_j = q_0 + \mathbf{j}q_2 \in \mathbb{C}_j \subset \mathbb{H} \\ q_k = q_0 + \mathbf{k}q_3 \in \mathbb{C}_k \subset \mathbb{H} \end{cases} \quad (4.15)$$

Nous allons utiliser l'isomorphisme entre  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}_j$  dans la section suivante, pour définir une représentation quaternionique des échantillons fréquentiels d'un signal polarisé.

Pour une liste des propriétés élémentaires des quaternions, nous indiquons les articles [Hamilton43, Hamilton48, Zhang97]. Une analyse plus complète des propriétés algébriques des quaternions, ainsi que leur rapport avec les nombres complexes et les autres nombres hypercomplexes se trouve dans [Ward97, Kantor89].

## 4.1.2 Autres représentations d'un quaternion

Il existe diverses façons de représenter les quaternions, permettant de mettre en évidence certains aspects (ex : lien avec les nombres complexes, interprétation géométrique, etc.). Nous en présentons quelques unes ici.

### 4.1.2.1 Représentations scalaire-vecteur

Un quaternion  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$  peut être séparé en une *partie scalaire*  $S(q) = q_0$  et une *partie vectorielle*  $V(q) = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ . La partie vectorielle est un quaternion pur et définit un vecteur  $\underline{V(q)}$  dans l'espace 3D, comme nous l'avons déjà vu. Avec ces notations, l'expression de  $q$  devient :

$$q = S(q) + V(q) \quad (4.16)$$

Cette notation permet de mettre en évidence l'aspect géométrique (vectoriel) de l'algèbre quaternionique et de donner une expression plus compacte aux opérations sur  $\mathbb{H}$ . Le conjugué de  $q$  s'écrit alors :

$$q^* = S(q) - V(q) \quad (4.17)$$

et le produit de deux quaternions peut s'écrire en fonction des produits scalaire «  $\cdot$  » et vectoriel «  $\wedge$  » de leurs parties vectorielles comme :

$$qp = S(q)S(p) - \underline{V(q)} \cdot \underline{V(p)} + S(p)V(q) + S(q)V(p) + \underline{V(q)} \wedge \underline{V(p)} \quad (4.18)$$

Cette notation permet aussi d'introduire des notions relatives à la colinéarité et à l'orthogonalité des quaternions [Ell92].

#### 4.1.2.2 Représentation polaire

La formule d'Euler, bien connue dans le cas complexe, se généralise aussi aux quaternions [Hamilton48]. Elle permet une interprétation d'un quaternion en module et phase. Un quaternion  $q$  peut alors s'écrire comme :

$$q = S(q) + V(q) = |q| \exp(\mu\phi) \quad (4.19)$$

avec  $|q|$ , la norme de  $q$  donnée par (4.12),  $\mu$ , un quaternion unitaire pur et  $\phi$ , l'angle entre la partie vectorielle et la partie scalaire :

$$\begin{cases} \mu = \frac{V(q)}{|V(q)|} \\ \phi = \arctan \frac{|V(q)|}{S(q)} \end{cases} \quad (4.20)$$

La forme polaire d'un quaternion permet d'exprimer facilement des rotations et réflexions dans l'espace 3D et 4D comme des produits de quaternions [Coxeter46, Ward97].

#### 4.1.2.3 Représentation de Cayley-Dickson

Il est possible de représenter un quaternion sous la forme d'un nombre complexe, dont les deux parties (« réelle » et « imaginaire ») sont, à leur tour, des nombres complexes [Lee49]. En fonction du sous-ensemble de  $\mathbb{H}$  ( $\mathbb{C}_i, \mathbb{C}_j$  ou  $\mathbb{C}_k$ , (voir (4.15))), choisi pour représenter les parties « réelle » et « imaginaire », plusieurs représentations équivalentes sont possibles. Nous avons choisi ici une version de la forme de Cayley-Dickson d'un quaternion qui sera utilisée par la suite pour modéliser un signal complexe à deux composantes.

Un quaternion  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ , peut s'écrire comme :

$$q = q^{(1)} + \mathbf{i}q^{(2)} \quad (4.21)$$

avec  $q^{(1)}, q^{(2)} \in \mathbb{C}_j$  :

$$\begin{cases} q^{(1)} = q_0 + \mathbf{j}q_2 \\ q^{(2)} = q_1 + \mathbf{j}q_3 \end{cases} \quad (4.22)$$

L'expression (4.21) peut se généraliser en mettant à la place des unités imaginaires  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j}$  dans (4.21) et (4.22) deux quaternions purs, unitaires  $\mu_1$  et  $\mu_2$  tels que  $\mu_1 \perp \mu_2$  [Ell00]. La relation (4.21) devient alors un cas particulier (pour  $\mu_1 = \mathbf{j}$  et  $\mu_2 = \mathbf{i}$ ) de l'expression générale de  $q$ , donnée par :

$$q = (q_0' + q_1'\mu_1) + \mu_2(q_2' + q_3'\mu_1) \quad (4.23)$$

où  $\mu_1^2 = \mu_2^2 = -1$  et  $\mu_1\mu_2 = -\mu_2\mu_1$ . La notation de Cayley-Dickson est utile lors de l'étude des matrices de quaternions [Wiegmann55]. Ell et Sangwine ont utilisé cette représentation pour le calcul de la transformée de Fourier d'une image quaternionique, en utilisant deux images complexes [Ell00].

#### 4.1.2.4 Représentations matricielles

Les opérations avec des quaternions peuvent être exprimées aussi en terme de matrices. Il est possible de démontrer que le corps non-commutatif des quaternions est isomorphe à un sous-ensemble de l'espace des matrices réelles de taille  $4 \times 4$  [Ward97]. Si nous notons par  $T_{\mathbb{R}}$ , la transformation isomorphe :

$$T_{\mathbb{R}} : (\mathbb{H}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{M}_{4,\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}, +, \cdot) \quad (4.24)$$

avec  $\mathbb{M}_{4,\mathbb{R}}$ , un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ , « + » et « . », l'addition et la multiplication des quaternions ou des matrices réelles (en fonction des opérandes), l'isomorphisme est défini par :

$$T_{\mathbb{R}}(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Nous pouvons définir aussi un isomorphisme entre  $\mathbb{H}$  et un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  :

$$T_{\mathbb{C}} : (\mathbb{H}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{M}_{2,\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}, +, \cdot) \quad (4.26)$$

défini par :

$$T_{\mathbb{C}}(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} q_0 + q_1\mathbf{i} & q_2 + q_3\mathbf{i} \\ -q_2 + q_3\mathbf{i} & q_0 - q_1\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Les représentations matricielles d'un quaternion permettent de gérer les opérations sur  $\mathbb{H}$  à l'aide de matrices réelles ou complexes. Ceci s'avère utile lorsqu'on utilise des logiciels de calcul matriciel tels que MATLAB. Les quaternions peuvent être alors représentés sous forme de matrice, et les opérations élémentaires avec des quaternions se réduisent à celles sur des matrices réelles ou complexes, gérées par les fonctions internes du logiciel.

Il existe encore d'autres représentations des quaternions, comme celle proposée dans [Bülow99] qui associe à un quaternion, un module et trois phases mais elles ne seront pas abordées ici.

#### 4.1.2.5 Classes d'équivalence sur $\mathbb{H}$

Il est possible de définir des *classes d'équivalence* sur  $\mathbb{H}$ . On dit que deux quaternions  $x$  et  $y$  appartiennent à la même classe d'équivalence s'il existe  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q \neq 0$ , tel que  $y = q^{-1}xq$  [Zhang97].

À l'aide de cette relation d'équivalence, on peut montrer que tout quaternion est équivalent à un quaternion isomorphe à  $\mathbb{C}$  [Serôdio01].

### 4.1.3 Vecteurs et matrices de quaternions

Les premiers travaux sur les matrices aux valeurs quaternioniques datent des années 30 [Wolf36], mais ce n'est que récemment, avec la découverte de la capacité des quaternions à modéliser divers phénomènes physiques, que les matrices de quaternions sont revenues à l'attention des scientifiques [Gerstner89, Chen91, So94, Zhang97, Le Bihan04b]. Nous allons, dans cette section, décrire quelques outils autour des matrices de quaternions.

#### 4.1.3.1 Espace de Hilbert des vecteurs à valeurs quaternioniques

Un vecteur de quaternions est un élément de l'espace  $\mathbb{H}^N$ . L'ensemble  $\mathbb{H}^N$  avec l'addition des vecteurs à valeurs quaternioniques et la multiplication à droite d'un vecteur par un scalaire quaternionique présente une structure d'*espace vectoriel*.

Nous définissons le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}^N$ , comme :

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}} = \mathbf{q}^\dagger \mathbf{p} \quad (4.28)$$

avec  $(\dagger)$  le *transposé-conjugué* d'un vecteur de quaternions.

Il en découle la *norme d'un vecteur de quaternions* définie par :

$$\|\mathbf{q}\| = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}} = \mathbf{q}^\dagger \mathbf{q} \quad (4.29)$$

L'ensemble des vecteurs à valeurs quaternioniques, forme donc un espace de Hilbert (espace vectoriel transformé en espace métrique complet par la norme induite par le produit scalaire).

À partir de la définition du produit scalaire, nous pouvons définir l'*orthogonalité* des vecteurs de quaternions. Deux vecteurs de quaternions sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul :

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}} = 0 \quad (4.30)$$

L'orthogonalité des vecteurs de quaternions sera étudiée plus en détails dans la suite de ce chapitre.

### 4.1.3.2 Matrices de quaternions

Puisque  $\mathbb{H}$  est un corps non-commutatif, les propriétés des matrices quaternioniques diffèrent par rapport au cas réel ou complexe. Nous présentons les principales caractéristiques des matrices de quaternions ainsi qu'une méthode pour leur décomposition en valeurs propres.

Les définitions de la transposée ( $T$ ), conjuguée ( $*$ ) et transposée-conjuguée ( $\dagger$ ) d'une matrice quaternionique sont les mêmes que dans le cas complexe (le conjugué d'un quaternion est défini en (4.10)).

Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{M \times N}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{N \times P}$  sont deux matrices de quaternions, alors les relations suivantes autour de la transposition, conjugaison et transposition-conjugaison, sont vraies [Zhang97] :

1.  $(\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$
2.  $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$
3.  $(\mathbf{AB})^* \neq \mathbf{A}^* \mathbf{B}^*$  en général
4.  $(\mathbf{AB})^T \neq \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  en général
5.  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$  si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont inversibles
6.  $(\mathbf{A}^\dagger)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\dagger$  si  $\mathbf{A}$  est inversible
7.  $(\mathbf{A}^*)^{-1} \neq (\mathbf{A}^{-1})^*$  en général

Par suite de la non-commutativité des quaternions, les égalités (3, 4, 7) qui sont vérifiées dans le cas complexe ne sont plus valables pour les matrices quaternioniques.

Tout comme pour les quaternions, il est possible de définir un isomorphisme entre l'ensemble des matrices à valeurs quaternioniques et un sous-ensemble de l'anneau des matrices complexes. En utilisant l'isomorphisme entre  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}_i$ , une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{M \times N}$  peut s'écrire comme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j \quad (4.31)$$

où  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_i^{M \times N}$ . Si nous utilisons  $\mathbb{C}_j$  ou  $\mathbb{C}_k$  à la place de  $\mathbb{C}_i$ , deux autres représentations de  $\mathbf{A}$ , équivalentes à (4.31), sont possibles. La *matrice complexe adjointe* de  $\mathbf{A}$ , notée  $\chi_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}_i^{2M \times 2N}$  est alors définie comme :

$$\chi_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_2^* & \mathbf{A}_1^* \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

La matrice  $\chi_{\mathbf{A}}$  conserve le caractère hermitien et unitaire de  $\mathbf{A}$ , et présente les propriétés suivantes [Lee49] :

1.  $\chi_{\mathbf{I}_N} = \mathbf{I}_{2N}$
2.  $\chi_{\mathbf{AB}} = \chi_{\mathbf{A}} \chi_{\mathbf{B}}$
3.  $\chi_{\mathbf{A+B}} = \chi_{\mathbf{A}} + \chi_{\mathbf{B}}$
4.  $\chi_{\mathbf{A}^\dagger} = (\chi_{\mathbf{A}})^\dagger$

5.  $\chi_{\mathbf{A}^{-1}} = (\chi_{\mathbf{A}})^{-1}$  si  $\mathbf{A}^{-1}$  existe
6.  $\chi_{\mathbf{A}}$  est de rang  $2r$  si  $\mathbf{A}$  est de rang  $r$

Nous proposons, dans la suite, une propriété qui permet de retrouver une matrice quaternionique à partir de sa matrice complexe adjointe, par factorisation.

**Propriété 4.1** *Soit une matrice de quaternions  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{M \times N}$  et  $\chi_{\mathbf{A}}$  sa matrice complexe adjointe définie par (4.32); alors l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \Upsilon_M \chi_{\mathbf{A}} \Upsilon_N^\dagger \quad (4.33)$$

pour  $\Upsilon_N \in \mathbb{C}_j^{N \times 2N}$  défini par :

$$\Upsilon_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & -\mathbf{I}_N j \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

**Démonstration :** La preuve est immédiate par calcul. Si nous substituons (4.32) dans (4.33) et effectuons les multiplications, (4.33) devient :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}_1 + j\mathbf{A}_2^* + \mathbf{A}_2 j - j\mathbf{A}_1^* j] \quad (4.35)$$

Sachant que  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}_i$ , les égalités suivantes sont vraies :

$$j\mathbf{A}_1^* = \mathbf{A}_1 j \quad \text{et} \quad j\mathbf{A}_2^* = \mathbf{A}_2 j \quad (4.36)$$

En remplaçant (4.36) dans (4.35), on obtient :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [2\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2 j] = \mathbf{A} \quad (\text{cf. (4.31)}) \quad (4.37)$$

■

Pour les vecteurs,  $\Upsilon_M$  définit un isomorphisme entre l'ensemble des vecteurs complexes  $\mathbf{u}_c = (\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2^*)^T \in \mathbb{C}_i^{2M}$  et l'ensemble des vecteurs quaternioniques  $\mathbf{u}_q = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 j \in \mathbb{H}^M$ , par :

$$\mathbf{u}_q = \Upsilon_M \mathbf{u}_c \quad (4.38)$$

Les relations suivantes peuvent être démontrées pour  $\Upsilon_M$  :

$$\Upsilon_M \Upsilon_M^\dagger = 2\mathbf{I}_M \quad (4.39)$$

$$\chi_{\mathbf{A}} \Upsilon_N^\dagger \Upsilon_N = \Upsilon_M^\dagger \Upsilon_M \chi_{\mathbf{A}} \quad (4.40)$$

La première propriété (4.39) se vérifie facilement par calcul. Pour la deuxième, il suffit de multiplier l'égalité (4.40) à gauche par  $\Upsilon_M$  et à droite par  $\Upsilon_N^\dagger$  et d'appliquer ensuite (4.39).

La matrice complexe adjointe permet d'analyser le comportement d'une matrice quaternionique par l'étude de la matrice complexe associée et de transformer le calcul sur l'espace des matrices quaternioniques en opérations sur l'anneau des matrices complexes. La matrice complexe adjointe a été aussi utilisée pour diagonaliser des matrices de quaternions [Lee49, Wiegmann55, Mehta91, Le Bihan04b] et pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à coefficients quaternioniques [Costa99].

### 4.1.3.3 Décomposition en valeurs propres d'une matrice quaternionique

La non-commutativité de la multiplication quaternionique rend nécessaire la définition de deux types de valeurs propres (gauches et droites) pour les matrices à coefficients quaternioniques. Elles sont les solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_d\lambda_d \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_g = \lambda_g\mathbf{x}_g \end{cases} \quad (4.41)$$

où  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times N}$  et  $\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_d \in \mathbb{H}^N$ . Les vecteurs  $\mathbf{x}_g$  et  $\mathbf{x}_d$  sont appelés vecteurs propres gauches et droits respectivement. Lee démontre dans [Lee49] l'existence des valeurs propres droites d'une matrice de quaternions et il montre qu'elles sont les mêmes que les valeurs propres de sa matrice complexe adjointe. En ce qui concerne les *valeurs propres gauches*, leur existence dans le cas général d'une matrice de quaternions n'est pas certaine [Huang01]. Dorénavant nous allons utiliser « abusivement » les termes *valeurs propres* et *vecteurs propres* d'une matrice quaternionique pour faire référence à ses *valeurs propres droites*, respectivement ses *vecteurs propres droits*.

Des algorithmes pour le calcul de la *décomposition en valeurs singulières (SVD)*<sup>2</sup> d'une matrice quaternionique, basés sur la matrice complexe adjointe, ont été proposés dans [Le Bihan04b]. Nous présentons une variante de ces algorithmes, pour le calcul de la *décomposition en valeurs propres* d'une matrice quaternionique carrée, par diagonalisation de la matrice complexe adjointe.

Soit  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times N}$  une matrice aux valeurs quaternioniques. Il a été démontré [Zhang97] que  $\mathbf{A}$  a exactement  $N$  valeurs propres au sens des classes d'équivalence (voir paragraphe 4.1.2.5).

Afin de calculer sa décomposition en valeurs propres :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger \quad (4.42)$$

il convient tout d'abord de calculer la matrice complexe adjointe de  $\mathbf{A}$ ,  $\chi_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}_i$ , à l'aide de la relation (4.32). Lee a montré [Lee49] que toutes les valeurs propres réelles de  $\chi_{\mathbf{A}}$  (si elles existent) apparaissent en paires et les valeurs complexes, en paires conjuguées. En effectuant la décomposition en valeurs propres de cette matrice complexe :

$$\chi_{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_{\chi_{\mathbf{A}}}\mathbf{D}_{\chi_{\mathbf{A}}}\mathbf{U}_{\chi_{\mathbf{A}}}^\dagger \quad (4.43)$$

nous obtenons les matrices  $\mathbf{U}_{\chi_{\mathbf{A}}}, \mathbf{D}_{\chi_{\mathbf{A}}} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$  qui présentent une structure spéciale. La matrice  $\mathbf{D}_{\chi_{\mathbf{A}}}$ , contenant les valeurs propres complexes de  $\chi_{\mathbf{A}}$ , a une structure diagonale de la forme :

$$\mathbf{D}_{\chi_{\mathbf{A}}} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_1^*, \sigma_2, \sigma_2^*, \dots, \sigma_N, \sigma_N^*\} \quad (4.44)$$

<sup>2</sup>en anglais : *Singular Value Decomposition*

Afin de retrouver la décomposition de la matrice  $\mathbf{A}$  nous construisons la matrice diagonale  $\mathbf{D}$  en prenant les valeurs propres de  $\mathbf{D}_{\chi_{\mathbf{A}}}$  situées aux positions impaires :

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\} \quad (4.45)$$

Pour construire la matrice des vecteurs propres quaternioniques  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) \in \mathbb{H}^{N \times N}$ , considérons d'abord les  $N$  vecteurs propres complexes associés aux valeurs propres choisies  $\mathbf{u}_{\chi_1}, \dots, \mathbf{u}_{\chi_N} \in \mathbb{C}_i^N$ . Les vecteurs  $\mathbf{u}_n \in \mathbb{H}^N$ ,  $n = 1, \dots, N$  sont obtenus alors à partir des vecteurs  $\mathbf{u}_{\chi_n}$  par la transformation suivante :

$$\mathbf{u}_n = \Upsilon_N \mathbf{u}_{\chi_n} \quad (4.46)$$

**Lemme 4.1** *Pour une matrice de quaternions  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times N}$ , si  $\mathbf{u}_{\chi}$  est un vecteur propre de  $\chi_{\mathbf{A}}$  (4.32) alors  $\mathbf{u} = \Upsilon_N \mathbf{u}_{\chi}$ , avec  $\Upsilon_N$  défini par (4.34), est un vecteur propre de  $\mathbf{A}$ .*

**Démonstration :** Si  $\mathbf{u}_{\chi}$  est un vecteur droit de  $\chi_{\mathbf{A}}$  et  $\lambda$  sa valeur propre associée, alors :

$$\chi_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_{\chi} = \mathbf{u}_{\chi} \lambda \quad (4.47)$$

En utilisant (4.33) et (4.46), nous pouvons écrire :

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \Upsilon_N \chi_{\mathbf{A}} \Upsilon_N^\dagger \Upsilon_N \mathbf{u}_{\chi} \quad (4.48)$$

Si les propriétés de  $\Upsilon_N$ , données par les équations (4.39) et (4.40), sont utilisées,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \Upsilon_N \Upsilon_N^\dagger \Upsilon_N \chi_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_{\chi} \\ &= \frac{1}{2} 2 \mathbf{I}_N \Upsilon_N \chi_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_{\chi} \\ &= \Upsilon_N \chi_{\mathbf{A}} \mathbf{u}_{\chi} \end{aligned} \quad (4.49)$$

En remplaçant (4.47) dans (4.49), nous obtenons :

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \Upsilon_N \mathbf{u}_{\chi} \lambda = \mathbf{u} \lambda \quad (4.50)$$

donc  $\mathbf{u} = \Upsilon_N \mathbf{u}_{\chi}$  est un vecteur propre droit de  $\mathbf{A}$  et  $\lambda$  est sa valeur propre associée. ■

Nous obtenons ainsi une décomposition en valeurs propres de la matrice quaternionique  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^\dagger \quad (4.51)$$

avec  $\mathbf{D}$  définie par (4.45) et  $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{N \times N}$  dont les colonnes sont calculées à l'aide de la relation (4.46).

Nous démontrons deux propriétés, essentielles pour l'algorithme que nous introduisons plus loin dans ce chapitre, concernant les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice hermitienne de quaternions.

**Propriété 4.2** *Les valeurs propres d'une matrice quaternionique hermitienne sont réelles.*

**Démonstration :** Soit  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ ,  $\lambda$  une valeur propre droite de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^N$ , le vecteur propre associé, tel que  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u}\lambda$ . Dans le cas général,  $\lambda \in \mathbb{C}_i$ . La quantité  $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = \sum_{n=1}^N u_n^* u_n = \sum_{n=1}^N |u_n|^2 \in \mathbb{R}$  commute avec  $\lambda$ . Nous pouvons alors écrire :

$$\lambda^*(\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}) = (\mathbf{u}\lambda)^\dagger \mathbf{u} = (\mathbf{A}\mathbf{u})^\dagger \mathbf{u} = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{A}^\dagger \mathbf{u} = \mathbf{u}^\dagger (\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})\lambda \quad (4.52)$$

Il en résulte :

$$\lambda = \lambda^* \quad (4.53)$$

donc  $\lambda \in \mathbb{R}$ . ■

Une autre propriété qui découle directement de 4.2 est que, pour une matrice quaternionique hermitienne, les valeurs propres gauches et droites se confondent.

**Propriété 4.3** *Les vecteurs propres d'une matrice quaternionique, hermitienne, correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.*

**Démonstration :** Considérons deux valeurs propres distinctes de  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times N}$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ), et leurs vecteurs propres associés  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{H}^N$ . Alors :

$$\lambda_1(\mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1 \lambda_1)^\dagger \mathbf{u}_2 = (\mathbf{A}\mathbf{u}_1)^\dagger \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{A}^\dagger \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^\dagger (\mathbf{A}\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1^\dagger (\mathbf{A}\mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2)\lambda_2 \quad (4.54)$$

Puisque  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , alors (4.54)  $\Rightarrow \mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2 = 0$ . Les vecteurs  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont donc orthogonaux (cf. (4.30)). ■

Dans la section suivante nous allons montrer que l'orthogonalité des vecteurs de quaternions impose des contraintes particulières entre les vecteurs complexes constituants (dans la représentation de Cayley-Dickson d'un vecteur quaternionique).

Nous avons vu dans le chapitre 2 de ce manuscrit que le modèle stochastique est le plus adapté pour une onde polarisée, enregistrée sur une antenne vectorielle. Afin d'utiliser les quaternions pour décrire la polarisation d'une onde, la notion de variable aléatoire (bien établie dans le cas réel et complexe) doit être étendue aux variables à valeurs quaternioniques. Les notions de *variable aléatoire quaternionique* et de *circularité* des variables aléatoires quaternioniques sont détaillées dans l'annexe B.

Nous allons illustrer la propriété de  $\mathbb{C}^j$ -circularité, dans le cadre de l'algorithme proposé dans la section suivante de ce chapitre.

## 4.2 MUSIC quaternionique 2C

Jusqu'aux années 90, les quaternions présentaient un intérêt principalement théorique en mathématique et physique (notamment mécanique quantique). Avec le développement

de la puissance de calcul, le besoin de modèles mathématiques permettant de gérer et traiter des données présentant une structure complexe (ex : images couleurs, signaux multicomposantes, etc.) a conduit à la « redécouverte » des nombres hypercomplexes, en traitement du signal.

### 4.2.1 Les quaternions en traitement du signal

L'espace de Hilbert des vecteurs à valeurs quaternioniques, introduit en début de chapitre, fixe le cadre théorique pour le traitement des signaux à valeurs sur  $\mathbb{H}$ .

Un des premiers algorithmes utilisant les nombres hypercomplexes en traitement du signal a été introduit par Schütte [Schütte90]. Il a utilisé une version des quaternions présentant la propriété de commutativité par rapport à la multiplication. Plus récemment, Ell et Sangwine ont introduit des transformées spectrales hypercomplexes et des techniques quaternioniques de traitement d'images couleur [Ell92, Sangwine96, Sangwine98, Sangwine99]. Pei et Cheng ont proposé un algorithme quaternionique pour la compression des images couleur, ainsi qu'une transformée de Fourier hypercomplexe [Pei97, Pei04]. Une version hypercomplexe du signal analytique multidimensionnel de Hahn [Hahn92], basée sur une transformée de Fourier quaternionique 2D, a été introduite par Bülow et Sommer [Bülow99, Bülow01].

En géophysique, étant donné que le modèle quaternionique s'adapte parfaitement aux acquisitions multicomposantes, l'algèbre des quaternions a été utilisée pour divers types de traitement. La représentation en module et trois phases du signal analytique quaternionique [Bülow99] a été utilisée, pour extraire des attributs sismiques [Le Bihan01b, Miron03] à partir d'une section sismique mono-composante. Le Bihan [Le Bihan02, Le Bihan04b] a codé les signaux temporels enregistrés par les trois géophones d'un seismomètre sur les trois parties d'un quaternion pur, afin de réaliser le débruitage des données sismiques multicomposantes, et la séparation d'ondes par SVD quaternionique. Il a utilisé aussi les matrices polynomiales sur  $\mathbb{H}$  pour séparer des mélanges convolutifs d'ondes polarisées [Le Bihan05].

Nous proposons, dans la suite, un algorithme de traitement d'antenne vectorielle à haute résolution, basé sur un modèle quaternionique d'un signal polarisé enregistré sur des capteurs à deux composantes.

### 4.2.2 Modèle quaternionique de la polarisation

Considérons une source polarisée qui émet un champ d'ondes stationnaires dans un milieu isotrope et homogène. Cette onde est enregistrée sur un capteur à deux composantes, et il en résulte, en l'absence de bruit, deux signaux temporels  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^{N_t}$ . Si nous passons dans le domaine de Fourier, à une fréquence donnée  $\nu$ , les signaux enregistrés sur les deux composantes s'expriment comme :

$$x_1(\nu) = \beta_1(\nu)e^{j\alpha_1(\nu)} \quad \text{et} \quad x_2(\nu) = \beta_2(\nu)e^{j\alpha_2(\nu)} \quad (4.55)$$

où  $\beta_1, \beta_2$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  sont les amplitudes et les phases des composantes du signal à la fréquence  $\nu$ . Nous avons choisi ici le sous-ensemble  $\mathbb{C}_j \subset \mathbb{H}$ , pour exprimer les signaux dans le domaine

fréquentiel, pour des raisons qui seront expliquées plus loin. L'utilisation de  $j$  à la place de  $i$  comme axe de la transformée de Fourier ne modifie pas le sens physique du module et de la phase du signal. Afin d'alléger la notation, nous omettrons l'argument fréquentiel par la suite et nous allons considérer que nous travaillons à une fréquence donnée  $\nu = \nu_0$ .

La première composante est prise comme référence et nous nous intéressons au déphasage et à l'amplitude relative de la deuxième composante par rapport à la première. Si la polarisation est stationnaire en temps, ces deux paramètres définissent l'ellipse de polarisation du signal (voir (2.50)). Notons  $\rho = \beta_2/\beta_1$ , le rapport d'amplitude, et  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ , le déphasage entre les deux composantes. Pour estimer la polarisation d'une onde sur un capteur à deux composantes, les deux paramètres  $\rho$  et  $\varphi$  doivent être estimés.

Avec les notations introduites dans (4.55), nous construisons le signal quaternionique  $x \in \mathbb{H}$ , qui décrit un signal polarisé enregistré sur un capteur à deux composantes (à une fréquence donnée) :

$$x = \beta_1 e^{j\alpha_1} + \mathbf{i}\beta_2 e^{j\alpha_2} \quad (4.56)$$

avec :

$$\begin{cases} e^{j\alpha_1} = \cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1 \\ e^{j\alpha_2} = \cos \alpha_2 + j \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (4.57)$$

Ce modèle s'appuie sur la représentation de Cayley-Dickson d'un quaternion, introduite dans la section précédente (voir (4.21)).

En utilisant (4.57), l'expression (4.56) s'écrit en fonction de  $\mathbf{i}$ ,  $j$ ,  $\mathbf{k}$  comme :

$$x = \beta_1 \cos \alpha_1 + \mathbf{i}\beta_2 \cos \alpha_2 + j\beta_1 \sin \alpha_1 + \mathbf{k}\beta_2 \sin \alpha_2. \quad (4.58)$$

Nous introduisons de cette manière une transformation entre l'espace des signaux  $2\mathbb{C}$  à valeurs complexes et l'espace des signaux à valeurs quaternioniques. Cette transformation fait correspondre aux parties paires de deux composantes, la partie scalaire et la partie imaginaire en  $\mathbf{i}$  du signal quaternionique et aux parties impaires, les deux autres champs imaginaires du quaternion ( $j$  et  $\mathbf{k}$ ).

Si nous substituons  $\beta_2$  et  $\alpha_2$  dans (4.56) par :

$$\begin{cases} \beta_2 = \rho\beta_1 \\ \alpha_2 = \varphi + \alpha_1 \end{cases} \quad (4.59)$$

le signal  $x$  s'écrit comme le produit d'une expression quaternionique  $p(\rho, \varphi)$  (qui décrit le comportement d'une onde polarisée sur les deux composantes) et l'amplitude complexe de l'onde sur la première composante. Ce signal  $x$  s'exprime par :

$$x = p(\rho, \varphi)\beta_1 e^{j\alpha_1}, \quad (4.60)$$

avec

$$p(\rho, \varphi) = 1 + i\rho e^{j\varphi}. \quad (4.61)$$

Afin d'étendre ce modèle au cas multicateurs et introduire ainsi le nouvel algorithme MUSIC quaternionique, nous considérons une antenne linéaire, uniforme, composée de  $N_x$  capteurs à deux composantes (voir Fig. 4.1).

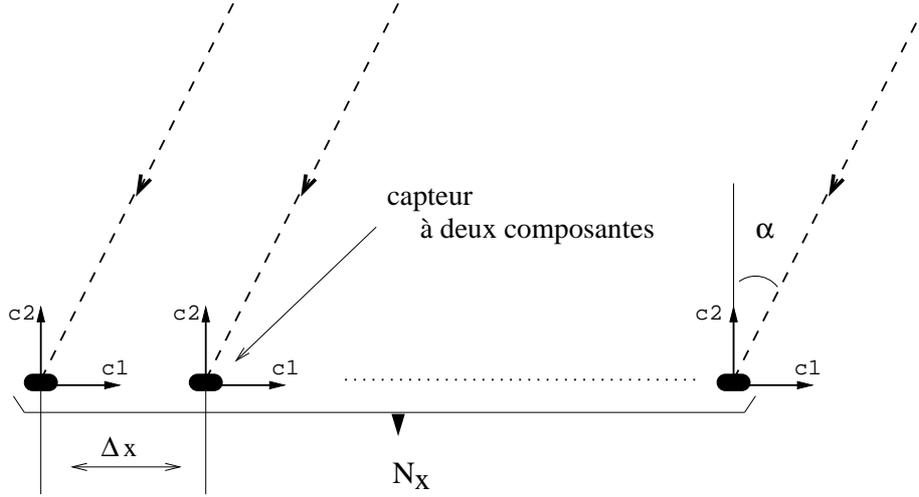


FIG. 4.1 – Antenne linéaire uniforme à deux composantes ( $c_1, c_2$ )

Considérons aussi qu'un champ d'ondes planes engendré par  $F$  ( $F$  : supposé connu,  $F < N_x$ ) sources, arrive sur l'antenne. Les sources sont supposées être décorrélées, spatialement cohérentes et contenues dans le plan de l'antenne. Leurs polarisations sont stationnaires en temps et le long de l'antenne. Le bruit sur les capteurs est spatialement blanc et non-polarisé.

Pour caractériser la DDA d'une onde sur l'antenne, nous allons utiliser le déphasage intercapteurs  $\theta$ . L'expression de  $\theta$  en fonction de la DDA  $\alpha$ , de la distance inter-capteurs  $\Delta x$  et de la vitesse de propagation des ondes  $v_f$  est donnée par :

$$\theta_f = 2\pi\nu \frac{\Delta x \sin \alpha_f}{v_f} \quad (4.62)$$

Si nous considérons le premier capteur de l'antenne comme référence, la propagation d'une onde  $f$  le long de l'antenne est modélisée par un vecteur  $\mathbf{a}_f(\theta_f) \in \mathbb{C}_j^{N_x}$  :

$$\mathbf{a}_f(\theta_f) = (1, e^{-j\theta_f}, \dots, e^{-j(N_x-1)\theta_f})^T \quad (4.63)$$

Ainsi, le signal en sortie d'une antenne vectorielle de  $N_x$  capteurs 2C, peut être mis sous la forme d'un vecteur de quaternions  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{N_x}$ , égal à la somme des contributions de  $F$  sources, plus un terme de bruit :

$$\mathbf{x} = \sum_{f=1}^F \mathbf{d}_f \beta_{1f} \exp(j\alpha_{1f}) + \mathbf{b}. \quad (4.64)$$

Dans (4.64),  $\mathbf{b} \in \mathbb{H}^{N_x}$  contient la contribution du bruit sur les composantes de tous les capteurs,  $\beta_{1f}$  et  $\alpha_{1f}$  sont donnés par (4.56) et  $\mathbf{d}_f \in \mathbb{H}^{N_x}$  est un vecteur de quaternions décrivant le comportement de la  $f^{\text{ième}}$  source sur l'antenne vectorielle :

$$\mathbf{d}_f(\theta_f, \rho_f, \varphi_f) = p_f(\rho_f, \varphi_f) \mathbf{a}_f(\theta_f) \quad (4.65)$$

ou :

$$\mathbf{d}_f(\theta_f, \rho_f, \varphi_f) = \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{i}\rho_f e^{j\varphi_f} \\ e^{-j\theta_f} + \mathbf{i}\rho_f e^{j(\varphi_f - \theta_f)} \\ \vdots \\ e^{-j(N-1)\theta_f} + \mathbf{i}\rho_f e^{j(\varphi_f - (N-1)\theta_f)} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Un vecteur unitaire  $\mathbf{c}_f$  peut être obtenu en divisant  $\mathbf{d}_f$  par sa norme :

$$\mathbf{c}_f = \frac{\mathbf{d}_f}{\|\mathbf{d}_f\|} = \frac{p_f(\rho_f, \varphi_f) \mathbf{a}_f(\theta_f)}{\|\mathbf{d}_f\|} \quad (4.67)$$

avec  $\|\mathbf{d}_f\| = \sqrt{N_x(1 + \rho_f^2)}$ .

### 4.2.3 Matrice interspectrale quaternionique

Nous avons montré qu'une observation sur une antenne à deux composantes peut s'écrire, dans le domaine fréquentiel, sous la forme d'un vecteur quaternionique (4.64). Nous introduisons maintenant la matrice de covariance pour une observation quaternionique que nous appelons *matrice interspectrale quaternionique* [Miron05c].

Pour une observation vectorielle quaternionique  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{N_x}$ , la matrice interspectrale quaternionique  $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{H}^{N_x \times N_x}$  est définie par :

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{E} [\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger] \quad (4.68)$$

Si nous substituons (4.64) dans (4.68) et sachant que le conjugué d'un produit de deux quaternions est égal au produit des conjugués des quaternions dans l'ordre inverse,  $\mathbf{\Omega}$  peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \mathbf{E} \left[ \left[ \sum_{f=1}^F \mathbf{c}_f \|\mathbf{d}_f\| \beta_{1f} \exp(j\alpha_{1f}) + \mathbf{b} \right] \left[ \sum_{f=1}^F \mathbf{c}_f \|\mathbf{d}_f\| \beta_{1f} \exp(j\alpha_{1f}) + \mathbf{b} \right]^\dagger \right] \\ &= \mathbf{E} \left[ \left[ \sum_{f=1}^F \mathbf{c}_f \|\mathbf{d}_f\| \beta_{1f} \exp(j\alpha_{1f}) + \mathbf{b} \right] \left[ \sum_{f=1}^F \beta_{1f} \exp(-j\alpha_{1f}) \mathbf{c}_f^\dagger \|\mathbf{d}_f\| + \mathbf{b}^\dagger \right] \right] \quad (4.69) \end{aligned}$$

En prenant en compte la décorrélation entre les sources elles mêmes et entre les sources et le bruit, l'expression de la matrice interspectrale quaternionique devient :

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_S + \mathbf{\Omega}_B \quad (4.70)$$

où la partie signal est définie par :

$$\mathbf{\Omega}_S = \sum_{f=1}^F \sigma_f^2 \mathbf{c}_f \mathbf{c}_f^\dagger, \quad (4.71)$$

et  $\mathbf{\Omega}_B = \mathbf{E} [\mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger]$  est une matrice qui contient les statistiques d'ordre deux du bruit. Dans (4.71)

$$\sigma_f^2 = (\beta_{1f} \|\mathbf{d}_f\|)^2 = N_x (\beta_{1f}^2 + \beta_{2f}^2) \quad (4.72)$$

représente la puissance de la  $f^{\text{ième}}$  source sur l'antenne.

Afin de comprendre la signification statistique de cette nouvelle quantité (la *matrice interspectrale quaternionique*), la relation entre les statistiques des quaternions et les statistiques des nombres complexes doit être étudiée. L'observation quaternionique  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{N_x}$  peut s'écrire en fonction de deux composantes à valeurs complexes  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{C}_j^{N_x}$  comme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{i}\mathbf{x}_2 \quad (4.73)$$

Nous montrons que  $\mathbf{x}$  est un vecteur aléatoire quaternionique  $\mathbb{C}^j$ -circulaire (voir (B.5)). Si les signaux temporels enregistrés sur les deux composantes de l'antenne sont stationnaires en temps, pour toutes les fréquences non-nulles, les composantes spectrales d'un processus stationnaire sont complexes circulaires [Lacoume97]. Étant donné que  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  sont obtenus suite à la transformée de Fourier d'un tel processus, les relations suivantes sont vraies :

$$\mathbf{x}_1 \stackrel{ddp}{=} \mathbf{x}_1 e^{j\varphi}, \mathbf{x}_2 \stackrel{ddp}{=} \mathbf{x}_2 e^{j\varphi} \quad \forall \varphi \quad (4.74)$$

Dans (4.74) les égalités sont au sens des densités de probabilité (ddp). Si nous substituons (4.74) dans (4.73), nous obtenons :

$$\mathbf{x} \stackrel{ddp}{=} \mathbf{x}_1 e^{j\varphi} + \mathbf{i}\mathbf{x}_2 e^{j\varphi} \stackrel{ddp}{=} \mathbf{x} e^{j\varphi} \quad \forall \varphi \quad (4.75)$$

Le vecteur aléatoire quaternionique  $\mathbf{x}$  est donc invariant par *translation droite de Clifford*. Nous disons alors qu'il est  $\mathbb{C}^j$ -circulaire à droite. Nous avons nommé ce type de circularité « à droite », pour faire la différence par rapport à la définition donnée dans [Amblard04], basée sur la *translation gauche de Clifford* (voir (B.5)).

Si nous substituons (4.73) dans (4.68), l'expression de  $\mathbf{\Omega}$  peut être mise sous la forme suivante :

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{E} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^\dagger] - \mathbf{E} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^\dagger] \mathbf{i} + \mathbf{i} \mathbf{E} [\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1^\dagger] - \mathbf{i} \mathbf{E} [\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^\dagger] \mathbf{i} \quad (4.76)$$

Dans (4.76), nous pouvons identifier les expressions des matrices d'auto-covariance et d'inter-covariance pour les deux composantes complexes de l'antenne. Si nous notons  $\mathbf{\Gamma}_{11} = \mathbb{E} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^\dagger]$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{12} = \mathbb{E} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^\dagger]$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{21} = \mathbb{E} [\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1^\dagger]$  et  $\mathbf{\Gamma}_{22} = \mathbb{E} [\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^\dagger]$  nous retrouvons les sous-matrices de la matrice interspectrale *long-vecteur* (voir (2.52)) d'une antenne 2C :

$$\mathbf{\Gamma}_{long} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_{11} & \mathbf{\Gamma}_{12} \\ \mathbf{\Gamma}_{21} & \mathbf{\Gamma}_{22} \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

Aucune de ces quatre matrices n'est calculée explicitement lors de l'estimation de la matrice interspectrale quaternionique. Ceci réduit le temps de calcul et la place mémoire nécessaire pour l'algorithme par rapport aux algorithmes de type long-vecteur, comme nous allons le montrer un peu plus loin.

**Propriété 4.4** *La partie signal de la matrice spectrale quaternionique,  $\mathbf{\Omega}_S$ , est une matrice Toeplitz.*

**Démonstration :** Considérons la partie signal de  $\mathbf{\Omega}$  :

$$\mathbf{\Omega}_S = \sum_{f=1}^F \sigma_f^2 \mathbf{c}_f \mathbf{c}_f^\dagger, \quad (4.78)$$

où  $\mathbf{c}_f$  est défini par (4.67). Si nous substituons (4.67) dans (4.78), nous obtenons :

$$\mathbf{\Omega}_S = \sum_{f=1}^F \left( \frac{\sigma_f}{\|\mathbf{d}_f\|} \right)^2 p_f \mathbf{a}_f \mathbf{a}_f^\dagger p_f^* = \sum_{f=1}^F \left( \frac{\sigma_f}{\|\mathbf{d}_f\|} \right)^2 p_f \mathbf{A}_f p_f^*, \quad (4.79)$$

où  $p_f \in \mathbb{H}$  est donné par (4.61) et  $\mathbf{A}_f = \mathbf{a}_f \mathbf{a}_f^\dagger$  est une matrice hermitienne complexe  $\in \mathbb{C}_j^{N_x \times N_x}$  et présentant une forme Toeplitz :

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & e^{j\theta_f} & \dots & \\ e^{-j\theta_f} & 1 & e^{j\theta_f} & \\ \vdots & e^{-j\theta_f} & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

La multiplication de  $\mathbf{A}_f$  à gauche par  $p_f$  et à droite par  $p_f^*$ , ( $\mathbf{C}_f = p_f \mathbf{A}_f p_f^*$ ) conserve la structure Toeplitz :

$$\mathbf{C}_f = \begin{pmatrix} 1 & p_f e^{j\theta_f} p_f^* & \dots & \\ p_f e^{-j\theta_f} p_f^* & 1 & p_f e^{j\theta_f} p_f^* & \\ \vdots & p_f e^{-j\theta_f} p_f^* & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.81)$$

Alors,  $\mathbf{\Omega}_S$  peut s'écrire, compte tenu de (4.72), comme une somme pondérée de matrices de Toeplitz quaternioniques  $\mathbf{\Omega}_S = \sum_{f=1}^F \beta_{1f}^2 \mathbf{C}_f$ . ■

Comme le bruit sur les capteurs est considéré blanc et non-polarisé, la partie bruit de la matrice interspectrale quaternionique  $\mathbf{\Omega}_B = \mathbf{E} [\mathbf{xx}^\dagger]$  est une matrice réelle, diagonale, contenant sur la diagonale principale les puissances des bruits sur les  $N_x$  capteurs.

Ces résultats sont importants, car ils permettent d'appliquer, dans le cas où on a une seule réalisation du vecteur d'observation, les méthodes de lissage suivant les diagonales, pour améliorer le conditionnement de la matrice interspectrale quaternionique (voir chapitre 2).

#### 4.2.4 L'orthogonalité des vecteurs de quaternions et l'orthogonalité des vecteurs complexes

L'algorithme de traitement d'antenne vectorielle proposé dans ce chapitre est basé sur la décomposition en valeurs propres de la matrice interspectrale quaternionique. Si  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$  est une estimation de celle-ci, sa décomposition en valeurs propres s'écrit :

$$\widehat{\mathbf{\Omega}} = \sum_{f=1}^{N_x} \lambda_f \widehat{\mathbf{u}}_f \widehat{\mathbf{u}}_f^\dagger \quad (4.82)$$

Étant donné le caractère hermitien de celle-ci, ses valeurs propres sont réelles et ses vecteurs propres, orthogonaux (d'après les propriétés 4.2 et 4.3). Pour mieux comprendre le fonctionnement de l'algorithme, il est nécessaire d'étudier les différences entre les contraintes imposées par l'orthogonalité des vecteurs de quaternions par rapport à l'orthogonalité des vecteurs complexes obtenus par concaténation des composantes (modèle *long-vecteur*).

Considérons deux vecteurs  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}^{N_x}$  et leurs représentations de Cayley-Dickson :

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{i}\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{i}\mathbf{q}_2 \end{cases} \quad (4.83)$$

dans lesquelles  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  et  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{C}^{N_x}$  sont des vecteurs complexes, pouvant être assimilés aux composantes d'une antenne vectorielle 2C (voir (4.73)).

Si les deux composantes sont traitées séparément comme des antennes *scalaires* (voir chapitre 2), les relations d'orthogonalité pour les vecteurs de la base orthogonale du sous-espace signal sont données par les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_1^\dagger \mathbf{q}_1 = 0 \\ \mathbf{q}_2^\dagger \mathbf{q}_2 = 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

Dans une approche de type *long-vecteur* nous construisons les vecteurs de grande taille  $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^{2N_x}$  :

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \text{ and } \tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.85)$$

Dans ce cas, l'orthogonalité des vecteurs complexes  $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}$  implique :

$$\langle \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \quad (4.86)$$

qui s'écrit en fonction de (4.85) comme :

$$[\mathbf{p}_1^\dagger | \mathbf{p}_2^\dagger] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.87)$$

La contrainte d'orthogonalité pour les long-vecteurs se traduit alors par la contrainte suivante sur les composantes complexes de l'antenne :

$$\mathbf{q}_1^\dagger \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2^\dagger \mathbf{p}_2 = 0 \quad (4.88)$$

Si nous utilisons la représentation *quaternionique* d'une antenne 2C, la contrainte d'orthogonalité définie par (4.30), pour les vecteurs à valeurs quaternioniques  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ , s'écrit :

$$(\mathbf{q}_1^\dagger - \mathbf{q}_2^\dagger \mathbf{i})(\mathbf{p}_1 + \mathbf{i} \mathbf{p}_2) = 0 \quad (4.89)$$

Après calcul, en annulant la partie libre et la partie en  $\mathbf{i}$  de (4.89), nous obtenons :

$$\mathbf{q}_1^\dagger \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2^\dagger \mathbf{p}_2 = 0 \quad (4.90)$$

$$\mathbf{q}_1^T \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2^T \mathbf{p}_1 \quad (4.91)$$

Nous observons que par rapport à l'*orthogonalité de type long-vecteur* (4.88), l'*orthogonalité des vecteurs de quaternions* impose une contrainte de plus (4.91). La question est de savoir si la deuxième contrainte est compatible avec la première (si (4.91) entraîne l'exclusion de (4.90)) ou bien elle est triviale ((4.90)  $\Rightarrow$  (4.91)).

Nous montrons à l'aide de deux exemples numériques que (4.91) est compatible avec (4.90) est qu'elle ne découle pas de (4.90).

**Exemple 1 :** Considérons  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{C}^3$  définis par :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -0.3286 - 0.1998j \\ -0.3090 - 0.2856j \\ -0.3368 - 0.3534j \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -0.3529 - 0.3546j \\ -0.3103 - 0.1448j \\ -0.0791 - 0.2511j \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0.1232 - 0.2396j \\ 0.0425 - 0.3371j \\ 0.0709 + 0.4814j \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0.0804 + 0.1064j \\ -0.2400 + 0.3502j \\ 0.0869 - 0.6080j \end{pmatrix}$$

Pour ce jeu de vecteurs, les égalités (4.90) et (4.91) sont vérifiées, montrant que les deux contraintes ne sont pas incompatibles.

**Exemple 2 :** Nous considérons ensuite un deuxième exemple avec les valeurs suivantes :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -0.2918 - 0.2407j \\ -0.2933 - 0.2334j \\ -0.2549 - 0.2104j \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -0.3124 - 0.2973j \\ -0.4091 - 0.3374j \\ -0.3130 - 0.2048j \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0.3896 + 0.3205j \\ -0.4620 + 0.2509j \\ 0.3200 - 0.2827j \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} -0.2953 - 0.1160j \\ -0.0177 + 0.1209j \\ 0.1220 - 0.3954j \end{pmatrix}$$

Nous pouvons constater facilement par calcul que dans ce cas (4.90) est vérifiée tandis que (4.91) ne l'est pas.

**Exemple 3 :** Nous avons montré que (4.90) n'implique pas (4.91). Afin que les deux contraintes soient complètement indépendantes, il faut aussi montrer que (4.91) n'implique pas (4.90). L'exemple numérique suivant illustre cette affirmation :

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -0.2347 + 0.4077j \\ -0.0740 + 0.3935j \\ 0.0759 - 0.1138j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0.0289 + 0.2782j \\ -0.5186 + 0.1381j \\ 0.1498 + 0.4593j \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0.4650 + 0.2144j \\ -0.0899 + 0.1219j \\ -0.5093 - 0.0066j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0.0591 + 0.4422j \\ -0.1730 - 0.2840j \\ 0.2118 - 0.3177j \end{pmatrix}.$$

Pour  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  donnés ci-dessus, la relation (4.91) est satisfaite alors que (4.90) ne l'est pas. Ces trois exemples numériques montrent la compatibilité et l'indépendance des deux contraintes d'orthogonalité quaternioniques.

L'orthogonalité du modèle quaternionique inclut l'orthogonalité de type long-vecteur :

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}} = 0 \Rightarrow \langle \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \quad (4.92)$$

La réciproque n'est pas toujours vraie. Nous regardons maintenant dans quelle situation l'orthogonalité de type long-vecteur et celle du type quaternionique sont équivalentes. Supposons que  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  sont les composantes de deux sources polarisées sur une antenne 2C. Les relations suivantes peuvent être alors écrites entre les composantes :

$$\begin{cases} \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \rho_p \mathbf{e}^{j\varphi_p} \\ \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 \rho_q \mathbf{e}^{j\varphi_q} \end{cases} \quad (4.93)$$

où  $\rho_p, \varphi_p$  et  $\rho_q, \varphi_q$  sont les paramètres de polarisation des sources (voir (4.61)). Si nous introduisons (4.93) dans (4.91), nous obtenons :

$$\mathbf{q}_1^T \mathbf{p}_1 \rho_p \mathbf{e}^{j\varphi_p} = \mathbf{q}_1^T \mathbf{p}_1 \rho_q \mathbf{e}^{j\varphi_q}. \quad (4.94)$$

En imposant que (4.94) soit vraie pour tout  $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{C}^N$ , les solutions suivantes en résultent :  $\rho_p = \rho_q$  et  $\varphi_p = \varphi_q$ , signifiant que les sources ont des polarisations identiques. Théoriquement, les bases vectorielles du sous-espace signal, obtenues par ces deux approches différentes sont identiques si les ondes ont des polarisations identiques ou s'il y a une seule onde présente dans le signal.

Les équations (4.84), (4.90) et (4.91) peuvent être réécrites à l'aide du produit scalaire des vecteurs complexes comme :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1 \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \\ \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \end{cases}, \quad (4.95)$$

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1 \rangle_{\mathbb{C}} = - \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathbb{C}} \quad (4.96)$$

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2^* \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1^* \rangle_{\mathbb{C}} \quad (4.97)$$

où \* dénote la conjugaison complexe.

Les tableaux 4.1 et 4.2 résument la discussion sur l'orthogonalité dans le cas *scalaire* (composante par composante), *long-vecteur* et *quaternionique* en termes de produit scalaire entre les composantes. Chaque cellule du tableau correspond au produit scalaire des vecteurs complexes associés.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$
$\mathbf{p}_1$	0	
$\mathbf{p}_2$		0

TAB. 4.1 – Relations entre les composantes lors du traitement de chaque composante indépendamment

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1^*$	$\mathbf{q}_2^*$
$\mathbf{p}_1$	$\Rightarrow$			$\rightarrow$
$\mathbf{p}_2$		$\Leftarrow$	$\rightarrow$	

$\Rightarrow, \Leftarrow$  : la contrainte d'orthogonalité long-vecteur

$\Rightarrow, \Leftarrow, \rightarrow$  : contraintes d'orthogonalité quaternionique

TAB. 4.2 – Relations entre les composantes pour l'orthogonalité de type long-vecteur et quaternionique

En 4.2, les flèches de forme identique indiquent les produits scalaires qui sont forcés à être égaux en valeur absolue. La direction de la flèche indique le signe du produit scalaire (de gauche à droite pour positif et de droite à gauche pour négatif) par rapport à la quantité correspondante, égale en module. La flèche double représente la contrainte de type long-vecteur et une cellule vide indique qu'il n'y a pas de contrainte entre les vecteurs associés. Quand on traite une seule composante à la fois (Tab. 4.1), il n'y a pas de lien entre les produits scalaires de composantes. Chaque paire de composantes est forcée à l'orthogonalité séparément, représentant deux problèmes différents. L'orthogonalité de type long-vecteur contraint les deux composantes des vecteurs (voir Tab. 4.2, les flèches doubles) ( $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1\}$  et  $\{\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2\}$ ) et l'orthogonalité quaternionique réduit de plus les degrés de liberté des composantes, en imposant encore une contrainte entre elles (voir Tab. 4.2, les flèches simples).

Une question émerge naturellement après cette discussion : « Quel est l'effet de cette nouvelle contrainte d'orthogonalité (quaternionique) sur les algorithmes basés sur la décomposition en sous-espaces orthogonaux ? » Nous montrons dans la deuxième partie que, pour des signaux complexes à deux composantes, l'orthogonalité des vecteurs de quaternions améliore la résolution de l'algorithme quaternionique présenté plus loin.

Considérons deux matrices carrées aux valeurs complexes  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 \in \mathbb{C}^{50 \times 50}$ , dont les coefficients ont été obtenus à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires suivant une loi normale.  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  peuvent être assimilées à des données (en fréquence) enregistrées sur une antenne de 50 capteurs à deux composantes. À partir de ces deux matrices nous créons une matrice complexe « long-vecteur »  $\mathbf{C}_{lv} \in \mathbb{C}^{100 \times 50}$  par concaténation de  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  :

$$\mathbf{C}_{lv} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

et une matrice quaternionique  $\mathbf{C}_q \in \mathbb{H}^{50 \times 50}$  comme :

$$\mathbf{C}_q = \mathbf{C}_1 + \mathbf{i}\mathbf{C}_2 \quad (4.99)$$

Les éléments de la matrice  $\mathbf{C}_q$  sont donc des variables aléatoires quaternioniques  $\mathbb{H}$ -circulaires au deuxième ordre (annexe B). Après la décomposition en valeurs singulières (SVD) de  $\mathbf{C}_{lv}$  et de  $\mathbf{C}_q$ , les matrices peuvent s'écrire comme une somme de 50 termes de rang un :

$$\mathbf{C}_{lv} = \sum_{r=1}^{50} \mathbf{u}_r \sigma_r \mathbf{v}_r^\dagger, \quad \text{où } \mathbf{u}_r \in \mathbb{C}^{100}, \mathbf{v}_r \in \mathbb{C}^{50} \quad (4.100)$$

$$\mathbf{C}_q = \sum_{r=1}^{50} \mathbf{p}_r \delta_r \mathbf{q}_r^\dagger, \quad \text{où } \mathbf{p}_r, \mathbf{q}_r \in \mathbb{H}^{50}. \quad (4.101)$$

Les vecteurs complexes  $\mathbf{u}_r$  dans (4.100) forment une base de type *long-vecteur* et les vecteurs quaternioniques  $\mathbf{p}_r$  dans (4.101) une base de type quaternionique dans l'espace défini par les deux composantes. Des approximations par troncature de rang  $R$  de  $\mathbf{C}_{lv}$  et  $\mathbf{C}_q$  peuvent être construites :

$$\mathbf{C}_{lv}^R = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}_r \sigma_r \mathbf{v}_r^\dagger, \quad (4.102)$$

$$\mathbf{C}_q^R = \sum_{r=1}^R \mathbf{p}_r \delta_r \mathbf{q}_r^\dagger \quad (4.103)$$

avec  $1 \leq R \leq 50$ .

Afin d'estimer l'erreur d'approximation de rang  $R$  pour les deux décompositions, nous calculons les deux fonctions d'erreur suivantes :

$$E_{lv}(R) = \frac{\|\mathbf{C}_{lv} - \mathbf{C}_{lv}^R\|}{\|\mathbf{C}_1\| + \|\mathbf{C}_2\|}, \quad (4.104)$$

$$E_q(R) = \frac{\|\mathbf{C}_q - \mathbf{C}_q^R\|}{\|\mathbf{C}_1\| + \|\mathbf{C}_2\|}, \quad (4.105)$$

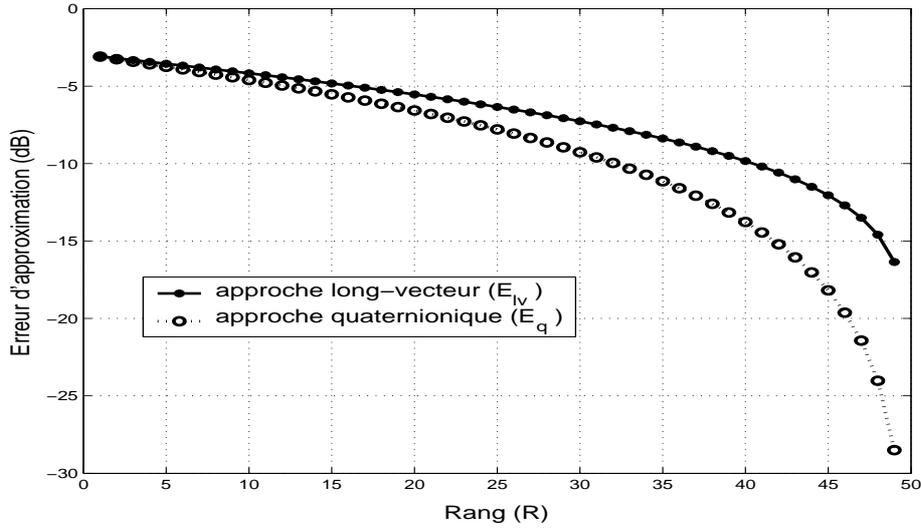


FIG. 4.2 – Erreur d'approximation de rang pour les approches long-vecteur et quaternionique

où  $\|\cdot\|$  est la norme de Frobenius<sup>3</sup> d'une matrice.

Dans la figure 4.2, nous avons tracé les deux courbes d'erreur  $E_{lv}$  et  $E_q$  en fonction du rang d'approximation  $R$ . Les deux courbes ont été obtenues en moyennant sur cent réalisations indépendantes de  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$ . Les erreurs d'approximation pour le rang 1 sont identiques pour les deux approches. Ceci confirme le résultat théorique (présenté plus tôt dans cette section) montrant que dans le cas d'une seule onde ou dans le cas de deux ondes de polarisations identiques, les deux approches sont équivalentes. Pour tous les autres rangs supérieurs à 1, l'erreur d'approximation pour l'approche quaternionique est inférieure à celle de l'approche long-vecteur ( $E_q(R) < E_{lv}(R)$ ,  $1 < R < 50$ ). Par exemple, le gain apporté par l'approche quaternionique pour la troncature de rang 45 est approximativement de 5 dB.

La SVD quaternionique permet donc une meilleure approximation par troncature de rang par rapport à la SVD complexe, en concentrant l'énergie des vecteurs sur les premières valeurs singulières de la décomposition. Ce résultat sera implicitement exploité dans la section suivante lors de la séparation en sous-espaces signal et bruit de la matrice interspectrale quaternionique.

#### 4.2.5 L'estimateur MUSIC quaternionique

Nous avons présenté le modèle quaternionique d'une onde polarisée, enregistrée sur une antenne de capteurs à deux composantes. Nous introduisons dans cette partie un algorithme de type MUSIC basé sur la décomposition en valeurs propres de la **matrice interspec-**

<sup>3</sup>La norme de Frobenius d'une matrice  $\mathbf{A}$  de taille  $M \times N$  est définie comme la racine carrée de la somme du module carré de ses éléments  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |a_m^n|^2}$ .

**trale quaternionique**, permettant l'estimation conjointe des DDAs (le déphasage intercepteurs  $\theta$ ) et des paramètres de polarisation  $\rho, \varphi$  (4.61) des ondes polarisées, incidentes sur l'antenne.

Si

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{f=1}^{N_x} \lambda_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f^\dagger \quad (4.106)$$

est la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des observations, par identification avec (4.71), nous associons les  $K$  premières valeurs propres à la partie signal, des observations et les  $N_x - K$  autres valeurs propres à la partie bruit. Tout comme dans le cas scalaire (chapitre 2), le choix du nombre de sources  $K$  résulte de l'étude de la courbe des valeurs propres de la matrice interspectrale quaternionique ou de l'emploi de divers critères statistiques (AIC, MDL, etc.). Nous allons supposer par la suite que le nombre de sources est connu.

De même façon que dans le cas scalaire (voir (2.36)), deux matrices  $\mathbf{P} \in \mathbb{H}^{N_x \times F}$  et  $\mathbf{G} \in \mathbb{H}^{N_x \times (N_x - F)}$  peuvent être définies, telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_F) \\ \mathbf{G} &= (\mathbf{u}_{F+1}, \dots, \mathbf{u}_{N_x}) \end{aligned} \quad (4.107)$$

$\mathbf{P}$  contient les vecteurs propres correspondant au sous-espace signal et  $\mathbf{G}$ , les vecteurs propres correspondant au sous-espace bruit. Après un calcul identique à celui présenté dans le cas du MUSIC scalaire (voir (2.37) ... (2.41)), nous obtenons :

$$\mathbf{c}_f^\dagger(\theta_f, \rho_f, \varphi_f) \mathbf{G} \mathbf{G}^\dagger \mathbf{c}_f(\theta_f, \rho_f, \varphi_f) = 0 \quad (4.108)$$

$\widehat{\mathbf{\Pi}}_B = \widehat{\mathbf{G}} \widehat{\mathbf{G}}^\dagger$  représente le *projecteur orthogonal quaternionique* sur le sous-espace bruit, avec  $\widehat{\mathbf{G}}$  une estimation de  $\mathbf{G}$  issue de la décomposition en valeurs propres de la matrice interspectrale estimée  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$ . Il est facile de vérifier, sachant que les colonnes de  $\widehat{\mathbf{G}}$  sont orthonormées, que  $\widehat{\mathbf{\Pi}}_B$  présente toutes les propriétés d'un projecteur orthogonal (voir sous-section 2.2.5).

Nous retrouvons ainsi, pour la fonctionnelle MUSIC quaternionique, la forme suivante :

$$Q(\theta, \rho, \varphi) = \frac{1}{\mathbf{q}^\dagger(\theta, \rho, \varphi) \widehat{\mathbf{\Pi}}_B \mathbf{q}(\theta, \rho, \varphi)} \quad (4.109)$$

avec  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^{N_x}$ , le *vecteur directionnel quaternionique* :

$$\mathbf{q}(\theta, \rho, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{N_x(1 + \rho^2)}} \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{i}\rho e^{\mathbf{j}\varphi} \\ e^{-\mathbf{j}\theta} + \mathbf{i}\rho e^{\mathbf{j}(\varphi - \theta)} \\ \vdots \\ e^{-\mathbf{j}(N_x - 1)\theta} + \mathbf{i}\rho e^{\mathbf{j}(\varphi - (N_x - 1)\theta)} \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

La fonctionnelle (4.109) comporte des maxima locaux pour des valeurs  $(\theta, \rho, \varphi)$  correspondant aux sources présentes dans le signal :

$$\{\theta_f, \rho_f, \varphi_f\} = \arg \left\{ \max_{\theta, \rho, \varphi} (Q(\theta, \rho, \varphi)) \right\} \quad (4.111)$$

Tout comme pour les algorithmes introduits dans le chapitre précédant, on estime les paramètres d'intérêt en faisant varier  $\theta, \rho, \varphi$  dans un intervalle donné de valeurs, avec un pas choisi, et en prenant les  $F$  premiers maxima de cette hypersurface.

## 4.2.6 Comparaison entre la complexité de calcul pour l'approche quaternionique et l'approche long-vecteur

Dans cette section nous réalisons une comparaison entre le coût de calcul pour les méthodes de type long-vecteur et l'algorithme MUSIC quaternionique proposé. Une estimation exhaustive de la complexité des algorithmes est difficile et ne présente pas trop d'intérêt car dépendant de l'implémentation concrète du système de calcul. Nous analysons dans la suite un seul aspect du problème, l'estimation de la matrice de covariance. Ce processus, impliquant des opérations répétitives, illustre mieux la différence de complexité entre les deux algorithmes.

Les complexités des méthodes sont évaluées en terme de place mémoire nécessaire, nombre d'opérations avec la mémoire (écriture - lecture), et opérations arithmétiques élémentaires : addition (A), multiplication (M) et division (D) de nombres réels.

Considérons une antenne vectorielle de  $N_x$  capteurs à deux composantes. Une observation est donnée par deux vecteurs complexes  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{C}^{N_x}$ . La représentation quaternionique,  $\mathbf{p} \in \mathbb{H}^{N_x}$ , et la représentation de type long-vecteur,  $\tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}^{2N_x}$ , ont les expressions suivantes :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{i}\mathbf{p}_2 \quad (4.112)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

Les matrices de covariance associées sont définies par :  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{E} [\mathbf{p}\mathbf{p}^\dagger] \in \mathbb{H}^{N_x \times N_x}$  et  $\tilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{E} [\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{p}}^\dagger] \in \mathbb{C}^{2N_x \times 2N_x}$ . Si la moyenne sur  $L$  réalisations de la matrice de covariance est utilisée pour les estimations, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{p}_l \mathbf{p}_l^\dagger = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{\Omega}_l \quad (4.114)$$

et

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \tilde{\mathbf{p}}_l \tilde{\mathbf{p}}_l^\dagger = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \tilde{\mathbf{\Omega}}_l \quad (4.115)$$

Chacune des matrices  $\mathbf{\Omega}_l$  a  $N_x^2$  coefficients et peut être représentée par  $4N_x^2$  valeurs réelles, tandis que les matrices  $\tilde{\mathbf{\Omega}}_l$  ont  $4N_x^2$  coefficients complexes correspondants à  $8N_x^2$  valeurs réelles. L'algorithme quaternionique réduit ainsi de moitié la quantité de mémoire nécessaire pour la représentation des données ce qui implique une baisse du nombre d'opérations avec la mémoire (lecture et écriture de données) et un gain proportionnel en vitesse de calcul.

Nous étudions ensuite le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour l'estimation de la matrice de covariance. Chacun des coefficients quaternioniques de  $\mathbf{\Omega}_l$  est le résultat de la multiplication de deux quaternions. La multiplication de deux quaternions implique 16 multiplications (M) et 12 additions (A) de réels, donc au total  $16N_x^2$  (M) et  $12N_x^2$  (A) pour la matrice entière.

Pour la matrice complexe  $\tilde{\mathbf{\Omega}}_l$ , on a besoin de  $16N_x^2$  (M) et  $8N_x^2$  (A). Ainsi, pour la somme  $\sum_{l=1}^L \mathbf{\Omega}_l$ ,  $16N_x^2 L$  (M) et  $12N_x^2 L + (L-1)4N_x^2 = 16N_x^2 L - 4N_x^2$  (A) sont nécessaires, tandis que pour  $\sum_{l=1}^L \tilde{\mathbf{\Omega}}_l$  nous avons besoin de  $16N_x^2 L$  (M) et  $8N_x^2 L + (L-1)8N_x^2 = 16N_x^2 L - 8N_x^2$  (A). Ces résultats prennent en compte les multiplications des vecteurs d'observation ainsi que les sommes des matrices.

La division finale par  $L$  implique encore  $4N_x^2$  divisions de nombres réels (D) pour l'algorithme quaternionique et  $8N_x^2$  (D) dans le cas long-vecteur.

	Place mémoire (réels)	Opérations mémoire	Multiplications (M)	Additions (A)	Divisions (D)
Modèle quat.	$4N_x^2$	$\approx 4N_x^2 L$	$16N_x^2 L$	$16N_x^2 L - 4N_x^2$	$4N_x^2$
Long-vecteur	$8N_x^2$	$\approx 8N_x^2 L$	$16N_x^2 L$	$16N_x^2 L - 8N_x^2$	$8N_x^2$
Comparaison	rapp = 1/2	rapp $\approx$ 1/2	diff = 0	diff = + $4N_x^2$	rapp=1/2

TAB. 4.3 – Le coût du calcul pour l'estimation des matrices de covariance des données

Le tableau 4.3 résume l'effort de calcul pour la matrice de covariance dans le cas quaternionique et dans le cas long-vecteur. On voit que l'utilisation du modèle quaternionique réduit les besoins de mémoire par un facteur de deux. Par conséquent, le nombre d'opérations avec la mémoire est réduit approximativement par le même facteur. Il en résulte un gain en rapidité important, spécialement pour des données de grande taille. Concernant le nombre d'opérations élémentaires sur des valeurs réelles, l'approche quaternionique demande  $4N_x^2$  additions de plus et  $4N_x^2$  divisions de moins par rapport au long-vecteur.

Le calcul des vecteurs quaternioniques de la matrice estimée  $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{H}^{N_x \times N_x}$  peut être effectué en utilisant des algorithmes travaillant sur le corps des complexes ou directement sur  $\mathbb{H}$ . En complexe, les algorithmes utilisés sont basés sur la décomposition en valeurs propres de la matrice complexe adjointe (voir (4.32)) de  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\chi_{\mathbf{\Omega}} \in \mathbb{C}^{2N_x \times 2N_x}$ . Dans ce cas, la complexité de calcul de la décomposition en valeurs propres de la matrice quaternionique  $\mathbf{\Omega}$  est équivalente à la décomposition de la matrice complexe  $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ . L'avantage de cette approche est la possibilité d'utiliser des routines de diagonalisation des matrices complexes, optimisées (ex : LAPACK [Lapack]).

Néanmoins, il a été montré [Gerstner89] qu'en travaillant directement dans le domaine

des quaternions, la vitesse de convergence des algorithmes augmente. Ce résultat renforce l'idée que l'utilisation des quaternions améliore les performances des algorithmes.

### 4.2.7 La borne de Cramer-Rao pour le modèle quaternionique d'un signal 2C

Afin d'avoir une meilleure évaluation des performances de l'approche quaternionique proposée, nous dérivons une expression semi-analytique de la borne de Cramer-Rao (BCR) pour le problème d'estimation non-biaisée des paramètres de polarisation et de la DDA d'une onde sur une antenne multicomposante [Miron05a].

Le modèle d'une observation quaternionique décrit par (4.64) peut se réécrire sous forme matricielle comme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{s} + \mathbf{b} \quad (4.116)$$

où  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N_x \times F}$ , ses colonnes sont les  $\mathbf{d}_f$  (4.65), et

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_F)^T \quad (4.117)$$

est un vecteur contenant les puissances des sources sur l'antenne,  $s_f = \beta_{1f} \exp(j\alpha_{1f})$  (voir (4.64)).

Considérons  $L$  réalisations indépendantes du vecteur des observations  $\mathbf{x}(l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ . Pour simplifier la dérivation, nous allons considérer le vecteur  $\mathbf{s}$  comme certain, connu. Cela n'empêche pas  $\mathbf{s}(1) \dots \mathbf{s}(L)$  d'être des réalisations particulières d'un processus aléatoire. Nous faisons également l'hypothèse que le bruit et le signal sont décorrélés. Le bruit reste donc le seul mécanisme aléatoire et il sera soumis aux hypothèses suivantes (utilisées pour ce type de problème [Stoica89, Weiss91]) :

- $\mathbf{b}$  présente une distribution Gaussienne de moyenne nulle ;
- la puissance du bruit sur une composante d'un capteur est  $\sigma$  et est considérée connue ;
- $\mathbf{E} [\mathbf{b}(l)\mathbf{b}^\dagger(r)] = \begin{cases} 2\sigma\mathbf{I}_{N_x} & \text{pour } l = r \\ 0 & \text{pour } l \neq r \end{cases}$
- $\mathbf{E} [\mathbf{b}(l)\mathbf{b}^T(r)] = 0$  pour tout  $l, r$  ;

Dans la suite, nous dérivons la borne de Cramer-Rao pour le vecteur des paramètres

$$\mathbf{p} = [\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\rho}^T, \boldsymbol{\varphi}^T] \quad (4.118)$$

avec

$$\boldsymbol{\theta}^T = (\theta_1, \dots, \theta_F) \quad (4.119)$$

$$\boldsymbol{\rho}^T = (\rho_1, \dots, \rho_F) \quad (4.120)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T = (\varphi_1, \dots, \varphi_F) \quad (4.121)$$

et  $F$ , le nombre de sources.

Avec ces hypothèses, pour une observation  $l$ , la fonction de vraisemblance est :

$$V(\mathbf{x}(l)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N_x}{2}} \det(\mathbf{\Omega}_x)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{x}(l) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{s}]^\dagger \mathbf{\Omega}_x^{-1} [\mathbf{x}(l) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{s}]\right) \quad (4.122)$$

Compte tenu de l'hypothèse sur le caractère déterministe des sources, la matrice de covariance des observations est égale à la matrice de covariance du bruit,  $\mathbf{\Omega}_x = \mathbf{\Omega}_b = 2\sigma\mathbf{I}_{N_x}$ , et son déterminant  $\det(\mathbf{\Omega}_x) = 2^{N_x}\sigma^{N_x}$ .

Si on prend en compte les  $L$  réalisations, la fonction de vraisemblance des observations devient :

$$V(\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(L)) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N_x L}{2}} \sigma^{\frac{N_x L}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4\sigma} \sum_{l=1}^L [\mathbf{x}(l) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{s}]^\dagger [\mathbf{x}(l) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{s}]\right) \quad (4.123)$$

La log-vraisemblance de  $\mathbf{x}$  prend alors la forme suivante :

$$\ln(V(\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(L))) = \ln(V(\mathbf{x})) = C - \frac{N_x L}{2} - \frac{1}{4\sigma} \sum_{l=1}^L [\mathbf{x}(l) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{s}]^\dagger [\mathbf{x}(l) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{s}] \quad (4.124)$$

où  $C$  est une constante.

Avec ces notations, la matrice d'information de Fisher (MIF) [Van Trees68] est donnée par :

$$f_{mn} = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \ln(V(\mathbf{x}))}{\partial p_m} \frac{\partial \ln(V(\mathbf{x}))}{\partial p_n} \right] \quad (4.125)$$

où  $p_m, p_n$  sont deux éléments du vecteur des paramètres. En remplaçant (4.124) dans (4.125) et après simplification, l'expression de la MIF devient :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\theta\theta} & \mathbf{F}_{\theta\rho} & \mathbf{F}_{\theta\varphi} \\ \mathbf{F}_{\rho\theta} & \mathbf{F}_{\rho\rho} & \mathbf{F}_{\rho\varphi} \\ \mathbf{F}_{\varphi\theta} & \mathbf{F}_{\varphi\rho} & \mathbf{F}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

où

$$\mathbf{F}_{\theta\theta} = \frac{L}{4\sigma} \Re \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{A}_\theta \mathbf{S} \right) \quad (4.127)$$

$$\mathbf{F}_{\theta\rho} = \frac{L}{4\sigma} \Re \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{A}_\rho \mathbf{S} \right) \quad (4.128)$$

avec

$$\mathbf{S} = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_F\} \text{ et } \mathbf{A}_\theta = \sum_{f=1}^F \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f}. \quad (4.129)$$

La BCR de tout estimateur non-biaisé du  $l^{\text{ième}}$  paramètre  $p_l$  du vecteur de paramètres  $\mathbf{p}$  est :

$$\mathbb{E} [(\hat{p}_l - p_l)^2] \geq (\mathbf{F}^{-1})_{ll} \quad (4.130)$$

où  $(\mathbf{F}^{-1})_{ll}$  est le  $l^{\text{ième}}$  élément sur la diagonale principale de la matrice inverse de  $\mathbf{F}$ .

Les détails de calcul pour ces expressions se trouvent dans l'annexe C.

Ce résultat théorique sera illustré dans la section suivante par un exemple numérique.

### 4.2.8 Simulations et résultats

Les performances de l'algorithme MUSIC *quaternionique* (Q-MUSIC) sont comparées avec celles du MUSIC pour les antennes *scalaires*, présenté dans le deuxième chapitre et avec l'estimateur MUSIC *vectoriel* (V-MUSIC) introduit dans le chapitre 3. Pour les algorithmes multicomposantes (Q-MUSIC et V-MUSIC), nous rappelons que des hypersurfaces à trois paramètres  $\{\theta, \rho, \varphi\}$  sont calculées. Les figures montrées dans cette partie sont des coupes de ces hypersurfaces pour des valeurs fixées d'un ou deux paramètres.

Considérons d'abord le cas d'une onde polarisée enregistrée par une antenne de 10 capteurs équidistants à deux composantes. La source simulée a une DDA  $\theta = 0.93 \text{ rad}$ , les paramètres de polarisation :  $\rho = 3$ ,  $\varphi = 0.27 \text{ rad}$ . Nous avons rajouté du bruit gaussien en rapport  $S/B$  de 0 dB. Un pas de calcul de 0.001 rad a été utilisé pour itérer  $\theta$  et de 0.05 pour  $\rho$  et  $\varphi$ .

Sur la figure 4.3, nous avons représenté la courbe d'estimation de la DDA pour l'algorithme quaternionique, par comparaison au V-MUSIC et MUSIC, dans trois simulations différentes pour 1000, 100 et 10 réalisations (nombre d'observations utilisées pour l'estimation de la matrice interspectrale). Les courbes ont été tracées à partir de l'hypersurface pour des valeurs de  $\rho$  et  $\varphi$  fixées respectivement à 3 et à 0.27 rad, (les paramètres de polarisation de la source). Les performances de Q-MUSIC sont comparables à celles de V-MUSIC comme nous pouvons le remarquer dans la figure 4.3 (a,b,c). Pour un grand nombre de réalisations, c'est-à-dire une bonne estimation de la matrice de covariance, (Fig. 4.3.(a)), la largeur du lobe à 3 dB pour Q-MUSIC est plus petite par rapport à l'autre algorithme vectoriel. Pour une bonne estimation de la matrice de covariance, l'algorithme quaternionique Q-MUSIC présente donc un meilleur pouvoir de résolution par rapport à V-MUSIC.

Cette figure est aussi une bonne illustration du fait que la prise en compte de l'information de polarisation améliore nettement les performances des estimateurs en traitement d'antenne et ceci pour les trois choix du nombre de réalisations ; pour un faible nombre de réalisations (Fig. 4.3.(c)), l'algorithme scalaire échoue complètement. On peut également voir que l'algorithme MUSIC est toujours en dessous des performances de deux autres algorithmes.

Sur la figure 4.4, nous avons tracé les courbes de détection à partir de l'hypersurface pour les paramètres de polarisation  $\rho$  et  $\varphi$ , pour les estimateurs multicomposantes. Pour augmenter la précision, nous avons utilisé un pas de calcul de 0.02 et 1000 observations.

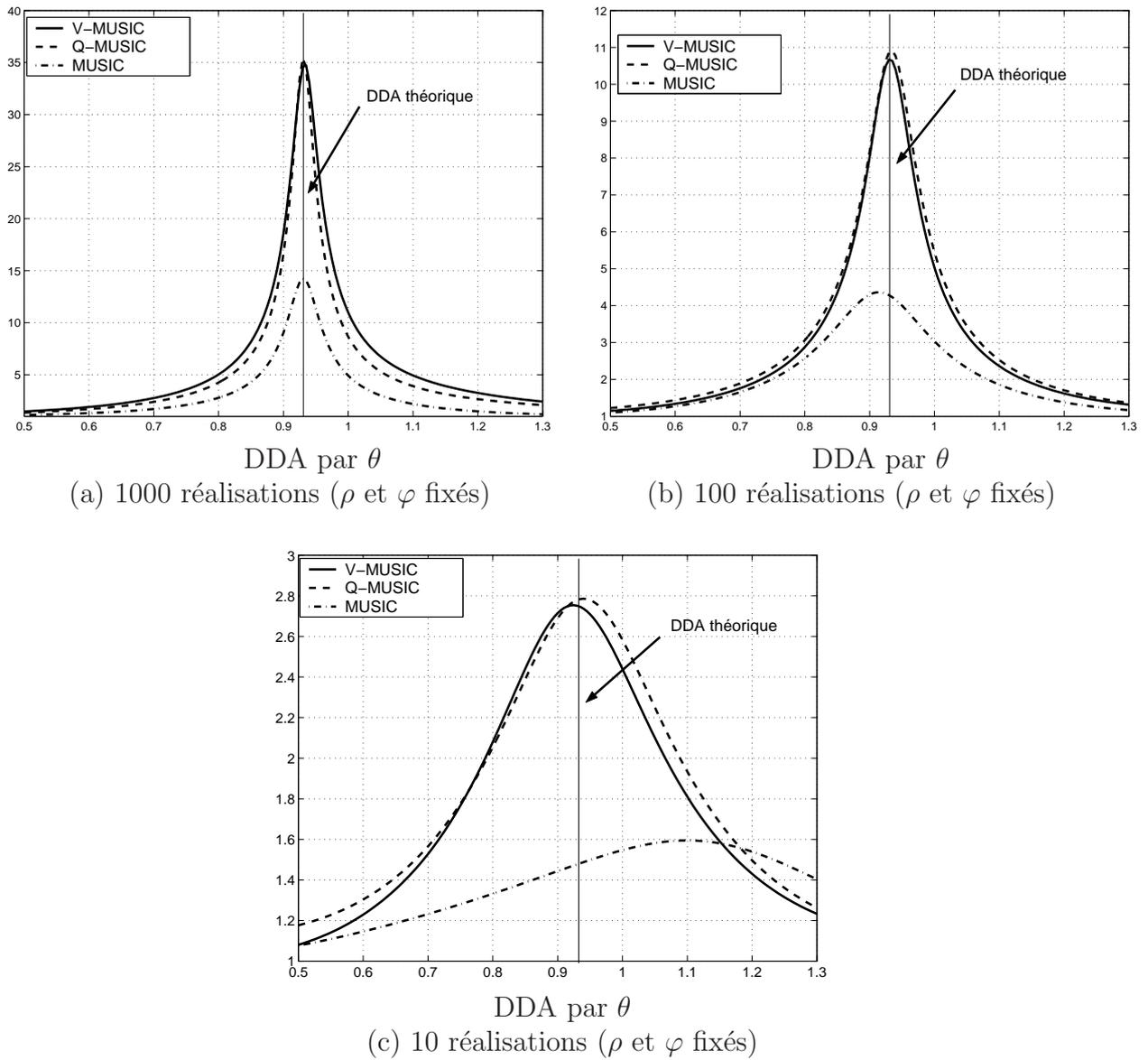


FIG. 4.3 – Trois simulations de Q-MUSIC, V-MUSIC et MUSIC pour des nombres différents de réalisations

Pour l'estimation de  $\rho$ , nous avons fixé le paramètre  $\theta$  à  $0.93 \text{ rad}$  et  $\varphi$  à  $0.27$  et tracé la courbe fonction de  $\rho$ . Pour l'algorithme V-MUSIC et Q-MUSIC (Fig. 4.4.(a)), la détection est satisfaisante. Pour l'estimation de  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $\rho$  sont fixés (Fig. 4.4.(b)) et les résultats sont également corrects. De plus, la figure 4.4 (a et b) confirme que les deux algorithmes ont des performances similaires et pour un grand nombre de réalisations, l'algorithme quaternionique surpasse légèrement en résolution V-MUSIC.

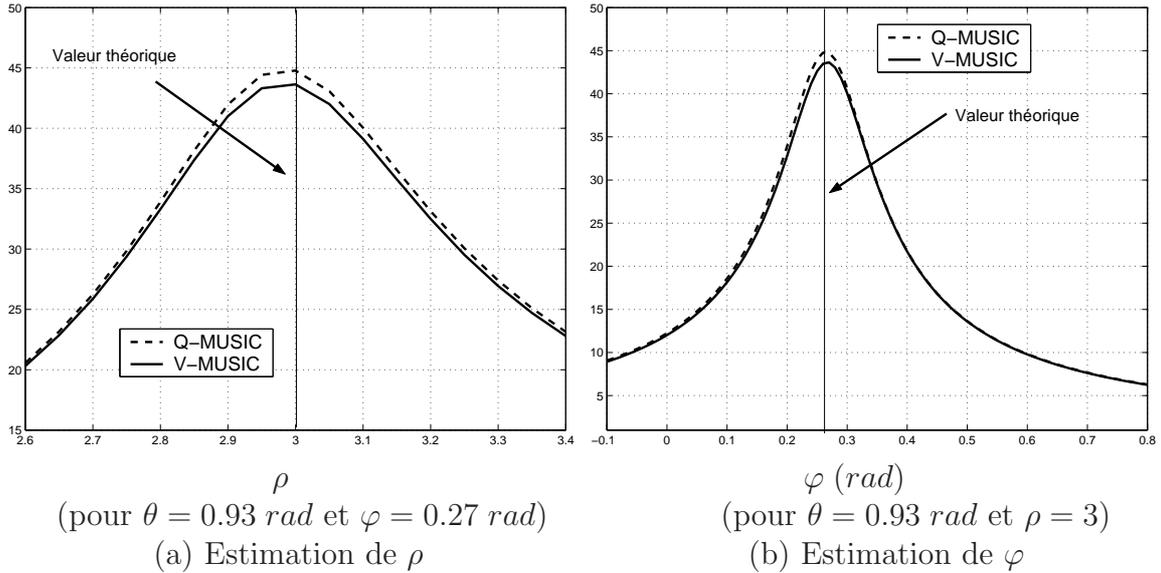


FIG. 4.4 – Estimation de  $\rho$  et  $\varphi$  par Q-MUSIC et V-MUSIC

Nous étudions maintenant le cas de deux sources de puissance égale, sous les mêmes hypothèses d'acquisition. Les paramètres simulés des ondes arrivant sur l'antenne sont  $\theta_1 = 0.48 \text{ rad}$ ,  $\rho_1 = 2.5$ ,  $\varphi_1 = -0.18 \text{ rad}$  et  $\theta_2 = -0.25 \text{ rad}$ ,  $\rho_2 = 3$ ,  $\varphi_2 = 0.15 \text{ rad}$ . Sur la Fig. 4.5.(a), les valeurs des fonctionnelles à trois paramètres, Q-MUSIC et V-MUSIC, sont tracées pour deux valeurs fixées correspondant aux paramètres de polarisation de la première source ( $\rho_1 = 2.5$ ,  $\varphi_1 = -0.18 \text{ rad}$ ). Nous observons que les deux algorithmes présentent une réponse attendue, forte, pour la DDA de la première source ( $\theta_1 = 0.48 \text{ rad}$ ) et une réponse moins importante pour  $\theta_2 = -0.25 \text{ rad}$ , correspondant à la deuxième source. Cette réponse résiduelle est due à la décorrélation incomplète des deux sources lors de l'estimation de la matrice de covariance, et à la faible taille de la dimension « composantes » (seulement deux composantes).

Les lobes principaux de détection pour les deux algorithmes sont complètement superposés, tandis que le lobe secondaire est plus important pour l'algorithme quaternionique. Cela est dû à la réduction de la dimension de l'espace de représentation des données pour la matrice de covariance quaternionique, qui rend l'algorithme Q-MUSIC moins sensible aux paramètres de polarisation des sources [Miron05b]. Par conséquent, les deux sources sont moins bien séparées dans le domaine des paramètres de polarisation pour l'approche

quaternionique. Le même phénomène peut être observé pour la deuxième source (Fig. 4.5.(b)) ; cette fois les deux courbes ont été tracées pour les paramètres de polarisation de la deuxième source.

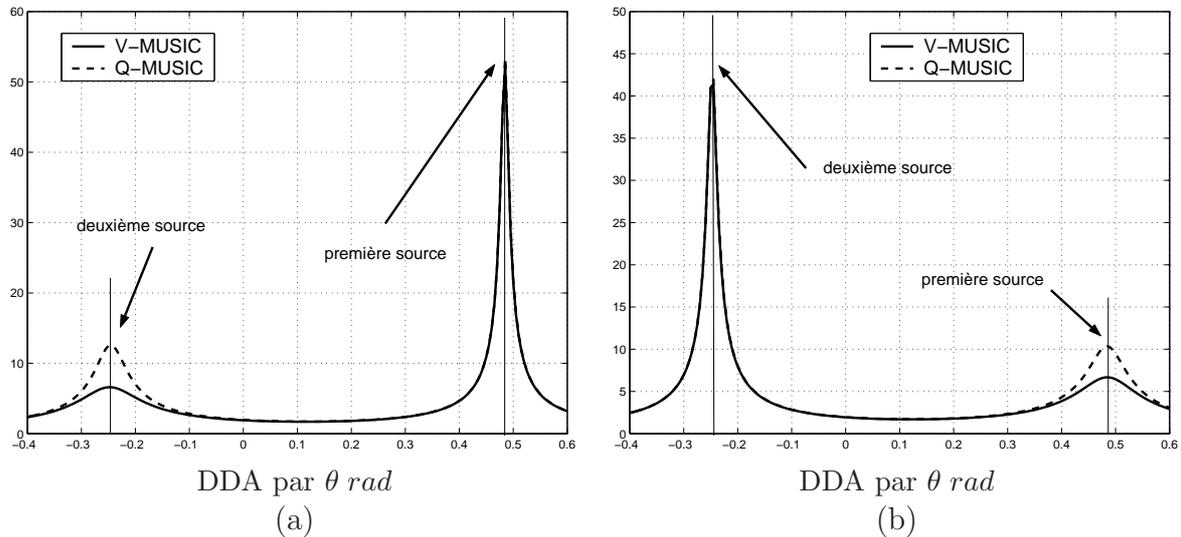


FIG. 4.5 – Estimation de la DDA par Q-MUSIC et V-MUSIC

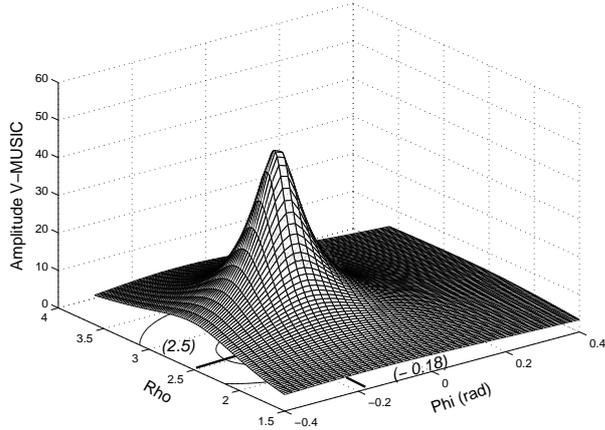
(a) Coupe pour  $\rho_1 = 2.5$ ,  $\varphi_1 = -0.18$  rad (source #1)

(b) Coupe pour  $\rho_2 = 3$ ,  $\varphi_2 = 0.15$  rad (source #2)

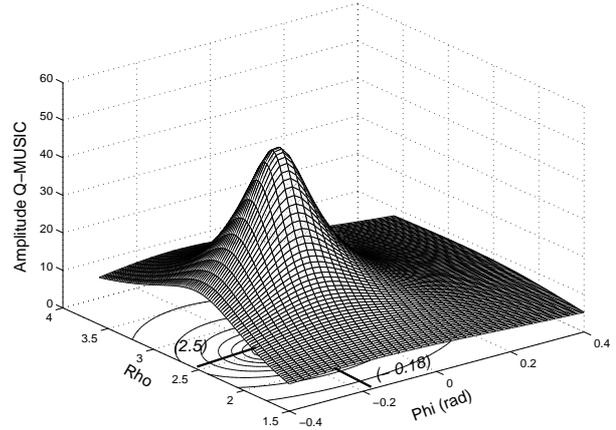
Dans la figure 4.6 nous avons représenté le plan des paramètres de polarisation pour la première source ( $\theta_1 = 0.48$  rad), pour l'estimateur V-MUSIC (Fig. 4.6.(a)) et Q-MUSIC (Fig. 4.6.(b)). Dans le cas étudié, les deux algorithmes effectuent une détection correcte, la différence est que le lobe (cône) de détection est légèrement plus large à 3 dB pour Q-MUSIC, par rapport à V-MUSIC. La situation est similaire pour les paramètres de polarisation de la deuxième source. Cet élargissement dans le domaine des paramètres de polarisation s'explique par le fait que, lors de l'estimation de la matrice interspectrale quaternionique, une compression de l'information multicomposante (de polarisation) est effectuée (ce qui explique aussi le gain en place mémoire de l'approche quaternionique).

Nous avons étudié ensuite la robustesse des deux algorithmes aux erreurs d'estimation du nombre de sources. Pour la figure 4.7, nous avons considéré le cas d'une seule source, ayant les paramètres de polarisation :  $\rho = 2$ ,  $\varphi = 0.15$  rad et la direction d'arrivée  $\theta = 0.44$  rad. Nous avons considéré que le nombre des sources a été mal estimé (deux au lieu d'une seule). Dans ce cas, la réponse de Q-MUSIC est visiblement plus importante que celle de V-MUSIC. Q-MUSIC semble donc plus robuste aux erreurs d'estimation du nombre des sources.

Afin d'avoir une caractérisation statistique de l'estimateur Q-MUSIC, nous avons comparé ses performances à celles de V-MUSIC et MUSIC dans des simulations de type Monte



Paramètres de polarisation pour la première source ( $\theta_1 = 0.48 \text{ rad}$ ) avec V-MUSIC  
(a)



Paramètres de polarisation pour la première source ( $\theta_1 = 0.48 \text{ rad}$ ) avec Q-MUSIC  
(b)

FIG. 4.6 – Estimation des paramètres de polarisation de la première source par Q-MUSIC et V-MUSIC

Carlo. Nous avons considéré deux sources de puissance égale, avec des phases initiales aléatoires qui arrivent sur une antenne de 10 capteurs à deux composantes. Les DDA des sources sont  $\theta_1 = -0.7 \text{ rad}$ ,  $\theta_2 = 0.5 \text{ rad}$  et elles ont les paramètres de polarisation suivants :  $\rho_1 = 2.5$ ,  $\varphi_1 = -0.18 \text{ rad}$ ,  $\rho_2 = 3$ ,  $\varphi_2 = 0.15 \text{ rad}$ .

Nous avons tracé (Fig. 4.8) l'erreur quadratique moyenne (EQM) d'estimation pour les estimateurs mentionnés ci-dessus, en fonction du rapport signal sur bruit (S/B). Une centaine d'observations sont utilisées pour estimer la matrice de covariance dans chaque simulation. Trois cents réalisations de chaque estimateur ont été utilisées pour chaque point représenté sur la figure 4.8. Un bruit blanc, gaussien a été utilisé dans divers rapports signal à bruit. L'erreur quadratique moyenne pour  $\hat{\theta}$  a été définie comme la moyenne quadratique des EQM d'estimation pour  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  ( $EQM(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{EQM^2(\hat{\theta}_1) + EQM^2(\hat{\theta}_2)}{2}}$ ). Pour l'algorithme scalaire nous avons opéré une moyenne sur les deux composantes.

La figure 4.8 montre que les deux algorithmes, Q-MUSIC et V-MUSIC, présentent des performances similaires, leur courbes EQM sont presque totalement superposées. Leurs erreurs d'estimation sont nettement inférieures au cas scalaire MUSIC. Ces résultats ne regardent que l'erreur d'estimation pour  $\hat{\theta}$ , dans la configuration de sources décrite ci-dessus. La résolution de l'algorithme Q-MUSIC a été discutée au début de cette sous-section.

Nous analysons maintenant un autre exemple numérique pour illustrer l'expression semi-analytique de la borne de Cramer-Rao, dérivée dans la section précédente (voir (4.130)). Considérons deux sources polarisées enregistrées sur une antenne formée de six

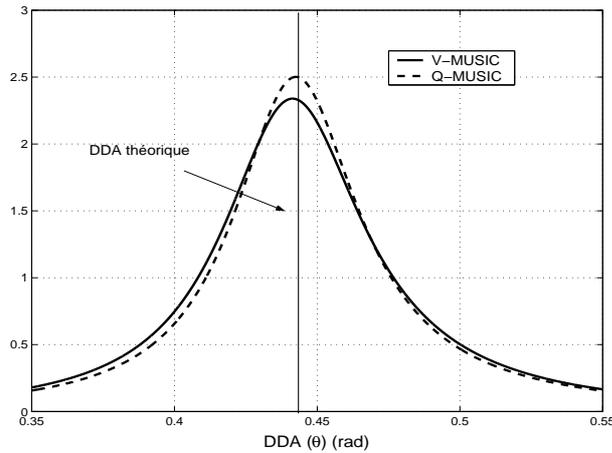


FIG. 4.7 – Une seule source  
(nombre de sources mal estimé)

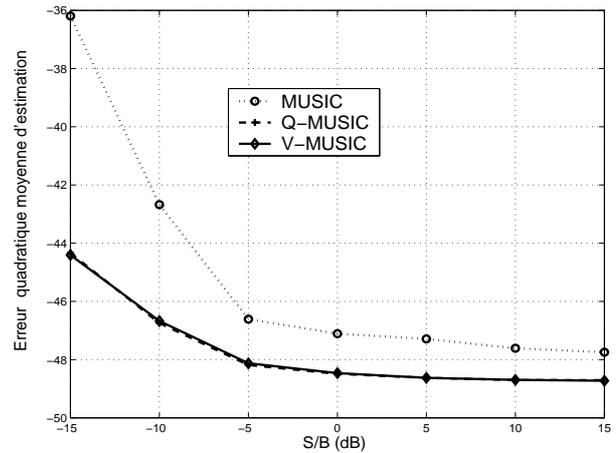


FIG. 4.8 – Erreur quadratique moyenne d'estimation (en dB) pour  $\hat{\theta}$ , en fonction de S/B (en dB)

capteurs à deux composantes. La première source est le signal utile et la deuxième est vue comme une interférence. Les paramètres des sources sont :  $\theta_1 = 0 \text{ rad}$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\varphi_1 = \pi/3 \text{ rad}$  pour le signal d'intérêt et  $\rho_2 = 2$ ,  $\varphi_2 = -\pi/6 \text{ rad}$  pour l'interférence. La DDA de la deuxième source  $\theta_2$  varie autour de  $\theta_1$ . Les paramètres  $L, \sigma$  (4.127) sont considérés unitaires et  $\mathbf{S}$  est normalisé. Dans la Fig. 4.9, nous avons représenté  $\sqrt{BCR(\theta_1)}$

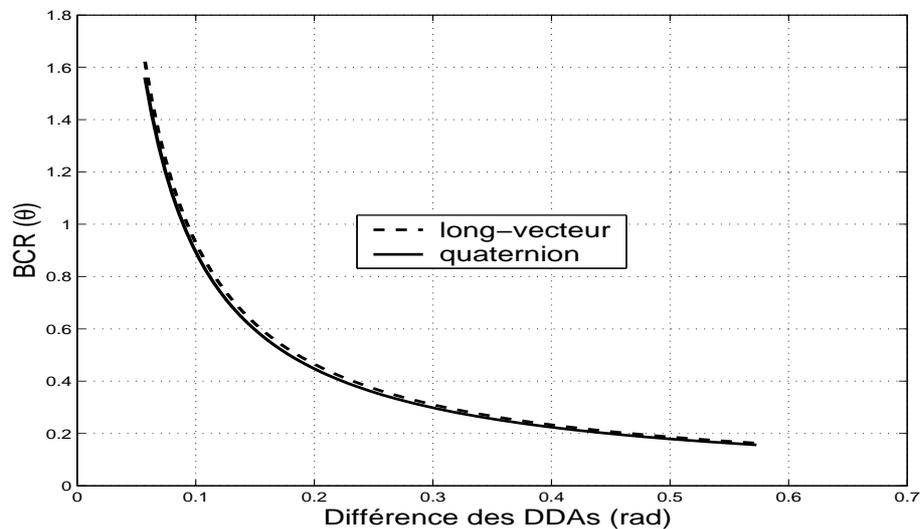


FIG. 4.9 – Borne de Cramer-Rao

(calculé à l'aide de la relation (4.130)) en fonction de la différence des DDAs ( $\theta_2 - \theta_1$ ) pour le modèle quaternionique et pour le long-vecteur. Pour le modèle long-vecteur, nous avons utilisé la formule de la BCR calculée par Nehorai [Nehorai94] qui a été adaptée aux paramètres du modèle. Les deux courbes sont très proches, ce qui signifie que les performances

théoriques pour l'estimation de la DDA sont les mêmes pour les modèles quaternionique et long-vecteur. Ce résultat confirme l'allure des courbes issues des simulations numériques, présentées dans la figure 4.8.

Nous avons montré dans cette partie que, pour une antenne vectorielle à *deux composantes* (2C), l'utilisation d'un modèle quaternionique permet de gagner en temps de calcul et place mémoire. La résolution pour l'estimation des DDAs des sources est améliorée par rapport au modèle long-vecteur, mais on observe une perte en performances concernant l'estimation des paramètres de polarisation. L'estimateur quaternionique se révèle plus robuste aux erreurs d'estimation du nombre des sources. L'extension du modèle hypercomplexe aux antennes vectorielles, ayant un nombre de composantes supérieur à deux, fait l'objet de la section suivante.

### 4.3 Les biquaternions

Nous introduisons dans cette partie un nouvel outil mathématique en traitement du signal, les *biquaternions* permettant d'étendre l'utilisation des nombres hypercomplexes en traitement d'antenne à trois et quatre composantes (3C et 4C).

Cette partie du mémoire introduit de nouveaux concepts mathématiques, et doit servir de base à une étude plus approfondie de la potentialité des nombres hypercomplexes de grande dimension ( $> 4$ ), tels que les biquaternions, les Nombres de Cayley (octonions) [Kantor89], les multivecteurs de l'algèbres de Clifford [Porteous95], pour modéliser les signaux multidimensionnels.

Les biquaternions, comme les quaternions, ont été introduits par Sir W. R. Hamilton en 1853 [Hamilton53], mais sont moins connus et utilisés pour des raisons que nous évoquerons plus loin.

La forme cartésienne d'un biquaternion est :

$$b = b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad (4.131)$$

avec  $b_0 \dots b_3 \in \mathbb{C}$ , et  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sont des *unités imaginaires* obéissant aux mêmes lois de multiplication que dans le cas des quaternions à coefficients réels (voir (4.2)). Par rapport aux quaternions, où les valeurs de quatre champs se trouvent dans  $\mathbb{R}$ , dans le cas de biquaternions, elles prennent des valeurs complexes. Souvent, dans la littérature, les biquaternions apparaissent sous le nom de *quaternions complexes*<sup>4</sup>. Les appellations *biquaternions* ou *biquaternions réduits* ont été utilisées aussi en traitement du signal pour désigner un système commutatif de quaternions réels [Schütte90] ou un système de nombres bicomplexes (des biquaternions dégénérés)[Pei04].

L'ensemble des biquaternions forme un anneau [Edmond72] noté  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ , qui regroupe le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$ , le corps des complexes  $\mathbb{C}$  et le corps non-commutatif des

<sup>4</sup>en anglais : *complex quaternions* ou *complexified quaternions*

quaternions  $\mathbb{H}$ , comme des cas spéciaux de biquaternions. Une notation alternative pour les biquaternions a été proposée par Ward [Ward97] qui représente un biquaternion comme un nombre « complexe » :

$$b = \alpha + i\beta \quad (4.132)$$

avec  $\alpha = b_0 \in \mathbb{C}$  et  $\beta = -i(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$ . Une des explications pour cette notation est le fait que l'algèbre engendrée par  $\{1, i\mathbf{i}, i\mathbf{j}, i\mathbf{k}\}$  est identique avec celle engendrée par les matrices de Pauli [Cohen73].

Les deux notations (4.131) et (4.132) sont équivalentes. Nous utilisons la première afin de conserver le formalisme quaternionique pour l'étude des biquaternions. La notation (4.131) permet de considérer les quaternions comme des cas particuliers des biquaternions, dont les parties imaginaires des coefficients complexes  $b_0 \dots b_3$  sont nulles.

Avec la notation (4.131), les opérations élémentaires sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  : l'*addition*, l'*égalité* de deux biquaternions, la *multiplication par un scalaire* et la *multiplication entre deux biquaternions* sont définies de la même façon et ont les mêmes propriétés que les quaternions (voir (4.4)...(4.7)), à la différence que les scalaires sont, dans ce cas, des nombres complexes.

Nous présentons dans la suite quelques propriétés importantes des biquaternions.

Tout comme pour les quaternions, nous pouvons définir la partie scalaire et la partie vectorielle d'un biquaternion :

$$\begin{cases} S(b) = b_0 \\ V(b) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \end{cases} \quad (4.133)$$

Un biquaternion est dit *pur* si sa partie scalaire est nulle ( $S(b) = 0$ ).

Un biquaternion  $b \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  est *nul* si tous ses coefficients  $b_0 \dots b_3$  sont nuls.

### Conjugué d'un biquaternion

Plusieurs définitions différentes sont possibles pour le *conjugué* d'un biquaternion [Tian00]. Pour un biquaternion  $b \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  (4.131), nous pouvons définir :

- son *biquaternion dual* :

$$\bar{b} = b_0 - b_1\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_3\mathbf{k} \quad (4.134)$$

- son *conjugué complexe* :

$$b^{\triangleleft} = b_0^* + b_1^*\mathbf{i} + b_2^*\mathbf{j} + b_3^*\mathbf{k} \quad (4.135)$$

où  $b_0^* \dots b_3^*$  sont les conjugués des coefficients complexes  $b_0 \dots b_3$

- son *conjugué hermitien* ou simplement son *conjugué* :

$$b^* = (\bar{b})^{\triangleleft} = b_0^* - b_1^*\mathbf{i} - b_2^*\mathbf{j} - b_3^*\mathbf{k} \quad (4.136)$$

Si pour un biquaternion  $b \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  :

-  $b = \bar{b}$ , alors  $b \in \mathbb{C}$  ; si  $b = -\bar{b}$  alors  $b$  est un biquaternion *pur* ;

-  $b = b^\natural$ , alors les coefficients de  $b$  sont *réels* ( $b \in \mathbb{H}$ );  
-  $b = b^*$ , alors  $b$  est appelé *hermitien*. Dans ce cas  $b_0 \in \mathbb{R}$  et  $b_1 \dots b_3$  sont des nombres imaginaires pures;  $b$  peut s'écrire sous la forme (4.132) avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{H}$ .

Pour deux biquaternions  $a, b \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ , les relations suivantes sont vraies [Mehta89, Tian00] :

1.  $\bar{\bar{b}} = b$ ,  $(b^\natural)^\natural = b$ ,  $(b^*)^* = b$ ;
2.  $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ ;  
 $(a+b)^\natural = a^\natural + b^\natural$ ;  
 $(a+b)^* = a^* + b^*$ ;
3.  $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ ;  $(ab)^\natural = a^\natural b^\natural$ ;  $(ab)^* = b^* a^*$ .

### Produit scalaire de deux biquaternions

La définition du produit scalaire de deux biquaternions est un peu différente par rapport à celle des quaternions. Du fait de différents conjugués, on a plusieurs choix pour la définition du produit scalaire des biquaternions. Afin de satisfaire toutes les conditions d'un produit scalaire hermitien [Ward97], le *produit scalaire* des  $a, b \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  peut être défini par :

$$\langle a, b \rangle = S(b^* a) \quad (4.137)$$

Si  $a$  et  $b$  ont des expressions données par :

$$a = a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \quad (4.138)$$

$$b = b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k} \quad (4.139)$$

alors, leur produit scalaire s'écrit en fonction des coefficients  $a_0 \dots a_3, b_0 \dots b_3 \in \mathbb{C}$  comme :

$$\langle a, b \rangle = b_0^* a_0 + b_1^* a_1 + b_2^* a_2 + b_3^* a_3 \quad (4.140)$$

### Norme et pseudo-norme

Nous définissons la *norme* (ou le *module*) d'un biquaternion  $b \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ , comme :

$$|b| = \sqrt{\langle b, b \rangle} = \sqrt{|b_0|^2 + |b_1|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2} \quad (4.141)$$

Il est facile de démontrer qu'un biquaternion est nul si et seulement si sa norme est nulle. En effet, au vu de la relation (4.141), on voit que  $|b|$  est égale à la racine carrée de la somme des modules carrés des coefficients complexes de  $b$ . La norme est donc égale à zéro si le

module de chacun des coefficients complexes de  $b$  est nul, donc si les coefficients de  $b$  sont tous égaux à zéro. En général, pour deux biquaternions  $a, b \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  :

$$|ab| \neq |a||b| \quad (4.142)$$

Ceci signifie que les biquaternions ne sont pas isomorphes aux *nombres de Cayley (octonions)* et que l'algèbre des biquaternions n'est donc pas une algèbre normée [Ward97]. C'est la raison principale pour laquelle les biquaternions ont été si peu utilisés.

Afin que la propriété (4.142) soit satisfaite, une *pseudo-norme* peut être définie, [Tian00] comme :

$$|b|_p = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \quad (4.143)$$

L'inconvénient majeur de cette définition est que, dans le cas général, elle est à valeur complexe. La pseudo-norme d'un biquaternion non-nul peut être donc nulle.

### Rémarques

Une autre représentation des biquaternions est la représentation en *partie réelle et partie imaginaire* [Ward97]. Ainsi, un biquaternion peut s'écrire d'une façon unique, comme :

$$b = \zeta + i\delta \quad (4.144)$$

avec  $\zeta, \delta \in \mathbb{H}$ ,

$$\zeta = \Re(b_0) + \Re(b_1)\mathbf{i} + \Re(b_2)\mathbf{j} + \Re(b_3)\mathbf{k}$$

$$\delta = \Im(b_0) + \Im(b_1)\mathbf{i} + \Im(b_2)\mathbf{j} + \Im(b_3)\mathbf{k},$$

où  $\Re(\cdot)$  et  $\Im(\cdot)$  désignent les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Nous utilisons cette représentation plus loin dans ce chapitre pour définir *la matrice quaternionique adjointe* d'une matrice de biquaternions.

Pour représenter les biquaternions, nous pouvons choisir comme base  $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  sur  $\mathbb{C}$ , ou d'une façon équivalente  $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}\mathbf{i}, \mathbf{i}\mathbf{j}, \mathbf{i}\mathbf{k}\}$  sur  $\mathbb{R}$ . Ceci permet de séparer les termes d'un biquaternion en quatre groupes [Ward97] :

1. les **scalaires** :  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ )
2. les **pseudo-scalaires** :  $ia$  ( $a \in \mathbb{R}$ )
3. les **bivecteurs** :  $a\mathbf{i}, a\mathbf{j}, a\mathbf{k}$  ( $a \in \mathbb{R}$ )
4. les **vecteurs** :  $a\mathbf{i}\mathbf{i}, a\mathbf{i}\mathbf{j}, a\mathbf{i}\mathbf{k}$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

Cette représentation d'un biquaternion permet de mettre en évidence un isomorphisme entre  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  et l'algèbre de Clifford  $Cl_3$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  [Lounesto97].

Si un des facteurs d'un produit de biquaternions est un **vecteur** ou un **pseudo-scalaire**, alors la norme du produit est égale au produit des normes [Ward97]. Pour ce type particulier de biquaternions  $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ , nous pouvons définir un *inverse* comme :

$$p^{-1} = \frac{p^*}{|p|^2} \quad (4.145)$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ , avec les opérations d'addition et de multiplication des biquaternions, comporte une structure d'*anneau*.

### 4.3.1 Vecteurs et matrices de biquaternions

Le développement de la théorie des biquaternions, est dû en grande partie, à la préoccupation de donner une formulation plus compacte aux lois physiques en électromagnétisme et en théorie de la relativité [Edmond72, Majernik99]. Cependant, à ce jour, il n'y a, à notre connaissance, aucune application des matrices de biquaternions, ce qui fait que les ouvrages qui traitent des vecteurs et matrices biquaternioniques sont quasi-inexistants dans la littérature. Ceci explique le faible nombre de références dans cette partie du mémoire.

#### 4.3.1.1 Vecteurs de biquaternions

Un vecteur de biquaternions est un élément de l'espace  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$ . L'ensemble  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$  avec l'addition des vecteurs à valeurs biquaternioniques et la multiplication d'un vecteur par un biquaternion scalaire vérifie les axiomes d'un  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ -*module* (espace vectoriel sur l'anneau  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  [Nagell51]).

Nous définissons le *produit scalaire* de deux vecteurs de biquaternions  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$ ,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ , comme :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \mathbf{b}^\dagger \mathbf{a} \quad (4.146)$$

avec ( $\dagger$ ) le transposé-conjugué (hermitien) d'un vecteur de biquaternions.

Deux vecteurs de biquaternions sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = 0 \quad (4.147)$$

La *norme d'un vecteur de biquaternions*  $\mathbf{b} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$  est définie à partir du produit scalaire, comme :

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{S(\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}})} \quad (4.148)$$

Tout comme pour les quaternions, nous allons montrer que l'orthogonalité des vecteurs de biquaternions impose des contraintes particulières entre les vecteurs complexes constituants.

#### 4.3.1.2 Matrices de biquaternions

Une matrice de biquaternions est un élément de l'espace  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{M \times N}$  ( $M$  : le nombre des lignes et  $N$  : le nombre des colonnes).

Pour une matrice de biquaternions  $\mathbf{B} = (b_{st}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{M \times N}$ , nous pouvons définir [Tian00, Mehta89] :

- la matrice *duale* de  $\mathbf{B}$  :  $\overline{\mathbf{B}} = (\bar{b}_{ts}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times M}$  ;
  - la matrice *conjuguée hermitienne* ou *transposée-conjuguée* de  $\mathbf{B}$  :  $\mathbf{B}^\dagger = (b_{ts}^*) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times M}$ .
- Une matrice  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times N}$  est dite *hermitienne* si  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger$ , et elle est unitaire si :

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{B} = \mathbf{I}_N.$$

La matrice  $\mathbf{B}$  est *inversible* s'il existe une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times N}$ , telle que :

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}_N \quad (4.149)$$

La matrice  $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$  est appelée, alors, la *matrice inverse* de  $\mathbf{B}$ .

Soient deux matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{M \times N}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times P}$ , alors les relations suivantes sont satisfaites [Tian00, Mehta89] :

1.  $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$ ,  $(\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{A}$  ;
2.  $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{A}}$ ,  $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$  ;
3.  $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ , si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont inversibles ;
4.  $(\overline{\mathbf{A}})^{-1} = \overline{(\mathbf{A}^{-1})}$ ,  $(\mathbf{A}^\dagger)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\dagger$  si  $\mathbf{A}$  est inversible.

#### 4.3.1.3 Matrice quaternionique adjointe d'une matrice biquaternionique

Afin de calculer la décomposition en valeurs propres d'une matrice de biquaternions, nous introduisons la *matrice quaternionique adjointe* d'une matrice de biquaternions, par analogie avec la *matrice complexe adjointe* d'une matrice de quaternions (voir (4.32)).

Soit une matrice à coefficients biquaternioniques  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{M \times N}$  égale à  $\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2$ , avec  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{H}^{M \times N}$ , sa représentation en parties réelle et partie imaginaire (4.144), nous définissons la *matrice quaternionique adjointe* de la matrice biquaternionique  $\mathbf{B}$ ,  $\gamma_{\mathbf{B}} \in \mathbb{H}^{2M \times 2N}$  comme :

$$\gamma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ -\mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \quad (4.150)$$

Considérons maintenant la matrice complexe  $\Psi_M \in \mathbb{C}^{M \times 2M}$  :

$$\Psi_M = (\mathbf{I}_M, -i\mathbf{I}_M) \quad (4.151)$$

avec  $\mathbf{I}_M$ , la matrice identité de taille  $M \times M$ . Il est facile de démontrer par le calcul que  $\mathbf{B}$  peut s'écrire en fonction de  $\gamma_{\mathbf{B}}$  comme :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\Psi_M \gamma_{\mathbf{B}} \Psi_M^\dagger \quad (4.152)$$

$\Psi_M$  présente deux autres propriétés (qui nous seront utiles par la suite) :

$$\Psi_M \Psi_M^\dagger = 2\mathbf{I}_M \quad (4.153)$$

$$\gamma_{\mathbf{B}} \Psi_N^\dagger \Psi_N = \Psi_M^\dagger \Psi_M \gamma_{\mathbf{B}} \quad (4.154)$$

(La propriété (4.153) se démontre facilement par calcul. Pour démontrer (4.154), on multiplie l'égalité (4.154) à gauche par  $\Psi_M$ , et à droite par  $\Psi_N^\dagger$ , et ensuite on utilise la propriété (4.153).)

**Lemme 4.2** *La matrice quaternionique adjointe conserve le caractère hermitien de la matrice biquaternionique associée.*

**Démonstration :** Considérons une matrice biquaternionique hermitienne  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times N}$ ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger \quad (4.155)$$

et sa matrice quaternionique adjointe  $\gamma_{\mathbf{B}} \in \mathbb{H}^{2N \times 2N}$ . En substituant (4.152) dans (4.155), nous pouvons écrire :

$$\Psi_N \gamma_{\mathbf{B}} \Psi_N^\dagger = \left( \Psi_N \gamma_{\mathbf{B}} \Psi_N^\dagger \right)^\dagger \quad (4.156)$$

En utilisant la propriété des matrices de biquaternions :  $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$ , (4.156) devient :

$$\Psi_N \gamma_{\mathbf{B}} \Psi_N^\dagger = \Psi_N \gamma_{\mathbf{B}}^\dagger \Psi_N^\dagger \quad (4.157)$$

d'où :

$$\gamma_{\mathbf{B}} = \gamma_{\mathbf{B}}^\dagger \quad (4.158)$$

La matrice  $\gamma_{\mathbf{B}}$  est donc hermitienne. ■

De la même façon, en utilisant la définition (4.150) et les propriétés (4.153), (4.154), il est possible de démontrer, par le calcul, que la *matrice quaternionique adjointe* conserve aussi le caractère *unitaire* de la matrice biquaternionique associée.

La matrice quaternionique adjointe permet le calcul de la décomposition en valeurs propres d'une matrice biquaternionique, comme nous le montrons dans la sous-section suivante.

### 4.3.2 Décomposition en valeurs propres d'une matrice biquaternionique

La non-commutativité de la multiplication des biquaternions, de même que pour les matrices de quaternions (voir (4.41)), rend nécessaire la définition de deux types de valeurs

propres (gauches et droites) pour les matrices à coefficients biquaternioniques. Comme dans le cas quaternionique, nous nous intéresserons ici seulement aux valeurs propres droites.

Les vecteurs *propres droites* d'une matrice carrée  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times N}$  peuvent être calculés à l'aide du lemme suivant.

**Lemme 4.3** *Pour une matrice biquaternionique carrée  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times N}$ , si  $\mathbf{u}_q \in \mathbb{H}^{2N}$  est un vecteur propre droit de sa matrice quaternionique adjointe  $\gamma_{\mathbf{B}}$ , alors  $\mathbf{u}_b \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$  défini par :*

$$\mathbf{u}_b = \Psi_N \mathbf{u}_q \quad (4.159)$$

est un vecteur propre droit de  $\mathbf{B}$ .

**Démonstration :**

Si  $\mathbf{u}_q$  est un vecteur droit de  $\gamma_{\mathbf{B}}$ , l'égalité suivante est vraie :

$$\gamma_{\mathbf{B}} \mathbf{u}_q = \mathbf{u}_q \lambda \quad (4.160)$$

En utilisant (4.152) et (4.159) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{u}_b &= \frac{1}{2} \Psi_N \gamma_{\mathbf{B}} \Psi_N^\dagger \Psi_N \mathbf{u}_q \\ &= \frac{1}{2} \Psi_N 2\mathbf{I}_N \gamma_{\mathbf{B}} \mathbf{u}_q \\ &= \Psi_N \gamma_{\mathbf{B}} \mathbf{u}_q \end{aligned} \quad (4.161)$$

Si nous substituons (4.160) dans (4.161), nous obtenons :

$$\mathbf{B} \mathbf{u}_b = \Psi_N \mathbf{u}_q \lambda = \mathbf{u}_b \lambda \quad (4.162)$$

donc  $\mathbf{u}_b = \Psi_N \mathbf{u}_q$  est un vecteur propre droit de  $\mathbf{B}$ . ■

Le calcul de la décomposition en valeurs propres d'une matrice biquaternionique se ramène donc au calcul de la décomposition d'une matrice quaternionique de taille double, illustré dans la sous-section 4.1.3.3.

**Corrolaire 4.1** *Considérons une matrice de biquaternions  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times N}$  et la EVD de sa matrice quaternionique adjointe  $\gamma_{\mathbf{B}} : \gamma_{\mathbf{B}} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^\dagger$ , avec  $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{2N \times 2N}$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}_j^{2N \times 2N}$ . La décomposition en valeurs propres de la matrice  $\mathbf{B}$ , est alors donnée par :*

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_b \mathbf{D} \mathbf{U}_b^\dagger \quad (4.163)$$

avec  $\mathbf{U}_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_N \mathbf{U} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times 2N}$  et  $\mathbf{D}$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $\gamma_{\mathbf{B}}$ .

**Démonstration :** Si la décomposition en valeurs propres de la matrice  $\gamma_{\mathbf{B}}$  est donnée par :

$$\gamma_{\mathbf{B}} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^\dagger \quad (4.164)$$

avec  $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{2N \times 2N}$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}_j^{2N \times 2N}$ , en remplaçant (4.164) dans (4.152), nous obtenons :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \Psi_N \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^\dagger \Psi_N^\dagger = \frac{1}{2} \Psi_N \mathbf{U} \mathbf{D} (\Psi_N \mathbf{U})^\dagger \quad (4.165)$$

Notons :  $\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_N \mathbf{U} = \mathbf{U}_b \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^{N \times 2N}$ . Nous pouvons écrire alors :

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_b \mathbf{D} \mathbf{U}_b^\dagger \quad (4.166)$$

avec  $\mathbf{D}$ , une matrice diagonale, et avec  $\mathbf{U}_b \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^{N \times 2N}$ , dont les colonnes sont des vecteurs propres de  $\mathbf{B}$  comme nous l'avons montré. ■

Les valeurs propres de  $\gamma_{\mathbf{B}}$  sont aussi les valeurs propres de  $\mathbf{B}$ . Nous avons montré en début du chapitre qu'en général, pour une matrice quaternionique, ses valeurs appartiennent à un des sous-ensembles isomorphes à  $\mathbb{C}$ . Dans le cas des biquaternions, cet isomorphisme n'est plus valable. Les sous-ensembles  $\mathbb{C}_i, \mathbb{C}_j, \mathbb{C}_k$  ne peuvent plus être assimilés sur  $\mathbb{H}_\mathbb{C}$  aux nombres complexes ; ils représentent des quaternions dégénérés.

Les valeurs propres d'une matrice biquaternionique, sont donc, dans le cas général, des quaternions dont deux des trois champs imaginaires sont nuls.

Un autre résultat intéressant est que les valeurs propres quaternioniques de la *matrice quaternionique adjointe* n'apparaissent pas en paires conjuguées, comme c'est le cas pour les *matrices complexes adjointes*. Pour reconstruire une matrice biquaternionique  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^{N \times N}$ , nous avons besoin de toutes les  $2N$  valeurs propres et tous les  $2N$  vecteurs propres associés, issus de la décomposition de sa matrice quaternionique adjointe. Ce résultat, étonnant a priori, remet en question le problème du rang d'une matrice biquaternionique. Le théorème fondamental de l'algèbre n'a pas été démontré pour les polynômes à coefficients biquaternioniques. Il n'y a donc pas d'indication théorique concernant le nombre de racines du polynôme caractéristique d'une matrice biquaternionique, comme c'est le cas pour les matrices de quaternions [Serôdio01].

À présent, nous n'avons pas trouvé d'explication théorique à ce fait, mais des résultats similaires existent déjà dans la littérature. Okubo a montré [Okubo99] que les matrices symétriques  $3 \times 3$  d'octonions (nombres hypercomplexes de même dimension que les biquaternions) présentent six valeurs propres indépendantes.

#### 4.3.2.1 Décomposition en valeurs propres d'une matrice biquaternionique hermitienne

L'algorithme de traitement d'antenne proposé plus loin dans ce chapitre est basé sur la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance d'un vecteur biquaternionique, ayant une structure hermitienne par construction. Nous allons nous intéresser de près aux valeurs propres et aux vecteurs propres d'une matrice de ce type.

Une matrice  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^{N \times N}$  est dite hermitienne, si  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger$ . Nous avons démontré (lemme 4.2) que la *matrice quaternionique adjointe*  $\gamma_{\mathbf{B}} \in \mathbb{H}^{2N \times 2N}$  d'une matrice biquaternionique hermitienne est, elle aussi, hermitienne.

Sachant que les valeurs propres de  $\mathbf{B}$  sont les valeurs propres de  $\gamma_{\mathbf{B}}$ , et que les valeurs propres d'une matrice quaternionique hermitienne sont réelles, il en résulte que *les valeurs propres d'une matrice biquaternionique hermitienne sont réelles.*

Dans ce cas, les valeurs propres droites et les valeurs propres gauches se confondent. De même, la distinction entre vecteurs propres droits et vecteurs propres gauches n'est plus nécessaire.

**Lemme 4.4** *Les vecteurs propres d'une matrice biquaternionique hermitienne, correspondant à des valeurs propres différentes, sont orthogonaux.*

**Démonstration :** Considérons deux valeurs propres de  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times N}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  et leurs vecteurs propres associés  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$ . Alors, nous pouvons écrire :

$$\lambda_1(\mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1 \lambda_1)^\dagger \mathbf{u}_2 = (\mathbf{A} \mathbf{u}_1)^\dagger \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{A}^\dagger \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^\dagger (\mathbf{A} \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1^\dagger (\mathbf{A} \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2) \lambda_2 \quad (4.167)$$

Puisque  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , l'égalité (4.167) entraîne  $\mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2 = 0$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont orthogonaux. ■

Nous illustrons par la suite le lien entre le rang d'une matrice biquaternionique et sa décomposition en valeurs propres, à l'aide d'un exemple numérique. Soit un vecteur biquaternionique de dimension trois dont les coefficients ont été engendrés de manière aléatoire,  $\mathbf{s} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$  :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0.950 + 0.486i & 0.456 + 0.444i & 0.921 + 0.405i & 0.410 + 0.352i \\ 0.231 + 0.891i & +i & 0.018 + 0.615i & +j & 0.738 + 0.935i & +k & 0.893 + 0.813i \\ 0.606 + 0.762i & 0.821 + 0.791i & 0.176 + 0.916i & 0.057 + 0.009i \end{pmatrix} \quad (4.168)$$

Nous avons construit, à partir de  $\mathbf{s}$ , la matrice hermitienne :

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} \mathbf{s}^\dagger \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{3 \times 3} \quad (4.169)$$

La matrice  $\mathbf{S}$  est de rang 1 par construction (d'après la définition classique du rang d'une matrice). La décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{S}$  donne deux valeurs propres réelles, non-nulles, différentes :  $\lambda_1 = 5.918$  et  $\lambda_2 = 4.166$ . Les quatre autres valeurs propres sont nulles. Les vecteurs propres associés  $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$  et  $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$  ont les valeurs numériques suivantes :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.095i & 0.031i & 0.317i \\ 0.347 + 0.366i & +i & 0.125 - 0.087i & +j & 0.021 - 0.011i & +k & 0.344 - 0.337i \\ 0.287 + 0.036i & 0.1899 - 0.196i & 0.116 + 0.162i & -0.030 - 0.258i \end{pmatrix} \quad (4.170)$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -0.429 & -0.306i & -0.011i & -0.300i \\ -0.356 - 0.039i + i & 0.045 - 0.245i + j & 0.013 - 0.033i + k & 0.010 - 0.257i \\ -0.307 - 0.290i & 0.150 - 0.201i & 0.035 + 0.071i & 0.259 - 0.236i \end{pmatrix} \quad (4.171)$$

Il est facile de vérifier par le calcul que les deux vecteurs propres,  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont orthogonaux. La décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{S}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\dagger \quad (4.172)$$

Si nous comparons (4.172) avec (4.169), nous remarquons que, pour extraire l'information sur le vecteur  $\mathbf{s}$ , nous avons besoin de deux valeurs propres et de leurs vecteurs propres associés. Nous allons utiliser ce résultat lors de la mise en oeuvre de l'algorithme proposé dans la section suivante.

## 4.4 MUSIC biquaternionique 3C/4C

Nous proposons dans cette section un algorithme de traitement d'antenne vectorielle à haute résolution, basé sur l'algèbre des biquaternions. L'idée de cet algorithme est similaire à celle illustrée par l'algorithme MUSIC quaternionique, proposé dans la section 4.2 pour les antennes 2C. Ici, l'utilisation des biquaternions permet d'étendre la méthode aux antennes 3C/4C.

### 4.4.1 Modèle biquaternionique de la polarisation

Considérons une antenne linéaire uniforme composée de  $N_x$  capteurs à trois (3C) ou quatre (4C) composantes ( $N_c = 3$  ou 4). Dans la pratique, un capteur à trois composantes peut être un géophone vectoriel ou une antenne électromagnétique polarisée, et un capteur à quatre composantes, un OBS (un géophone vectoriel plus un hydrophone) (voir chapitre 1).

Si une antenne 4C enregistre un champ d'ondes engendrées par  $F$  sources polarisées, la contribution d'une seule source sur un capteur de l'antenne est donnée par quatre signaux temporels corrélés  $s_0(t), s_1(t), s_2(t), s_3(t)$ . En passant dans le domaine fréquentiel, la contribution de la source est représentée par quatre signaux complexes :

$$x_0(\nu), x_1(\nu), x_2(\nu), x_3(\nu) \in \mathbb{C}.$$

L'idée de base de l'algorithme est de coder ces quatre signaux complexes sur les quatre parties d'un biquaternion. Ainsi, la valeur du signal enregistré, provenant d'une source polarisée, à une fréquence donnée  $\nu_0$ , peut être mise sous la forme d'un biquaternion  $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  comme :

$$x(\nu_0) = x_0(\nu_0) + x_1(\nu_0)\mathbf{i} + x_2(\nu_0)\mathbf{j} + x_3(\nu_0)\mathbf{k} \quad (4.173)$$

Si le capteur est à trois composantes, les trois signaux enregistrés  $x_1(\nu_0), x_2(\nu_0), x_3(\nu_0)$  sont codés sur les trois coefficients d'un *biquaternion pur* :

$$x(\nu_0) = x_1(\nu_0)\mathbf{i} + x_2(\nu_0)\mathbf{j} + x_3(\nu_0)\mathbf{k} \quad (4.174)$$

Pour simplifier la présentation, nous traitons par la suite le cas d'une antenne vectorielle à trois composantes (dans la pratique, les capteurs à trois composantes sont peut-être plus utilisés que les capteurs 4C). Les hypothèses sur les sources, le bruit et le milieu de propagation restent les mêmes que dans le cas quaternionique (voir section 4.2.2). Si nous considérons la représentation en module et phase des trois composantes, la relation (4.174) se réécrit :

$$x(\nu_0) = \beta_1(\nu_0)e^{i\alpha_1(\nu_0)}\mathbf{i} + \beta_2(\nu_0)e^{i\alpha_2(\nu_0)}\mathbf{j} + \beta_3(\nu_0)e^{i\alpha_3(\nu_0)}\mathbf{k} \quad (4.175)$$

où  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$  sont les amplitudes et  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  sont les phases des composantes du signal à la fréquence  $\nu_0$ . Étant donné que nous travaillons à une seule fréquence  $\nu_0$ , nous omettrons l'argument fréquentiel dans la suite. Puisque nous n'avons pas accès à la phase initiale et à l'amplitude exacte de la source, nous considérons la première composante comme référence et nous nous intéressons à la phase et à l'amplitude relative de la deuxième et de la troisième composante par rapport à la première. Notons  $\rho_1 = \beta_2/\beta_1, \rho_2 = \beta_3/\beta_1$ , les rapports des amplitudes et  $\varphi_1 = \alpha_2 - \alpha_1, \varphi_2 = \alpha_3 - \alpha_1$ , les déphasages pour la deuxième et troisième composante par rapport à la première. Ces quatre paramètres définissent la polarisation d'une onde sur un capteur 3C comme nous l'avons montré dans le chapitre 2 (2.48).

Avec ces notations, le signal biquaternionique associé à une onde enregistrée sur un capteur à trois composantes s'écrit :

$$x = p(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)\beta_1 e^{i\alpha_1} \quad (4.176)$$

avec

$$p(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = \mathbf{i} + \rho_1 e^{i\varphi_1} \mathbf{j} + \rho_2 e^{i\varphi_2} \mathbf{k} \quad (4.177)$$

un biquaternion qui décrit le comportement de l'onde sur les trois composantes du capteur.

Le signal biquaternionique  $x$  définit une onde polarisée, enregistrée sur un seul capteur à trois composantes. La contribution d'une onde sur une antenne linéaire uniforme de  $N_x$  capteurs à trois composantes est alors donnée par un vecteur de biquaternions  $\mathbf{d} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N_x}$ . Si la DDA de l'onde est donnée par le déphasage inter-capteurs  $\theta$ , la propagation de l'onde sur l'antenne est décrite par un vecteur complexe  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{N_x}$  qui a la même expression que dans le cas scalaire :

$$\mathbf{a}(\theta) = (1, e^{-i\theta}, \dots, e^{-i(N_x-1)\theta})^T \quad (4.178)$$

Ainsi, le vecteur biquaternionique  $\mathbf{d}$ , qui décrit le comportement de l'onde sur l'ensemble de l'antenne, s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{d}(\theta, \rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = p(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) \mathbf{a}(\theta) \quad (4.179)$$

Dans le cas de  $F$  sources polarisées et en présence du bruit additif sur les composantes, le signal, en sortie de l'antenne de  $N_x$  capteurs à trois composantes, s'écrit sous la forme d'un vecteur de biquaternions  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  comme :

$$\mathbf{x} = \sum_{f=1}^F \mathbf{d}_f \beta_{1f} \exp(i\alpha_{1f}) + \mathbf{b} \quad (4.180)$$

Dans (4.180),  $\mathbf{b} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N_x}$  contient la contribution du bruit sur les composantes de tous les capteurs.  $\beta_{1f}$  et  $\alpha_{1f}$  sont l'amplitude et la phase de la source  $f$  sur la première composante du premier capteur.  $\mathbf{d}_f \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  est un vecteur de biquaternions décrivant le comportement de la  $f^{\text{ième}}$  source sur l'antenne vectorielle (4.179) qui s'écrit, en effectuant les multiplications, comme :

$$\mathbf{d}_f(\theta_f, \rho_{1f}, \varphi_{1f}, \rho_{2f}, \varphi_{2f}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} + \rho_{1f} e^{i\varphi_{1f}} \mathbf{j} + \rho_{2f} e^{i\varphi_{2f}} \mathbf{k} \\ e^{-i\theta_f} \mathbf{i} + \rho_{1f} e^{i(\varphi_{1f} - \theta_f)} \mathbf{j} + \rho_{2f} e^{i(\varphi_{2f} - \theta_f)} \mathbf{k} \\ \vdots \\ e^{-i(N-1)\theta_f} \mathbf{i} + \rho_{1f} e^{i(\varphi_{1f} - (N-1)\theta_f)} \mathbf{j} + \rho_{2f} e^{i(\varphi_{2f} - (N-1)\theta_f)} \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (4.181)$$

Si  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{C}^{N_x}$ , sont les observations dans le domaine fréquentiel sur les trois composantes de l'antenne, l'observation biquaternionique  $\mathbf{x}$  est construite de la manière suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \mathbf{i} + \mathbf{x}_2 \mathbf{j} + \mathbf{x}_3 \mathbf{k} \quad (4.182)$$

Nous introduisons dans la section suivante la matrice de covariance du modèle d'observation biquaternionique défini par (4.182).

#### 4.4.2 Matrice interspectrale biquaternionique

Nous avons montré que le signal enregistré sur une antenne de  $N_x$  capteurs à trois composantes peut être mis sous la forme d'un vecteur de biquaternions purs,  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N_x}$  (4.180). Nous définissons la *matrice interspectrale biquaternionique*,  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N_x \times N_x}$ , comme étant la matrice de covariance de  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{E} [\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger] \quad (4.183)$$

En introduisant (4.180) dans (4.183) et en tenant compte des hypothèses de décorrélation entre les  $F$  sources, et entre le bruit et les sources, nous obtenons :

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{f=1}^F \sigma_f^2 \mathbf{d}_f \mathbf{d}_f^\dagger + \mathbf{E} [\mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger] \quad (4.184)$$

avec  $\sigma_f^2 = \beta_{1f}^2$ , la puissance de la source  $f$  sur la première composante du premier capteur. Si nous notons par :

$$\mathbf{\Lambda}_S = \sum_{f=1}^F \sigma_f^2 \mathbf{d}_f \mathbf{d}_f^\dagger \quad (4.185)$$

la partie signal de  $\mathbf{\Lambda}$  et par :

$$\mathbf{\Lambda}_B = \mathbb{E} [\mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger] \quad (4.186)$$

la partie bruit, nous pouvons montrer, en effectuant un calcul similaire à celui présenté lors de la démonstration de la propriété 4.4, que  $\mathbf{\Lambda}_S$  comporte une structure de Toeplitz. De même, nous pouvons montrer que la partie bruit de la matrice interspectrale biquaternionique,  $\mathbf{\Lambda}_B$  est une matrice réelle, diagonale, contenant les puissances des bruits sur les  $N_x$  capteurs.

### 4.4.3 L'orthogonalité des vecteurs de biquaternions et l'orthogonalité des vecteurs complexes

Nous analysons dans cette partie les différences entre les contraintes d'orthogonalité imposées par le *modèle biquaternionique* d'une antenne vectorielle multicapteurs et le *modèle long-vecteur*.

Jusqu'ici, nous avons considéré que les capteurs ont trois composantes et qu'ils sont modélisés par des biquaternions purs. Les vecteurs propres de la matrice de covariance d'un vecteur de biquaternions purs ne sont pas forcément purs à leur tour. Dans un souci de généralité, nous considérons dans cette section des signaux à quatre composantes codés sur les quatre parties d'un biquaternion.

Considérons deux vecteurs biquaternioniques  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N_x}$  dont les composantes complexes  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_3 \in \mathbb{C}^{N_x}$  peuvent être assimilées aux quatre composantes d'une antenne vectorielle à  $N_x$  capteurs. L'approche *biquaternionique* proposée dans ce chapitre permet d'écrire les quatre composantes sous la forme de vecteurs de biquaternions :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{i} + \mathbf{x}_2 \mathbf{j} + \mathbf{x}_3 \mathbf{k} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1 \mathbf{i} + \mathbf{y}_2 \mathbf{j} + \mathbf{y}_3 \mathbf{k} \end{cases} \quad (4.187)$$

En même temps, l'approche de type *long-vecteur* est basée sur la construction des vecteurs de grande taille  $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^{4N_x}$  :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.188)$$

La condition d'orthogonalité des vecteurs biquaternioniques  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , s'écrit (4.147) :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = 0 \quad (4.189)$$

qui s'exprime, en fonction de leurs composantes complexes (4.187), comme :

$$(\mathbf{y}_0^\dagger - \mathbf{y}_1^\dagger \mathbf{i} - \mathbf{y}_2^\dagger \mathbf{j} - \mathbf{y}_3^\dagger \mathbf{k})(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{i} + \mathbf{x}_2 \mathbf{j} + \mathbf{x}_3 \mathbf{k}) = 0 \quad (4.190)$$

En effectuant le calcul, et en mettant à zéro les quatre coefficients, les relations suivantes sont obtenues :

$$\mathbf{y}_0^\dagger \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_1^\dagger \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2^\dagger \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_3^\dagger \mathbf{x}_3 = 0 \quad (4.191)$$

$$\mathbf{y}_0^\dagger \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_3^\dagger \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1^\dagger \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_2^\dagger \mathbf{x}_3 \quad (4.192)$$

$$\mathbf{y}_0^\dagger \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_1^\dagger \mathbf{x}_3 = \mathbf{y}_2^\dagger \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_3^\dagger \mathbf{x}_1 \quad (4.193)$$

$$\mathbf{y}_0^\dagger \mathbf{x}_3 + \mathbf{y}_2^\dagger \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1^\dagger \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_3^\dagger \mathbf{x}_0 \quad (4.194)$$

Pour l'approche long-vecteur, la condition d'orthogonalité des vecteurs  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\tilde{\mathbf{y}}$  est donnée par :

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \quad (4.195)$$

En remplaçant  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\tilde{\mathbf{y}}$  dans (4.195) par leurs expressions (4.188), après un calcul simple, nous remarquons que (4.195) est équivalente à (4.191).

L'orthogonalité des vecteurs de biquaternions impose donc trois contraintes de plus (4.192, 4.193, 4.194) entre les composantes de l'antenne par rapport à l'approche long-vecteur. Nous verrons plus loin que cette contrainte d'orthogonalité biquaternionique se traduit par un meilleur pouvoir de résolution de l'algorithme proposé.

#### 4.4.4 L'estimateur MUSIC biquaternionique

Nous revenons maintenant au modèle biquaternionique des signaux enregistrés sur une antenne à trois composantes, et introduisons un algorithme de type MUSIC (BQ-MUSIC) basé sur la décomposition en valeurs propres de la matrice interspectrale biquaternionique. Cet algorithme permet l'estimation des quatre paramètres de polarisation des ondes présentes dans le signal et de leurs DDAs.

Considérons la matrice de covariance des observations biquaternioniques sur une antenne vectorielle de  $N_x$  capteurs à trois composantes  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N_x \times N_x}$ . Sa décomposition en valeurs propres, calculée comme nous l'avons montré dans la section 4.3.2, s'écrit :

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{f=1}^{2N_x} \lambda_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f^\dagger \quad (4.196)$$

Puisque  $\mathbf{\Lambda}$  est hermitienne par construction, ses valeurs propres sont réelles et ses vecteurs propres, orthogonaux (voir section 4.3.2.1). Nous avons montré que, dans ce cas, chaque source  $\mathbf{d}_f$  de (4.184) est représentée dans (4.196) par deux vecteurs propres. Nous associons les premières  $2F$  valeurs propres de  $\mathbf{\Lambda}$  au sous-espace signal et les autres  $2N_x - 2F$  au sous-espace bruit. Construisons deux matrices :  $\mathbf{P} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N_x \times 2F}$  contenant les premiers  $2F$

vecteurs propres de la décomposition de  $\mathbf{\Lambda}$  et  $\mathbf{G} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N_x \times 2(N_x - F)}$  contenant les  $2(N_x - F)$  derniers.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2F}) \\ \mathbf{G} &= (\mathbf{u}_{2F+1}, \dots, \mathbf{u}_{2N_x}) \end{aligned} \quad (4.197)$$

En appliquant un raisonnement identique à celui illustré par les équations (2.37) ... (2.41), l'égalité suivante est obtenue :

$$\mathbf{d}_f^\dagger(\theta_f, \rho_{1f}, \varphi_{1f}, \rho_{2f}, \varphi_{2f}) \mathbf{G} \mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}_f(\theta_f, \rho_{1f}, \varphi_{1f}, \rho_{2f}, \varphi_{2f}) = 0 \quad (4.198)$$

avec  $\mathbf{d}_f$  défini par (4.181). Si  $\widehat{\mathbf{\Pi}}_B = \widehat{\mathbf{G}} \widehat{\mathbf{G}}^\dagger$ , avec  $\widehat{\mathbf{G}}$  une estimation de  $\mathbf{G}$  issue de la EVD d'une estimation de la matrice interspectrale  $\widehat{\mathbf{\Lambda}}$ , la fonctionnelle BQ-MUSIC a l'expression suivante :

$$M(\theta, \rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = \frac{1}{\mathbf{p}^\dagger(\theta, \rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) \widehat{\mathbf{\Pi}}_B \mathbf{p}(\theta, \rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)} \quad (4.199)$$

avec  $\mathbf{p} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N_x}$  le *vecteur directionnel biquaternionique* :

$$\mathbf{p}(\theta, \rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{N_x(1 + \rho_1^2 + \rho_2^2)}} \begin{pmatrix} \mathbf{i} + \rho_1 e^{i\varphi_1} \mathbf{j} + \rho_2 e^{i\varphi_2} \mathbf{k} \\ e^{-i\theta} \mathbf{i} + \rho_1 e^{i(\varphi_1 - \theta)} \mathbf{j} + \rho_2 e^{i(\varphi_2 - \theta)} \mathbf{k} \\ \vdots \\ e^{-i(N-1)\theta} \mathbf{i} + \rho_1 e^{i(\varphi_1 - (N-1)\theta)} \mathbf{j} + \rho_2 e^{i(\varphi_2 - (N-1)\theta)} \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (4.200)$$

La fonctionnelle (4.199) comporte des maxima locaux pour des valeurs  $(\theta, \rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)$  correspondant aux sources présentes dans le signal :

$$\{\theta_f, \rho_{1f}, \varphi_{1f}, \rho_{2f}, \varphi_{2f}\} = \arg \left\{ \max_{\theta, \rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2} (M(\theta, \rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2)) \right\} \quad (4.201)$$

De même que pour MUSIC quaternionique, il est possible de calculer une hypersurface à cinq paramètres et de rechercher des maxima locaux sur cette surface, afin de retrouver les paramètres estimés des sources présentes dans le signal. Ce procédé est très coûteux en temps de calcul, raison pour laquelle, dans la section suivante, les paramètres de polarisation seront considérés connus a priori, et la maximisation sera faite seulement selon le paramètre  $\theta$ . Dans les perspectives de ce travail il conviendra de trouver des algorithmes permettant d'optimiser la recherche de maxima sur une hypersurface à un grand nombre de paramètres [Walter94].

#### 4.4.5 Simulations, résultats et discussion

Comme pour l'algorithme Q-MUSIC, nous présentons d'abord quelques considérations concernant le coût de calcul de l'algorithme biquaternionique par rapport au modèle long-vecteur. Cette fois, pour simplifier le problème, la comparaison est faite en termes de

nombres complexes et non pas de nombres réels.

Dans le cas d'une antenne à  $N_x$  capteurs à trois composantes, la matrice de covariance des observations pour l'approche long-vecteur contient  $3N_x \times 3N_x = 9N_x^2$  entrées complexes. La matrice équivalente pour le modèle biquaternionique, contient  $N_x \times N_x = N_x^2$  coefficients biquaternioniques, c'est-à-dire  $4N_x^2$  valeurs complexes. On observe un gain au niveau de la place mémoire nécessaire, de plus de deux. Ce gain est encore plus important pour des antennes 4C, où la matrice interspectrale long-vecteur nécessite  $16N_x^2$  valeurs complexes, tandis que l'approche biquaternionique reste toujours à  $4N_x^2$ , soit un rapport de 4 entre les besoins en mémoire.

Une analyse similaire à celle présentée dans le tableau 4.3 peut être faite, pour estimer la complexité de calcul pour l'estimation des matrices de covariance. Cette fois, les opérations élémentaires sont la multiplication de deux nombres complexes (M), l'addition de deux nombres complexes (A), et la division d'un nombre complexe par un réel (D). Les résultats de cette analyse sont présentés dans les tableaux 4.4 et 4.5 pour le cas trois composantes (3C) et quatre composantes (4C).

3C	Place mémoire (cpx)	Opérations mémoire	Multiplications (M)	Additions (A)	Divisions (D)
Biquat.	$4N_x^2$	$\approx 4N_x^2L$	$9N_x^2L$	$9N_x^2L - 4N_x^2$	$4N_x^2$
Long-vecteur	$9N_x^2$	$\approx 9N_x^2L$	$9N_x^2L$	$9N_x^2L - 9N_x^2$	$9N_x^2$
Comparaison	rapp=4/9	rapp $\approx$ 4/9	diff=0	diff=+5 $N_x^2$	rapp=4/9

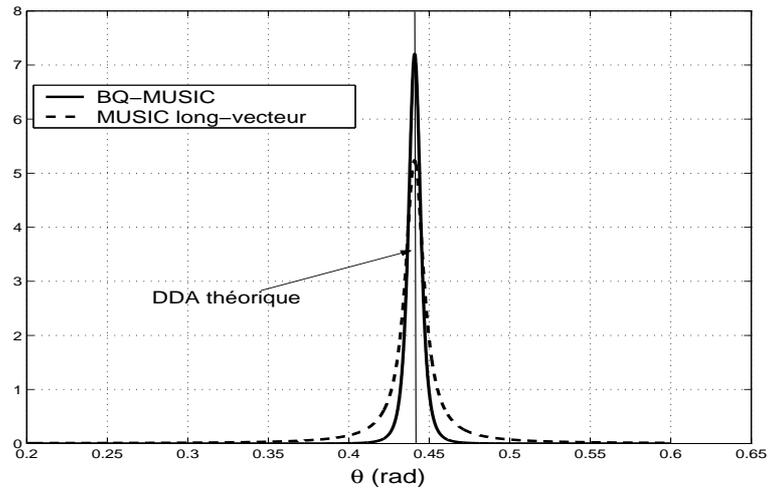
TAB. 4.4 – Le coût de calcul pour l'estimation des matrices de covariance dans le cas d'une antenne 3C

4C	Place mémoire (cpx)	Opérations mémoire	Multiplications (M)	Additions (A)	Divisions (D)
Biquat.	$4N_x^2$	$\approx 4N_x^2L$	$16N_x^2L$	$16N_x^2L - 4N_x^2$	$4N_x^2$
Long-vecteur	$16N_x^2$	$\approx 16N_x^2L$	$16N_x^2L$	$16N_x^2L - 16N_x^2$	$16N_x^2$
Comparaison	rapp=1/4	rapp $\approx$ 1/4	diff=0	diff=+12 $N_x^2$	rapp=1/4

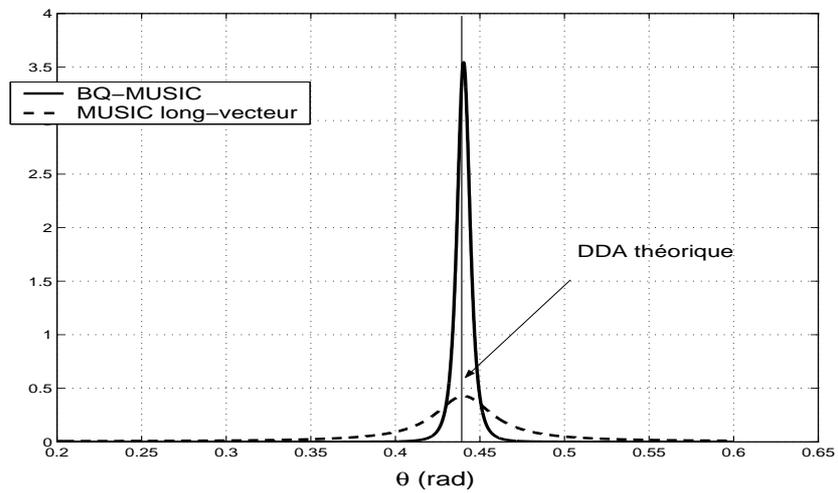
TAB. 4.5 – Le coût de calcul pour l'estimation des matrices de covariance dans le cas d'une antenne 4C

Nous pouvons remarquer que, d'une façon générale, l'approche biquaternionique réduit d'un facteur supérieur à deux la place mémoire nécessaire, et par conséquent le temps de calcul, grâce à la réduction du nombre d'opérations avec la mémoire. Concernant le nombre d'opérations élémentaires sur des valeurs complexes, l'approche hypercomplexe demande plus d'additions (opération simple au niveau machine) et moins de divisions (opération assez coûteuse en temps de calcul).

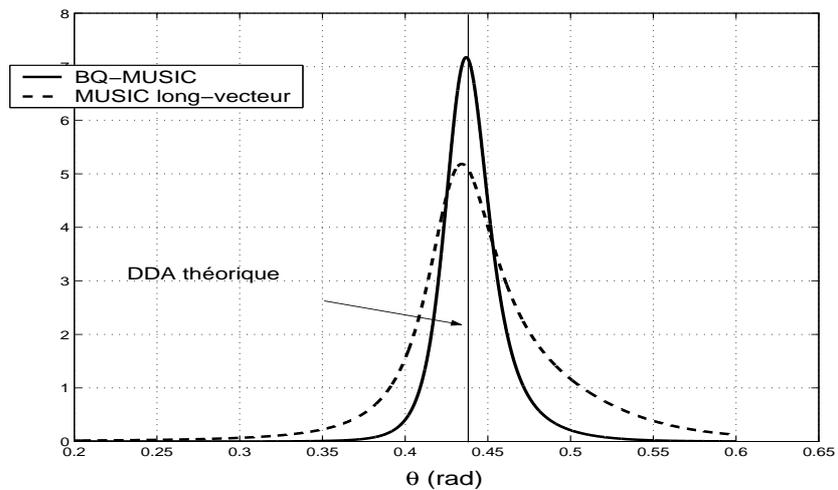
Dans la suite, l'algorithme MUSIC biquaternionique 3C (BQ-MUSIC), introduit dans cette partie, sera comparé en simulations avec MUSIC long-vecteur 3C. Afin d'éviter le



(a) Paramètres de polarisations exactes



(b) Paramètres de polarisations biaisés



(c) Nombre des sources incorrect (égal à deux)

FIG. 4.10 – MUSIC biquaternionique et MUSIC long-vecteur dans le cas d'une seule source

calcul d'une surface à cinq paramètres, nous allons considérer connus les paramètres de polarisation des ondes. La recherche des maxima de la fonctionnelle (4.199) sera faite seulement selon les paramètres  $\theta$  (la DDA de l'onde).

Considérons d'abord le cas d'une seule onde polarisée, enregistrée par une antenne de 20 capteurs à trois composantes. Les paramètres simulés sont  $\theta = 0.43 \text{ rad}$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,  $\rho_2 = 2$ ,  $\varphi_2 = 10^\circ$ . Dans la figure 4.10 nous avons représenté les courbes de détection en fonction de  $\theta$ , pour les deux algorithmes, correspondant à plusieurs situations différentes. Pour chaque situation, 300 réalisations ont été utilisées afin d'estimer la matrice de covariance des observations.

Dans la figure 4.10.(a), nous avons utilisé pour le vecteur biquaternionique directionnel (4.200) et le vecteur directionnel long-vecteur, les paramètres exacts de polarisation des sources (les paramètres simulés). Nous observons que dans ce cas, les deux algorithmes effectuent une détection correcte de la DDA de la source, mais la réponse de l'approche biquaternionique est meilleure (l'amplitude est plus importante et la largeur du lobe de détection est plus faible par rapport à celle de l'algorithme de type long-vecteur). BQ-MUSIC semble présenter donc un meilleur pouvoir de résolution que la version long-vecteur.

Ensuite, nous avons supposé une connaissance approximative des paramètres de polarisation de la source. Nous avons donc choisi pour le vecteur directionnel, des paramètres de polarisation dont les valeurs sont proches mais pas identiques aux valeurs réelles (simulées). Le résultat (figure 4.10.(b)), montre que l'approche biquaternionique est plus robuste par rapport à une connaissance approximative des paramètres de polarisation, que l'algorithme long-vecteur.

L'utilisation des biquaternions rend donc, l'algorithme moins sensible (plus robuste) à la polarisation des ondes. Cette propriété a un coté positif mais également un aspect négatif. L'aspect positif vient du fait que, lors de l'estimation de la DDA d'une onde, une connaissance inexacte des paramètres de polarisation n'influe pas beaucoup sur la qualité de la détection. En contrepartie, les ondes sont moins bien séparées dans l'espace des paramètres de polarisation, d'où une estimation moins performante de ces paramètres. L'explication est la réduction de dimension de l'espace de représentation des signaux, dans la matrice biquaternionique interspectrale, de même que pour MUSIC quaternionique.

La figure 4.10.(c) illustre le comportement de deux algorithmes quand le nombre des sources est mal estimé. Pour le choix correct des paramètres de polarisation de la source, nous montrons les courbes de détection lorsqu'on considère que le nombre des sources présentes dans le signal est égal à deux. Le projecteur sur le sous-espace bruit est donc construit à partir des  $(3N_x - 2) = 58$  derniers vecteurs propres complexes pour MUSIC long-vecteur et les  $2(N_x - 2) = 36$  vecteurs propres biquaternioniques pour MUSIC biquaternionique. Nous pouvons remarquer que, même dans ce cas, l'algorithme hypercomplexe présente un meilleur pouvoir de résolution, étant moins sensible au choix du nombre des sources.

Dans la figure 4.11, nous avons simulé un cas avec deux sources de puissances différentes,

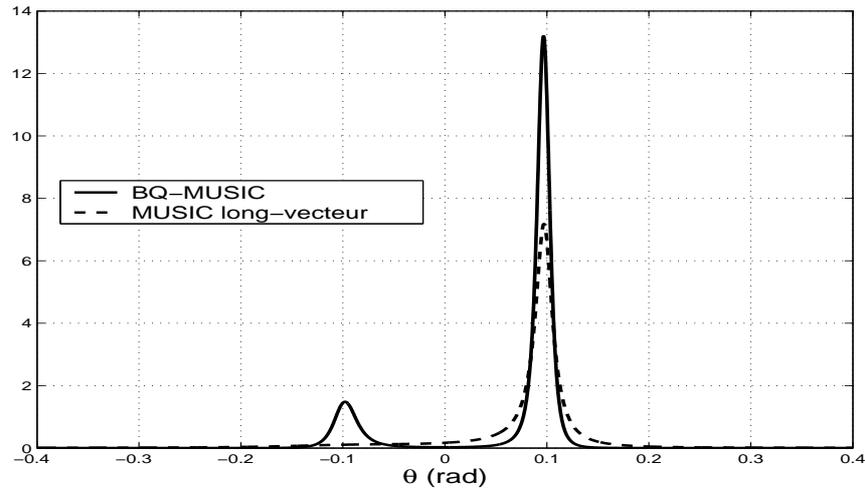


FIG. 4.11 – MUSIC biquaternionique et MUSIC long-vecteur dans le cas de deux sources

ayant les DDAs et les paramètres de polarisation différents. Pour les paramètres de polarisation du vecteur directionnel égaux aux paramètres de la première onde, nous avons représenté les courbes de détection pour les deux algorithmes (Fig. 4.11). Les conclusions sont les mêmes que dans le cas d'une seule source, à la différence que, le pic correspondant à la deuxième source est plus important pour MUSIC biquaternionique que pour le long-vecteur. Cela est une conséquence du fait que les ondes sont moins bien séparées dans le domaine des paramètres de polarisation dans l'approche biquaternionique, comme nous l'avons illustré auparavant.

D'une façon générale, nous avons montré que l'utilisation des biquaternions en traitement d'antenne vectorielle réduit le coût de calcul, et améliore la résolution des algorithmes, par rapport aux approches classiques de type long-vecteur.

## Conclusions

Dans ce chapitre nous avons proposé deux approches hypercomplexes en traitement d'antenne vectorielle. Deux nouveaux estimateurs de type MUSIC ont été introduits : *MUSIC quaternionique* (Q-MUSIC) et *MUSIC biquaternionique* (BQ-MUSIC). Les algorithmes proposés permettent l'estimation conjointe des DDAs et des paramètres de polarisation des ondes polarisées enregistrées sur une antenne à deux, trois et quatre composantes.

Dans le cadre de l'approche biquaternionique, nous avons défini les notions de *produit scalaire*, *norme* et *orthogonalité des vecteurs de biquaternions*. Nous avons proposé ensuite une méthode de décomposition en valeurs propres d'une matrice de biquaternions basée sur un nouvel objet mathématique *la matrice quaternionique adjointe*. Nous avons démontré quelques propriétés liées aux matrices hermitiennes de biquaternions. Un résultat surprenant est le fait qu'une matrice carrée de biquaternions de taille  $N \times N$  a  $2N$  valeurs propres différentes.

D'une manière générale, nous avons montré que l'utilisation des nombres hypercomplexes (quaternions ou biquaternions) dans les algorithmes proposés, permet de gagner en terme de puissance de calcul par rapport aux approches classiques de type long-vecteur. Nous gagnons à la fois, au niveau de la place mémoire nécessaire pour la représentation de la matrice de covariance des données, et en rapidité de calcul. Les contraintes d'orthogonalité des vecteurs hypercomplexes, différentes de celles inhérentes à l'approche long-vecteur, se concrétisent en une meilleure résolution des méthodes proposées. Le gain en place mémoire se répercute sur la sensibilité des algorithmes aux paramètres de polarisation des sources. À cause de la réduction de la dimension de l'espace de représentation des signaux dans la matrice de covariance des observations, les sources sont moins bien séparées dans l'espace des paramètres de polarisation. Cet aspect présente aussi un côté positif, puisqu'il rend les algorithmes plus robustes aux erreurs d'estimation de la polarisation des sources.

# Conclusions et perspectives

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a permis d'établir de nouvelles méthodes de traitement d'antenne vectorielle pour l'estimation conjointe des directions d'arrivées et des paramètres de polarisation des sources. Nous avons proposé quatre estimateurs de type MUSIC (V-MUSIC, HO-MUSIC, Q-MUSIC, BQ-MUSIC) dans le cadre de deux approches algébriques différentes. Les performances de ces algorithmes ont été montrées sur des simulations.

Les techniques de traitement d'antenne multicomposante existantes, dont les principes sont exposés dans le chapitre 2, sont en grande majorité basées sur des modèles de type long-vecteur ou sur le traitement de chaque composante indépendamment. Les modèles et les outils mathématiques utilisés sont essentiellement fondés sur les notions et les concepts classiques d'algèbre linéaire, qui ne sont pas bien adaptés à la nature multimodale des acquisitions multicomposantes.

L'originalité des travaux exposés dans ce manuscrit est représentée par la recherche de modèles et de cadres mathématiques mieux adaptés à la nature intrinsèque des signaux vectoriels que les modèles algébriques classiques.

Dans un premier temps, une présentation des signaux polarisés rencontrés en sismique et en électromagnétisme a été faite. Nous avons proposé une première approche fondée sur un modèle tensoriel d'une onde polarisée captée par une antenne vectorielle. À partir de ce modèle, nous avons construit une représentation multilinéaire des statistiques d'ordre deux des données multicomposantes, sous la forme d'un *tenseur interspectral*. Le tenseur interspectral conserve l'information sur la structure multimodale de l'acquisition. Deux algorithmes (V-MUSIC et HO-MUSIC) ont été proposés, basés sur des décompositions orthogonales du tenseur interspectral. HO-MUSIC s'est montré plus résolutif que V-MUSIC car il impose une contrainte d'orthogonalité plus forte entre les sous-espaces « signal » et « bruit » issus de la décomposition. Cependant, pour HO-MUSIC le nombre maximal de sources détectables est fortement limité dans son cas, car il est inférieur au nombre des composantes de l'antenne.

La deuxième approche est fondée sur les algèbres hypercomplexes. Deux algorithmes de traitement d'antenne vectorielle à haute résolution (Q-MUSIC et BQ-MUSIC) ont été proposés à partir des modèles de signaux multicomposante basés sur des vecteurs de quaternions et de biquaternions. Ces méthodes se sont révélées plus résolutive pour la détection des directions d'arrivée des sources suite à une contrainte d'orthogonalité plus forte entre les

sous-espaces estimés et moins coûteuses en temps de calcul, par rapport aux algorithmes de type long-vecteur. Leur inconvénient, conséquence de la réduction de la taille du modèle de covariance des données, est la mauvaise séparation des sources dans le domaine des paramètres de polarisation.

Pour les *vecteurs de biquaternions*, nous avons introduit les notions de *produit scalaire*, *norme* et *orthogonalité*. Nous avons également proposé une méthode de décomposition en valeurs propres des matrices de biquaternions, basée sur un nouvel objet mathématique : *la matrice quaternionique adjointe*.

Une étude comparative des méthodes proposées dans ce mémoire est assez difficile à entreprendre car, a priori, il n'y a pas de critère commun de comparaison. Une multitude de critères tels que le nombre de composantes utilisées, la complexité de calcul, le nombre maximal de sources détectables, la résolution, les performances statistiques, etc. doit être prise simultanément en compte.

D'une manière générale, la prise en compte des relations inter-composantes améliore les performances par rapport aux algorithmes qui traitent les composantes séparément. Cependant la tâche de calcul est bien plus importante. Par rapport aux méthodes de type long-vecteur, les algorithmes proposés dans ce mémoire sont généralement plus résolutifs. HO-MUSIC présente les meilleures performances en termes de résolution, mais le nombre maximal de sources détectable est fortement limité. Il est aussi le plus coûteux en terme de temps de calcul, nécessitant la diagonalisation de quatre matrices dépliantes du tenseur interspectral. L'algorithme V-MUSIC, plus facile à mettre en œuvre, comporte des performances identiques aux méthodes long-vecteur.

Les estimateurs hypercomplexes réduisent beaucoup l'effort de calcul par rapport aux techniques long-vecteur. Leur résolution est légèrement supérieure pour la détection de la direction d'arrivée des sources. Ce gain en pouvoir séparateur est plus évident pour l'algorithme biquaternionique. En contrepartie, l'estimation des paramètres de polarisation est moins performante et le nombre de sources détectables est inférieur à celui atteignable avec l'approche long-vecteur.

Les algorithmes proposés, avec leurs avantages et leurs inconvénients, ont un caractère « complémentaire ». Une approche fondée sur une combinaison de ces méthodes permettrait d'améliorer considérablement la qualité de l'estimation. Nous pouvons, par exemple, imaginer un système utilisant HO-MUSIC pour l'estimation des paramètres de polarisation et un algorithme hypercomplexe pour la DDA.

Les perspectives des travaux présentés dans ce mémoire sont liées aux résultats très encourageants obtenus par l'utilisation des algorithmes multilinéaires et notamment des biquaternions en traitement d'antenne vectorielle. Ils montrent que les extensions des nombres complexes à des dimensions supérieures à quatre présentent un grand potentiel dans la modélisation des données de grande taille. Il serait intéressant de voir quel peut être l'apport des autres nombres hypercomplexes de grande dimension (les octonions, les algèbres de Clifford, etc.) dans l'analyse et le traitement des signaux multidimensionnels (enregistrements sismiques multicomposantes, ondes polarisées électromagnétiques, images couleurs, transmissions multi-canal, etc.).

La continuation de ces travaux de recherche serait l'analyse approfondie des perfor-

mances des estimateurs proposés. Le calcul de la borne de Cramer-Rao dans le cas stochastique est envisageable. On devrait étudier comment l'hypothèse de circularité des variables aléatoires quaternioniques influe sur les performances de l'algorithme Q-MUSIC. L'extension de la notion de circularité aux biquaternions devrait être étudiée, ainsi que son influence sur les méthodes de type BQ-MUSIC. Un travail théorique important reste à faire sur les matrices et les vecteurs à valeurs biquaternioniques.

Dans le cadre des algorithmes multilinéaires, il serait avantageux d'utiliser la symétrie du tenseur interspectral dans des décompositions tensorielles de type HOSVD. D'autres décompositions tensorielles, pas forcément orthogonales (ex : PARAFAC) sont également envisageables.

La suite naturelle de ce travail de recherche est d'appliquer les algorithmes développés sur des données réelles. Un effort devra être fait pour adapter ces méthodes aux particularités des signaux réels issus des domaines mentionnés dans la première partie de cet ouvrage.



# Annexes



# Annexe A

## Matrices dépliantes carrées

Pour un tenseur d'ordre  $2N$ ,  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N \times J_1 \times \dots \times J_N}$ , avec  $I_n = J_n$  pour  $n = 1 \dots N$ , on peut définir une famille de *matrices dépliantes carrées* de taille  $I_1 I_2 \dots I_N \times J_1 J_2 \dots J_N$ .

Afin de trouver la correspondance entre les indices des éléments du tenseur et les indices des éléments des matrices, il est nécessaire de définir d'abord la permutation  $P(1, 2, \dots, N)$  de  $(1, 2, \dots, N)$ . Une matrice dépliantes carrée contient alors l'élément  $a_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_N}$  du tenseur sur sa ligne

$$(i_{P(1)} - 1)I_{P(2)} \dots I_{P(N)} + (i_{P(2)} - 1)I_{P(3)} \dots I_{P(N)} + i_{P(N)}$$

et dans la colonne

$$(j_{P(1)} - 1)J_{P(2)} \dots J_{P(N)} + (j_{P(2)} - 1)J_{P(3)} \dots J_{P(N)} + j_{P(N)}.$$

Cette correspondance est valable pour toutes les permutations  $P(1, 2, \dots, N)$  possibles. Pour une matrice d'ordre  $2N$ ,  $(N!)^2$  matrices carrées dépliantes sont alors possibles.

Considérons le cas d'un tenseur d'ordre quatre  $\mathcal{A}$  de taille  $I_1 \times I_2 \times J_1 \times J_2$ , ( $I_1 = J_1, I_2 = J_2$ ). D'après l'algorithme présenté, quatre matrices dépliantes carrées peuvent être construites à l'aide des transformations suivantes :

$$a_{i_1 i_2 j_1 j_2} \rightarrow a_{[(i_1-1)I_2+i_2][(j_1-1)I_2+i_2]} \quad (\text{A.1})$$

$$a_{i_1 i_2 j_1 j_2} \rightarrow a_{[(i_2-1)I_1+i_1][(j_1-1)I_2+i_2]} \quad (\text{A.2})$$

$$a_{i_1 i_2 j_1 j_2} \rightarrow a_{[(i_1-1)I_2+i_2][(j_2-1)I_1+i_1]} \quad (\text{A.3})$$

$$a_{i_1 i_2 j_1 j_2} \rightarrow a_{[(i_2-1)I_1+i_1][(j_2-1)I_1+i_1]} \quad (\text{A.4})$$

Dans (A.1) ... (A.4) on trouve à gauche les éléments du tenseur et à droite, l'élément de la matrice carrée dépliantes, correspondant . Les relations entre les indices sont ainsi mises en évidence.



# Annexe B

## Variables aléatoires quaternioniques

Étant donné qu'un quaternion est une extension des nombres complexes dans l'espace 4D, une *variable aléatoire à valeurs quaternioniques* est définie d'une façon unique par un vecteur réel aléatoire à quatre dimensions [Vakhania98, Amblard04]. Un quaternion  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ , en tant que variable aléatoire, est décrit complètement par la *densité de probabilité (ddp)* conjointe des ses quatre parties réelles  $q_0, q_1, q_2, q_3$ , ou par la fonction caractéristique correspondante.

Amblard et Le Bihan [Amblard04] ont montré qu'une autre manière de caractériser une variable aléatoire quaternionique est d'utiliser le couple de variables complexes associées dans la notation de Cayley-Dickson (voir (4.21)) et leurs conjugués ou  $q$  et ses trois involutions associées [Coxeter46] :

$$q_{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}q\mathbf{i}, \quad q_{\mathbf{j}} = -\mathbf{j}q\mathbf{j}, \quad q_{\mathbf{k}} = -\mathbf{k}q\mathbf{k} \quad (\text{B.1})$$

La notation de Cayley-Dickson permet de mettre plus facilement en évidence le lien entre les variables aléatoires complexes et les variables aléatoires quaternioniques. Considérons un quaternion  $q \in \mathbb{H}$  en représentation de Cayley-Dickson :

$$q = z_1 + \mathbf{i}z_2 \quad (\text{B.2})$$

avec  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_{\mathbf{j}}$  :

$$\begin{cases} z_1 = q_0 + \mathbf{j}q_2 \\ z_2 = q_1 + \mathbf{j}q_3 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Alors,  $q$  est caractérisé complètement par les quatre variables complexes  $z_1, z_1^*, z_2, z_2^*$ . La nécessité de considérer  $z_1^*$  et  $z_2^*$ , en plus de  $z_1$  et  $z_2$  a été démontrée pour les variables complexes dans [Neeser93, Amblard96]. Nous introduisons dans la suite les statistiques d'ordre un et deux, des variables quaternioniques.

L'espérance mathématique de  $q$  est naturellement définie comme :

$$E[q] = E[q_0] + E[q_1]\mathbf{i} + E[q_2]\mathbf{j} + E[q_3]\mathbf{k} \quad (\text{B.4})$$

La notion de variable aléatoire quaternionique a été introduite pour la première fois dans [Vakhania98]. Amblard et Le Bihan [Amblard04] ont généralisé la notion de *circularité* connue dans le cas complexe, aux variables aléatoires quaternioniques. Ils distinguent deux types de circularité.

Une variable aléatoire  $q$  est nommée  $\mathbb{C}^\eta$ -circularité [Amblard04] si :

$$q \stackrel{ddp}{=} e^{\eta\varphi} q, \quad \forall \varphi \tag{B.5}$$

pour  $\eta$  égal à une et seulement une des unités imaginaires  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  or  $\mathbf{k}$ , et elle est nommée  $\mathbb{H}$ -circularité si (B.5) est vérifié pour tout quaternion pur, unitaire  $\eta$ . L'égalité en (B.5) est au sens de ddp. La multiplication à gauche par  $e^{\eta\varphi}$ , est une *translation gauche de Clifford* [Coxeter46].

La  $\mathbb{H}$ -circularité correspond au cas d'indépendance statistique des variables aléatoires réelles définies par les quatre parties d'un quaternion. Amblard et Le Bihan ont montré que les variables  $\mathbb{C}^\eta$ -circularité à l'ordre deux possèdent des propriétés d'invariance par rapport aux rotations simultanées d'angle  $\pi/2$  dans certains plans définis par des couples de  $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  [Amblard04].

## Annexe C

# Calcul de la borne de Cramer-Rao pour le modèle quaternionique

Afin de trouver les éléments de la matrice d'information de Fisher (4.125), il est nécessaire de calculer les dérivées partielles de la log-vraisemblance de  $\mathbf{x}$  par rapport aux paramètres de la source  $f$  ( $\theta_f$ ,  $\rho_f$  et  $\varphi_f$ ) :

a) La dérivée par rapport à  $\theta_f$  :

$$\frac{\partial \ln(V(\mathbf{x}))}{\partial \theta_f} = -\frac{1}{4\sigma} \sum_{l=1}^L \left( \frac{\partial[\mathbf{x}(l) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{s}]^\dagger}{\partial \theta_f} \mathbf{b}(l) + \mathbf{b}^\dagger(l) \frac{\partial[\mathbf{x}(l) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi)\mathbf{s}]}{\partial \theta_f} \right) \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \ln(V(\mathbf{x}))}{\partial \theta_f} = \frac{1}{4\sigma} \sum_{l=1}^L \left[ \mathbf{s}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \right)^\dagger \mathbf{b}(l) + \mathbf{b}^\dagger(l) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \mathbf{s} \right] \quad (\text{C.2})$$

Sachant que pour deux matrices quaternioniques  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , l'égalité  $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$  est vraie, la relation (C.2) devient :

$$\frac{\partial \ln(V(\mathbf{x}))}{\partial \theta_f} = \frac{1}{4\sigma} \sum_{l=1}^L \left[ \mathbf{s}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \right)^\dagger \mathbf{b}(l) + \left( \mathbf{s}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \right)^\dagger \mathbf{b}(l) \right)^\dagger \right] \quad (\text{C.3})$$

L'expression  $\left( \mathbf{s}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \right)^\dagger \mathbf{b}(l) \right)$  est un scalaire, donc  $\left( \mathbf{s}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \right)^\dagger \mathbf{b}(l) \right)^\dagger = \left( \mathbf{s}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \right)^\dagger \mathbf{b}(l) \right)^*$ .

$$\frac{\partial \ln(V(\mathbf{x}))}{\partial \theta_f} = \frac{1}{4\sigma} \sum_{l=1}^L \left[ \mathbf{s}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \right)^\dagger \mathbf{b}(l) + \left( \mathbf{s}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \right)^\dagger \mathbf{b}(l) \right)^* \right] \quad (\text{C.4})$$

Donc :

$$\frac{\partial \ln(V(\mathbf{x}))}{\partial \theta_f} = \frac{1}{2\sigma} \sum_{l=1}^L \Re \left[ \mathbf{s}^\dagger \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \right)^\dagger \mathbf{b}(l) \right] \quad (\text{C.5})$$

Admettons la notation suivante :

$$\mathbf{A}_\theta = \sum_{f=1}^F \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} \quad (\text{C.6})$$

Alors :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_f} = \mathbf{A}_\theta \mathbf{e}_f \mathbf{e}_f^T \quad (\text{C.7})$$

où  $\mathbf{e}_f = [0 \dots 1 \dots 0]^T$  est un vecteur de longueur  $F$ , ayant une seule valeur non-nulle à la position  $f$ .

Si nous substituons (C.7) dans (C.5) :

$$\frac{\partial \ln(V(\mathbf{x}))}{\partial \theta_f} = \frac{1}{2\sigma} \sum_{l=1}^L \Re \left[ \mathbf{s}^\dagger \mathbf{e}_f \mathbf{e}_f^T \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \right] \quad (\text{C.8})$$

Considérons maintenant le vecteur  $\mathbf{f}_\theta \in \mathbb{R}^F$ , dont les éléments sont les  $\frac{\partial \ln(V(\mathbf{x}))}{\partial \theta_f}$ . Si on construit la matrice  $\mathbf{S} = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_F\}$ , on peut écrire :

$$\mathbf{f}_\theta = \frac{1}{2\sigma} \sum_{l=1}^L \Re \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \right] \quad (\text{C.9})$$

La sous-matrice  $\mathbf{F}_{\theta\theta}$  de la matrice de Fisher prend alors l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_{\theta\theta} = E[\mathbf{f}_\theta \mathbf{f}_\theta^T] \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{F}_{\theta\theta} = \frac{1}{4\sigma^2} E \left[ \sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \left( \Re \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \right) \right) \left( \Re \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(\xi) \right)^T \right) \right] \quad (\text{C.11})$$

Pour deux matrices de quaternions  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  la relation suivante est vraie (la preuve est immédiate par le calcul) :

$$\Re(\mathbf{A}) \Re(\mathbf{B}^T) = \frac{1}{2} [\Re(\mathbf{A} \mathbf{B}^\dagger) + \Re(\mathbf{A} \mathbf{B}^T)] \quad (\text{C.12})$$

Si nous introduisons (C.12) dans (C.11) :

$$\mathbf{F}_{\theta\theta} = \frac{1}{8\sigma^2} \sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(\xi) \right)^\dagger \right] + \frac{1}{8\sigma^2} \sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(\xi) \right)^T \right] \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{F}_{\theta\theta} = \frac{1}{8\sigma^2} \sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \mathbf{b}^\dagger(\xi) \mathbf{A}_\theta \mathbf{S} \right] + \frac{1}{8\sigma} \sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(\xi) \right)^T \right] \quad (\text{C.14})$$

En utilisant les hypothèses faites sur le bruit (voir sous-section 4.2.7), (C.14) devient :

$$\mathbf{F}_{\theta\theta} = \frac{1}{8\sigma^2} \sum_{l=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \mathbf{b}(l)^\dagger \mathbf{A}_\theta \mathbf{S} \right] + \frac{1}{8\sigma^2} \sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(\xi) \right)^T \right] \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{F}_{\theta\theta} = \frac{1}{8\sigma} \sum_{l=1}^L \Re \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{A}_\theta \mathbf{S} \right] + \frac{1}{8\sigma^2} \sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(\xi) \right)^T \right] \quad (\text{C.16})$$

**Lemme C.1** *Étant donnée une matrice quaternionique  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times F}$  ( $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, F}$ ) et un vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{H}^F$  ( $\mathbf{b} = [n_j]_{j=1, \dots, F}$ ), il existe une matrice  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{F \times N}$  ( $\mathbf{B} = [b_{ji}]_{j=1, \dots, F; i=1, \dots, N}$ ,  $b_{ji} = n_j^{-1} a_{ji} n_j$ ) telle que  $(\mathbf{A}\mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{B}$ .*

**Démonstration :**

Considérons :

$$\mathbf{b}^T \mathbf{B} = \left[ \left( \sum_{j=1}^F n_j b_{ji} \right)_i \right]_{i=1, \dots, N} = \left[ \left( \sum_{j=1}^F n_j n_j^{-1} a_{ji} n_j \right)_i \right]_{i=1, \dots, N} = \left[ \left( \sum_{j=1}^F a_{ij} n_j \right)_i \right]_{i=1, \dots, N}^T = (\mathbf{A}\mathbf{b})^T \quad (\text{C.17})$$

■

Suite au lemme C.1, on peut écrire  $\left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(\xi) \right)^T = \mathbf{b}(\xi)^T \mathbf{\Delta}(\xi)$ .

$$\sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \left( \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(\xi) \right)^T \right] = \sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \mathbf{b}(\xi)^T \mathbf{\Delta}(\xi) \right] \quad (\text{C.18})$$

Compte tenu des hypothèses sur le bruit ( $E [\mathbf{b}(l) \mathbf{b}(\xi)^T] = 0$ , pour tout  $l, \xi$ ),

$$\sum_{l=1}^L \sum_{\xi=1}^L \Re E \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{b}(l) \mathbf{b}(\xi)^T \mathbf{\Delta}(\xi) \right] = 0.$$

L'expression finale de  $\mathbf{F}_{\theta\theta}$ , devient alors :

$$\mathbf{F}_{\theta\theta} = \frac{1}{8\sigma} \sum_{l=1}^L \Re \left[ \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{A}_\theta \mathbf{S} \right] \quad (\text{C.19})$$

Si nous réitérons le même calcul pour  $\rho$  et  $\varphi$ , nous obtenons :

$$\mathbf{F}_{\rho\rho} = \frac{1}{8\sigma} \sum_{l=1}^L \Re [\mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\rho^\dagger \mathbf{A}_\rho \mathbf{S}] \quad (\text{C.20})$$

$$\mathbf{F}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{8\sigma} \sum_{l=1}^L \Re [\mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\varphi^\dagger \mathbf{A}_\varphi \mathbf{S}] \quad (\text{C.21})$$

De la même manière, on obtient :

$$\mathbf{F}_{\theta\rho} = \frac{1}{8\sigma} \sum_{l=1}^L \Re [\mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}_\theta^\dagger \mathbf{A}_\rho \mathbf{S}] \quad (\text{C.22})$$

Ces expressions permettent de calculer ensuite la matrice d'information de Fisher.

# Bibliographie

- [Adnet90] C. Adnet. *Unification des méthodes d'analyse spectrale (Fourier et haute résolution) en vue de la réalisation d'un système expert d'aide à l'analyse*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1990.
- [Akaike74] H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. Automat. Control*, 19 :716–723, 1974.
- [Amblard96] P. O. Amblard, J. L. Lacoume, et M. Gaeta. Statistics for complex random variables and signals : Part 1 and 2. *Signal Processing*, 53 :1–25, 1996.
- [Amblard04] P. O. Amblard et N. Le Bihan. On properness of quaternion valued random variables. Dans *Institute of Mathematics and its Applications Conference on Mathematics in Signal Processing*, Dec. 2004.
- [Anderson60] V. C. Anderson. Digital array processing. *J. Acoust. Soc. Am.*, 32 :867, 1960.
- [Anderson96] S. Anderson et A. Nehorai. Analysis of a polarized seismic wave model. *IEEE Trans. Signal Processing* , 44(2) :379–386, 1996.
- [Andrews01] M. R. Andrews, P. P. Mitra, et R. Decarvalho. Tripling the capacity of wireless communications using electromagnetic polarization. *Nature*, 409 :316–318, 2001.
- [Barabell83] A. J. Barabell. Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms. Dans *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pp. 336–339, 1983.
- [Barr89] F. J. Barr et J. I. Sanders. Attenuation of water-column reverberations using pressure and velocity detectors in a water-bottom cable. Dans *59<sup>th</sup> Society of Exploration Geophysicists meeting*, pp. 653–656, Dallas, US, July 19-24 1989.
- [Bertin86] M. Bertin, J.-P. Faroux, et J. Renault. *Electromagnétisme*, Volume 3 du *Cours de physique*. Dunod, troisième édition, 1986.
- [Bienvenu79] G. Bienvenu et L. Kopp. Principe de la goniométrie passive adaptative. *GRETSI Symposium on Signal and Image Processing* , pp. 106/1–106/10, 1979.

- [Blitz96] J. Blitz et G. Simpson. *Ultrasonic methods of non-destructive testing*. Chapman & Hall, 1996.
- [Born80] M. Born et E. Wolf. *Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Pergamon Press, sixth édition, 1980.
- [Bülow99] T. Bülow. *Hypercomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images*. Thèse de Doctorat, Christian Albrechts Universität, Kiel, Germany, 1999.
- [Bülow01] T. Bülow et G. Sommer. Hypercomplex signals - a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(11) :2844–2852, 2001.
- [Burdic84] W. S. Burdic. *Underwater acoustic system analysis*. Prentice-Hall Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [Caldwell99] J. Caldwell. Marine multicomponent seismology. *The Leading Edge*, 18(11), 1999.
- [Capon69] J. Capon. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 57 :1408–1418, 1969.
- [Cardoso90] J.-F. Cardoso. Eigen-structure of the fourth-order cumulant tensor with application to the blind source separation problem. Dans *IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 2655–2658, 1990.
- [Chen91] L. X. Chen. Definition of determinant and Cramer solutions over the quaternion field. *Acta Math. Sinica N. S.*, 7(2) :171–180, 1991.
- [Cohen73] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë. *Mécanique quantique*, Volume I, complément  $A_{IV}$  du *Collection enseignement des sciences*. Hermann, 1973.
- [Comon94] P. Comon. Tensor diagonalization, a useful tool in signal processing. Dans M. Blanke et T. Soderstrom, editors, *10th International Federation of Automatic Control Symposium on System Identification*, Volume 1, pp. 77–82, Copenhagen, July 4-6 1994.
- [Comon96] P. Comon et B. Mourrain. Decomposition of quantics in sums of powers of linear forms. *Signal Processing, Elsevier*, 53(2) :93–107, 1996.
- [Comon98] P. Comon. Blind channel identification and extraction of more sources than sensors. Dans *SPIE Conference*, pp. 2–13, San Diego, July 19-24 1998.
- [Comon00] P. Comon. Tensor decompositions, state of the art and applications. Dans *Institute of Mathematics and its Applications Conf. Mathematics in Signal Processing*, Warwick, UK, Dec. 18-20, 2000.
- [Comon04] P. Comon. Canonical tensor decompositions. Dans *Workshop on Tensor Decompositions*, Palo Alto, CA, July 18-24 2004.

- [Coppens01] F. Coppens, F. Glangeaud, et J.-L. Mari. *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens*, Volume 1. Éditions Technip, Paris, 2001.
- [Costa99] C. Costa et R. Serôdio. A footnote on quaternion block-tridiagonal systems. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 9 :53–55, 1999.
- [Coxeter46] H. S. M. Coxeter. Quaternions and reflections. *Amer. Math. Monthly*, 53 :136–146, 1846.
- [De Lathauwer97] L. De Lathauwer. *Signal Processing based on Multilinear Algebra*. Thèse de Doctorat, Katholieke Universiteit Leuven, 1997.
- [De Lathauwer00a] L. De Lathauwer, B. De Moor, et J. Vandewalle. A multilinear singular value decomposition. *Society for Industrial and Applied Mathematics J. Matrix Anal. Appl.*, 21(4) :1253–1278, 2000.
- [De Lathauwer00b] L. De Lathauwer, B. De Moor, et J. Vandewalle. On the best rank-1 and rank- $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  approximation of higher-order tensors. *Society for Industrial and Applied Mathematics J. Matrix Anal. Appl.*, 21(4) :1324–1342, 2000.
- [DeAngelo04] M. V. DeAngelo, R. Remington, P. E. Murray, B. A. Hardage, R. Grebner, et K. Fouad. Multicomponent seismic technology for imaging deep gas prospects. *The Leading Edge*, 23(12) :1270–1281, 2004.
- [DosSantos05] M. Dos Santos. Décompositions tensorielles en traitement du signal multicomposante. *Laboratoire des Images et des Signaux*, Fév. - Juin 2005.
- [ECORS88] ECORS Pyrenees Team. The ECORS deep reflection seismic survey across the Pyrenees. *Nature*, 331 :508–511, 1988.
- [Edmond72] J. Edmond. Nature's natural numbers : relativistic quantum theory over the ring of complex quaternions. *Int. Journal of Theoretical Physics*, 6(3) :205–224, 1972.
- [Egan85] W. G. Egan. *Photometry and polarization in remote sensing*. Elsevier, New York, 1985.
- [Ell92] T. A. Ell. *Hypercomplex spectral transformation*. Thèse de Doctorat, University of Minnesota, 1992.
- [Ell00] T. A. Ell et S. J. Sangwine. Decomposition of 2D hypercomplex Fourier transforms into pairs of complex Fourier transforms. Dans *European Signal Processing Conference*, pp. 151–154, 2000.
- [Evans81] J. E. Evans, J. R. Johnson, et D. F. Sun. High resolution angular spectrum estimation techniques for terrain scattering analysis and angle of arrival estimation. Dans *Proc. 1st Acoust., Speech, Signal Processing Workshop Spectral Estimation*, pp. 134 – 139, Communication Research Lab., McMaster University, 1981.

- [Ewing57] W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, et F. Press. *Elastic waves in layered media*. McGraw-Hill Inc., New York, 1957.
- [Farina90] D. J. Farina. Superresolution compact array radiolocation technology (SuperCART) project. Tech. Rep. 185, Flam and Russel, Nov. 1990.
- [Ferrara83] E. R. Ferrara et T. M. Parks. Direction finding with an array of antennas having diverse polarizations. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 31(2) :231–236, 1983.
- [Gabor46] D. Gabor. Journal of the IEE. *Theory of communication*, 93 :429–457, 1946.
- [Gaiser96] J. E. Gaiser. Multicomponent Vp/Vs correlation analysis. *Geophysics*, 61(4) :1137–1149, 1996.
- [Gaiser01] J. E. Gaiser, N. Moldoveanu, R. Michelena, et S. Spitz. Multicomponent technology : the players, problems, applications, and trends : Summary of the workshop sessions. *The Leading Edge*, 20 :974–977, 2001.
- [Gerstner89] A. Bunse-Gerstner, R. Byers, et V. Mehrmann. A quaternion QR algorithm. *Numerische Mathematik*, 55 :83–95, 1989.
- [Gilpatrick89] R. Gilpatrick et D. Fouquet. A user’s guide to conventional VSP acquisition. *The Leading Edge*, 8(3) :34–39, 1989.
- [Godara90] L. C. Godara. Beamforming in the presence of correlated arrivals using structured correlated matrix. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, 38 :1–15, 1990.
- [Golub91] G. H. Golub et C. F. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins Series in the Mathematical Sciences. The Johns Hopkins University Press, 1991.
- [Guillet90] F. Guillet. *GIN, goniomètre à incidence normale, application à des données expérimentales de sismique marine grand angle*. Thèse de Doctorat, INP Grenoble, 1990.
- [Hahn92] S. L. Hahn. Multidimensional complex signals with single-orthant spectra. *Proc. IEEE*, 80(8) :1287–1300, 1992.
- [Halmshaw91] R. Halmshaw. *Non-destructive-testing*. Edward Arnold, London, second édition, 1991.
- [Hamilton43] W. R. Hamilton. On quaternions. *Proc. of the Royal Irish Academy*, 1843.
- [Hamilton48] W. R. Hamilton. Researches respecting quaternions. *Trans. Royal Irish Academy*, XXI :199–296, 1848.
- [Hamilton53] W. R. Hamilton. On the geometrical interpretation of some results obtained by calculation with biquaternions. *Proc. of the Royal Irish Academy*, 5 :388–390, 1853.

- [Hardage92] B. A. Hardage. Crosswell seismology and reverse VSP. *Geophysical Press.*, 1992.
- [Hatke92] G. F. Hatke. Performance analysis of the SuperCART antenna array. Proj. Rep. AST-22, MIT Lincoln Lab., Cambridge, Mar. 1992.
- [Hatke93] G. F. Hatke. Conditions for unambiguous source localisation using polarization diverse arrays. Dans *27<sup>th</sup> Asilomar Conf.*, pp. 1365–1369, 1993.
- [Ho95] K. -C. Ho, K. -C. Tan, et W. Ser. Investigation on number of signals whose directions-of-arrival are uniquely determinable with an electromagnetic vector sensor. *Signal Processing*, 47(1) :41–45, 1995.
- [Hochwald94] B. Hochwald et A. Nehorai. Polarimetric modeling and parameter estimation with electromagnetic vector-sensor. Dans *IEEE Int. Geosci. Remote Sensing Symp.*, Volume 2, pp. 1129–1132, 1994.
- [Hochwald96] B. Hochwald et A. Nehorai. Identifiability in array processing models with vector-sensor applications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 44 :83–95, 1996.
- [Hua93] Y. Hua. A pencil-MUSIC algorithm for finding two-dimensional angles and polarization using cross dipoles. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 41 :370–376, 1993.
- [Huang01] L. Huang et W. So. On left eigenvalues of a quaternionic matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 323 :105–116, 2001.
- [Jeffries85] D. J. Jeffries et D. R. Farrier. Asymptotic results for eigenvector methods. *IEE Proc.*, 132 :589–594, 1985.
- [Jolliffe86] I. T. Jolliffe. *Principal component analysis*. Springer-Verlag, 1986.
- [Kantor89] I.L. Kantor et A.S. Solodovnikov. *Hypercomplex numbers, an elementary introduction to algebras*. Springer-Verlag, 1989.
- [Kaveh86] M. Kaveh et A. J. Barabell. The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34 :331–341, Apr. 1986.
- [Kolda01] T. G. Kolda. Orthogonal tensor decompositions. *Society for Industrial and Applied Mathematics J. Matrix Anal. Appl.*, 23(1) :243–255, 2001.
- [Krolik90] J. Krolik et D. N. Swingler. Focused wide-band array processing by spatial resampling. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 38(2) :356–360, 1990.
- [Kroonenberg83] Kroonenberg83. *Three-mode principal component analysis*, Volume 2 du *M & T*. DSWO Press, 1983.
- [Kumaresan83] R. Kumaresan et D. W. Tufts. Estimating the angles of arrival of multiple plane waves. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 19 :134–139, 1983.

- [Kung83] S. Kung, K. Arun, et D. Rao. State space and singular value decomposition based approximation methods for the harmonics retrieval problem. *J. Opt. Soc. of America*, 73, 1983.
- [Lacoume97] J.-L. Lacoume, P.-O. Amblard, et Comon P. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. Masson, Paris, 1997.
- [Lagunas84] M. Lagunas-Hernandez et A. Gasull Llampadas. An improved likelihood method for power spectral density estimation. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, 32 :170–173, 1984.
- [Lapack] <http://www.netlib.org/lapack>.
- [Lavergne86] M. Lavergne. *Méthodes sismiques*. Éditions Technip, Paris, 1986.
- [Le Bihan01a] N. Le Bihan. *Traitement algébrique des signaux vectoriels. Application en séparation d'ondes sismiques*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
- [Le Bihan01b] N. Le Bihan et J. I. Mars. New 2D complex and hypercomplex attributes. *71st Conference of the Society of Exploration Geophysicists*, San Antonio, Sept. 2001.
- [Le Bihan02] N. Le Bihan et J. I. Mars. Subspace method for vector-sensor wave separation based on quaternion algebra. *XI European Signal Processing Conference*, Sept. 2002.
- [Le Bihan04a] N. Le Bihan et G. Ginolhac. Three-mode dataset analysis using higher order subspace method : application to sonar and seismo-acoustic signal processing. *Signal Processing*, 84(5) :919–942, 2004.
- [Le Bihan04b] N. Le Bihan et J. I. Mars. Singular value decomposition of matrices of quaternions : A new tool for vector-sensor signal processing. *Signal Processing*, 84(7) :1177–1199, 2004.
- [Le Bihan05] N. Le Bihan. Diagonalisation de matrices polynomiales quaternioniques : application à la séparation de mélanges convolutifs d'ondes polarisées. Dans *GRETSI Symposium on Signal and Image Processing*, Louvain-la-Neuve, Belgium, Sep. 2005.
- [Lee49] H. C. Lee. Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients. Dans *Proc. of the Royal Irish Academy*, Volume 52, pp. 253–261, Dec. 1949.
- [Li91a] J. Li et Jr. R.T. Compton. Angle and polarization estimation using ESPRIT with a polarization sensitive array. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 39(9) :1376–1383, 1991.
- [Li91b] J. Li et T. Compton. Angle estimation using a polarization sensitive array. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 39 :1539–1543, 1991.
- [Li92a] J. Li et T. Compton. Performance analysis for angle and polarization estimation using ESPRIT. Dans *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pp. V417–V420, Apr. 1992.

- [Li92b] J. Li et T. Compton. Two-dimensional angle and polarization estimation using the ESPRIT algorithm. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 40 :550–555, 1992.
- [Li93a] J. Li. Direction and polarization estimation using arrays with small loops and short dipoles. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 41 :379–387, 1993.
- [Li93b] J. Li et T. Compton. Angle and polarization estimation in a coherent signal environment. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 29 :706–716, 1993.
- [Li94] J. Li et P. Stoica. Efficient parameter estimation of partially polarized electromagnetic waves. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42 :3114–3152, 1994.
- [Li96] J. Li, P. Stoica, et D. Zheng. Efficient direction and polarization estimation with COLD array. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 44 :539–547, 1996.
- [Lichnerowicz50] A. Lichnerowicz. *Éléments de calcul tensoriel*. Armand Colin, 1950.
- [Lounesto97] P. Lounesto. *Clifford algebras and spinors*. Cambridge University Press, 1997.
- [Majernik99] V. Majernik. Quaternionic formulation of the classical fields. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 9(1) :119–130, 1999.
- [Makhoul75] J. Makhoul. Linear prediction : a tutorial review. *Proc. IEEE*, 63 :561–580, 1975.
- [Marcos98] S. Marcos. *Les méthodes à haute résolution : traitement d’antenne et analyse spectrale*. Traitement du signal. Hermès, 1998.
- [Mari89] J. L. Mari et F. Coppens. *La sismique de puits*. Éditions Technip, Paris, 1989.
- [Mari98] J. L. Mari, G. Arens, D. Chapellier, et P. Gaudiani. *Géophysique de gisement et de génie civil*. Éditions Technip, Paris, 1998.
- [Mari99] J. L. Mari, G. Arens, D. Chapellier, et P. Gaudiani. *Geophysics of reservoirs and civil engineering*. Editions Technip, Paris, 1999.
- [Mars87] J. I. Mars, F. Glangeaud, J. L. Lacoume, J. M. Fourmann, et S. Spitz. Separation of seismic waves. Dans *56th Meeting of Society of Exploration Geophysicists*, pp. 489–492, New Orleans, 1987.
- [Mars04] J. I. Mars, J.-L. Lacoume, J.-L. Mari, et F. Glangeaud. *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens. Techniques avancées*, Volume 3. Éditions Technip, Paris, 2004.
- [Means72] J. D. Means. Use of three-dimensional covariance matrix in analyzing the polarization properties of plane waves. *J. Geophys. Res.*, 77 :5551–5559, 1972.

- [Mehta89] M. L. Mehta. *Matrix theory, selected topics and useful results*. Hindustan P. Co., India, 1989.
- [Mehta91] M.L. Mehta. *Random matrices*. Academic Press, second édition, 1991.
- [Mermoz76] H. Mermoz. Imagerie, corrélations et modèles. *Ann. Télécom.*, 31(1-2) :17–36, 1976.
- [Miller74] K. S. Miller. *Complex stochastic processes*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.
- [Miron03] S. Miron, M. Guillon, N. Le Bihan, et J. I. Mars. Multidimensional signal processing using quaternions. Dans *3<sup>rd</sup> Workshop on Physics in Signal and Image Processing*, pp. 57–60, Grenoble, France, Jan. 2003.
- [Miron04] S. Miron, N. Le Bihan, et J. I. Mars. Joint estimation of direction of arrival and polarization parameters for multicomponent sensor array. Dans *66<sup>th</sup> European Association of Geoscientists and Engineers Conference and Exhibition*, Paris, June 2004.
- [Miron05a] S. Miron, N. Le Bihan, et J. I. Mars. Etude des performances du modèle quaternionique en traitement d’antenne vectorielle. Dans *GRETSI Symposium on Signal and Image Processing*, Louvain-la-Neuve, Belgium, Sept. 2005.
- [Miron05b] S. Miron, N. Le Bihan, et J. I. Mars. High-resolution vector-sensor array processing using quaternions. Dans *IEEE Workshop Statistical Signal Processing*, Bordeaux, France, July 2005.
- [Miron05c] S. Miron, N. Le Bihan, et J. I. Mars. Quaternion-MUSIC for vector-sensor array processing. à paraître dans *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005.
- [Miron05d] S. Miron, N. Le Bihan, et J. I. Mars. Vector-sensor MUSIC for polarized seismic sources localisation. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2005(1) :74–84, 2005.
- [Mosher97] J. C. Mosher et R. M. Leahy. Source localisation using recursively applied and projected (RAP) MUSIC. Dans *Proc. Thirty First Annu. Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput.*, Pacific Grove, CA, Nov. 1997.
- [Munier87] J. Munier. Identification de front d’ondes corrélés et distordus. *Traitement du signal*, 4(4) :281–296, 1987.
- [Nagell51] T. Nagell. *Introduction to number theory*. Wiley, New York, 1951.
- [Neeser93] Neeser F. D. et J. L. Massey. Proper complex random processes with applications to information theory. *IEEE Trans. Information Theory*, 39(4) :1293–1302, 1993.
- [Nehorai91] A. Nehorai et E. Paldi. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localisation. Dans *Proc.25th Asilomar Conf. Signals Syst. Comput.*, pp. 566–572, Pacific Grove, CA, 1991.

- [Nehorai94] A. Nehorai et E. Paldi. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localisation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(2) :376–398, Feb. 1994.
- [Nehorai99] A. Nehorai et P. Tichavsky. Cross-product algorithms for source tracking using an EM vector sensor. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(10) :2863–2867, 1999.
- [Ofranidis86] S. J. Ofranidis. A reduced MUSIC algorithm. Dans *Proc. 3<sup>rd</sup> Acoust., Speech, Signal Processing Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, pp. 165–167, Boston, MA, 1986.
- [Okubo99] S. Okubo. Eigenvalue problem for symmetric 3 x 3 octonionic matrix. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 9(1) :131–176, 1999.
- [Paulraj86] A. Paulraj, R. Roy, et T. Kailath. ESPRIT a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, 34 :1340–1342, 1986.
- [Pei97] S. C. Pei et C. M. Cheng. A novel block truncation coding of color images using a quaternion-moment-preserving principle. *IEEE Trans. Communications and Systems*, 45(5) :583–595, 1997.
- [Pei04] S. C. Pei, J. H. Cheng, et J. J. Ding. Commutative reduced biquaternions and their Fourier transform for signal and image processing applications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 52(7) :2012–2030, 2004.
- [Picheral03] J. Picheral. *High resolutions methods for joint angle/delay estimation, applications to UMTS and geophysics*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud - Supélec, 2003.
- [Pisarenko73] V. Pisarenko. The retrieval of harmonics from a covariance function. *J. Roy. Astron. Soc.*, 33 :347–366, 1973.
- [Poincaré92] H. Poincaré. *Théorie mathématique de la lumière*, Volume 2. Georges Carre, Paris, 1892.
- [Porteous95] I. Porteous. *Clifford algebras and the classical groups*. Cambridge University Press, 1995.
- [Purcell65] E. M. Purcell. *Electricity and Magnetism*, Volume 2 du *Berkeley Physics Course*. Education, Development Center, Inc., 1965.
- [Rahamim04] D. Rahamim, J. Tabrikian, et R. Shavit. Source localisation using vector sensor array in multipath environment. *IEEE Trans. Signal Processing*, 52(11) :3096–3103, 2004.
- [Rayleigh09] Lord Rayleigh. On the perception of the direction of sound. Dans *Proc. R. Soc. A.*, Volume 83, pp. 61–64, 1909.
- [Rissanen78] J. Rissanen. Modeling by shortest data description. *Automatica*, 14 :465–471, 1978.

- [Samson81] J. C. Samson et J. V. Olson. Data-adaptative polarization filter for multichannel geophysical data. *Geophysics*, 46 :1423–1431, 1981.
- [Sangwine96] S. J. Sangwine. Fourier transforms of color images using quaternions, or hypercomplex numbers. *Electronics letters*, 32(21) :1979–1980, 1996.
- [Sangwine98] S. J. Sangwine et T. A. Ell. The discrete fourier transform of a color image. *Institute of Mathematics and its Applications 2nd Conference on Image Processing*, pp. 430–441, 1998.
- [Sangwine99] S. J. Sangwine et T. A. Ell. Hypercomplex auto- and cross-correlation of color images. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), Kobe, Japan*, pp. 319–322, 1999.
- [Sato95] M. Sato, T. Ohkubo, et H. Niitsuma. Cross-polarization borehole radar measurements with a slot antenna. *J. Appl. Geophys.*, 33 :53–61, Jan. 1995.
- [Scharf91] L. L. Scharf. *Statistical signal processing, detection, estimation and time series analysis*. Electrical and computer engineering : digital signal processing. Addison Wesley, 1991.
- [Schmidt79] R. O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameters estimation. Dans *Proc. Rome Air Development Center Spectrum Estimation Workshop*, Oct. 1979.
- [Schmidt81] R. O. Schmidt. *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*. Thèse de Doctorat, Stanford Univ., Stanford, CA, Nov. 1981.
- [Schreiber86] R. Schreiber. Implementation of adaptative array algorithms. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34 :1038–1045, 1986.
- [Schütte90] H. D. Schütte et J. Wenzel. Hypercomplex numbers in digital signal processing. *Proc. IEEE Int. Symp. Circ. Syst.*, pp. 1557–1560, 1990.
- [Serôdio01] R. Serôdio, E. Pereira, et J. Vitória. Computing the zeros of quaternion polynomials. *Computers and mathematics with applications*, 42(8) :1229–1237, 2001.
- [Sharman84] K. Sharman, T. S. Durrani, M. Wax, et T. Kailath. Asymptotic performance of eigenstructure spectral analysis methods. Dans *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pp. 45.5.1–45.5.4, San Diego, CA, Mar. 1984.
- [Sharman86] K. Sharman et T. S. Durrani. A comparative study of modern eigenstructure methods for bearing estimation - a new high performance approach. Dans *Proc. 25<sup>th</sup> IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 1737–1742, Athens, Greece, Dec. 1986.
- [Sheriff91] R. E. Sheriff. *Encyclopedic dictionary of exploration geophysics*. Society of Exploration Geophysicists, 1991.

- [Sheriff95] R. E. Sheriff et P. G. Lloyd. *Exploration Seismology*. Cambridge University Press, second édition, 1995.
- [Sidiropoulos00] N. D. Sidiropoulos, R. Bro, et G. B. Giannakis. Parallel factor analysis in sensor array processing. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48(8) :2377–2388, 2000.
- [So94] W. So, R. C. Thompson, et F. Zhang. Numerical ranges of matrices with quaternion entries. *Linear and Multilinear Algebra*, 37 :175–195, 1994.
- [Stewart03] R. R. Stewart, J. E. Gaiser, R. J. Brown, et D. C. Lawton. Converted-wave seismic exploration : Applications. *Geophysics*, 68(1) :40–57, 2003.
- [Stewart04] J. Stewart, A. Shatilo, C. Jing, T. Rape, R. Duren, K. Lewallen, et G. Szurek. A comparison of streamer and OBC seismic data at Beryl Alpha field, UK North Sea. *Society of Exploration Geophysicists Technical Program Expanded Abstracts*, pp. 841–844, 2004.
- [Stoica89] P. Stoica et A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, 37(5) :720–741, 1989.
- [Stoica90] P. Stoica et A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound : further results and comparisons. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 38(12) :2140–2150, 1990.
- [Stoica95] P. Stoica, P. Handel, et A. Nehorai. Improved sequential MUSIC. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, pp. 1230–1239, 1995.
- [Swindlehurst93] A. Swindlehurst et M. Viberg. Subspace fitting with diversely polarized antenna arrays. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 41 :1687–1694, 1993.
- [Tan96] K. -C. Tan, K. -C. Ho, et A. Nehorai. Uniqueness study of measurements obtainable with arrays of electromagnetic vector sensors. *IEEE Trans. Signal Processing*, 44 :1036–1039, 1996.
- [Thirion95] N. Thirion. *Séparation d’ondes en prospection sismique*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1995.
- [Tian00] Y. Tian. Matrix theory over the complex quaternion algebra. *ArXiv Mathematics e-prints*, Apr. 2000.
- [Tucker64] L. R. Tucker. The extension of factor analysis to three-dimensional matrices. Dans *Contributions to mathematical psychology*, pp. 109–127, N. Y., 1964. Holt, Rinehart & Winston.
- [Tucker66] L. R. Tucker. Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, (31) :279–311, 1966.
- [Tufts86] D. W. Tufts et C. D. Melissions. Simple, effective computation of principal eigenvectors and their eigenvalues and application to high-resolution estimation of frequencies. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34 :1046–1053, 1986.

- [Vakhania98] N. N. Vakhania. Random vectors with values in quaternion Hilbert spaces. *Th. Probab. Appl.*, 43(1) :99–115, 1998.
- [van der Veen96] A. J. van der Veen et A. Paulraj. An analytical constant modulus algorithm. *IEEE Trans. Signal Processing*, 44(5) :1136–1155, 1996.
- [Van Trees68] H. L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*, Volume 1. John Wiley & Sons, 1968.
- [Vaughan03] R. Vaughan et J. B. Andersen. *Channels, propagation and antennas for mobile communications*, Volume 50 du *IEE electromagnetic waves*. The Institution of Electrical Engineers, 2003.
- [Ville48] J. Ville. Théorie et applications de la notion de signal analytique. *Cables et Transmissions*, 2A(1), Sept. 1948.
- [Walter94] E. Walter et L. Prozato. *Identification des modèles paramétriques à partir des données expérimentales*. Masson, Paris, 1994.
- [Wang85] H. Wang et M. Kaveh. Coherent signal subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wideband sources. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, 33 :823–831, 1985.
- [Wang99] Y. Wang et J. Saillard. Apport de la polarisation pour caractériser une cible radar par une méthode à haute résolution. *Traitement du signal*, 16(4) :295–302, 1999.
- [Ward97] J. P. Ward. *Quaternions and Cayley Numbers, Algebra and applications*. Kluwer Academic, 1997.
- [Waters78] K. H. Waters. *Reflection seismology*. Wiley intersciences Pub. Ed., 1978.
- [Weiss91] A. J. Weiss et B. Friedlander. Performance analysis of diversely polarized antenna arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39(7) :1589–1603, 1991.
- [Wiegmann55] N. A. Wiegmann. Some theorems on matrices with real quaternion elements. *Canad. J. Math.*, 7 :191–201, 1955.
- [Wolf36] L. A. Wolf. Similarity of matrices in which the elements are real quaternions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 :737–743, 1936.
- [Wong96a] K. T. Wong et M. D. Zoltowski. Diversely polarized root-MUSIC for azimuth-elevation angle of arrival estimation. Dans *Digest of the 1996 IEEE Antennas Propagation Soc. Int. Symp.*, pp. 1352–1355, Baltimore, July 1996.
- [Wong96b] K. T. Wong et M. D. Zoltowski. High accuracy 2D with extended aperture vector sensor array. Dans *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Volume 5, pp. 2789–2792, Atlanta, 1996.

- [Wong97a] K. T. Wong et M. D. Zoltowski. Polarization diversity and extended aperture spatial diversity to mitigate fading-channel effects with a sparse array of electric dipoles or magnetic loops. Dans *IEEE Int. Veh. Technol. Conf.*, pp. 1163–1167, 1997.
- [Wong97b] K. T. Wong et M. D. Zoltowski. Uni-vector-sensor ESPRIT for multi-source azimuth, elevation and polarization estimation. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 45(10) :1467–1474, 1997.
- [Wong99] K. T. Wong et M. D. Zoltowski. Root-MUSIC-based azimuth-elevation angle of arrival estimation with uniformly spaced but arbitrarily oriented velocity hydrophones. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(12) :3250–3260, 1999.
- [Wong00a] K. T. Wong et M. D. Zoltowski. Closed-form direction-finding with arbitrarily spaced electromagnetic vector-sensors at unknown locations. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 48(5) :671–681, 2000.
- [Wong00b] K. T. Wong et M. D. Zoltowski. Self-initiating MUSIC direction finding and polarization estimation in spatio-polarizational beamspace. *IEEE Trans. Antennas Propagation*, 48(8) :1235–1245, 2000.
- [Wong01] K. T. Wong. Geolocation/beamforming for multiple wideband-FFH with unknown hop-sequences. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst.*, 37(1) :65–67, 2001.
- [Yilmaz01] Ö. Yilmaz, S. M. Doherty, et Ö. Yilmaz. *Seismic Data Analysis : Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data*. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa OK, second édition, 2001.
- [Zhang97] F. Zhang. Quaternions and matrices of quaternions. *Linear Algebra and its Applications*, 251 :21–57, 1997.
- [Zoltowski00] M. D. Zoltowski et K. T. Wong. ESPRIT-based 2D direction finding with a sparse array of electromagnetic vector-sensors. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48(8) :2195–2204, 2000.





---

## Résumé

Ce travail de recherche est consacré à l'élaboration des méthodes de traitement d'antenne multicapteur, multicomposante. Le traitement des signaux enregistrés par ce type d'antenne permet l'estimation de la *direction d'arrivée* et des *paramètres de polarisation* des ondes arrivant sur l'antenne. Nous montrons comment l'incorporation (d'une manière judicieuse) de l'information multicomposante permet d'améliorer les performances des algorithmes de traitement. L'originalité des méthodes proposées tient à l'utilisation des modèles mathématiques sortant du cadre de l'algèbre vectorielle classique, et qui se trouvent particulièrement bien adaptés à la nature des signaux multicomposantes.

Une première approche est fondée sur un modèle tensoriel, permettant de conserver la structure multimodale des signaux. Le *tenseur interspectral* est introduit pour représenter la covariance des données. Nous proposons deux algorithmes (Vector-MUSIC et Higher-Order MUSIC) basés sur des décompositions orthogonales du tenseur interspectral. Nous montrons, sur des simulations, que l'utilisation du modèle tensoriel et des décompositions multilinéaires associées améliorent les performances des méthodes proposées par rapport à celles atteignables avec les techniques classiques.

Nous proposons également une approche en traitement d'antenne multicomposante fondée sur l'utilisation des algèbres hypercomplexes. Les vecteurs de *quaternions* et *biquaternions* sont utilisés pour modéliser les signaux polarisés enregistrés par une antenne à deux, trois ou quatre composantes. Deux algorithmes (Quaternion-MUSIC et Biquaternion-MUSIC), basés sur la diagonalisation des matrices de quaternions et de biquaternions, sont introduits. Nous montrons que l'utilisation des nombres hypercomplexes réduit le temps de calcul et améliore la résolution des méthodes.

---

## Abstract

This research is devoted to *vector-sensor array processing* methods. The signals recorded on a vector-sensor array allow the estimation of the *direction of arrival* and *polarization* for multiple waves impinging on the antenna. We show how the correct use of polarization information improves the performance of algorithms. The novelty of the presented work consists in the use of mathematical models well-adapted to the intrinsic nature of vectorial signals.

The first approach is based on a multilinear model of polarization that preserves the intrinsic structure of multicomponent acquisition. In this case, the data covariance model is represented by a *cross-spectral tensor*. We propose two algorithms (Vector-MUSIC and Higher-Order MUSIC) based on orthogonal decompositions of the cross-spectral tensor. We show in simulations that the use of this model and of the multilinear orthogonal decompositions improve the performance of the proposed methods compared to classical techniques based on linear algebra.

A second approach uses hypercomplex algebras. *Quaternion* and *biquaternion* vectors are used to model the polarized signals recorded on two, three or four-component sensor arrays. Quaternion-MUSIC and Biquaternion-MUSIC algorithms, based on the diagonalization of quaternion and biquaternion matrices are introduced. We show that the use of hypercomplex numbers reduces the computational burden and increases the resolution power of the methods.

---

**Mots-clés :** Capteurs multicomposante, direction d'arrivée, polarisation, algèbre multilinéaire, algèbre hypercomplexe, MUSIC, tenseurs, quaternions, biquaternions.

---

Laboratoire des Images et des Signaux  
ENSIEG, Domaine Universitaire,  
961 Rue de la Houille Blanche, BP 46,  
38402 St-Martin-d'Hères Cedex, France