Techniques avancées de traitement du signal

Débruitage et détection par ondelettes

Radu Ranta

ENSEM

Signaux: rappels

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Introduction

Signaux = Mesures de phénomènes physiques

- Objectif: extraire l'information

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Introduction

Signaux = Mesures de phénomènes physiques

- Objectif: extraire l'information
- Problèmes:

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Introduction

Signaux = Mesures de phénomènes physiques

- Objectif: extraire l'information
- Problèmes:
  - Instrumentation
    - Fonction de transfert
    - Bruit de mesure

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Introduction

Signaux = Mesures de phénomènes physiques

- Objectif: extraire l'information
- Problèmes:
  - Instrumentation
    - Fonction de transfert
    - Bruit de mesure
  - Environnement
    - Fonction de transfert
    - Perturbations

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Introduction

Signaux = Mesures de phénomènes physiques

- Objectif: extraire l'information
- Problèmes:
  - Instrumentation
    - Fonction de transfert
    - Bruit de mesure
  - Environnement
    - Fonction de transfert
    - Perturbations
  - Validation: Comment être sûrs ?
    - Modélisation (signal, bruit, perturbations)

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Introduction

Signaux = Mesures de phénomènes physiques

- Objectif: extraire l'information
- Problèmes:
  - Instrumentation
    - Fonction de transfert
    - Bruit de mesure
  - Environnement
    - Fonction de transfert
    - Perturbations
  - Validation: Comment être sûrs ?
    - Modélisation (signal, bruit, perturbations)
- Débruitage: élimination du signal mesuré des signaux de perturbation modélisés afin de retrouver un signal informatif modélisé

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Exemple: mesure de déplacement

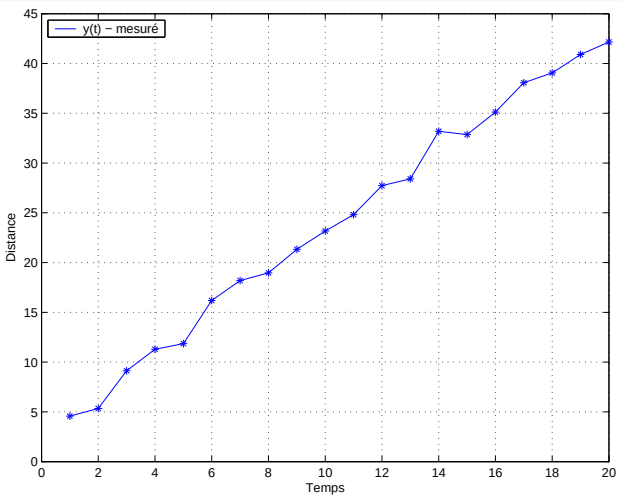
- $t \rightarrow$ temps, $y(t) = s(t) + b(t) \rightarrow$ signal mesuré
  - $s(t) = at + b \rightarrow$ déplacement (réel? modèle?)
  - $b(t) \rightarrow$ bruit

Signaux: rappels
Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Exemple: mesure de déplacement

- $t \rightarrow$ temps, $y(t) = s(t) + b(t) \rightarrow$ signal mesuré
  - $s(t) = at + b \rightarrow$ déplacement (réel? modèle?)
  - $b(t) \rightarrow$ bruit
- estimation du $s_e(t) = a_e t + b_e$?
  $\rightarrow$ minimisation de l'erreur entre le modèle et la mesure

$$\min_{a,b} EQM = \min_{a,b} \mathbb{E}[y(t) - s_e(t)]^2$$

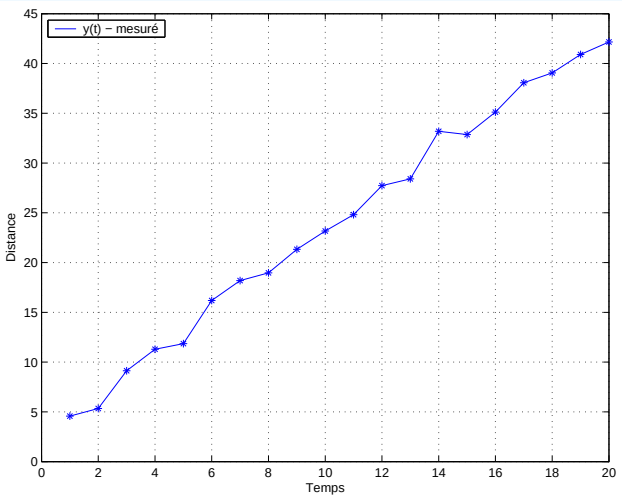


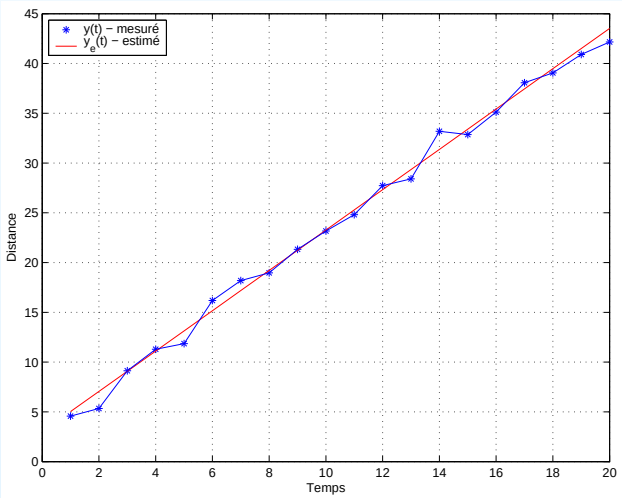
Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Exemple: mesure de déplacement

- $t \rightarrow$ temps, $y(t) = s(t) + b(t) \rightarrow$ signal mesuré
  - $s(t) = at + b \rightarrow$ déplacement (réel? modèle?)
  - $b(t) \rightarrow$ bruit
- estimation du $s_e(t) = a_e t + b_e$?
  $\rightarrow$ minimisation de l'erreur entre le modèle et la mesure

$$\min_{a,b} EQM = \min_{a,b} \mathbb{E}[y(t) - s_e(t)]^2$$





- $s_e(t) = 2,03t + 2,84 \rightarrow$ estimation du signal informatif (regression, approximation polynômiale, débruitage, . . .)

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Modèles

- Déterministe
  - les valeurs du signal peuvent être déterminés précisément à tout instant:
    $s(t) = A_1 cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$
  - on cherche à estimer les paramètres du modèle (A, f, ϕ)

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Modèles

- Déterministe
  - les valeurs du signal peuvent être déterminés précisément à tout instant:
    $s(t) = A_1 cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$
  - on cherche à estimer les paramètres du modèle (A, f, ϕ)
- Aléatoire
  - modélisation des valeurs par des lois de probabilité:
    $p(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2}$
  - on cherche à estimer les paramètres de $p(s)$ (μ, σ)

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Modèles

- Déterministe
  - les valeurs du signal peuvent être déterminés précisément à tout instant:
    $s(t) = A_1 cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$
  - on cherche à estimer les paramètres du modèle (A, f, ϕ)
- Aléatoire
  - modélisation des valeurs par des lois de probabilité:
    $p(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2}$
  - on cherche à estimer les paramètres de $p(s)$ (μ, σ)

- Discret:
  - $t \longrightarrow k$
  - $s(t) \longrightarrow s(k) = \boldsymbol{s}$ vecteur

Signaux: rappels
● Introduction
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage

Modèles

- Déterministe
  - les valeurs du signal peuvent être déterminés précisément à tout instant:
    $s(t) = A_1 cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$
  - on cherche à estimer les paramètres du modèle (A, f, ϕ)
- Aléatoire
  - modélisation des valeurs par des lois de probabilité:
    $p(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2}$
  - on cherche à estimer les paramètres de $p(s)$ (μ, σ)

- Discret:
  - $t \longrightarrow k$
  - $s(t) \longrightarrow s(k) = \boldsymbol{s}$ vecteur
- Signal discret et aléatoire
  - $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b} \cdots \longrightarrow$ vecteurs aléatoires
  - stationnarité, ergodicité, variables i.i.d., bruit blanc, ...

Représentation des signaux non-stationnaires

Introduction

- Traitement du signal $\longrightarrow$ extraction de l'information

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Introduction

- Traitement du signal $\longrightarrow$ extraction de l'information
- Information $\longrightarrow$ contenue dans les changements (non-stationnarités)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Introduction

- Traitement du signal $\longrightarrow$ extraction de l'information
- Information $\longrightarrow$ contenue dans les changements (non-stationnarités)

Analyse de signaux non-stationnaires

Introduction

- Traitement du signal $\longrightarrow$ extraction de l'information
- Information $\longrightarrow$ contenue dans les changements (non-stationnarités)

Analyse de signaux non-stationnaires

$\downarrow$

Analyse temps-fréquence

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Introduction

- Traitement du signal $\longrightarrow$ extraction de l'information
- Information $\longrightarrow$ contenue dans les changements (non-stationnarités)

Analyse de signaux non-stationnaires

$\downarrow$

Analyse temps-fréquence

$\downarrow$

Décompositions atomiques

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Introduction

- Traitement du signal $\longrightarrow$ extraction de l'information
- Information $\longrightarrow$ contenue dans les changements (non-stationnarités)

Analyse de signaux non-stationnaires

$\downarrow$

Analyse temps-fréquence

$\downarrow$

Décompositions atomiques

$\downarrow$

Décompositions en ondelettes

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Introduction

- Traitement du signal $\longrightarrow$ extraction de l'information
- Information $\longrightarrow$ contenue dans les changements (non-stationnarités)

Analyse de signaux non-stationnaires

$\downarrow$

Analyse temps-fréquence

$\downarrow$

Décompositions atomiques

$\downarrow$

Décompositions en ondelettes

$\downarrow$

Ondelettes orthonormées

Représentations des signaux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

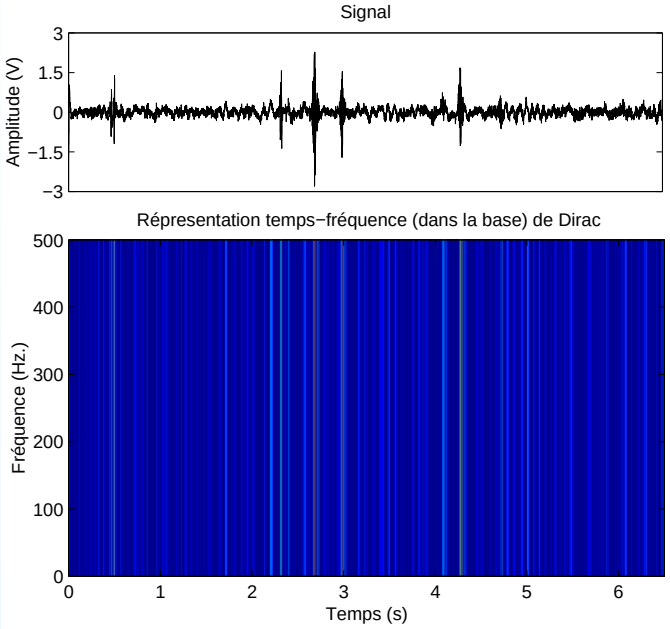
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



représentation temporelle (Dirac)

Représentations des signaux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

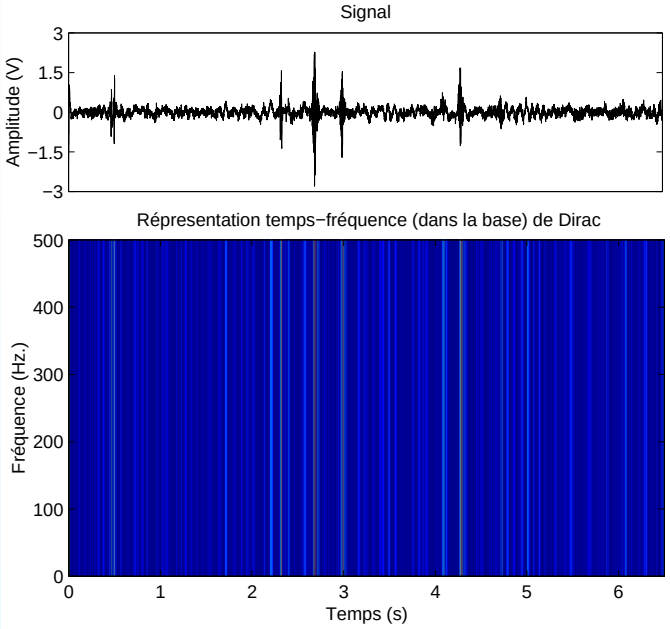
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



représentation temporelle (Dirac)

- somme d'impulsions de Dirac pondérées

Représentations des signaux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

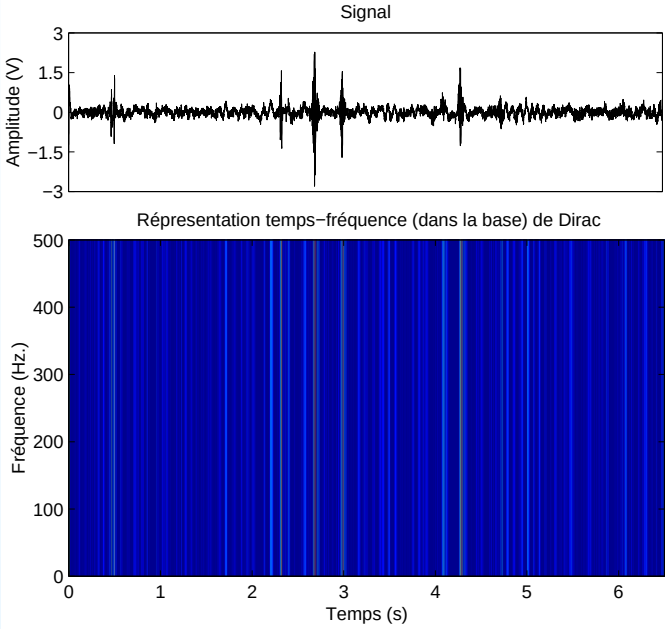
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



représentation temporelle (Dirac)

- somme d'impulsions de Dirac pondérées
- précision temporelle (fréq. d'échantillonnage)

Représentations des signaux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

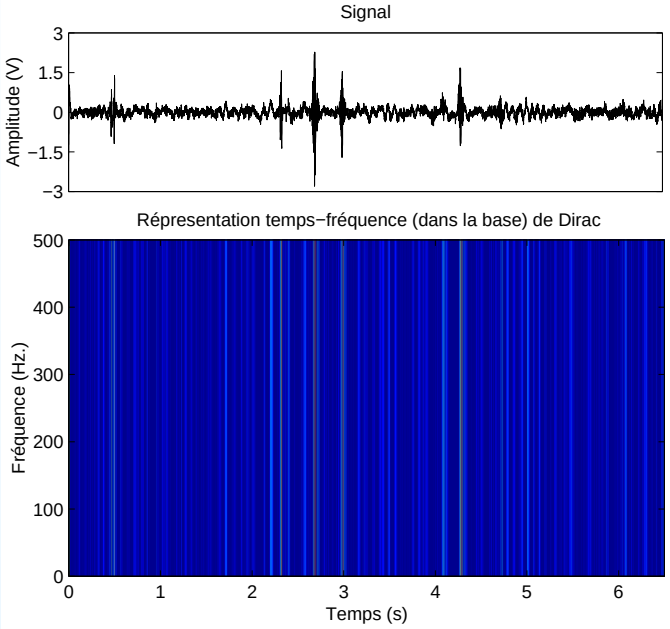
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



représentation temporelle (Dirac)

- somme d'impulsions de Dirac pondérées
- précision temporelle (fréq. d'échantillonnage)
- pas de précision fréquentielle

Représentations des signaux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

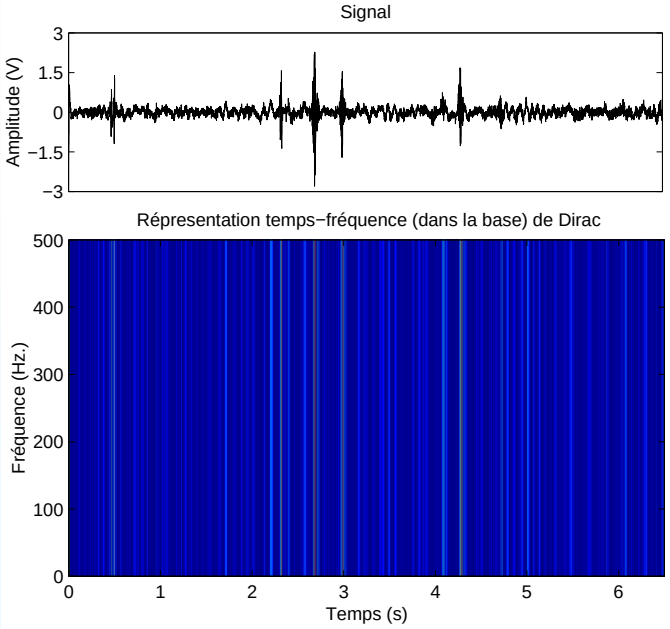
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

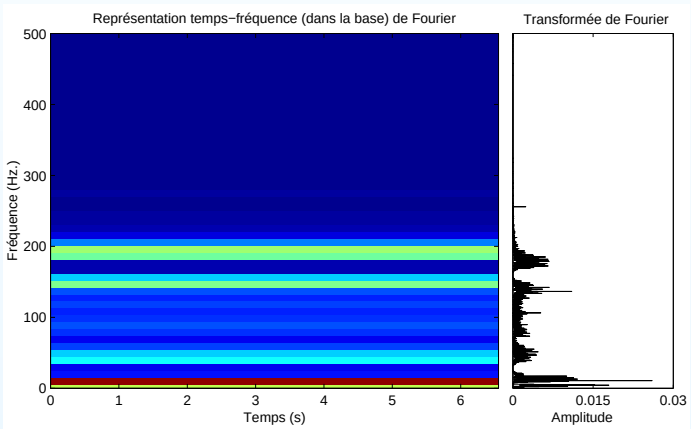
Signaux

Bruit

Débruitage



représentation temporelle (Dirac)



représentation fréquentielle (Fourier)

- somme d'impulsions de Dirac pondérées
- précision temporelle (fréq. d'échantillonnage)
- pas de précision fréquentielle

Représentations des signaux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

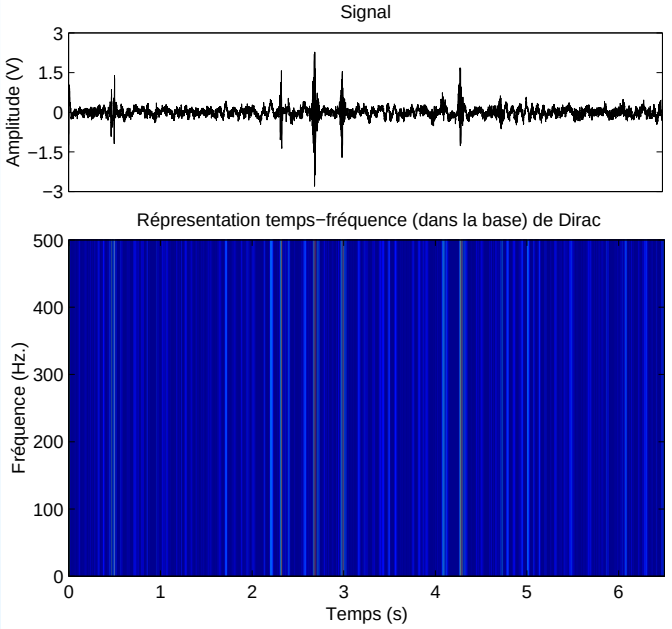
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

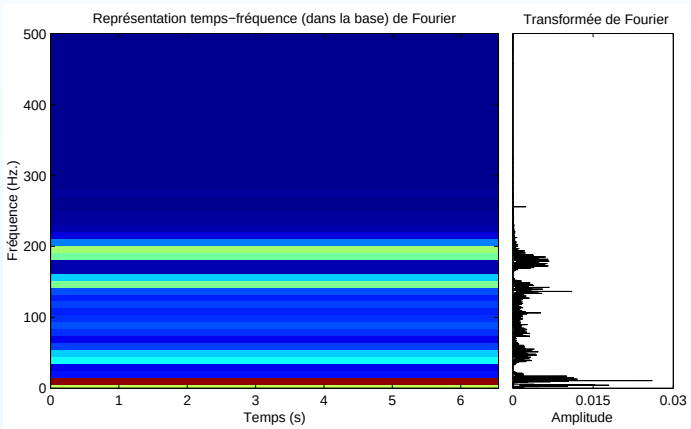
Signaux

Bruit

Débruitage



représentation temporelle (Dirac)



représentation fréquentielle (Fourier)

- somme d'impulsions de Dirac pondérées
- précision temporelle (fréq. d'échantillonnage)
- pas de précision fréquentielle

- somme d'exponentielles complexes pondérées

Représentations des signaux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

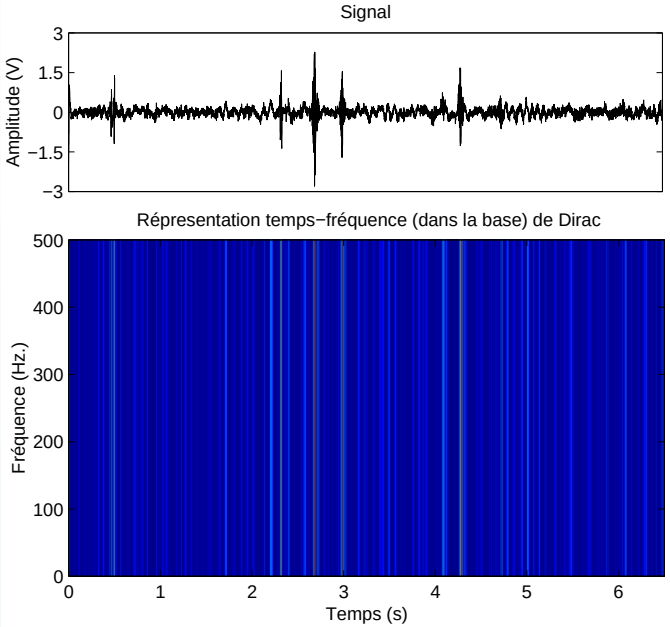
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

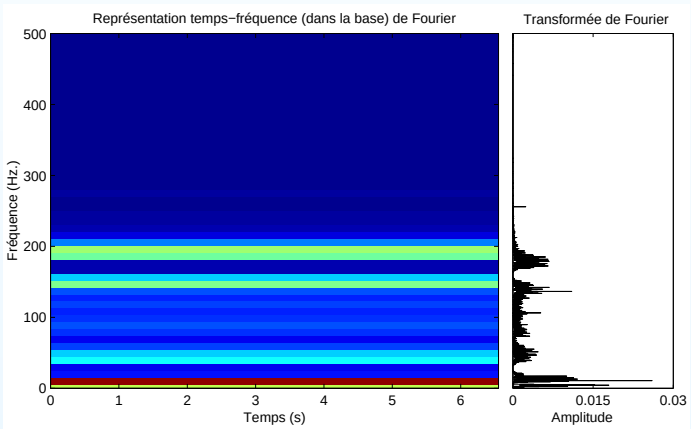
Signaux

Bruit

Débruitage



représentation temporelle (Dirac)



représentation fréquentielle (Fourier)

- somme d'impulsions de Dirac pondérées
- précision temporelle (fréq. d'échantillonnage)
- pas de précision fréquentielle

- somme d'exponentielles complexes pondérées
- précision fréquentielle (résolution fréquentielle)

Représentations des signaux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

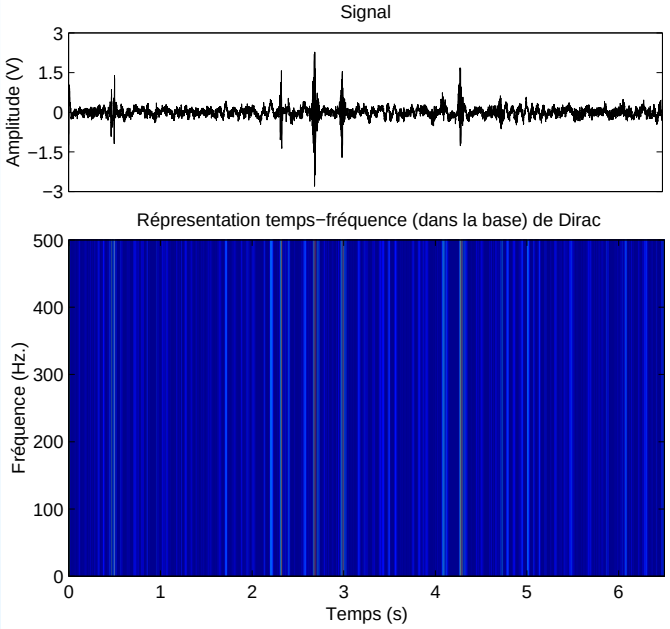
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

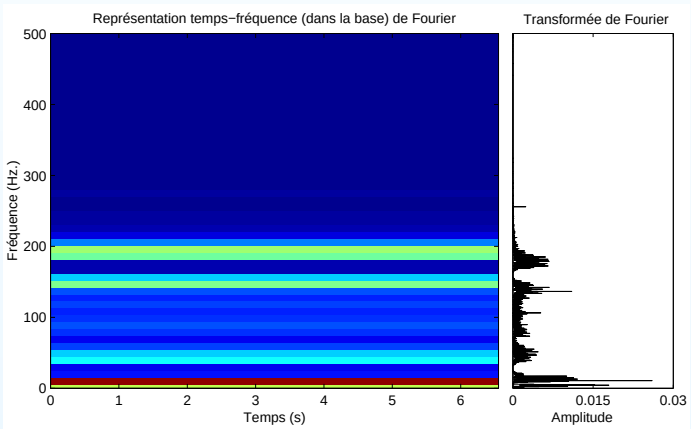
Signaux

Bruit

Débruitage



représentation temporelle (Dirac)



représentation fréquentielle (Fourier)

- somme d'impulsions de Dirac pondérées
- précision temporelle (fréq. d'échantillonnage)
- pas de précision fréquentielle

- somme d'exponentielles complexes pondérées
- précision fréquentielle (résolution fréquentielle)
- pas de précision temporelle

Représentation temps-fréquence

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

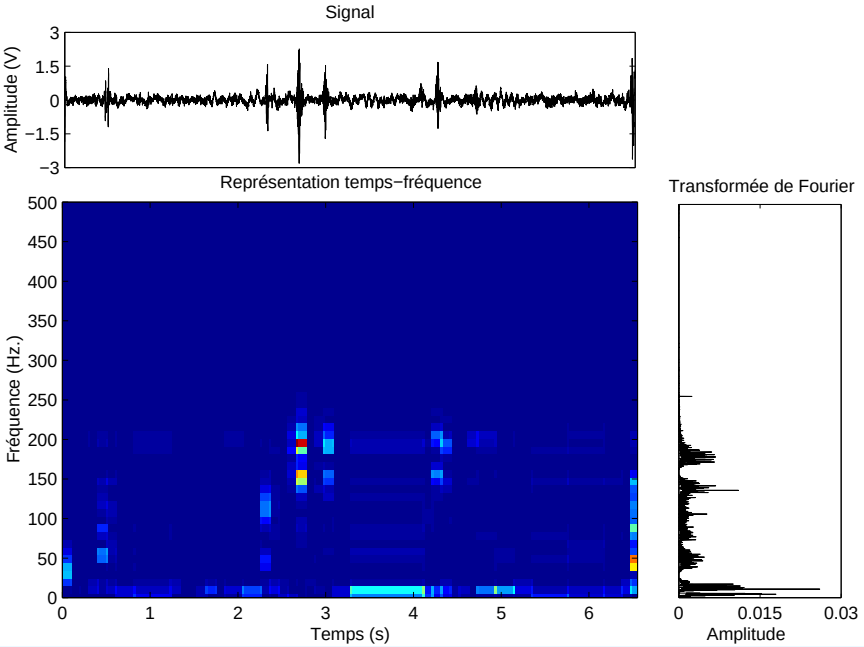
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



Représentation temps-fréquence

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

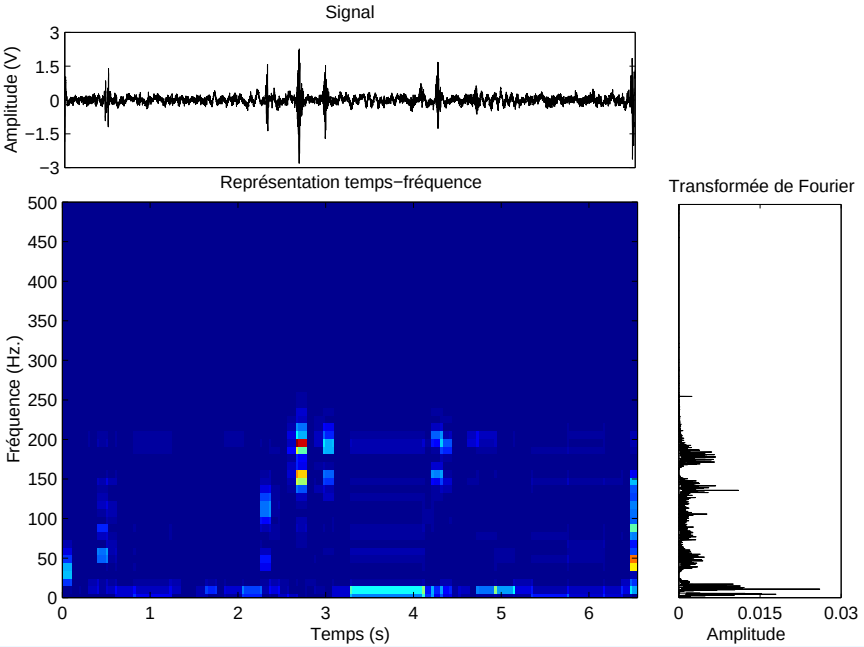
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



- Somme d'atomes temps-fréquence pondérés

Représentation temps-fréquence

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

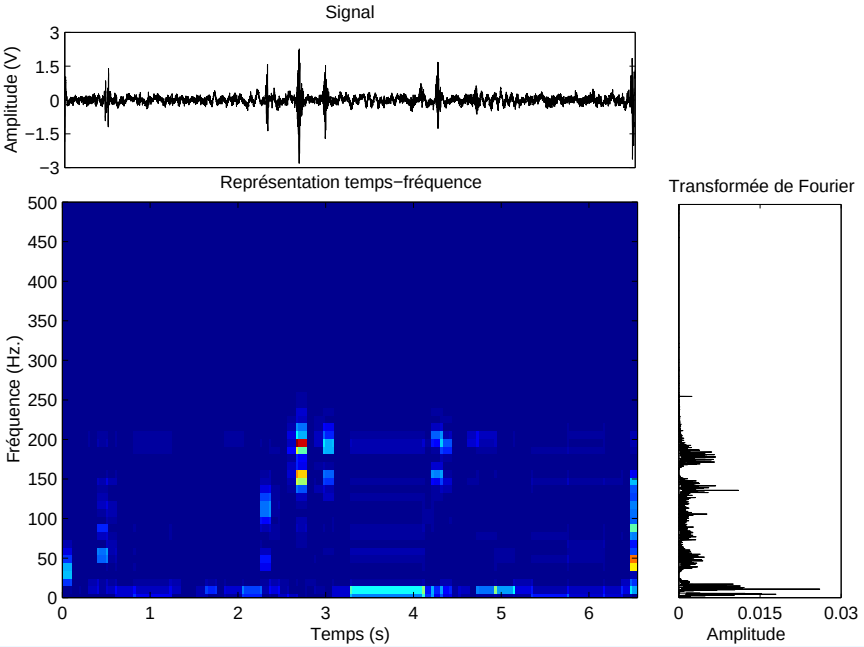
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



- Somme d'atomes temps-fréquence pondérés
- Avantages
  - vue d'ensemble du signal
  - localisation facile en temps et en fréquence

Représentation temps-fréquence

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

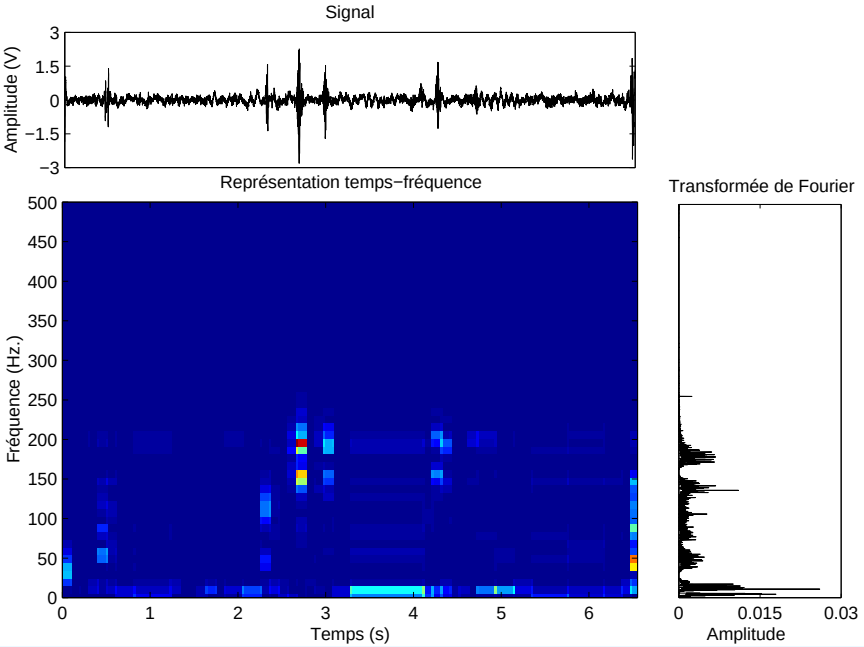
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



- Somme d'atomes temps-fréquence pondérés
- Avantages
  - vue d'ensemble du signal
  - localisation facile en temps et en fréquence
- Inconvénients
  - (un peu) plus difficile à mettre en oeuvre
  - compromis entre la précision temporelle et fréquentielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Décompositions atomiques

Idée:

Un signal $x(t)$ peut s'écrire comme une somme de signaux élémentaires (atomes temps-fréquence) $a_{\tau,\xi}(t)$, localisés dans une fenêtre temporelle de largeur T autour de l'instant τ et dans une bande fréquentielle de largeur B autour d'une fréquence ξ :

$$x(t) = \sum_{\tau,\xi} X_{\tau,\xi} \cdot a_{\tau,\xi}(t),$$

où les $X_{\tau,\xi}$ sont des coefficients de pondération.

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Décompositions atomiques

Idée:

Un signal $x(t)$ peut s'écrire comme une somme de signaux élémentaires (atomes temps-fréquence) $a_{\tau,\xi}(t)$, localisés dans une fenêtre temporelle de largeur T autour de l'instant τ et dans une bande fréquentielle de largeur B autour d'une fréquence ξ :

$$x(t) = \sum_{\tau,\xi} X_{\tau,\xi} \cdot a_{\tau,\xi}(t),$$

où les $X_{\tau,\xi}$ sont des coefficients de pondération.

Atomes temps-fréquence:

- bonnes propriétés de localisation en temps-fréquence des signaux $a_{\tau,\xi}(t)$
- signification physique des coefficients $X_{\tau,\xi}$

Atomes temps-fréquence - exemples

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

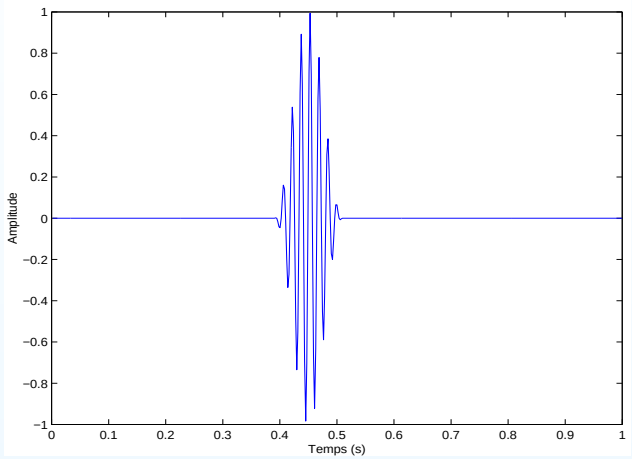
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

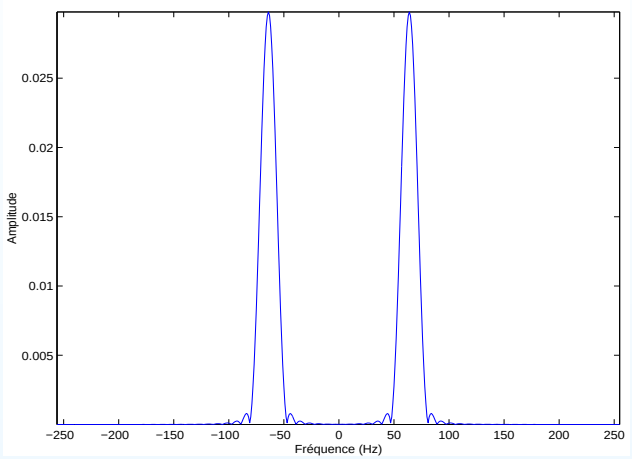
Ondelettes orthogonales

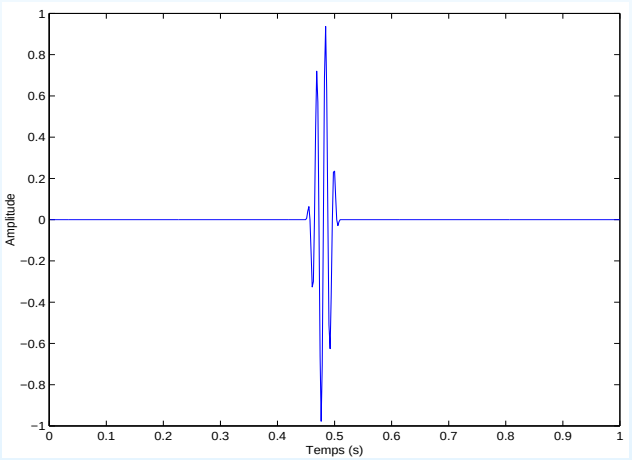
Signaux

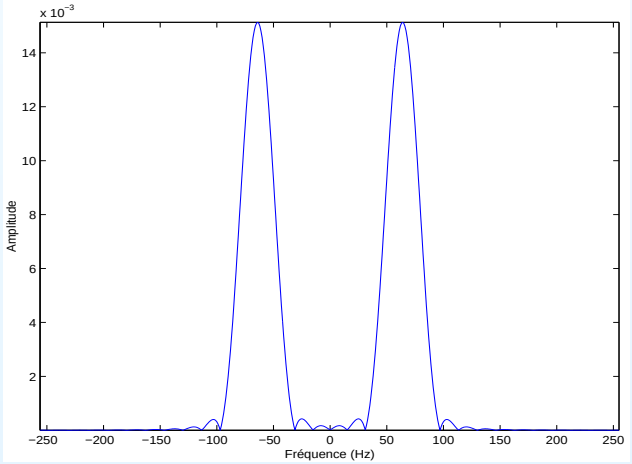
Bruit

Débruitage









Atomes temps-fréquence - exemples

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

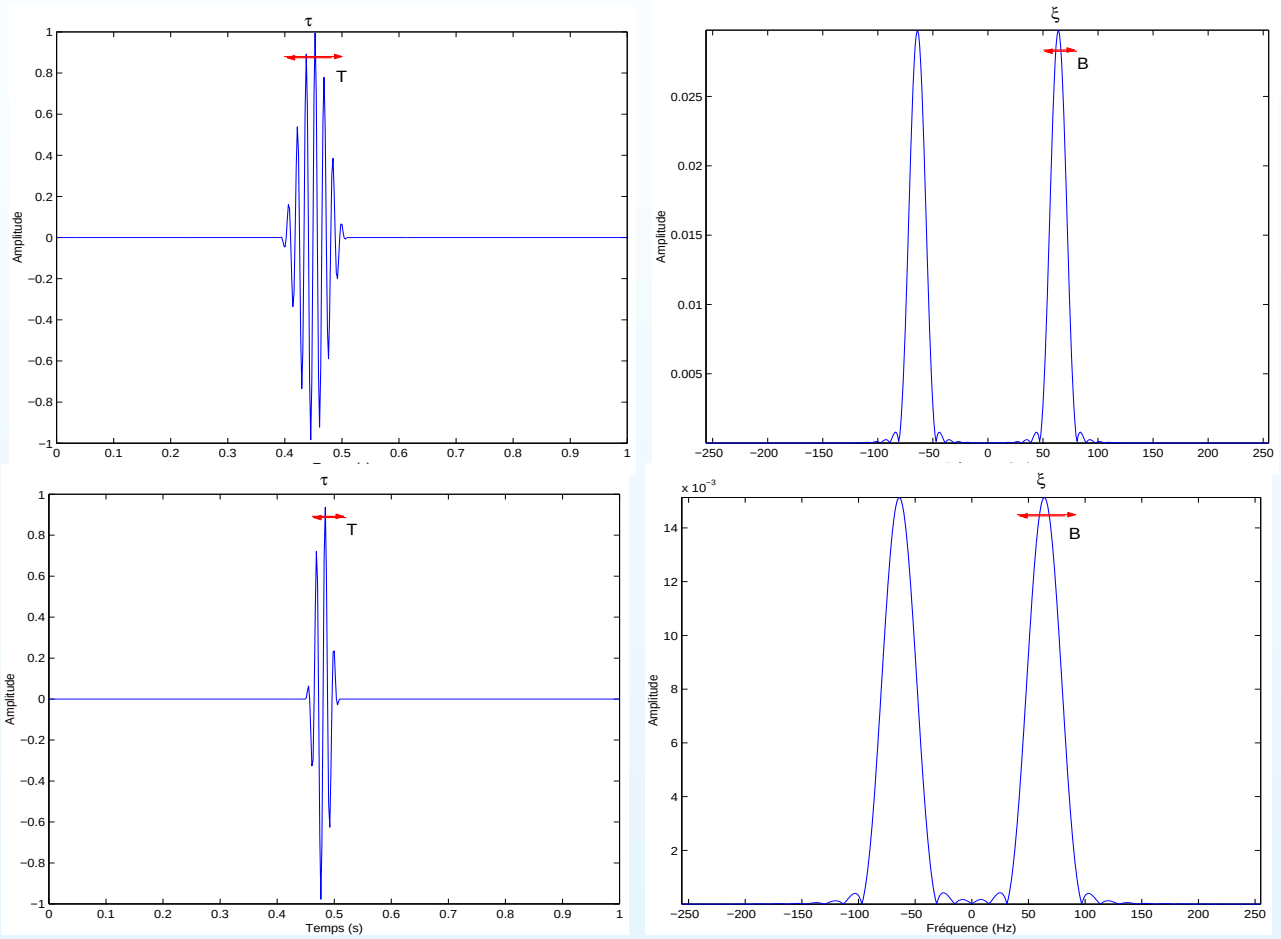
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



Principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor

Quel que soit le signal $a(t)$, il ne peut pas avoir en même temps une largeur de bande fréquentielle B et une localisation temporelle dans une fenêtre T arbitrairement petites.

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor

Quel que soit le signal $a(t)$, il ne peut pas avoir en même temps une largeur de bande fréquentielle B et une localisation temporelle dans une fenêtre T arbitrairement petites.

Notations:

- E = l'énergie totale (finie) d'un signal $a(t)$
- e = la quantité minimale existante d'énergie, une "unité" d'énergie
- $p_t(e)$ = la probabilité qu'une unité e "soit", à l'instant t.

On peut écrire :

$$p_t(e) = \frac{|a(t)|^2}{E},$$

et on voit bien que c'est une loi de probabilité, car

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_t(e)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a(t)|^2}{E} dt = 1$$

Principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor

Pour cette loi de probabilité, on peut calculer la moyenne et l'écart type :

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{|a(t)|^2}{E} dt, \\ T^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^2 \frac{|a(t)|^2}{E} dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor

Pour cette loi de probabilité, on peut calculer la moyenne et l'écart type :

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{|a(t)|^2}{E} dt, \\ T^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^2 \frac{|a(t)|^2}{E} dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Interprétation physique:

Du point de vue physique, on interprète τ comme la localisation temporelle moyenne de l'énergie du signal, et T comme une mesure de répartition de cette énergie, ou comme l'intervalle de temps dans lequel on a une concentration significative d'énergie.

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor

Soit $p_\nu(e)$ la probabilité qu'une unité énergétique e "ait", "soit portée par", une fréquence ν.

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \nu \frac{|A(\nu)|^2}{E} d\nu, \\ B^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\nu - \nu_m)^2 \frac{|A(\nu)|^2}{E} d\nu, \end{aligned} \tag{2}$$

où

- ξ = localisation fréquentielle moyenne de l'énergie du signal
- B la bande de fréquence dans laquelle l'énergie est concentrée

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor

Soit $p_\nu(e)$ la probabilité qu'une unité énergétique e "ait", "soit portée par", une fréquence ν.

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \nu \frac{|A(\nu)|^2}{E} d\nu, \\ B^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\nu - \nu_m)^2 \frac{|A(\nu)|^2}{E} d\nu, \end{aligned} \tag{2}$$

où

- ξ = localisation fréquentielle moyenne de l'énergie du signal
- B la bande de fréquence dans laquelle l'énergie est concentrée

Principe de Heisenberg-Gabor:

$$T \cdot B \geq \frac{1}{4\pi}, \tag{3}$$

Pavés temps-fréquence

Signaux: rappels

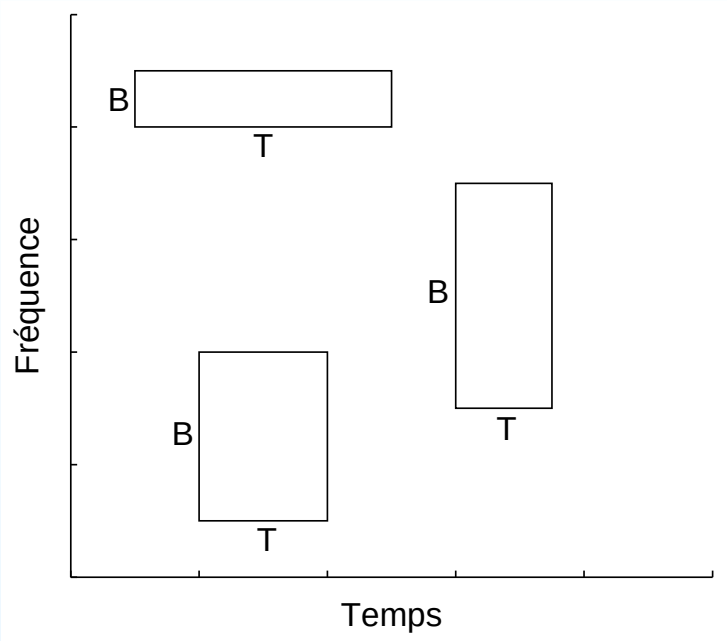
Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



Pavés temps-fréquence

Signaux: rappels

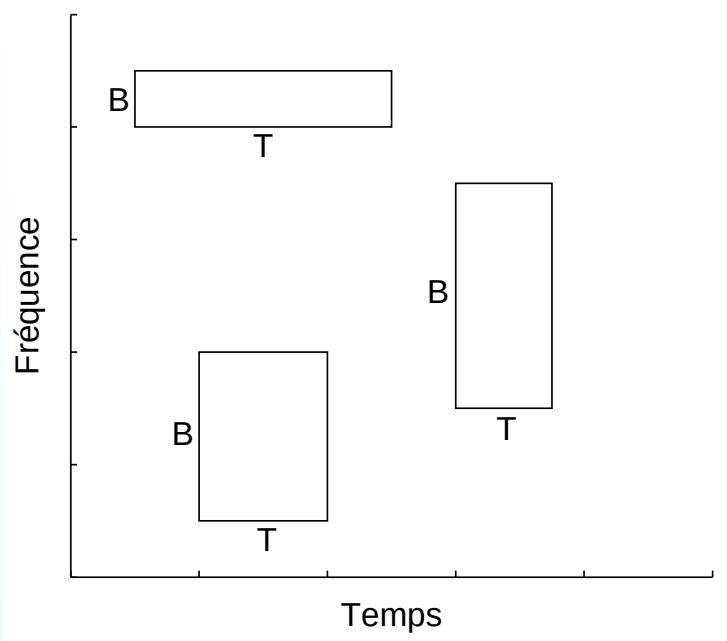
Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



- représentation graphique suggestive

Pavés temps-fréquence

Signaux: rappels

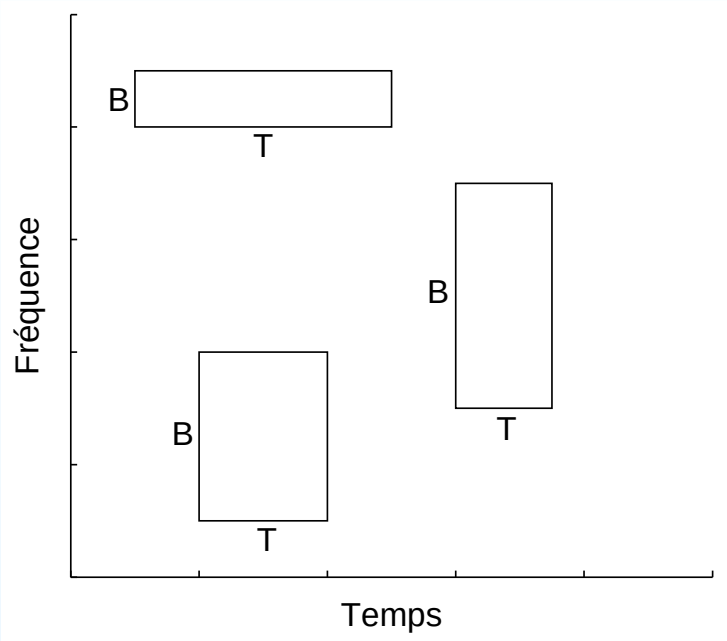
Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



- représentation graphique suggestive
- pavage du plan TF déterminé par:
  - les caractéristiques B et T des atomes
  - position τ et ξ

Pavés temps-fréquence

Signaux: rappels

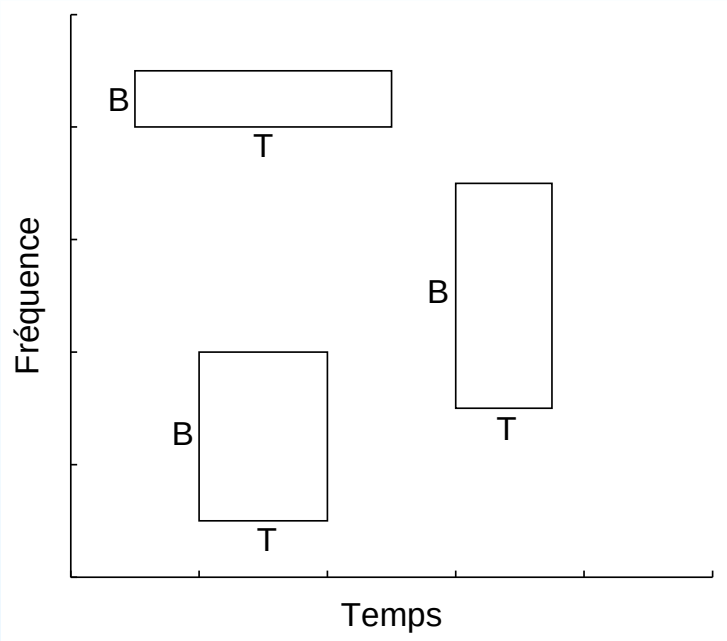
Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



- représentation graphique suggestive
- pavage du plan TF déterminé par:
  - les caractéristiques B et T des atomes
  - position τ et ξ
- pavés superposés $\Leftrightarrow$ redondance, richesse informationnelle

Pavés temps-fréquence

Signaux: rappels

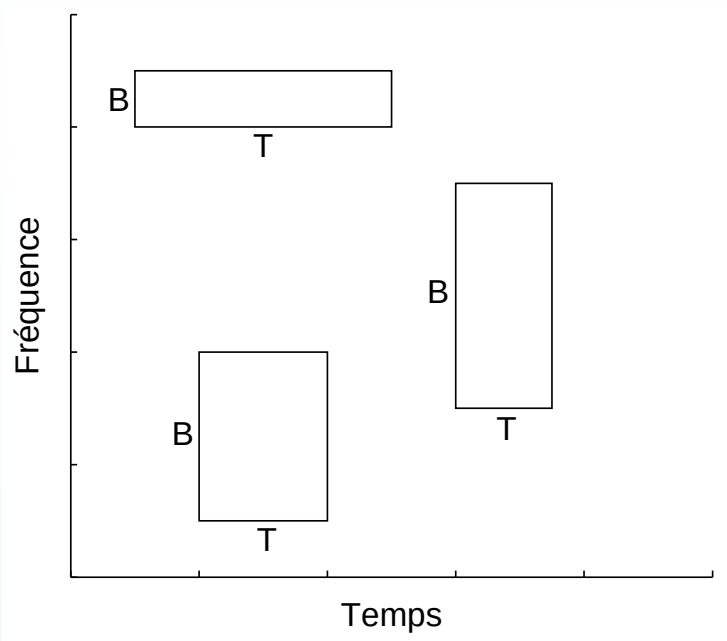
Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage



- représentation graphique suggestive
- pavage du plan TF déterminé par:
  - les caractéristiques B et T des atomes
  - position τ et ξ
- pavés superposés $\Leftrightarrow$ redondance, richesse informationnelle
- pavés adjacents $\Leftrightarrow$ représentation économique

Bases orthonormées

Propriétés:

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Bases orthonormées

Propriétés:

- **complétude:** *tout* vecteur (signal $x(t)$) peut être reconstruit comme une somme de vecteurs de base (atomes TF $a_{\tau,\xi}(t)$):

$$x(t) = \sum_{\tau,\xi} X_{\tau,\xi} \cdot a_{\tau,\xi}(t) \qquad (4)$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Bases orthonormées

Propriétés:

- **complétude:** *tout* vecteur (signal $x(t)$) peut être reconstruit comme une somme de vecteurs de base (atomes TF $a_{\tau,\xi}(t)$):

$$x(t) = \sum_{\tau,\xi} X_{\tau,\xi} \cdot a_{\tau,\xi}(t) \tag{4}$$

- **orthonormée:** les vecteurs de base $a_{\tau,\xi}(t)$ sont orthogonaux et de norme unitaire

$$\langle a_{\tau,\xi}(t), a_{\tau,\xi}(t) \rangle = \delta_{\tau,\xi} \tag{5}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Bases orthonormées

Propriétés:

- **complétude:** *tout* vecteur (signal $x(t)$) peut être reconstruit comme une somme de vecteurs de base (atomes TF $a_{\tau,\xi}(t)$):

$$x(t) = \sum_{\tau,\xi} X_{\tau,\xi} \cdot a_{\tau,\xi}(t) \tag{4}$$

- **orthonormée:** les vecteurs de base $a_{\tau,\xi}(t)$ sont orthogonaux et de norme unitaire

$$\langle a_{\tau,\xi}(t), a_{\tau,\xi}(t) \rangle = \delta_{\tau,\xi} \tag{5}$$

Dans ce cas:

- l'équation (4) est la représentation d'un signal comme la somme de ses projections sur les atomes TF

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Bases orthonormées

Propriétés:

- **complétude:** *tout* vecteur (signal $x(t)$) peut être reconstruit comme une somme de vecteurs de base (atomes TF $a_{\tau,\xi}(t)$):

$$x(t) = \sum_{\tau,\xi} X_{\tau,\xi} \cdot a_{\tau,\xi}(t) \tag{4}$$

- **orthonormée:** les vecteurs de base $a_{\tau,\xi}(t)$ sont orthogonaux et de norme unitaire

$$\langle a_{\tau,\xi}(t), a_{\tau,\xi}(t) \rangle = \delta_{\tau,\xi} \tag{5}$$

Dans ce cas:

- l'équation (4) est la représentation d'un signal comme la somme de ses projections sur les atomes TF
- les coefficients $X_{\tau,\xi} \rightarrow$ valeurs scalaires des projections:

$$X_{\tau,\xi} = \langle x(t), a_{\tau,\xi}(t) \rangle$$

Interprétation physique des $X_{\tau,\xi}$

Le produit scalaire de deux signaux à support temporel fini $[0, T]$ est défini, en continu et en discret (N échantillons), par:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^T f(t) g(t) dt \tag{6}$$

$$\langle f(k), g(k) \rangle = \sum_1^N f(k) g(k). \tag{7}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Interprétation physique des $X_{\tau,\xi}$

Le produit scalaire de deux signaux à support temporel fini $[0, T]$ est défini, en continu et en discret (N échantillons), par:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^T f(t) g(t) dt \tag{6}$$

$$\langle f(k), g(k) \rangle = \sum_1^N f(k) g(k). \tag{7}$$

Les équations (6) et (7) définissent aussi **la corrélation** entre les fonctions f et g à un facteur N près).

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Interprétation physique des $X_{\tau,\xi}$

Le produit scalaire de deux signaux à support temporel fini $[0, T]$ est défini, en continu et en discret (N échantillons), par:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^T f(t) g(t) dt \tag{6}$$

$$\langle f(k), g(k) \rangle = \sum_1^N f(k) g(k). \tag{7}$$

Les équations (6) et (7) définissent aussi **la corrélation** entre les fonctions f et g à un facteur N près).

Observations:

- corrélation $\Leftrightarrow$ f semblable à g $\Leftrightarrow$ $X_{\tau,\xi}$ grand

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Interprétation physique des $X_{\tau,\xi}$

Le produit scalaire de deux signaux à support temporel fini $[0, T]$ est défini, en continu et en discret (N échantillons), par:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^T f(t) g(t) dt \tag{6}$$

$$\langle f(k), g(k) \rangle = \sum_1^N f(k) g(k). \tag{7}$$

Les équations (6) et (7) définissent aussi **la corrélation** entre les fonctions f et g à un facteur N près).

Observations:

- corrélation $\Leftrightarrow$ f semblable à g $\Leftrightarrow$ $X_{\tau,\xi}$ grand
- décorrélation $\Leftrightarrow$ f orthogonale à g $\Leftrightarrow$ $X_{\tau,\xi} \to 0$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Interprétation physique des $X_{\tau,\xi}$

Le produit scalaire de deux signaux à support temporel fini $[0, T]$ est défini, en continu et en discret (N échantillons), par:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^T f(t) g(t) dt \tag{6}$$

$$\langle f(k), g(k) \rangle = \sum_1^N f(k) g(k). \tag{7}$$

Les équations (6) et (7) définissent aussi **la corrélation** entre les fonctions f et g à un facteur N près).

Observations:

- corrélation $\Leftrightarrow$ f semblable à g $\Leftrightarrow$ $X_{\tau,\xi}$ grand
- décorrélation $\Leftrightarrow$ f orthogonale à g $\Leftrightarrow$ $X_{\tau,\xi} \to 0$

Théorème de Parseval:

$$\sum_t |x(t)|^2 = \sum_{\tau,\xi} |X_{\tau,\xi}|^2. \tag{8}$$

Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- *Un grand coefficient $X_{\tau,\xi}$ signifiera donc que autour de l'instant τ et de la fréquence ξ, le signal $x(t)$ se ressemble à l'atome $a_{\tau,\xi}$ et inversement*

Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- *Un grand coefficient $X_{\tau,\xi}$ signifiera donc que autour de l'instant τ et de la fréquence ξ, le signal $x(t)$ se ressemble à l'atome $a_{\tau,\xi}$ et inversement*

- *Le théorème de Parseval montre que le coefficient $X_{\tau,\xi}$ est une mesure de l'énergie du signal autour de l'instant τ et de la fréquence ξ.*

Atomes temps-fréquence - exemples

Le signal est:

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Atomes temps-fréquence - exemples

Le signal est:

- une impulsion de Dirac
  - $T \to 0, B \to \infty$
  - base orthonormée

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Atomes temps-fréquence - exemples

Le signal est:

- une impulsion de Dirac
  - $T \to 0, B \to \infty$
  - base orthonormée
- une exponentielle complexe
  - $T \to \infty, B \to 0$
  - base orthonormée

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Atomes temps-fréquence - exemples

Le signal est:

- une impulsion de Dirac
  - $T \to 0, B \to \infty$
  - base orthonormée
- une exponentielle complexe
  - $T \to \infty, B \to 0$
  - base orthonormée
- une exponentielle complexe multipliée par une fonction porte (= Fourier à court terme)
  - $T \to$ donnée par la largeur de la porte
  - $B \to$ donnée par la largeur du sinus cardinal

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

Atomes temps-fréquence - exemples

Le signal est:

- une impulsion de Dirac
  - $T \to 0, B \to \infty$
  - base orthonormée
- une exponentielle complexe
  - $T \to \infty, B \to 0$
  - base orthonormée
- une exponentielle complexe multipliée par une fonction porte (= Fourier à court terme)
  - $T \to$ donnée par la largeur de la porte
  - $B \to$ donnée par la largeur du sinus cardinal
- une exponentielle complexe multipliée par une gaussienne
  - atome temps-fréquence de Gabor (*gaborette*)
  - $T \cdot B = \dfrac{1}{4\pi}$
  - on ne peut pas construire une base orthonormée !

Atomes temps-fréquence - exemples

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

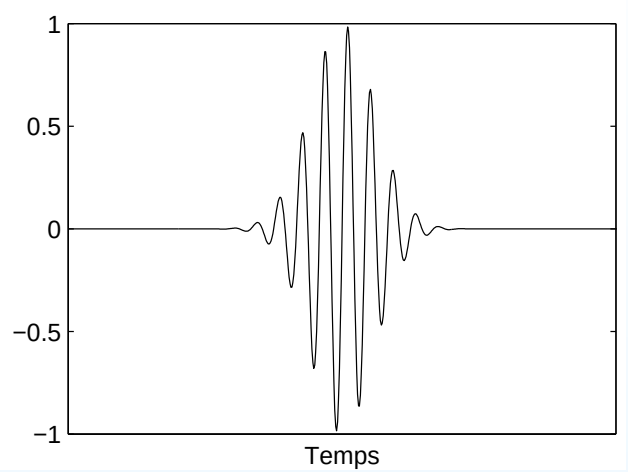
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

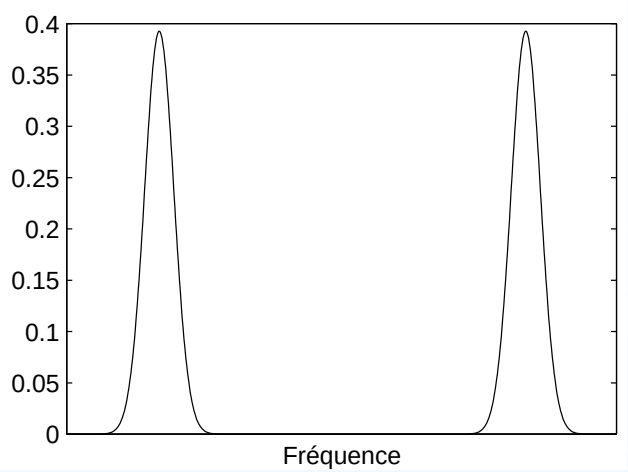
Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage





Atome temps-fréquence de Gabor et son spectre

Atomes temps-fréquence - exemples

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

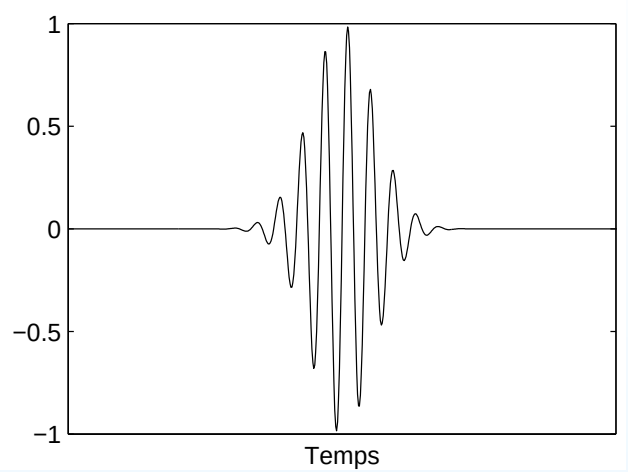
- Introduction
- Décompositions atomiques
- Principe d'incertitude
- Bases orthonormées
- Conclusion
- Exemples

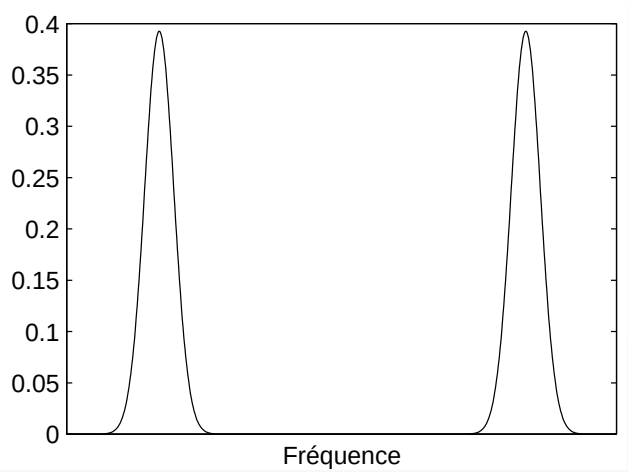
Ondelettes orthogonales

Signaux

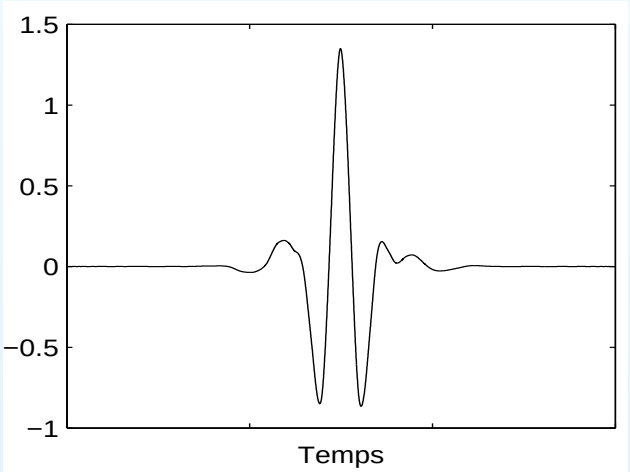
Bruit

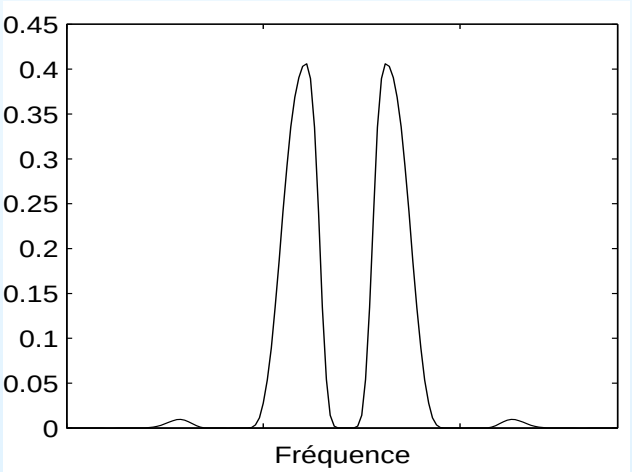
Débruitage





Atome temps-fréquence de Gabor et son spectre





Ondelette 'sym8' et son spectre

Ondelettes orthogonales

Définitions

- **Ondelette mère:** une fonction (un atome TF) $\psi(t)$ de:
  - moyenne nulle: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$
  - norme L_2 unitaire: $||\psi(t)||_2 = 1$
  - centrée autour de $t = 0$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Définitions

- **Ondelette mère:** une fonction (un atome TF) $\psi(t)$ de:
  - moyenne nulle: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$
  - norme L_2 unitaire: $||\psi(t)||_2 = 1$
  - centrée autour de $t = 0$
- **Famille d'ondelettes:** par dilatations et translations de l'ondelette mère, on obtient

$$\psi_{s,u} = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \tag{9}$$

où s est l'échelle et u la position temporelle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Définitions

- **Ondelette mère:** une fonction (un atome TF) $\psi(t)$ de:
  - moyenne nulle: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$
  - norme L_2 unitaire: $||\psi(t)||_2 = 1$
  - centrée autour de $t = 0$
- **Famille d'ondelettes:** par dilatations et translations de l'ondelette mère, on obtient

$$\psi_{s,u} = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \tag{9}$$

  où s est l'échelle et u la position temporelle
- **Décomposition discrète:** dilatations s et translations u discrètes. Pour une suite s_j finie ($j = 1 \ldots M$), on définit ...

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Définitions

- **Ondelette mère:** une fonction (un atome TF) $\psi(t)$ de:
  - moyenne nulle: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$
  - norme L_2 unitaire: $||\psi(t)||_2 = 1$
  - centrée autour de $t = 0$
- **Famille d'ondelettes:** par dilatations et translations de l'ondelette mère, on obtient

$$\psi_{s,u} = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \tag{9}$$

  où s est l'échelle et u la position temporelle
- **Décomposition discrète:** dilatations s et translations u discrètes. Pour une suite s_j finie ($j = 1 \ldots M$), on définit ...
- **Fonction d'échelle:** une fonction $\phi(t)$ de norme L_2 et de moyenne unitaires, qui est l'agrégation des ondelettes d'échelle supérieure à s_M

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Définitions

- **Ondelette mère:** une fonction (un atome TF) $\psi(t)$ de:
  - moyenne nulle: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$
  - norme L_2 unitaire: $||\psi(t)||_2 = 1$
  - centrée autour de $t = 0$
- **Famille d'ondelettes:** par dilatations et translations de l'ondelette mère, on obtient

$$\psi_{s,u} = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \tag{9}$$

  où s est l'échelle et u la position temporelle
- **Décomposition discrète:** dilatations s et translations u discrètes. Pour une suite s_j finie ($j = 1 \ldots M$), on définit ...
- **Fonction d'échelle:** une fonction $\phi(t)$ de norme L_2 et de moyenne unitaires, qui est l'agrégation des ondelettes d'échelle supérieure à s_M
- **Famille de fonctions d'échelle:** translations de $\phi(t)$

Décomposition dyadique orthonormée

- signal $x(k), x = 1 \ldots N$ fini

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Décomposition dyadique orthonormée

- signal $x(k), x = 1 \ldots N$ fini
- fonctions ψ et ϕ *orthonormées*

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Décomposition dyadique orthonormée

- signal $x(k), x = 1 \ldots N$ fini
- fonctions ψ et ϕ *orthonormées*
- équivalente à une *analyse multi-résolution*, constituée d'un espace d'approximation et plusieurs espaces de détails
  - *approximation* $\leftrightarrow$ fonctions d'échelle (basse fréquence)
  - *détails* $\leftrightarrow$ ondelettes (bandes de fréquence)

Décomposition dyadique

- pas de discrétisation de l'échelle: l'octave $s_j = 2^j$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Décomposition dyadique orthonormée

- signal $x(k), x = 1 \ldots N$ fini
- fonctions ψ et ϕ *orthonormées*
- équivalente à une *analyse multi-résolution*, constituée d'un espace d'approximation et plusieurs espaces de détails
  - *approximation* $\leftrightarrow$ fonctions d'échelle (basse fréquence)
  - *détails* $\leftrightarrow$ ondelettes (bandes de fréquence)

Décomposition dyadique

- pas de discrétisation de l'échelle: l'octave $s_j = 2^j$
- pas de discrétisation de la translation p_j:
  - $p_j = 1 \ldots \frac{N}{2^j}$ pour les échelles de détails $j = 1 \ldots M$
  - $p_M = 1 \ldots \frac{N}{2^M}$ pour l'échelle de l'approximation $j = M$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Décomposition dyadique orthonormée

- signal $x(k), x = 1 \ldots N$ fini
- fonctions ψ et ϕ *orthonormées*
- équivalente à une *analyse multi-résolution*, constituée d'un espace d'approximation et plusieurs espaces de détails
  - *approximation* $\leftrightarrow$ fonctions d'échelle (basse fréquence)
  - *détails* $\leftrightarrow$ ondelettes (bandes de fréquence)

Décomposition dyadique

- pas de discrétisation de l'échelle: l'octave $s_j = 2^j$
- pas de discrétisation de la translation p_j:
  - $p_j = 1 \ldots \frac{N}{2^j}$ pour les échelles de détails $j = 1 \ldots M$
  - $p_M = 1 \ldots \frac{N}{2^M}$ pour l'échelle de l'approximation $j = M$

$$\psi_{j,p_j} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left(\frac{k - p_j}{2^j} \right)$$
$$\phi_{M,p_M} = \frac{1}{\sqrt{2^M}} \psi \left(\frac{k - p_M}{2^j} \right)$$

★ un signal de longueur $N \Rightarrow N$ ondelettes et f. d'échelle

Décomposition dyadique

Signaux: rappels

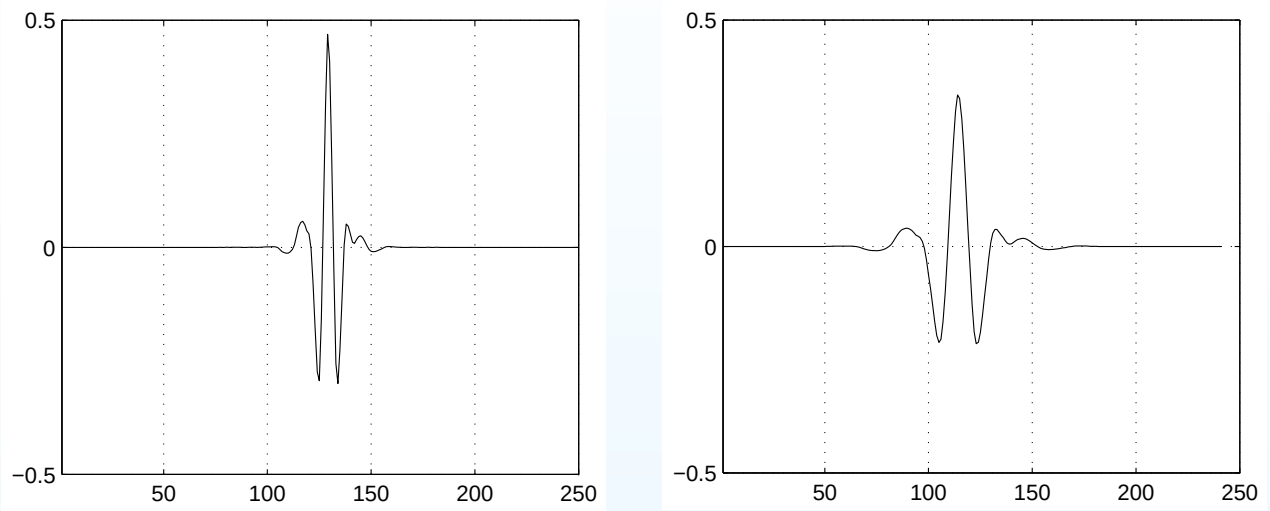
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage



Exemple d'ondelettes à deux échelles adjacentes s_j et s_{j+1}

Décomposition dyadique

Signaux: rappels

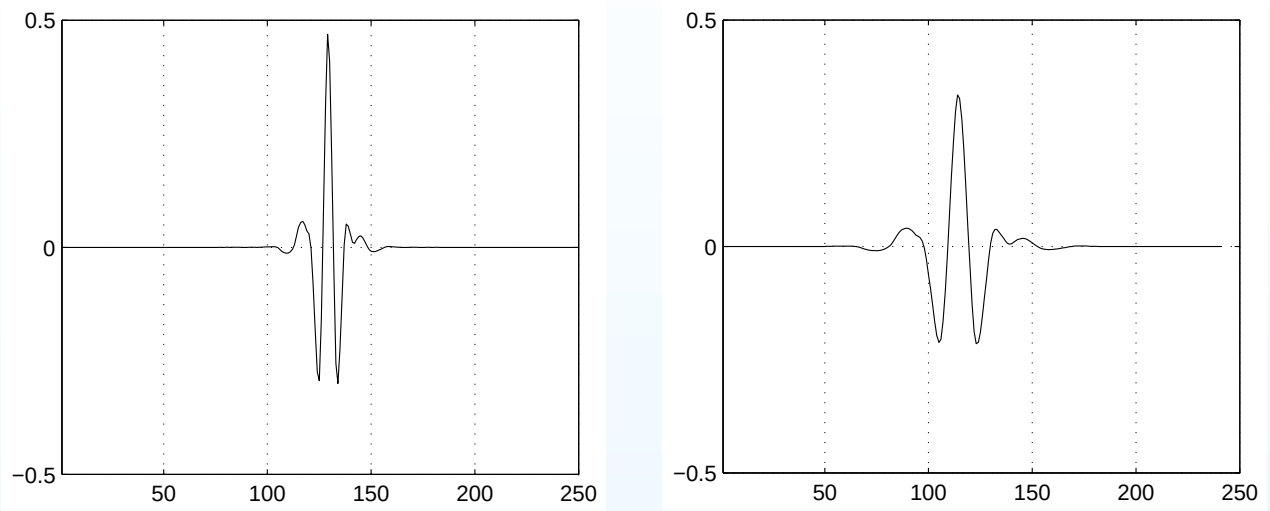
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage



Exemple d'ondelettes à deux échelles adjacentes s_j et s_{j+1}

Observations:

- support temporel agrandi d'un facteur de 2
- amplitude diminuée d'un facteur de $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Décomposition dyadique

Signaux: rappels

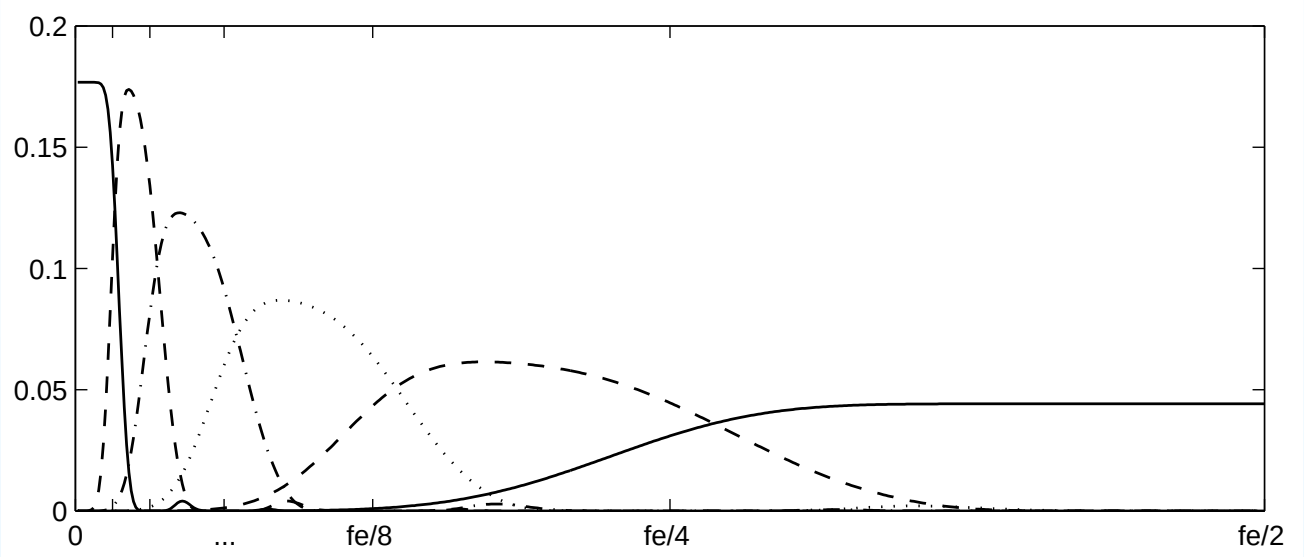
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage



Spectres des ondelettes correspondant à une décomposition dyadique de profondeur $M = 5$ (f_e est la fréquence d'échantillonnage)

Décomposition dyadique

Signaux: rappels

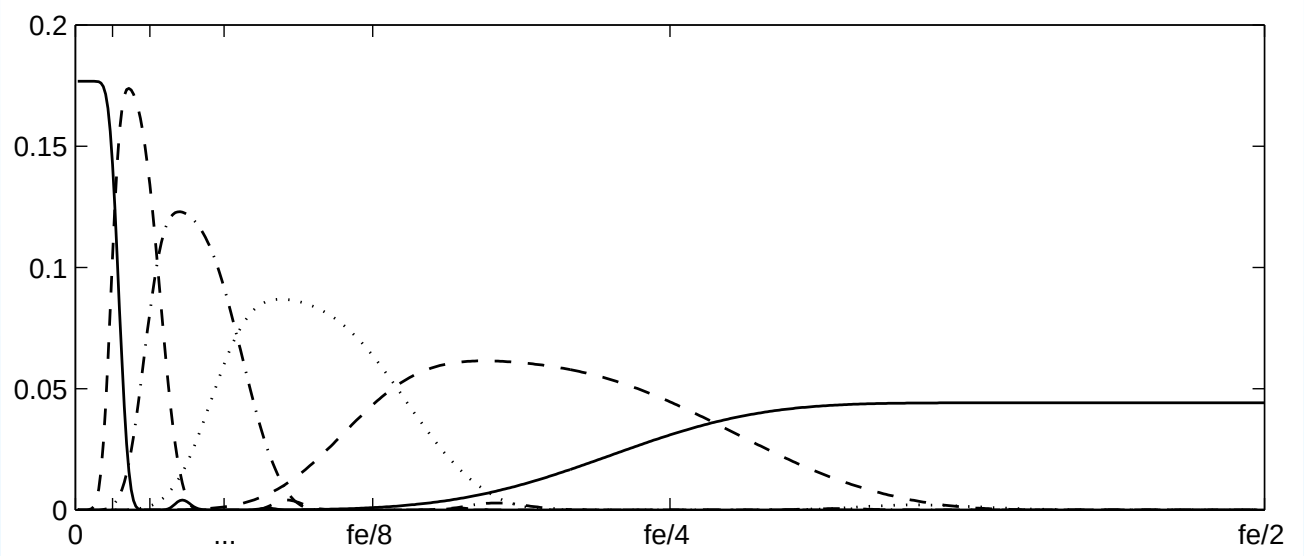
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage



Spectres des ondelettes correspondant à une décomposition dyadique de profondeur $M = 5$ (f_e est la fréquence d'échantillonnage)

Observations:

- largeur de bande agrandi d'un facteur 2
- amplitude du spectre diminuée d'un facteur de $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Décomposition dyadique

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

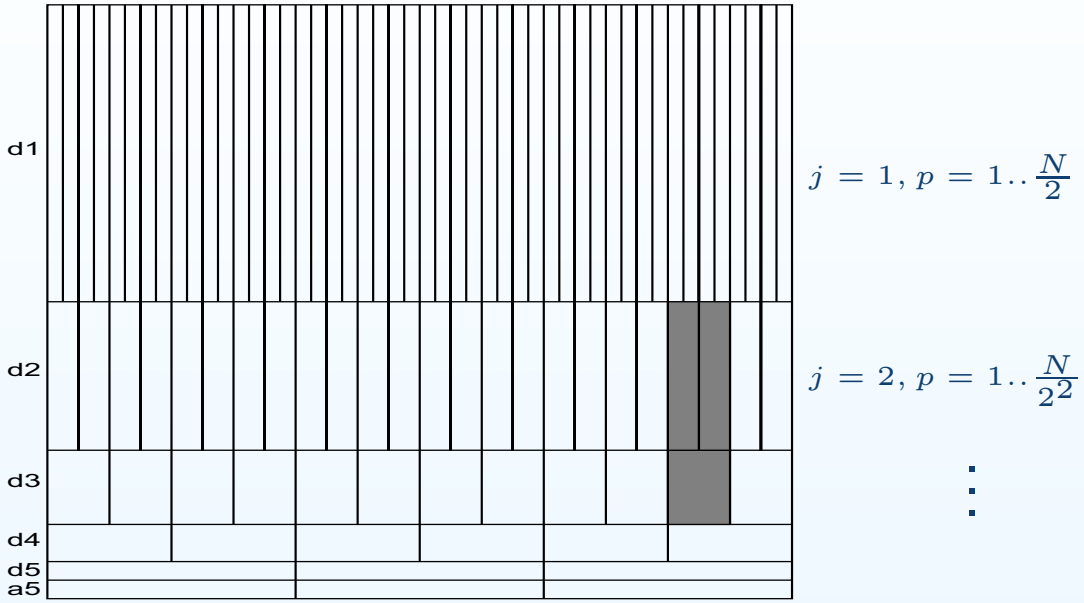
Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Pavage du plan temps-fréquence des ondelettes



Décomposition dyadique

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

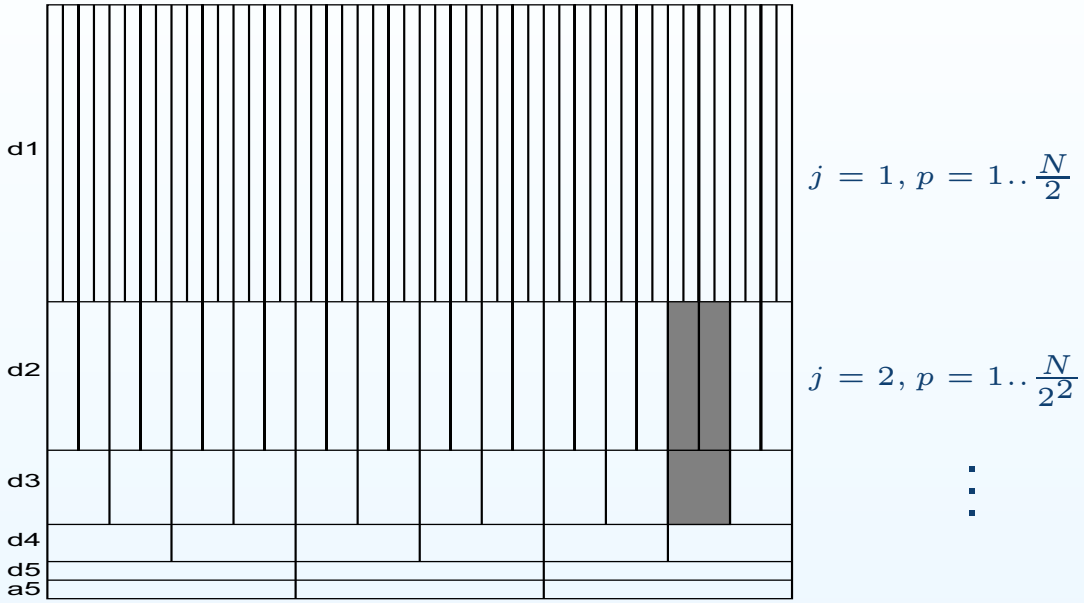
Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Pavage du plan temps-fréquence des ondelettes



Ondelettes ψ

Fonctions d'échelle ϕ

$\rightarrow$ *atomes TF orthonormés*

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

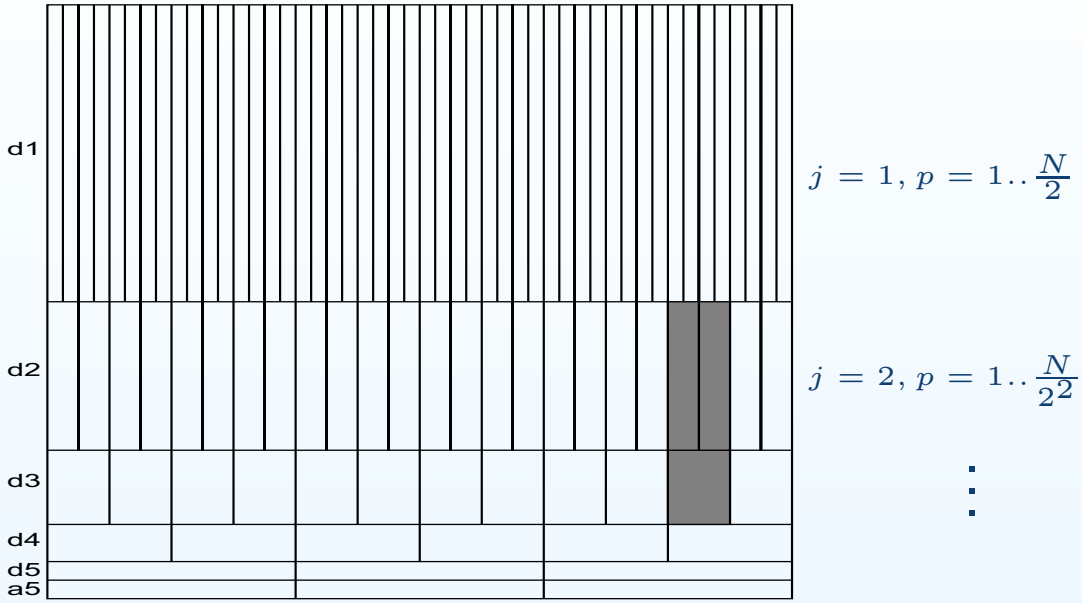
Signaux

Bruit

Débruitage

Décomposition dyadique

Pavage du plan temps-fréquence des ondelettes



Ondelettes ψ
Fonctions d'échelle ϕ

$\rightarrow$ *atomes TF orthonormés*

$\Rightarrow$ tout signal $x(k)$ s'écrit:

$$x(k) = \sum_{j,p} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}(k) + \sum_{p} w^{M+1,p_M} \phi_{M,p_M}(k) \qquad (10)$$

Décomposition dyadique

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

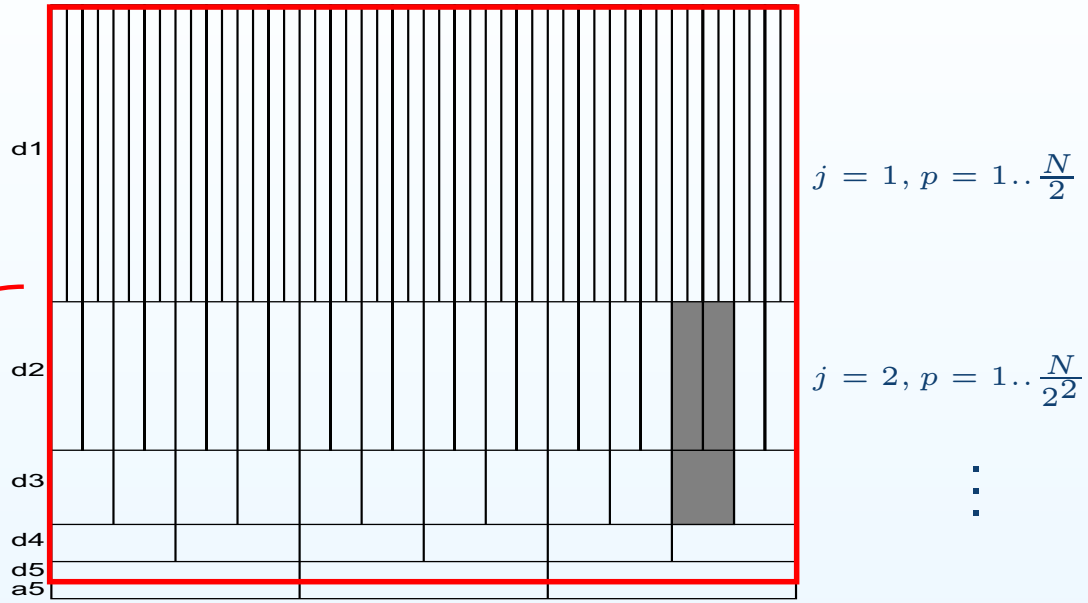
Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Pavage du plan temps-fréquence des ondelettes



Ondelettes ψ
Fonctions d'échelle ϕ

$\rightarrow$ *atomes TF orthonormés*

$\Rightarrow$ tout signal $x(k)$ s'écrit:

$$x(k) = \sum_{j,p} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}(k) + \sum_{p} w^{M+1,p_M} \phi_{M,p_M}(k) \qquad (10)$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

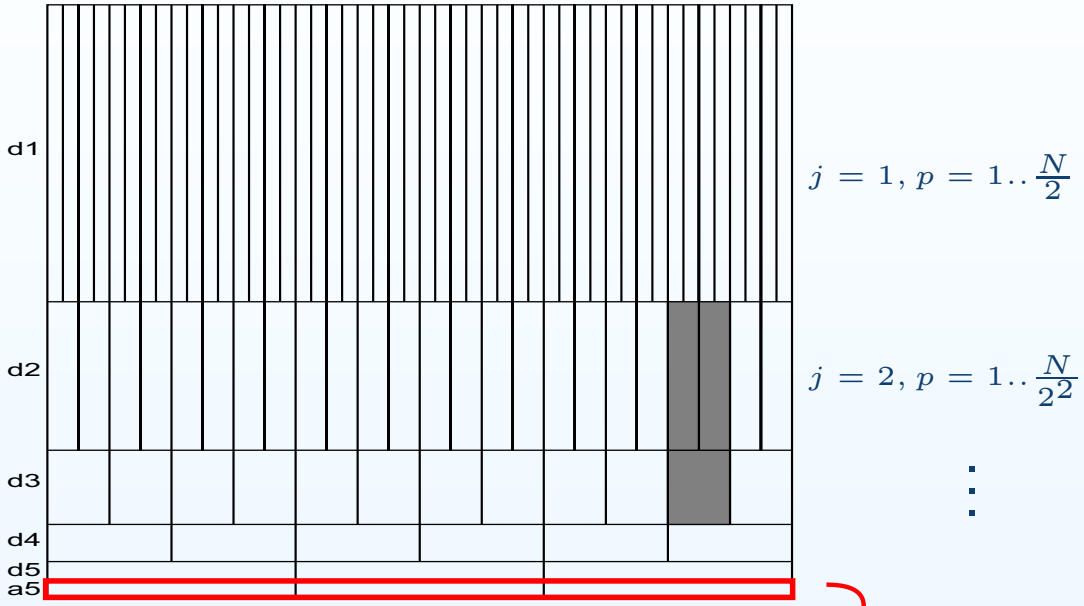
Signaux

Bruit

Débruitage

Décomposition dyadique

Pavage du plan temps-fréquence des ondelettes



Ondelettes ψ
Fonctions d'échelle ϕ

$\rightarrow$ *atomes TF orthonormés*

$\Rightarrow$ tout signal $x(k)$ s'écrit:

$$x(k) = \sum_{j,p} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}(k) + \sum_{p} w^{M+1,p_M} \phi_{M,p_M}(k) \qquad (10)$$

Algorithme de décomposition en ondelettes

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Décomposition orthonormée $\Rightarrow$ coefficients d'ondelette:

$$w^{j,p_j} = \langle x, \psi_{j,p_j} \rangle = \sum_1^N x(k) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left(\frac{k-p_j}{2^j} \right), \quad \forall j = 1..M,$$

$$w^{M+1,p_M} = \langle x, \phi_{M,p_M} \rangle = \sum_1^N x(k) \frac{1}{\sqrt{2^M}} \phi \left(\frac{k-p_M}{2^M} \right),$$

où j désigne l'échelle s_j ($\sim$ fréquence), p_j l'indice ($\sim$ position temporelle) et M la profondeur de la décomposition.

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Algorithme de décomposition en ondelettes

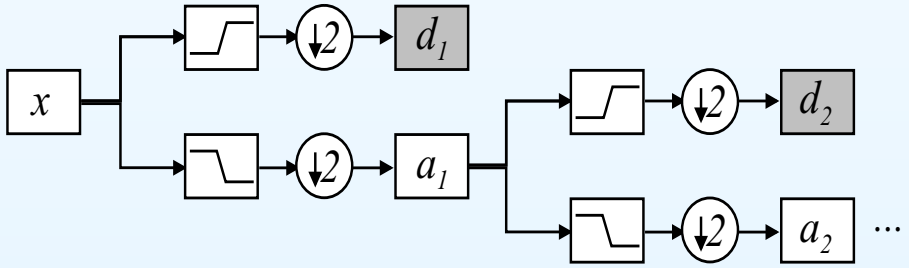
Décomposition orthonormée $\Rightarrow$ coefficients d'ondelette:

$$w^{j,p_j} = \langle x, \psi_{j,p_j} \rangle = \sum_1^N x(k) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{k-p_j}{2^j}\right), \quad \forall j = 1..M,$$

$$w^{M+1,p_M} = \langle x, \phi_{M,p_M} \rangle = \sum_1^N x(k) \frac{1}{\sqrt{2^M}} \phi\left(\frac{k-p_M}{2^M}\right),$$

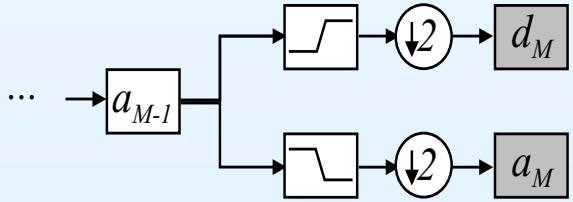
où j désigne l'échelle s_j ($\sim$ fréquence), p_j l'indice ($\sim$ position temporelle) et M la profondeur de la décomposition.

Algorithme de Mallat



Le vecteur des coefficients d'ondelette est

$$\mathbf{w} = \{w^{M+1,p_M} \quad w^{j,p_j}\}$$
$$= \{a_M \quad d_M \quad d_{M-1} \quad \ldots \quad d_2 \quad d_1\}$$



Interprétation matricielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Un dernier point reste à rappeler:

La transformée en ondelettes discrète d'un signal $x(k)$ de longueur N est une projection orthogonale sur une base. Par conséquent, elle peut être représentée comme un produit matriciel:

$$\mathbf{w} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}, \tag{11}$$

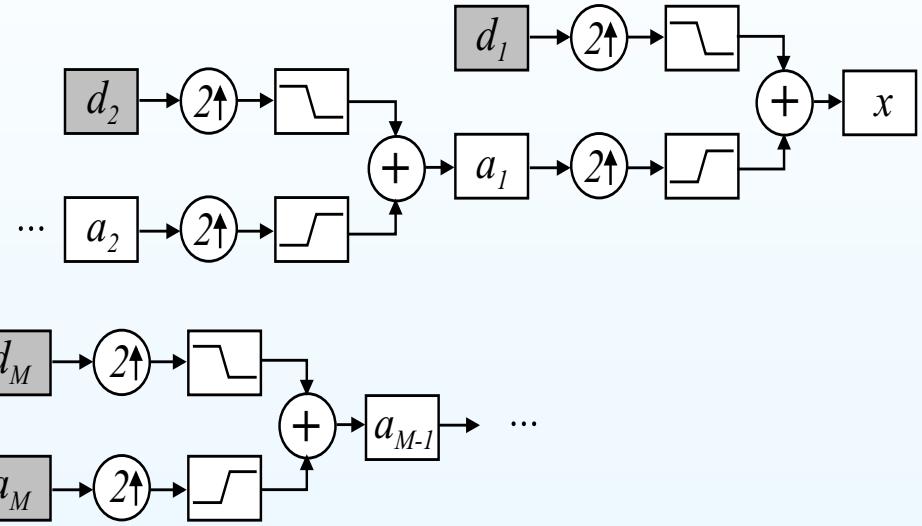
où $\mathbf{w}$ est le vecteur des coefficients d'ondelette et $\mathbf{W}$ est la matrice orthogonale de transformation:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{W^T} = \mathbf{I}$$

$$\det(\mathbf{W}) = 1$$

Algorithme de reconstruction

Mallat inverse:



Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

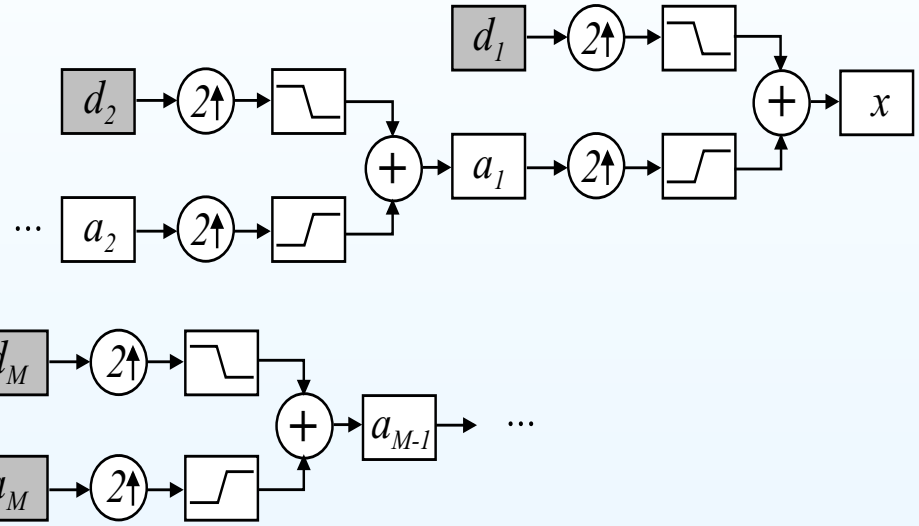
Signaux

Bruit

Débruitage

Algorithme de reconstruction

Mallat inverse:



Interprétation matricielle:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \qquad (12)$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Algorithme de reconstruction

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

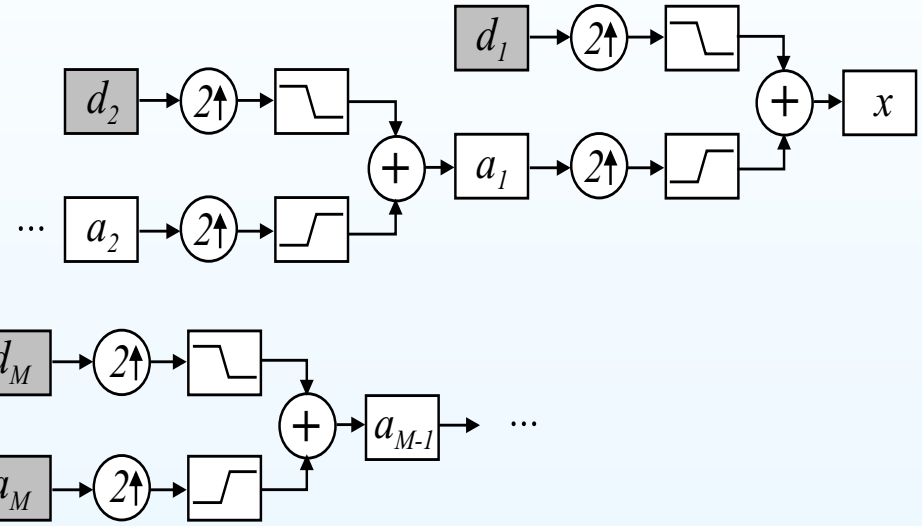
Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Mallat inverse:



Interprétation matricielle:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \qquad (12)$$

A partir du vecteur des coefficients $\mathbf{w}$ *on peut reconstruire le signal* ***sans pertes***

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Reconstruction partielle - idée

Précédemment:

- selon Parseval, un grand coefficient $w^{j,p_j} \Rightarrow$ le signal $x(k)$ est énergétique à l'échelle j, instant p_j

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Reconstruction partielle - idée

Précédemment:

- selon Parseval, un grand coefficient $w^{j,p_j} \Rightarrow$ le signal $x(k)$ est énergétique à l'échelle j, instant p_j
- un grand coefficient $w^{j,p_j} \Rightarrow$ le signal $x(k)$ se ressemble à l'ondelette située à l'échelle j, instant p_j

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Reconstruction partielle - idée

Précédemment:

- selon Parseval, un grand coefficient $w^{j,p_j} \Rightarrow$ le signal $x(k)$ est énergétique à l'échelle j, instant p_j
- un grand coefficient $w^{j,p_j} \Rightarrow$ le signal $x(k)$ se ressemble à l'ondelette située à l'échelle j, instant p_j

Par conséquent:

1. *Un signal $\hat{x}(k)$ reconstruit uniquement à partir des grands coefficients w^{j,p_j} gardera la plupart de l'énergie du signal $x(k)$*

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Reconstruction partielle - idée

Précédemment:

- selon Parseval, un grand coefficient $w^{j,p_j} \Rightarrow$ le signal $x(k)$ est énergétique à l'échelle j, instant p_j
- un grand coefficient $w^{j,p_j} \Rightarrow$ le signal $x(k)$ se ressemble à l'ondelette située à l'échelle j, instant p_j

Par conséquent:

1. *Un signal $\hat{x}(k)$ reconstruit uniquement à partir des grands coefficients w^{j,p_j} gardera la plupart de l'énergie du signal $x(k)$*
2. *Le signal $\hat{x}(k)$ ainsi reconstruit sera "semblable" au signal $x(t)$*

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

1. Conservation énergétique

- Soit - $x(k), k = 1 \dots N$ un signal d'énergie finie et
  - w^{j,p_j} ses N coefficients d'ondelette
  - l'énergie du signal

$$E = ||x(k)||_2 = \sum_{k=1}^{N} x(k)^2 = \sum_{j,p}^{N} (w^{j,p_j})^2$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

1. Conservation énergétique

- Soit - $x(k), k = 1 \dots N$ un signal d'énergie finie et
  - w^{j,p_j} ses N coefficients d'ondelette
  - ◦ l'énergie du signal

$$E = ||x(k)||_2 = \sum_{k=1}^{N} x(k)^2 = \sum_{j,p} (w^{j,p_j})^2$$

- Soit $\hat{x}(k)$ le signal reconstruit à partir de P coefficients
  - ◦ l'énergie du signal

$$\hat{E} = ||\hat{x}(k)||_2 = \sum_{k=1}^{N} \hat{x}(k)^2 = \sum_{j,p} \left(g(w^{j,p_j}) \cdot w^{j,p_j}\right)^2,$$

avec $g(w^{j,p_j}) = 1$ pour les P coefficients et 0 ailleurs

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

1. Conservation énergétique

- Soit - $x(k), k = 1 \dots N$ un signal d'énergie finie et
  - w^{j,p_j} ses N coefficients d'ondelette
  - l'énergie du signal

$$E = ||x(k)||_2 = \sum_{k=1}^{N} x(k)^2 = \sum_{j,p} (w^{j,p_j})^2$$

- Soit $\hat{x}(k)$ le signal reconstruit à partir de P coefficients
  - l'énergie du signal

$$\hat{E} = ||\hat{x}(k)||_2 = \sum_{k=1}^{N} \hat{x}(k)^2 = \sum_{j,p} \left(g(w^{j,p_j}) \cdot w^{j,p_j} \right)^2 ,$$

avec $g(w^{j,p_j}) = 1$ pour les P coefficients et 0 ailleurs

Critère à minimiser: $E - \hat{E} = ||x(k)||_2 - ||\hat{x}(k)||_2$

$\Leftrightarrow$ maximiser l'énergie de estimation $\hat{E} = ||\hat{x}(k)||_2$

$\Leftrightarrow$ choisir les P plus grands coefficients en module

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

2. “Similarité” des signaux

- Soit le signal $\hat{x}(k)$ reconstruit à partir de P coefficients.
- Soit l’erreur résiduelle $r(k)$ et sa décomposition

$$r(k) = x(k) - \hat{x}(k) = \sum_{j,p}^{N-P} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}$$

Critère à minimiser: Erreur Quadratique Moyenne (EQM)

$$\begin{aligned} EQM &= ||x(k) - \hat{x}(k)||_2 = ||r(k)||_2 \\ &= \sum_{j,p}^{N-P} \left(w^{j,p_j}\right)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

2. “Similarité” des signaux

- Soit le signal $\hat{x}(k)$ reconstruit à partir de P coefficients.
- Soit l’erreur résiduelle $r(k)$ et sa décomposition

$$r(k) = x(k) - \hat{x}(k) = \sum_{j,p}^{N-P} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}$$

Critère à minimiser: Erreur Quadratique Moyenne (EQM)

$$\begin{aligned} EQM &= ||x(k) - \hat{x}(k)||_2 = ||r(k)||_2 \\ &= \sum_{j,p}^{N-P} \left(w^{j,p_j}\right)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

L’EQM est minimale si on choisi les P plus grands coefficients en valeur absolue

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

2. “Similarité” des signaux

- Soit le signal $\hat{x}(k)$ reconstruit à partir de P coefficients.
- Soit l’erreur résiduelle $r(k)$ et sa décomposition

$$r(k) = x(k) - \hat{x}(k) = \sum_{j,p}^{N-P} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}$$

Critère à minimiser: Erreur Quadratique Moyenne (EQM)

$$\begin{aligned} EQM &= ||x(k) - \hat{x}(k)||_2 = ||r(k)||_2 \\ &= \sum_{j,p}^{N-P} \left(w^{j,p_j}\right)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

L’EQM est minimale si on choisi les P plus grands coefficients en valeur absolue

$\Rightarrow$ *Les deux critères sont minimisés en même temps en choisissant les grands coefficients en valeur absolue*

Histogrammes

Signaux: rappels

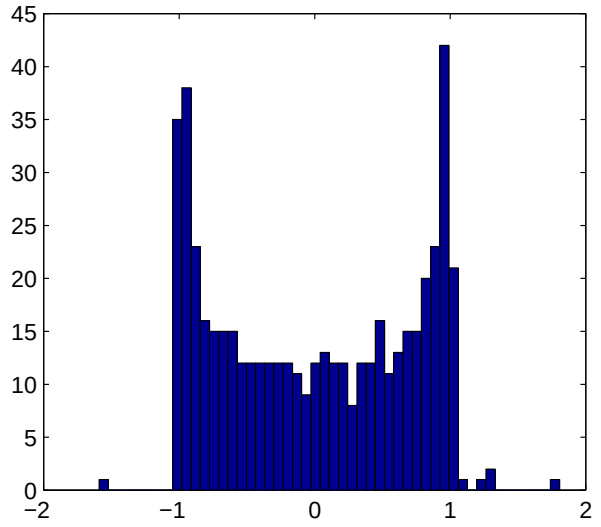
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

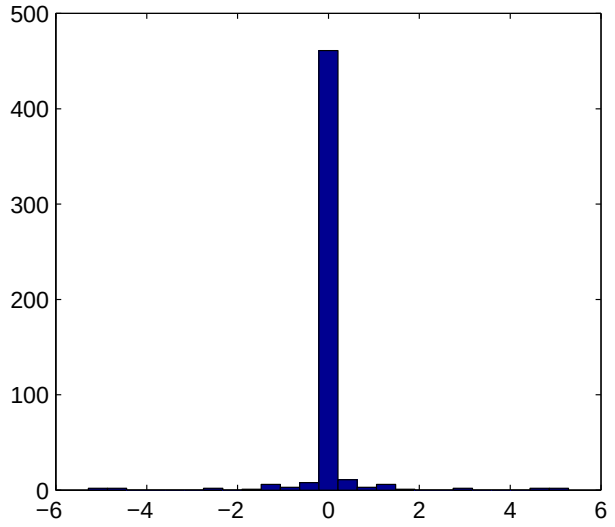
Signaux

Bruit

Débruitage



Signal temporel



Coefficients d'ondelette

Histogrammes

Signaux: rappels

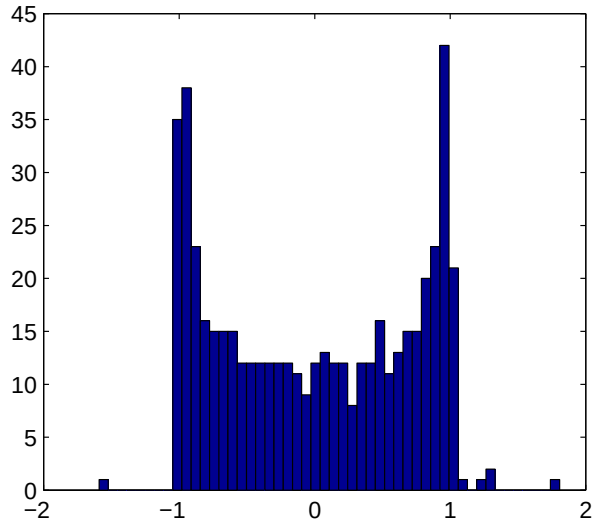
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

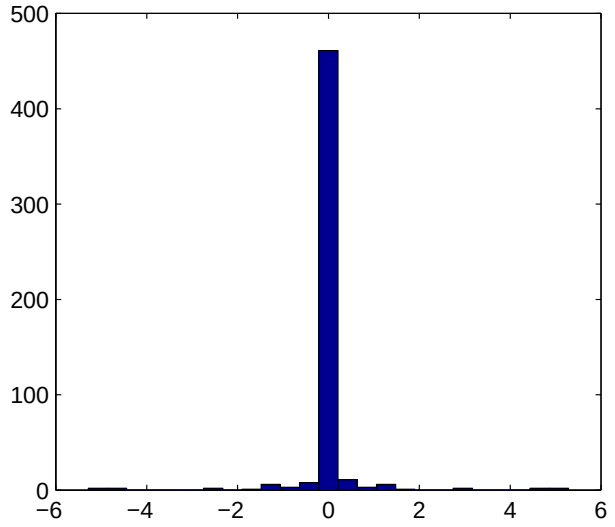
Signaux

Bruit

Débruitage



Signal temporel



Coefficients d'ondelette

- "coefficients de Dirac"

Histogrammes

Signaux: rappels

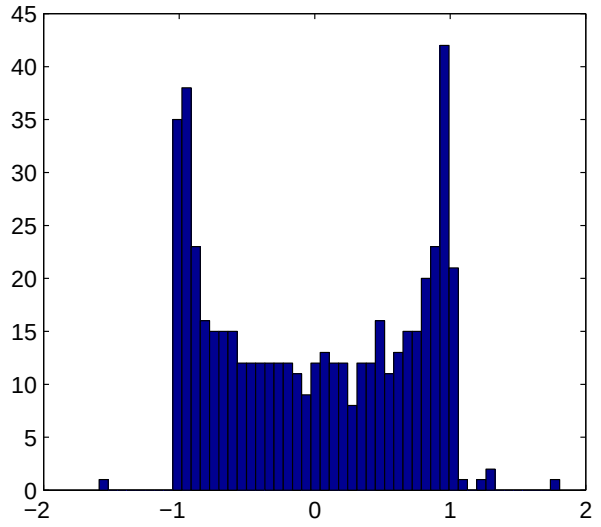
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

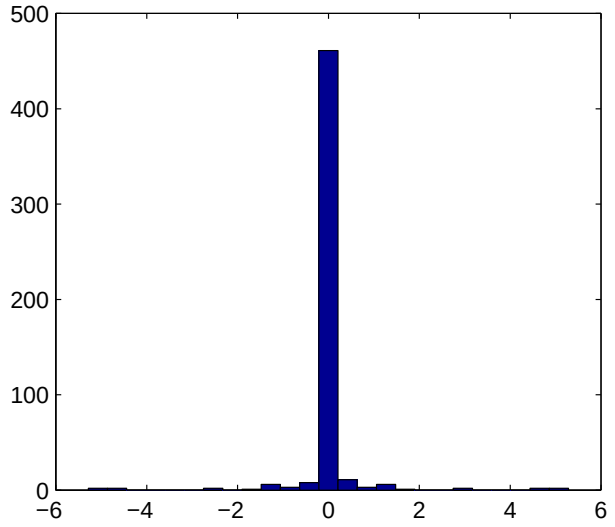
Signaux

Bruit

Débruitage



Signal temporel



Coefficients d'ondelette

- "coefficients de Dirac"
- énergie répartie sur l'ensemble des coefficients (échantillons)

Histogrammes

Signaux: rappels

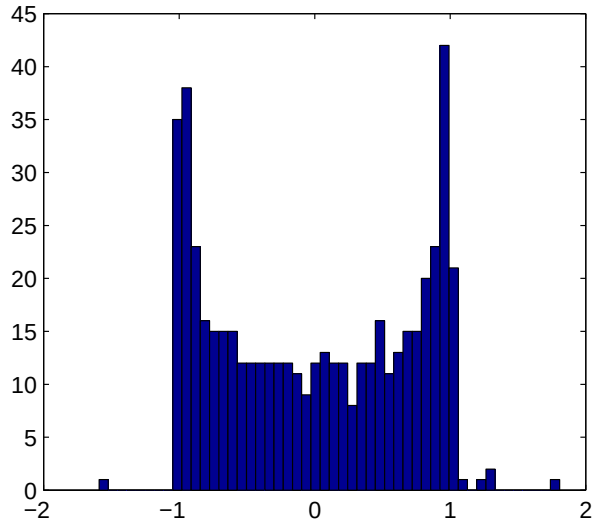
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

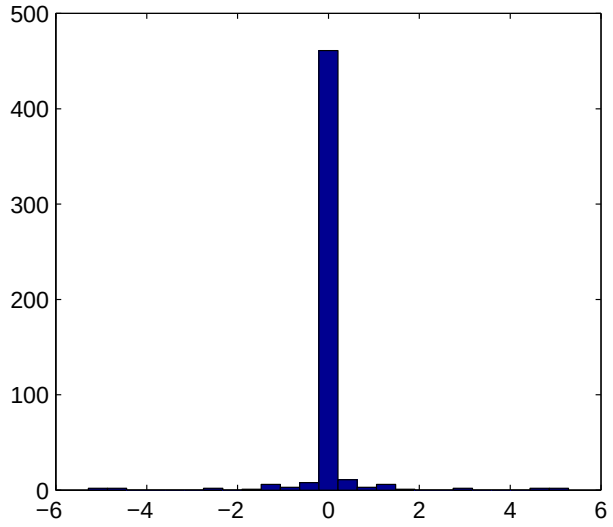
Signaux

Bruit

Débruitage



Signal temporel



Coefficients d'ondelette

- "coefficients de Dirac"
- énergie répartie sur l'ensemble des coefficients (échantillons)

- redistribution de l'énergie sur un nombre réduit de grands coefficients

Histogrammes

Signaux: rappels

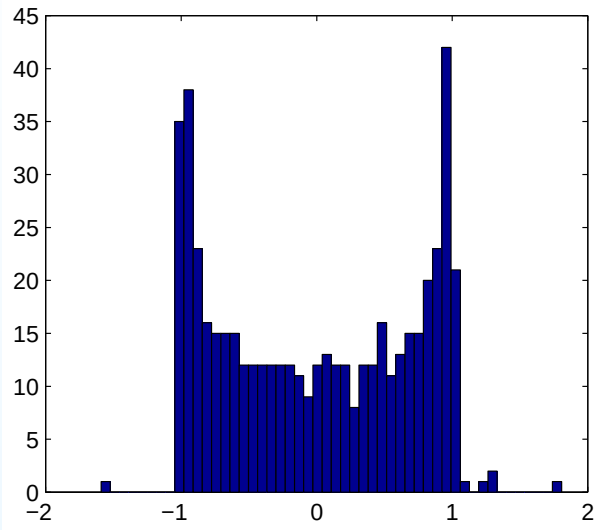
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

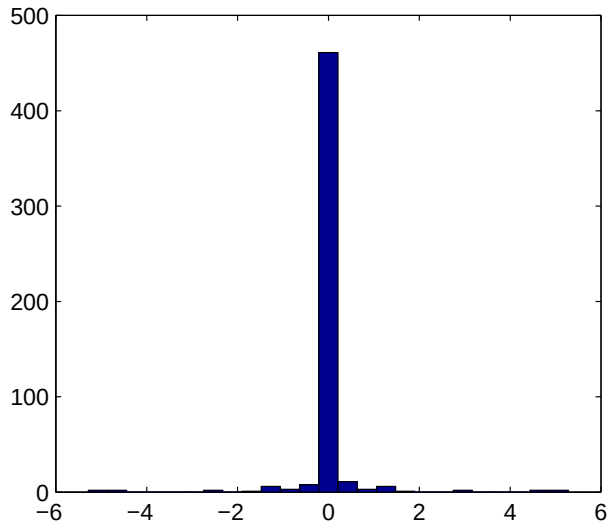
Signaux

Bruit

Débruitage



Signal temporel



Coefficients d'ondelette

- "coefficients de Dirac"
- énergie répartie sur l'ensemble des coefficients (échantillons)

- redistribution de l'énergie sur un nombre réduit de grands coefficients
- beaucoup de coefficients ≈ 0

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Conclusion

Principe de la compression avec pertes et du débruitage:

Décomposer un signal $x(k)$ sur une base orthonormée appropriée de dimension N revient à “redistribuer” l’énergie de ce signal parmi les fonctions constituant cette base.

Si la base est bien choisie, l’énergie se “concentre” dans peu de coefficients, qui correspondent aux fonctions de base qui “capturent” le mieux les caractéristiques du signal.

Supposons qu’on veut reconstruire une estimation du signal $\hat{x}(k)$ à partir d’un nombre réduit $P < N$ de coefficients de la décomposition.

Minimiser l’erreur quadratique moyenne et garder un maximum d’énergie $\Leftrightarrow$ choisir les P plus grands coefficients en valeur absolue.

Algorithme

Étapes:

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Algorithme

Étapes:

1. Décomposition sur une base orthogonale
   - choix de la base
   - si base d'ondelettes, choix de la profondeur

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Algorithme

Étapes:

1. Décomposition sur une base orthogonale
   - choix de la base
   - si base d'ondelettes, choix de la profondeur
2. Seuillage des coefficients de la décomposition
   - méthode de seuillage
   - calcul du seuil

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales
- Définitions
- Décomposition dyadique
- Interprétation matricielle
- Reconstruction partielle
- Conclusion

Signaux

Bruit

Débruitage

Algorithme

Étapes:

1. Décomposition sur une base orthogonale
   - choix de la base
   - si base d'ondelettes, choix de la profondeur
2. Seuillage des coefficients de la décomposition
   - méthode de seuillage
   - calcul du seuil
3. Reconstruction

Signaux

Introduction

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Objectifs:

- mettre en évidence la redistribution de l'énergie par décomposition orthonormée

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Introduction

Objectifs:

- mettre en évidence la redistribution de l'énergie par décomposition orthonormée
- mettre en évidence l'importance du choix de la base de décomposition par rapport aux caractéristiques des signaux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Introduction

Objectifs:

- mettre en évidence la redistribution de l'énergie par décomposition orthonormée
- mettre en évidence l'importance du choix de la base de décomposition par rapport aux caractéristiques des signaux
- montrer les avantages et les inconvénients de la reconstruction partielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Méthode

Déroulement:

1. Choix des signaux à traiter
   - signal sinusoïdal stationnaire
   - signal sinusoïdal non-stationnaire
   - signal réel non-stationnaire
   - **bruit**

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Méthode

Déroulement:

1. Choix des signaux à traiter
   - signal sinusoïdal stationnaire
   - signal sinusoïdal non-stationnaire
   - signal réel non-stationnaire
   - **bruit**
2. Choix des bases de décomposition
   - exponentielles complexes (Fourier)
   - ondelettes orthonormées (’symlets8’)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Méthode

Déroulement:

1. Choix des signaux à traiter
   - signal sinusoïdal stationnaire
   - signal sinusoïdal non-stationnaire
   - signal réel non-stationnaire
   - **bruit**
2. Choix des bases de décomposition
   - exponentielles complexes (Fourier)
   - ondelettes orthonormées (’symlets8’)
3. Seuillage
   - méthode: seuillage global des coefficients
   - seuil: on garde 10% des coefficients (les plus grands en module)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Méthode

Déroulement:

1. Choix des signaux à traiter
   - signal sinusoïdal stationnaire
   - signal sinusoïdal non-stationnaire
   - signal réel non-stationnaire
   - **bruit**
2. Choix des bases de décomposition
   - exponentielles complexes (Fourier)
   - ondelettes orthonormées (’symlets8’)
3. Seuillage
   - méthode: seuillage global des coefficients
   - seuil: on garde 10% des coefficients (les plus grands en module)
4. Reconstruction

Signal sinusoïdal stationnaire

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

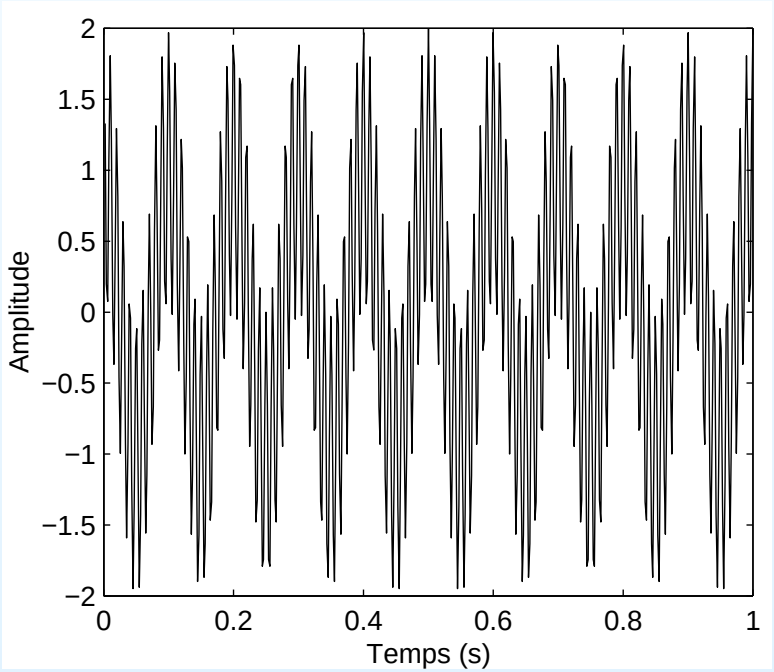
Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

- signal stationnaire d'une durée égale à une seconde, échantillonné en N points ($f_e = 1/N$) et construit comme une somme de deux cosinus de fréquences f_1, f_2 différentes.
- l'énergie du signal $E = 1$.

$$s_s(k) = s_1(k) + s_2(k) = \cos(2\pi f_1 \frac{k}{N}) + \cos(2\pi f_2 \frac{k}{N}). \quad (14)$$



Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

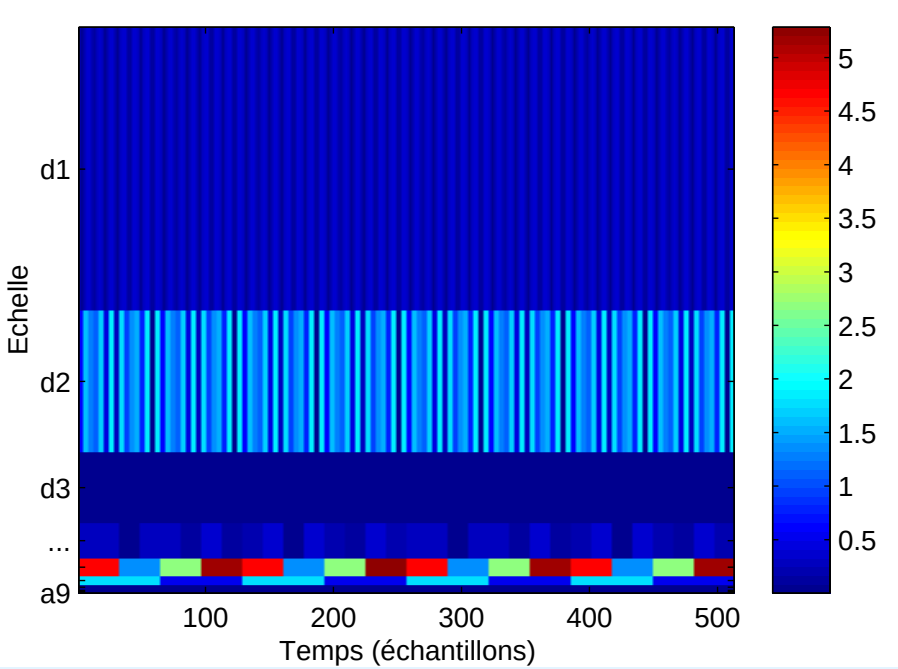
Débruitage

Transformée en ondelettes

La décomposition du signal sur une base d'ondelettes 'sym8' s'écrit:

$$s_s(k) = \sum_{j,p} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}(k) + \sum_{p} w^{M+1,p_M} \phi_{M,p_M}(k). \qquad (15)$$

avec w^{j,p_j} les coefficients d'ondelette.



Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

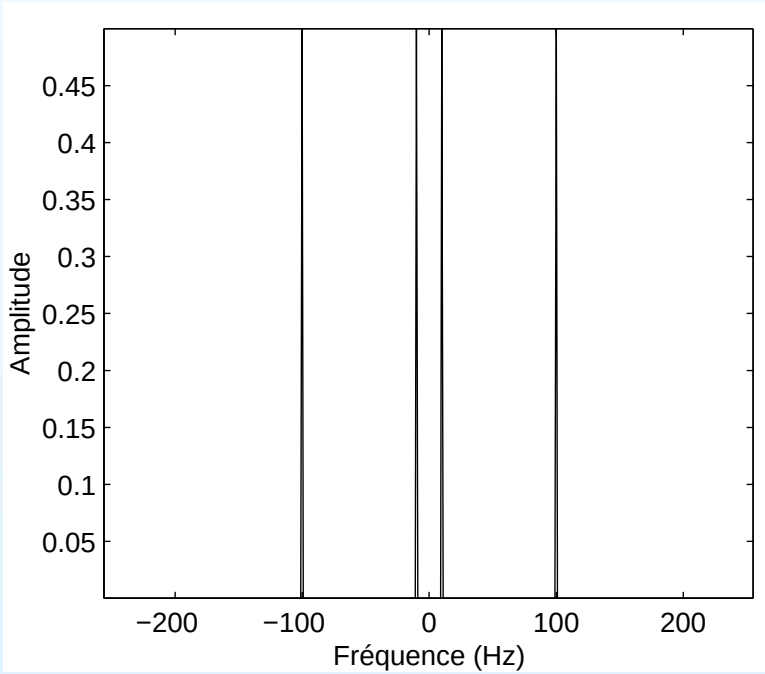
Transformée de Fourier

La décomposition du signal sur une base d'exponentielles complexes s'écrit:

$$s_s(k) = \sum_{f=0}^{N-1} S(f) e^{2\pi j f \frac{k}{N}}, \text{ avec} \qquad (16)$$

$$S(f) = \langle s_s(k), e^{-2\pi j f \frac{k}{N}} \rangle,$$

le produit scalaire entre le signal et les fonctions de base.



Reconstruction partielle

- 10% des coefficients

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Reconstruction partielle

- 10% des coefficients

Signaux: rappels

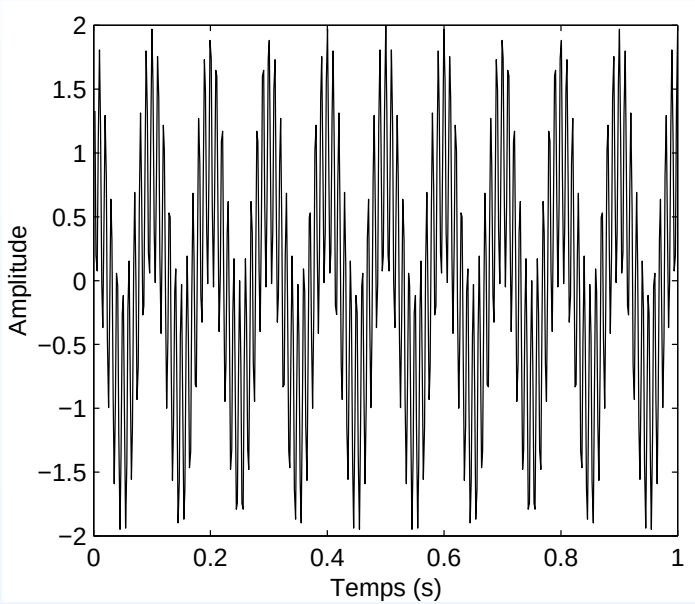
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage



Fourier

Reconstruction partielle

- 10% des coefficients

Signaux: rappels

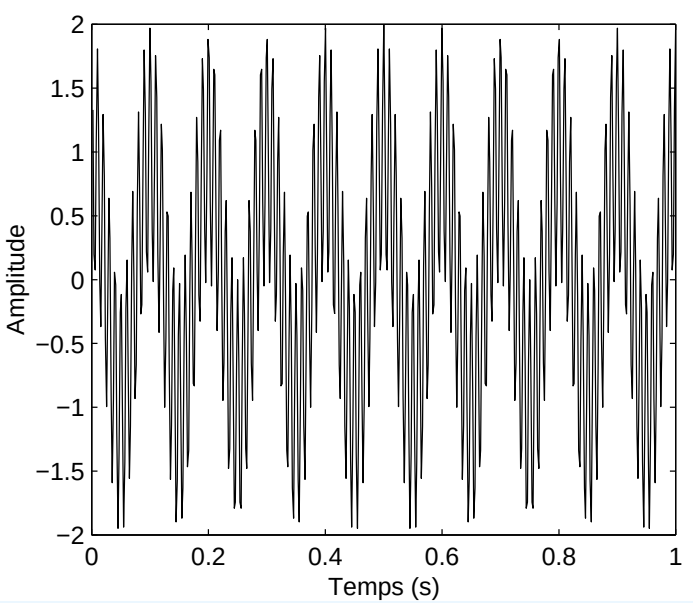
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage



Fourier

- reconstruction parfaite (EQM=0)

Reconstruction partielle

- 10% des coefficients

Signaux: rappels

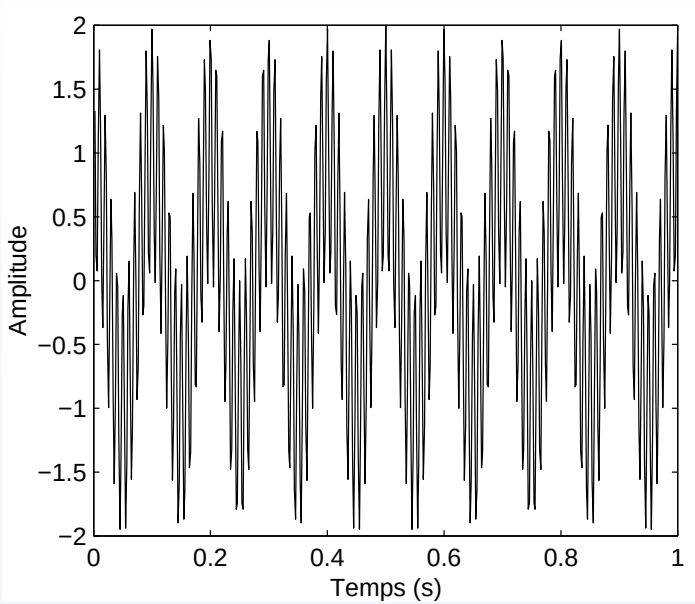
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage



Fourier

- reconstruction parfaite (EQM=0)
- excellente efficacité pour les signaux sinusoïdaux stationnaires

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

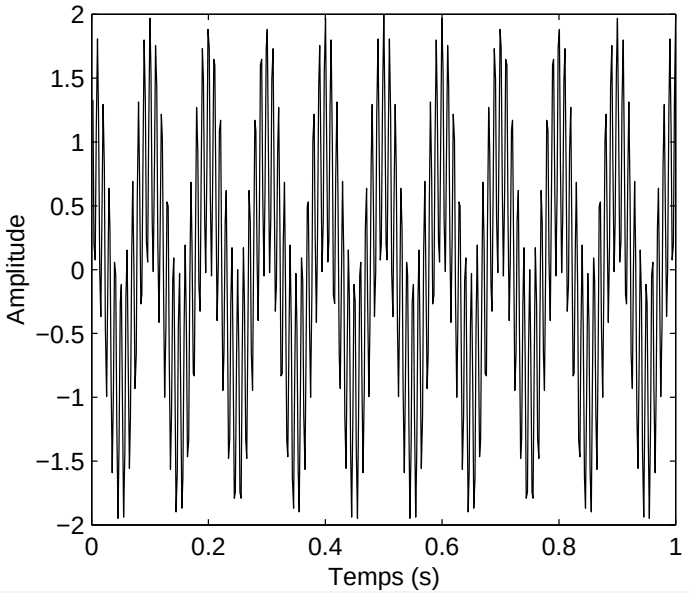
Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

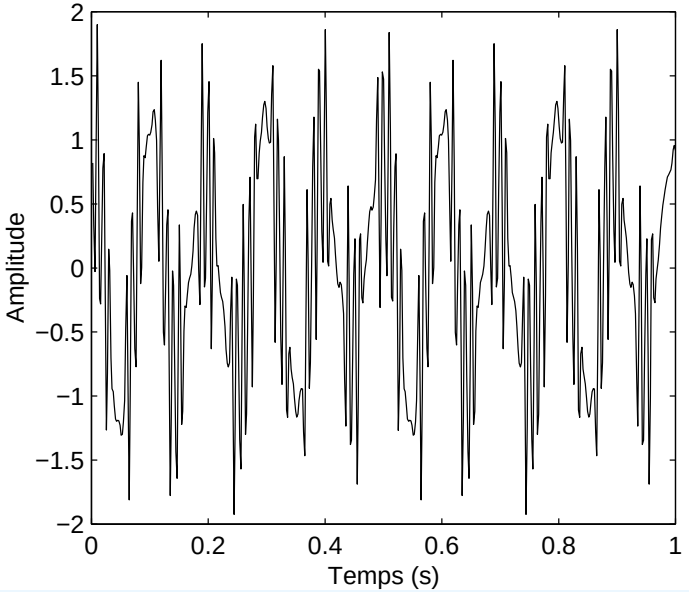
Débruitage

Reconstruction partielle

- 10% des coefficients



Fourier



Ondelettes

- reconstruction parfaite (EQM=0)
- excellente efficacité pour les signaux sinusoïdaux stationnaires

Reconstruction partielle

- 10% des coefficients

Signaux: rappels

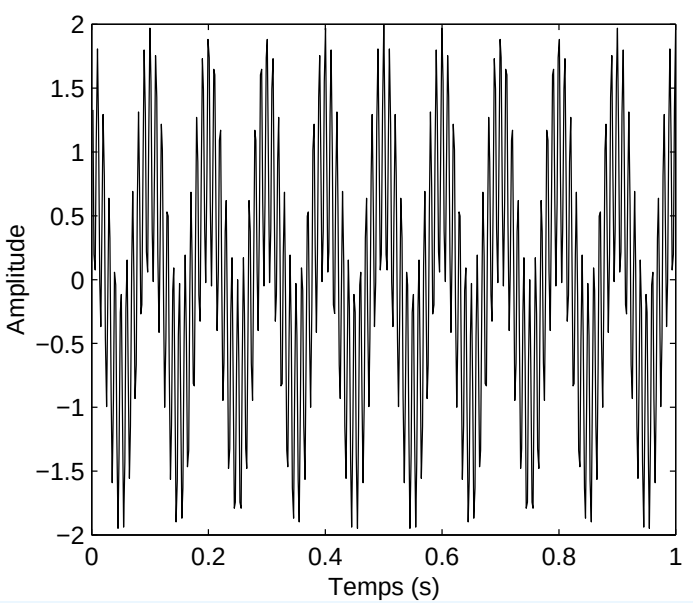
Représentation des signaux non-stationnaires

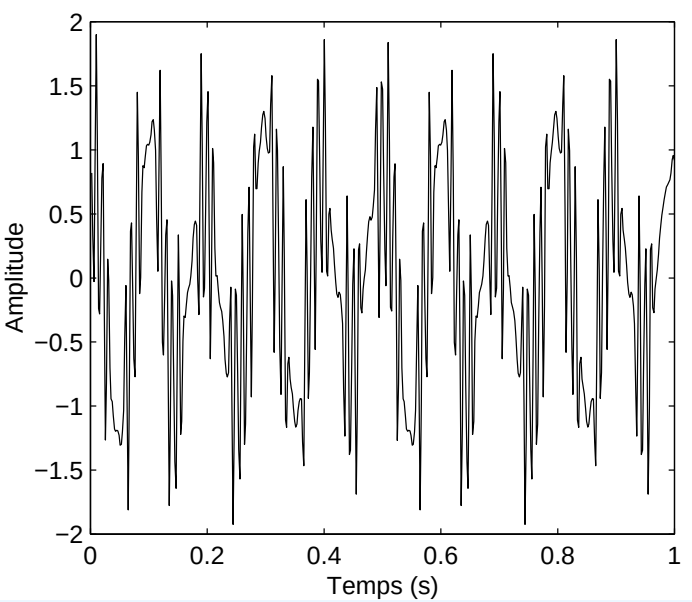
Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage





Fourier

- reconstruction parfaite (EQM=0)
- excellente efficacité pour les signaux sinusoïdaux stationnaires

Ondelettes

- reconstruction approximative (EQM=0.29, 71% de l'énergie préservée)

Reconstruction partielle

- 10% des coefficients

Signaux: rappels

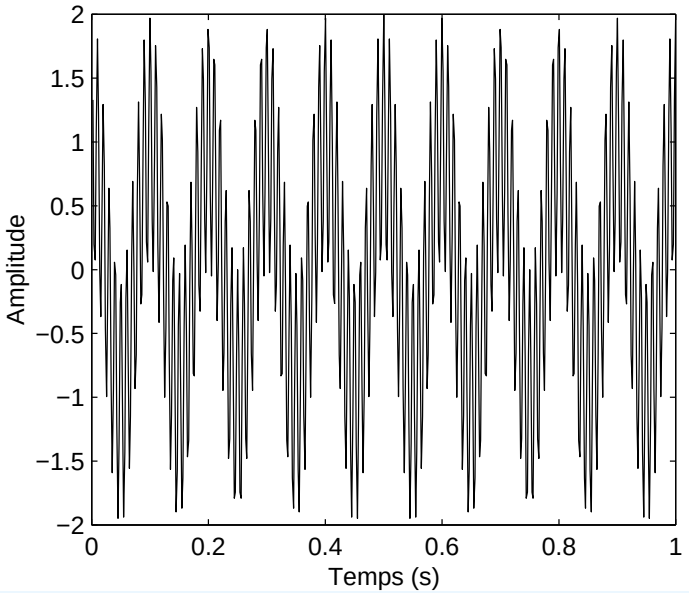
Représentation des signaux non-stationnaires

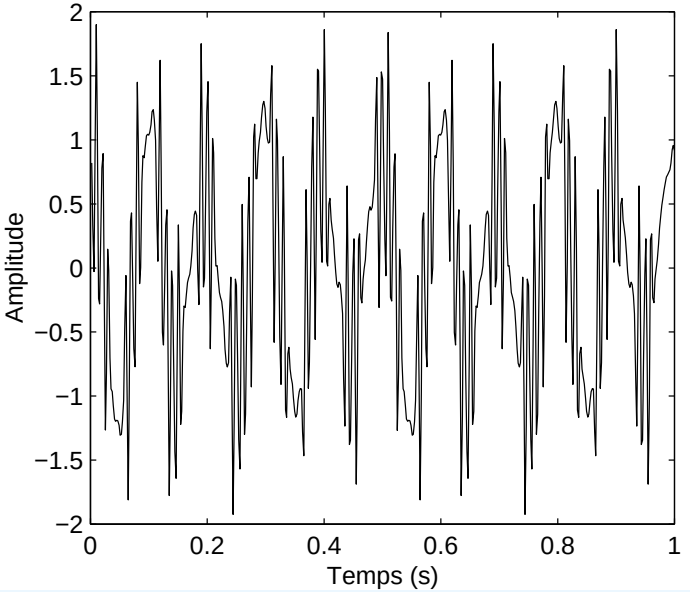
Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage





Fourier

- reconstruction parfaite (EQM=0)
- excellente efficacité pour les signaux sinusoïdaux stationnaires

Ondelettes

- reconstruction approximative (EQM=0.29, 71% de l'énergie préservée)
- efficacité moyenne

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

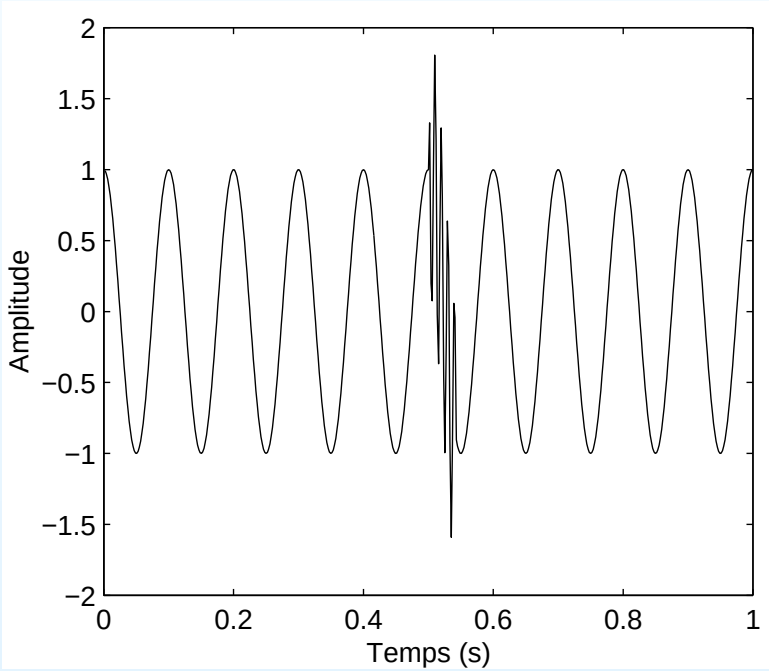
Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Signal sinusoïdal non-stationnaire

- les deux mêmes cosinus que dans le premier exemple (éq. 14), mais le signal haute-fréquence est multiplié par une fonction porte afin de ne garder que 5% de sa durée $\Rightarrow$ transitoire non-stationnaire superposé sur le signal stationnaire basse-fréquence.
- l'énergie du signal $E = 0,52$



Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

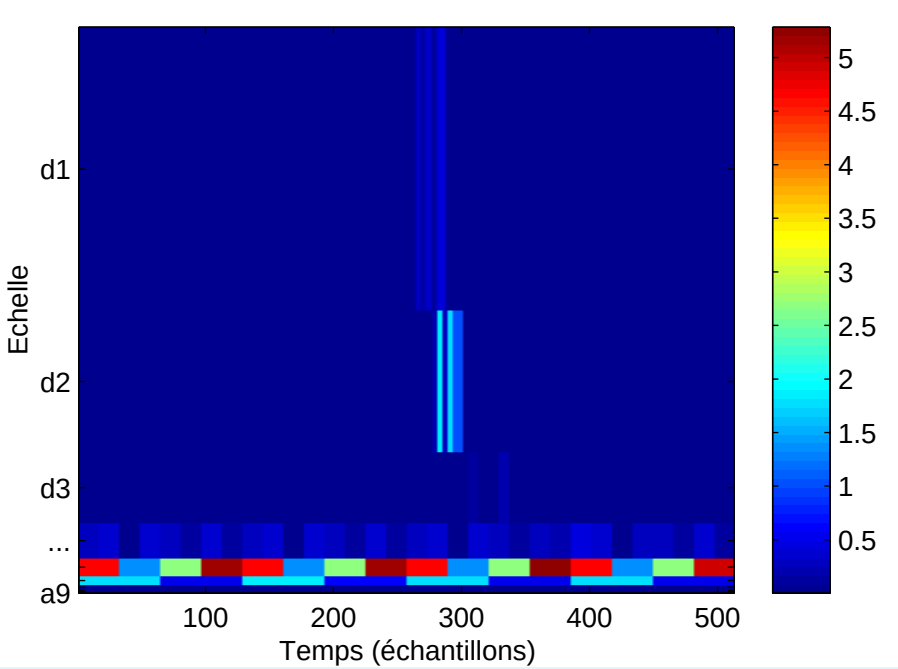
Débruitage

Transformée en ondelettes

La décomposition du signal sur une base d'ondelettes 'sym8' s'écrit:

$$s_s(k) = \sum_{j,p} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}(k) + \sum_{p} w^{M+1,p_M} \phi_{M,p_M}(k). \qquad (17)$$

avec w^{j,p_j} les coefficients d'ondelette.



Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

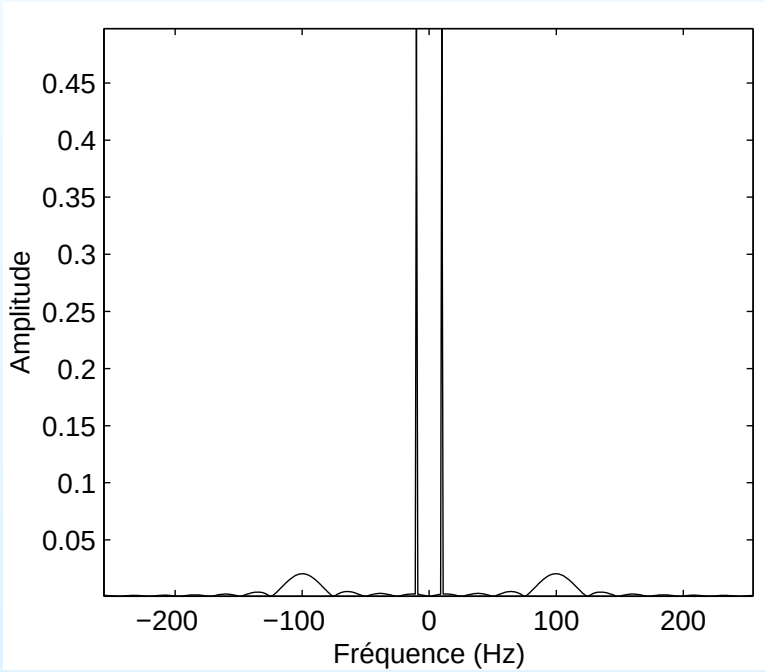
Transformée de Fourier

La décomposition du signal sur une base d'exponentielles complexes s'écrit:

$$s_s(k) = \sum_{f=0}^{N-1} S(f) e^{2\pi j f \frac{k}{N}}, \text{ avec} \qquad (18)$$

$$S(f) = \langle s_s(k), e^{-2\pi j f \frac{k}{N}} \rangle,$$

le produit scalaire entre le signal et les fonctions de base.



Reconstruction partielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

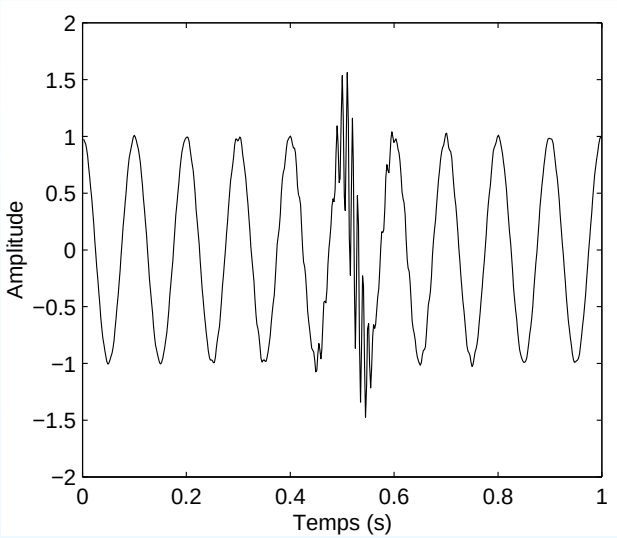
Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

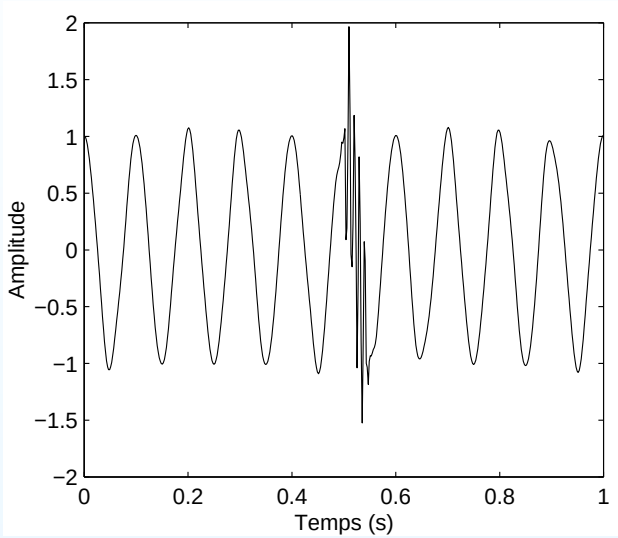
Bruit

Débruitage

Fourier (EQM=0,004)



Ondelettes (EQM=0,001)



reconstructions temporelles

Reconstruction partielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

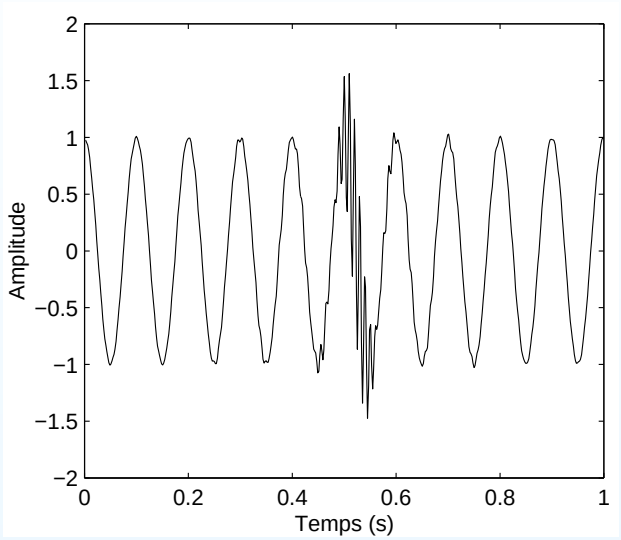
Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

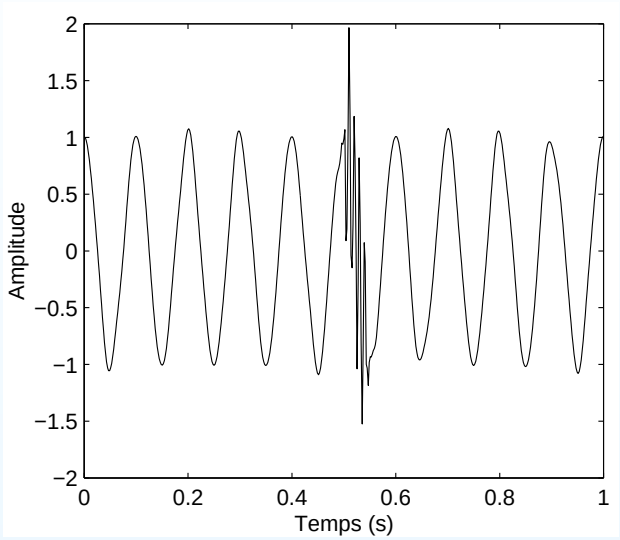
Bruit

Débruitage

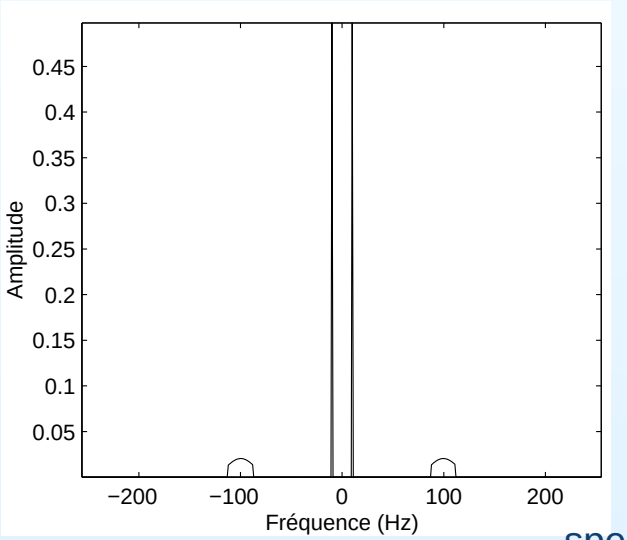
Fourier (EQM=0,004)

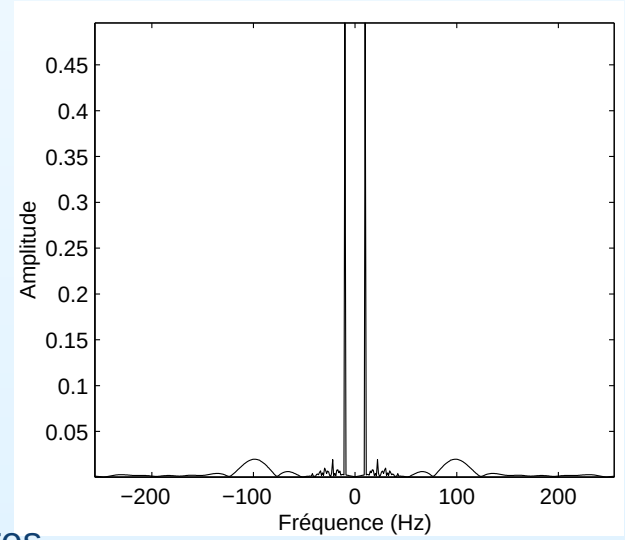


Ondelettes (EQM=0,001)



reconstructions temporelles

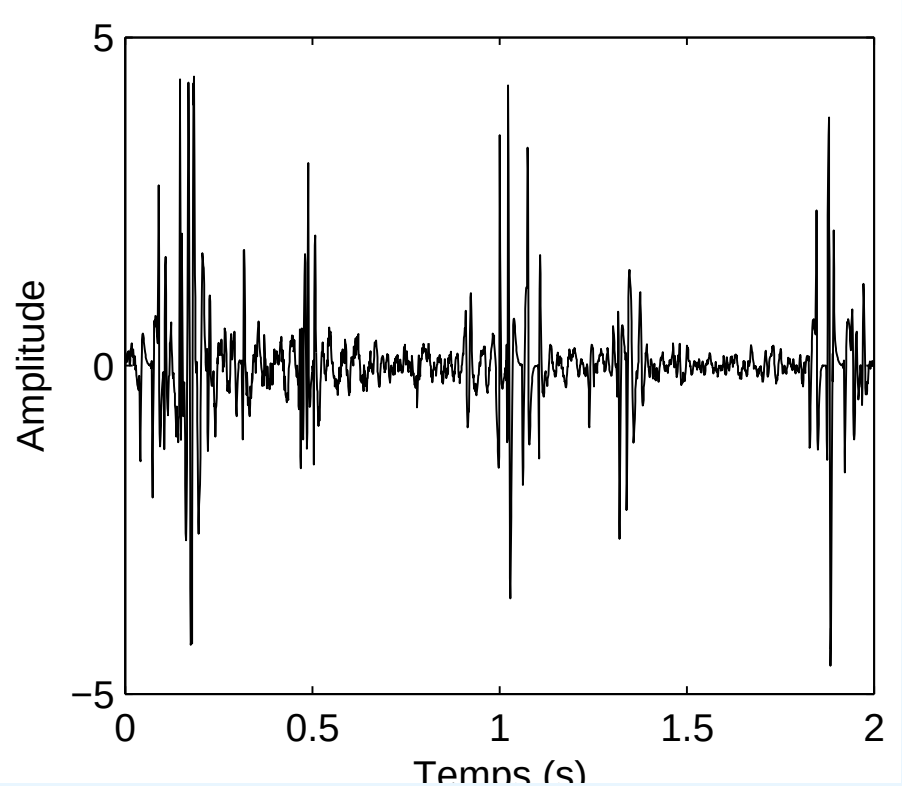




spectres

Signal réel non-stationnaire

- signal sonore cardiaque



Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

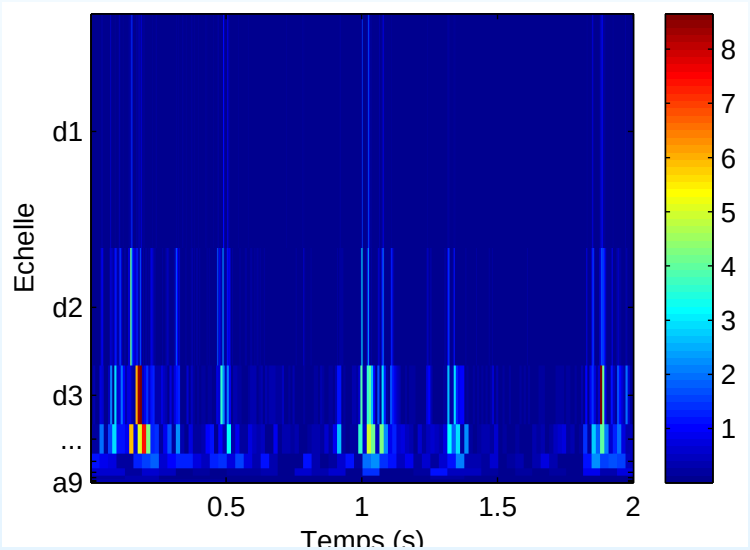
Débruitage

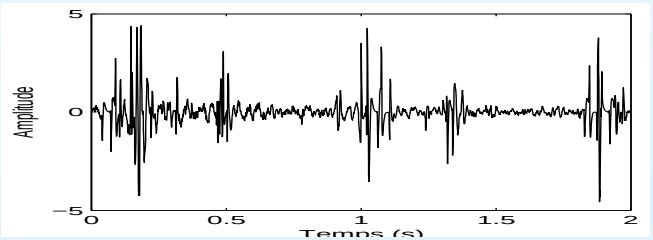
Transformée en ondelettes

La décomposition du signal sur une base d'ondelettes 'sym8' s'écrit:

$$s_s(k) = \sum_{j,p} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}(k) + \sum_{p} w^{M+1,p_M} \phi_{M,p_M}(k). \qquad (19)$$

avec w^{j,p_j} les coefficients d'ondelette (Mallat).





Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

Bruit

Débruitage

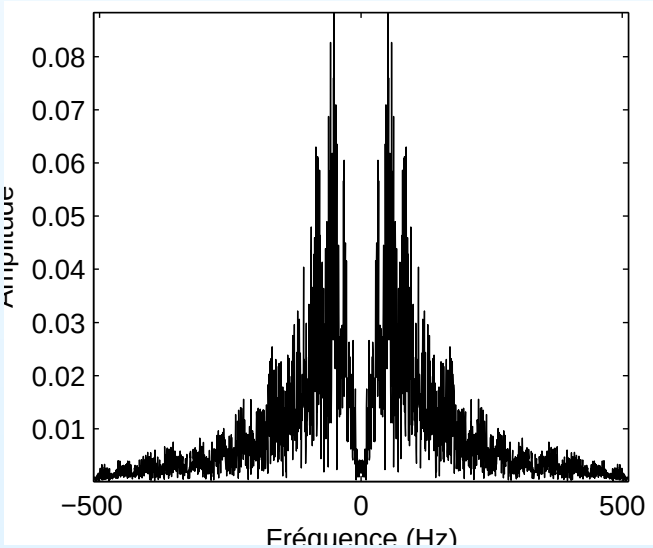
Transformée de Fourier

La décomposition du signal sur une base d'exponentielles complexes s'écrit:

$$s_s(k) = \sum_{f=0}^{N-1} S(f) e^{2\pi j f \frac{k}{N}}, \text{ avec} \qquad (20)$$

$$S(f) = \langle s_s(k), e^{-2\pi j f \frac{k}{N}} \rangle,$$

le produit scalaire entre le signal et les fonctions de base.



Histogrammes

Distribution des coefficients des deux bases:

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

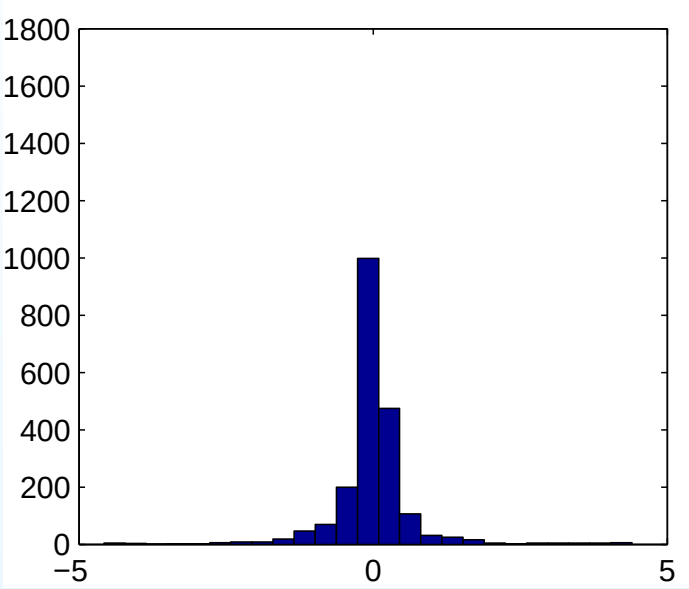
Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

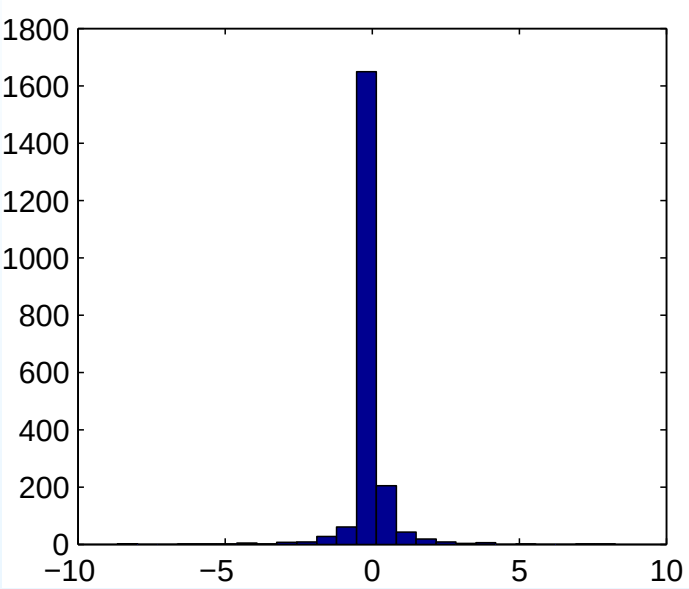
Bruit

Débruitage

Dirac



Ondelettes



Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

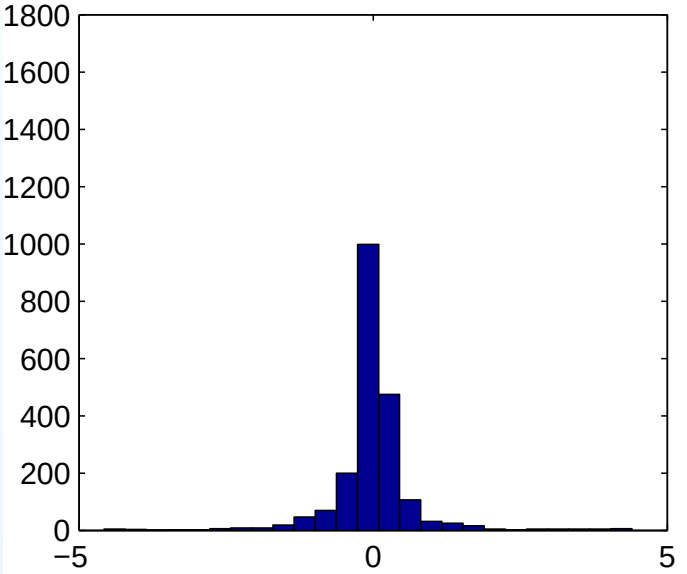
Bruit

Débruitage

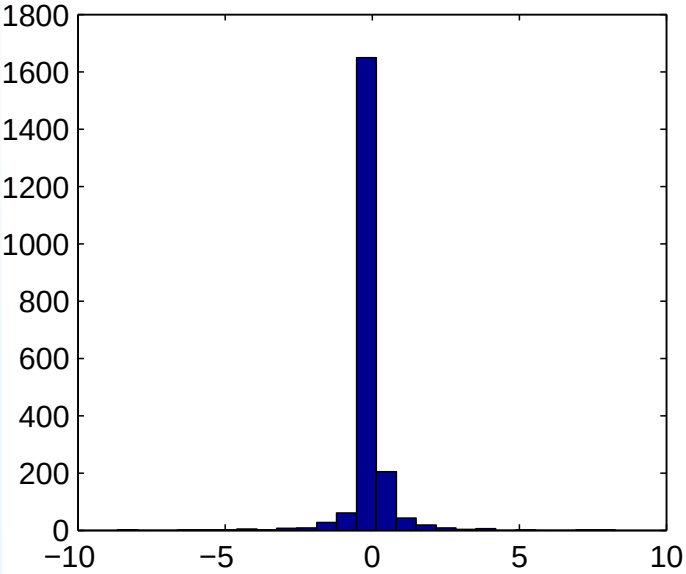
Histogrammes

Distribution des coefficients des deux bases:

Dirac



Ondelettes



- environ la moitié des échantillons ≈ 0

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

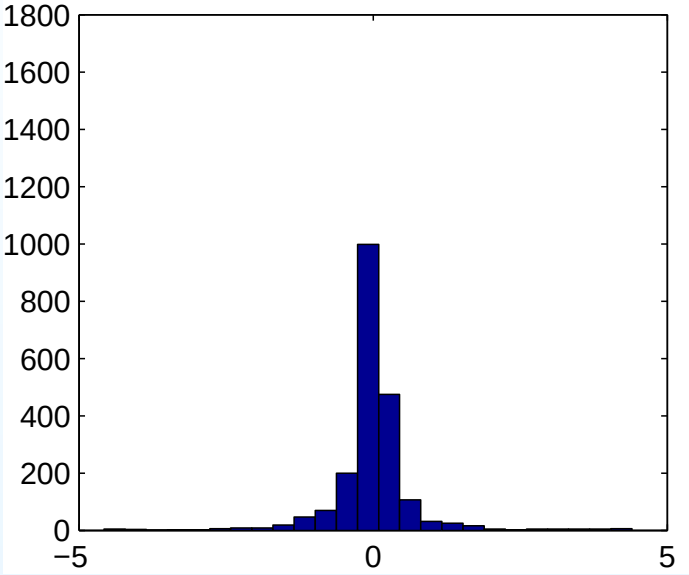
Bruit

Débruitage

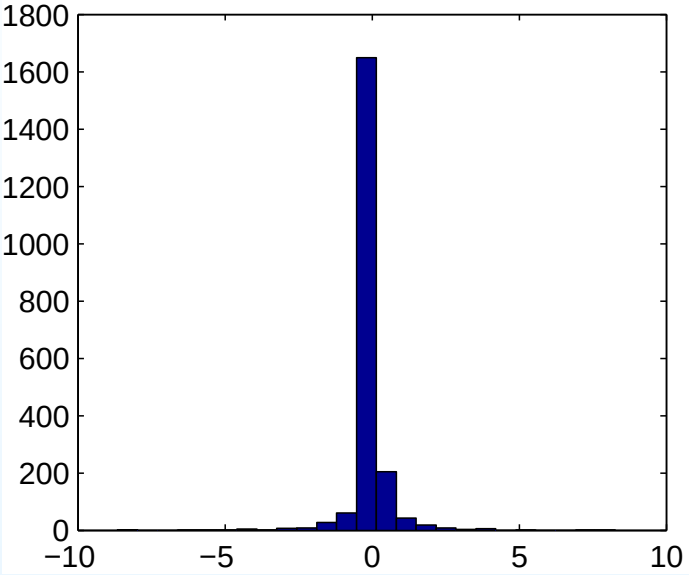
Histogrammes

Distribution des coefficients des deux bases:

Dirac



Ondelettes



- environ la moitié des échantillons ≈ 0
- plage relativement réduite entre min et max

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

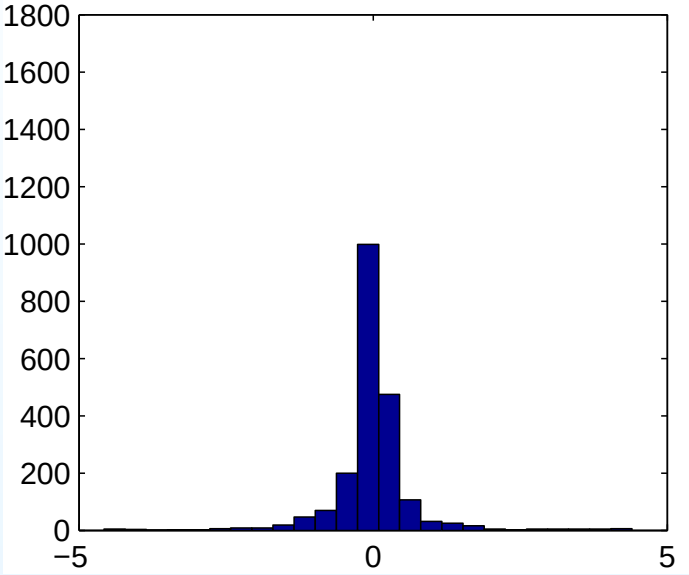
Bruit

Débruitage

Histogrammes

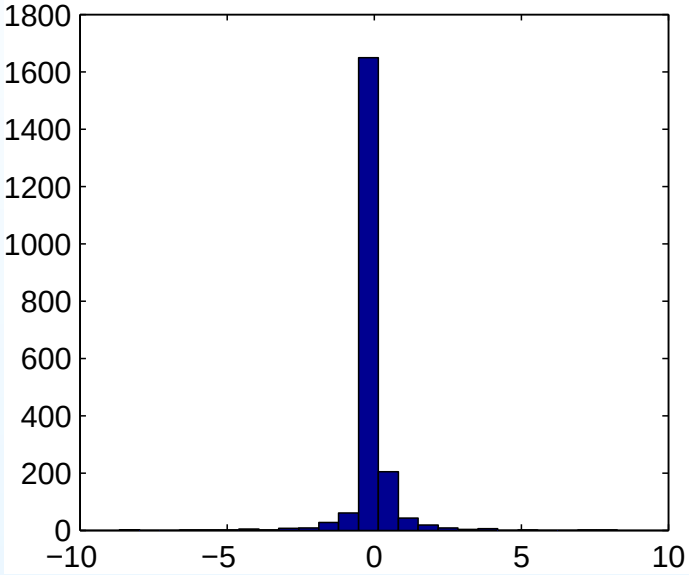
Distribution des coefficients des deux bases:

Dirac



- environ la moitié des échantillons ≈ 0
- plage relativement réduite entre min et max

Ondelettes



- plus de 80% des coefficients ≈ 0

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

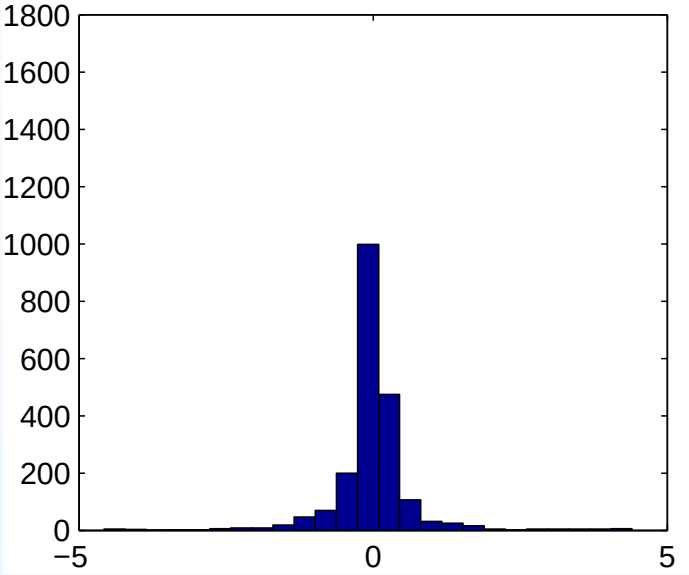
Bruit

Débruitage

Histogrammes

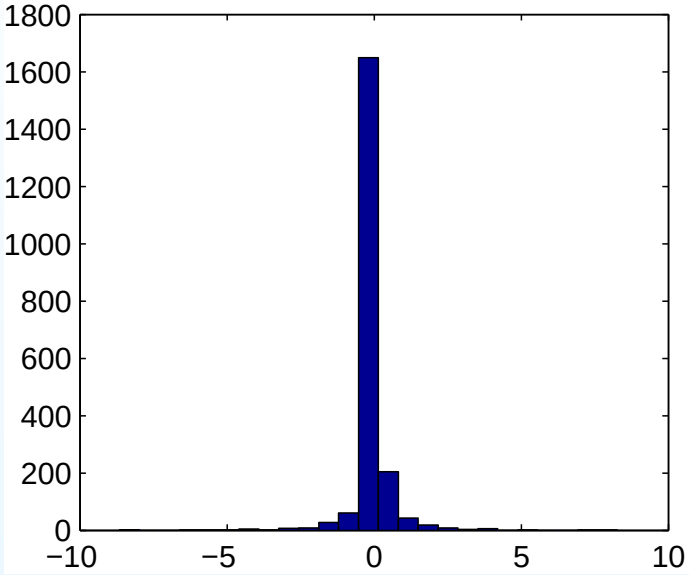
Distribution des coefficients des deux bases:

Dirac



- environ la moitié des échantillons ≈ 0
- plage relativement réduite entre min et max

Ondelettes



- plus de 80% des coefficients ≈ 0
- plage plus large entre le min et le max

Reconstruction partielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

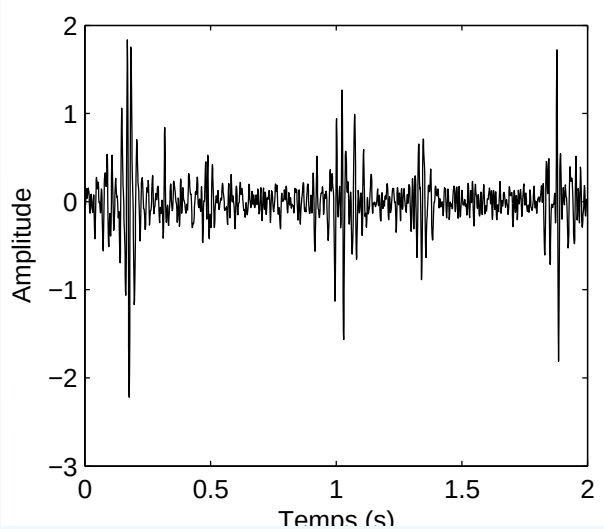
Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

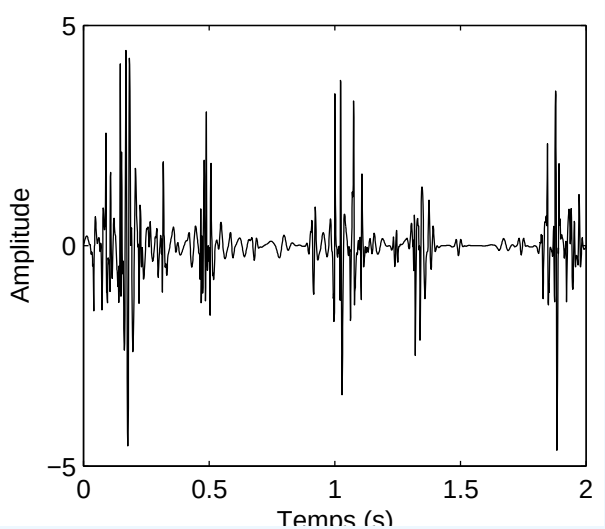
Bruit

Débruitage

Fourier (10%)



Ondelettes (10%)



reconstructions temporelles

Reconstruction partielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

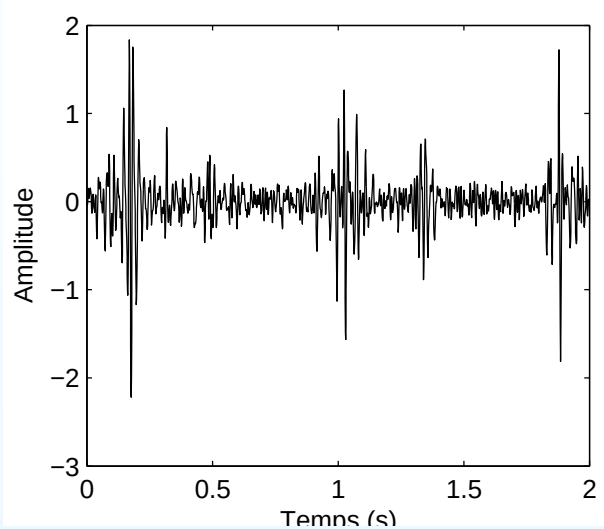
Ondelettes orthogonales

Signaux
- Introduction
- Signal stationnaire
- Signal non-stationnaire
- Signal réel

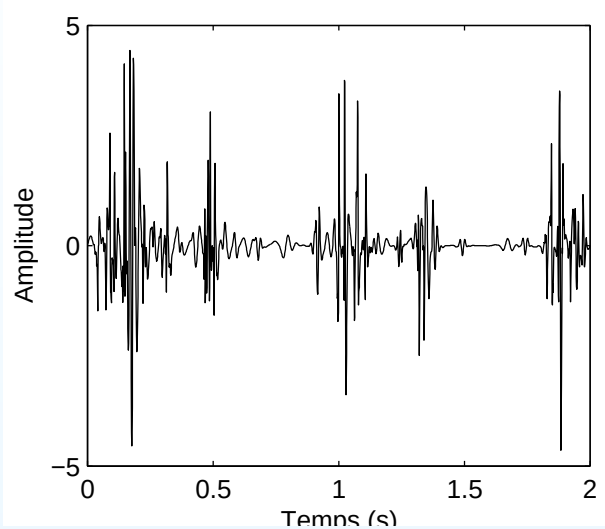
Bruit

Débruitage

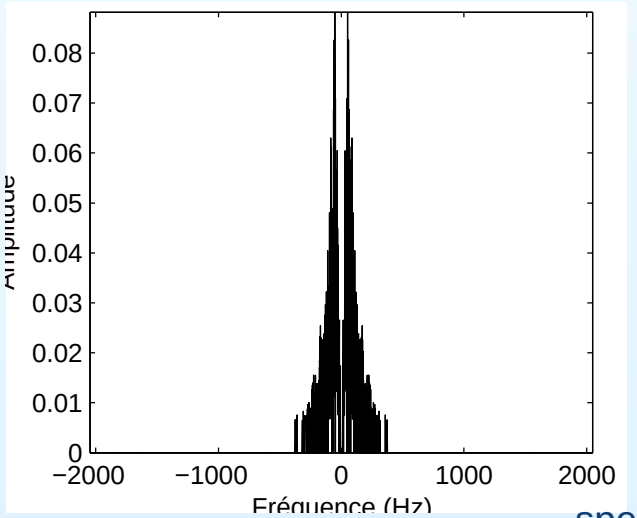
Fourier (10%)

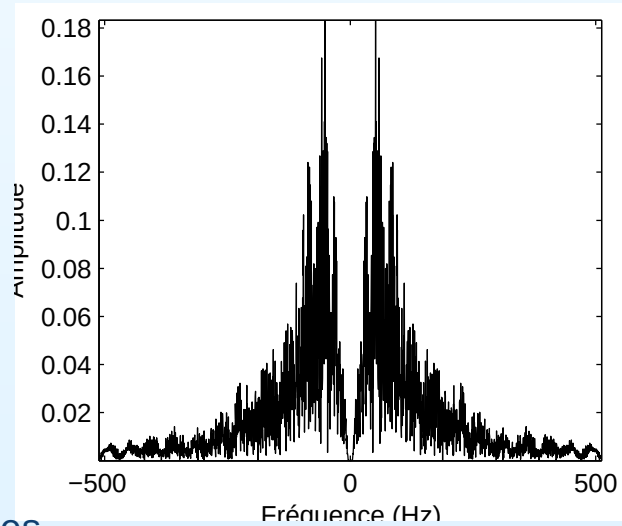


Ondelettes (10%)



reconstructions temporelles





spectres

Reconstruction partielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

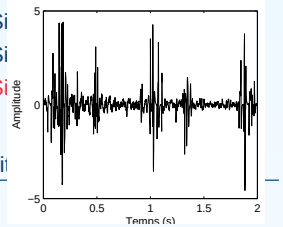
Ondelettes orthogonales

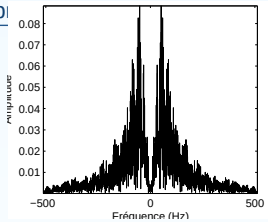
Signaux

- Introduction
- Si
- Si
- Si

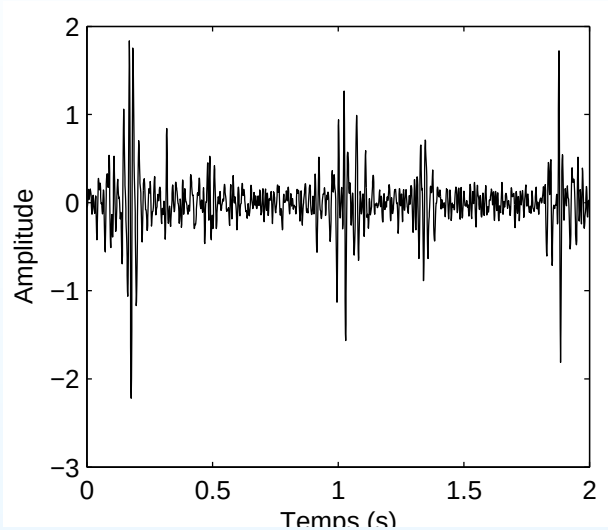
Bruit

Débr

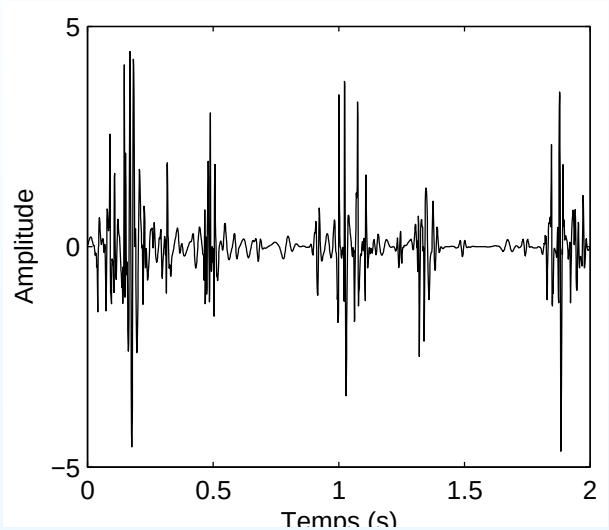




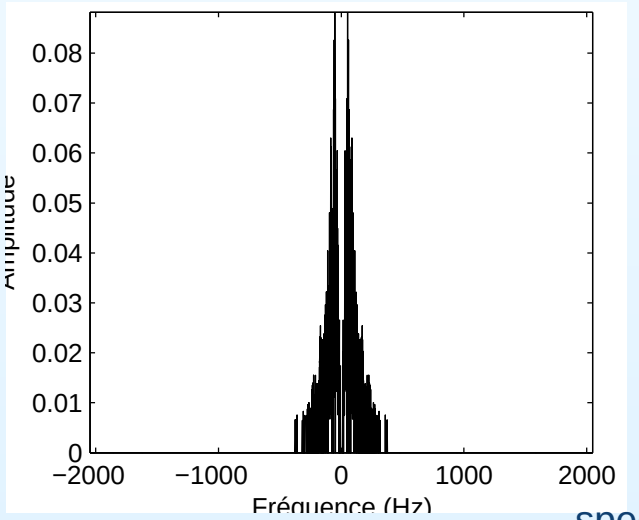
Fourier (10%)

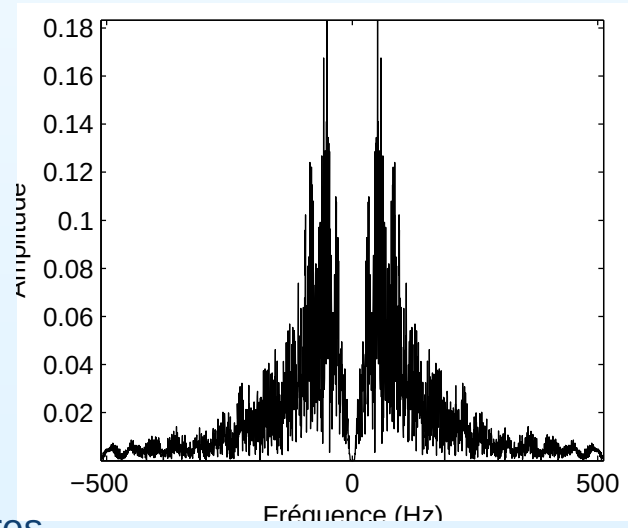


Ondelettes (10%)



reconstructions temporelles





spectres

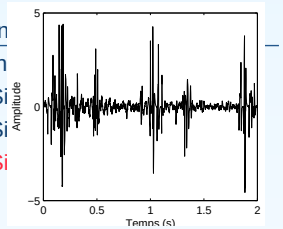
Reconstruction partielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

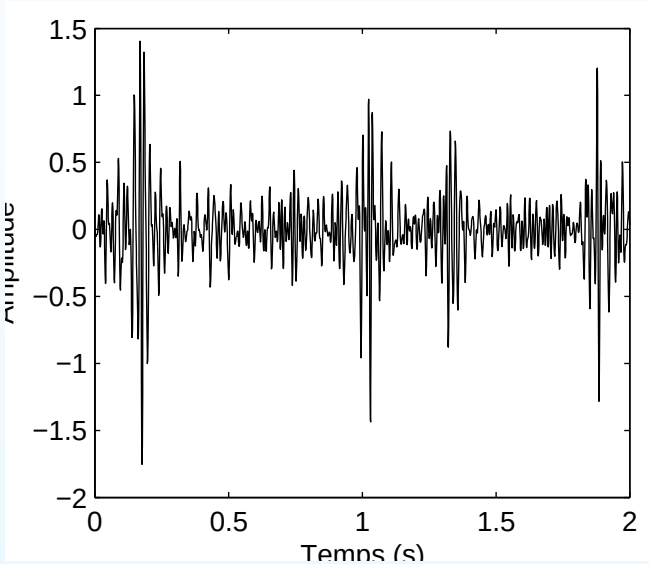
Sign
- In
- Si
- Si
- Si



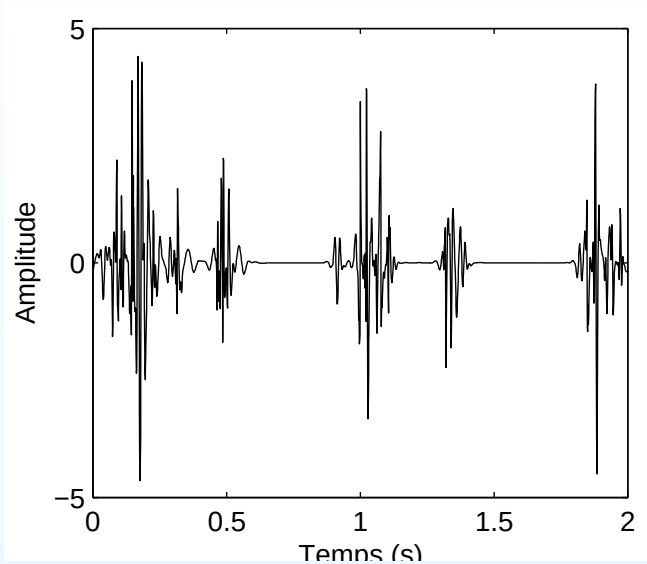
Bruit

Débruitage

Fourier (5%)



Ondelettes (5%)



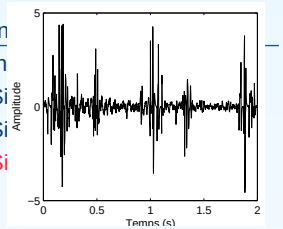
Reconstruction partielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

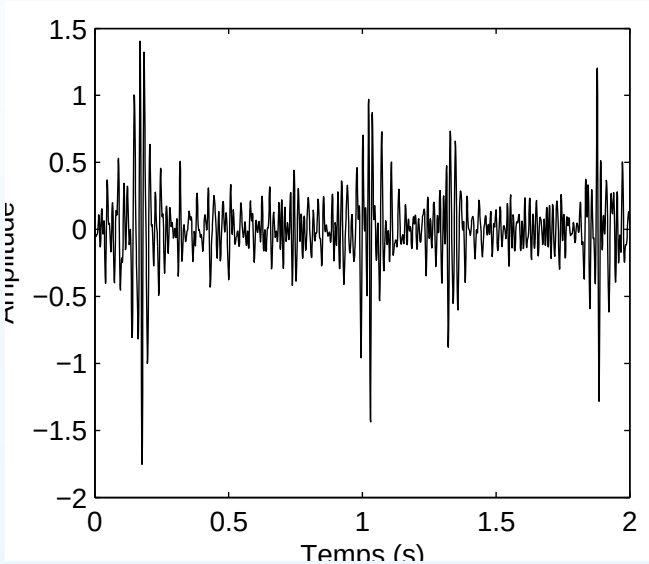
Sign
- In
- Si
- Si
- Si



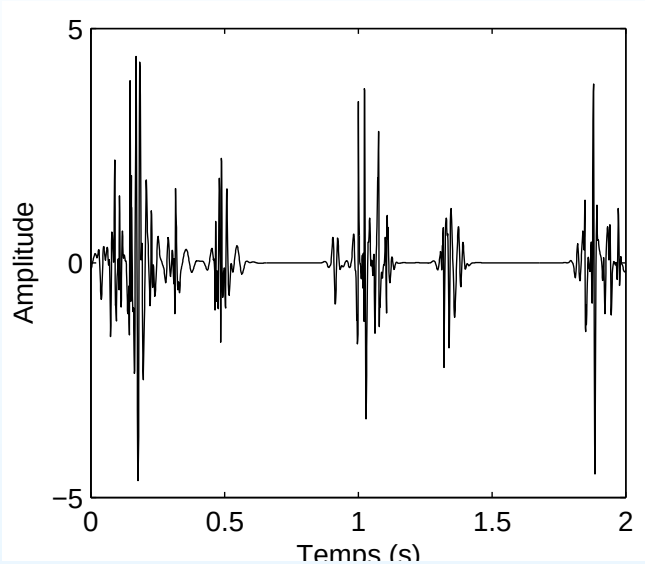
Bruit

Débruitage

Fourier (5%)



Ondelettes (5%)



- transformée en ondelettes nettement plus efficace
  - signal préservé même à 5% des coefficients
  - quasiment sans déformation pour le signal d'intérêt

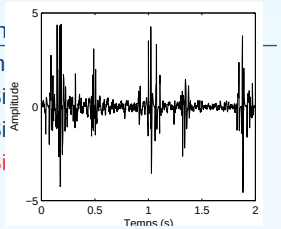
Reconstruction partielle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

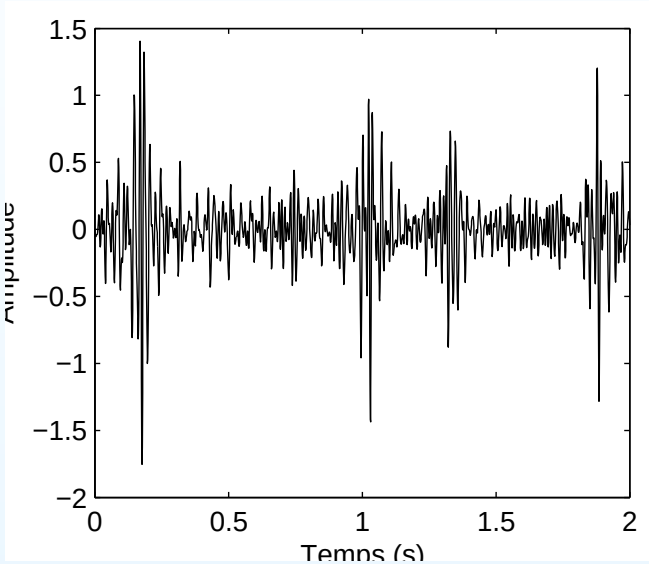
Sign
- In
- Si
- Si
- Si



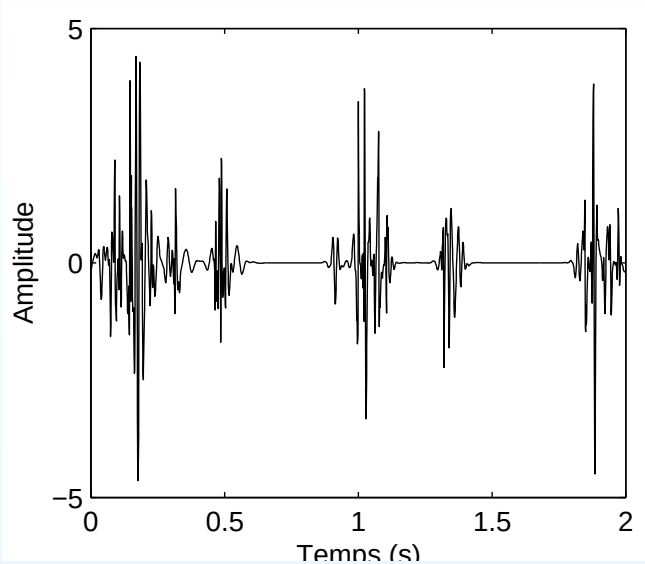
Bruit

Débruitage

Fourier (5%)



Ondelettes (5%)



- transformée en ondelettes nettement plus efficace
  - signal préservé même à 5% des coefficients
  - quasiment sans déformation pour le signal d'intérêt
- "préférence" pour le signal informatif
  - par compression on élimine d'abord le bruit !

Bruit

Définition

Signaux: rappels

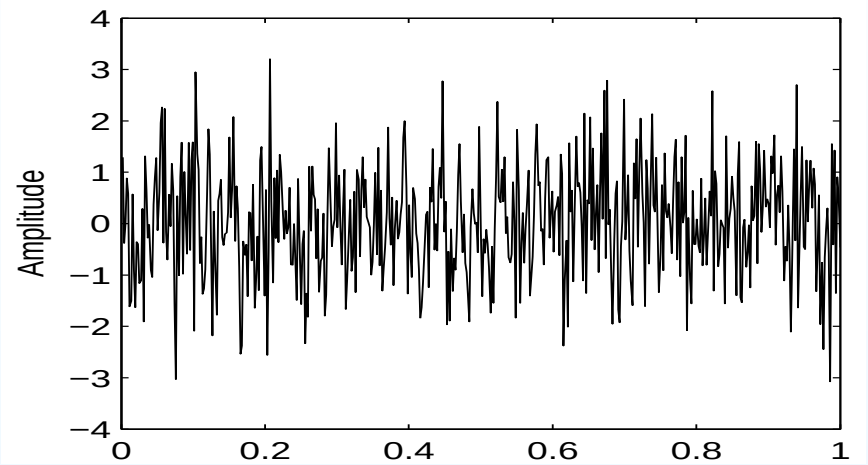
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage



Qu'est ce que c'est le bruit ?

- Définition problématique

Définition

Signaux: rappels

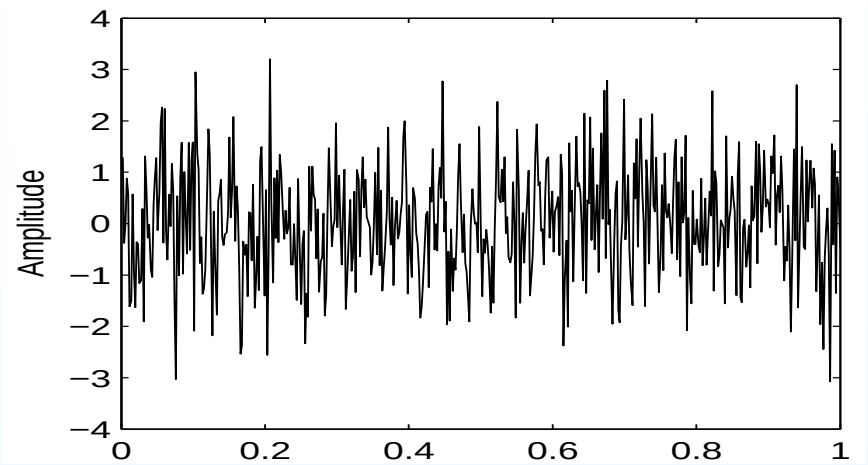
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage



Qu'est ce que c'est le bruit ?

- Définition problématique
- Modèle: vecteur aléatoire $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_N]^T \rightarrow$ chaque échantillon est une variable aléatoire x_k

Définition

Signaux: rappels

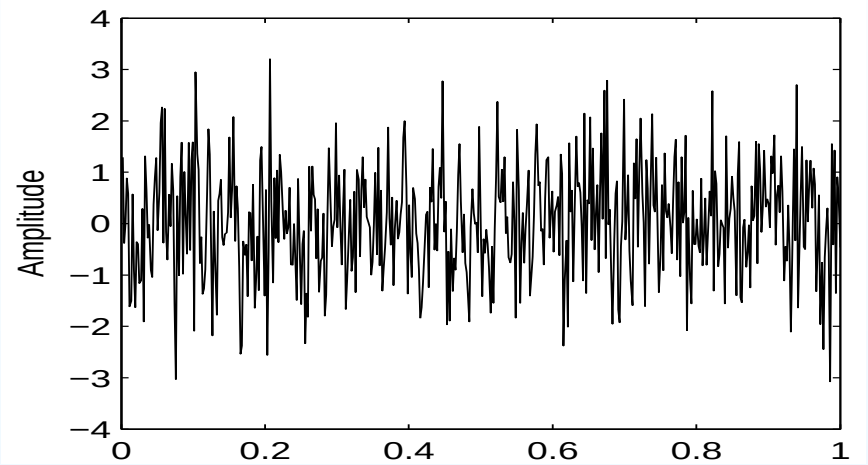
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage



Qu'est ce que c'est le bruit ?

- Définition problématique
- Modèle: vecteur aléatoire $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_N]^T \rightarrow$ chaque échantillon est une variable aléatoire x_k
  - même loi de probabilité: bruit stationnaire

Définition

Signaux: rappels

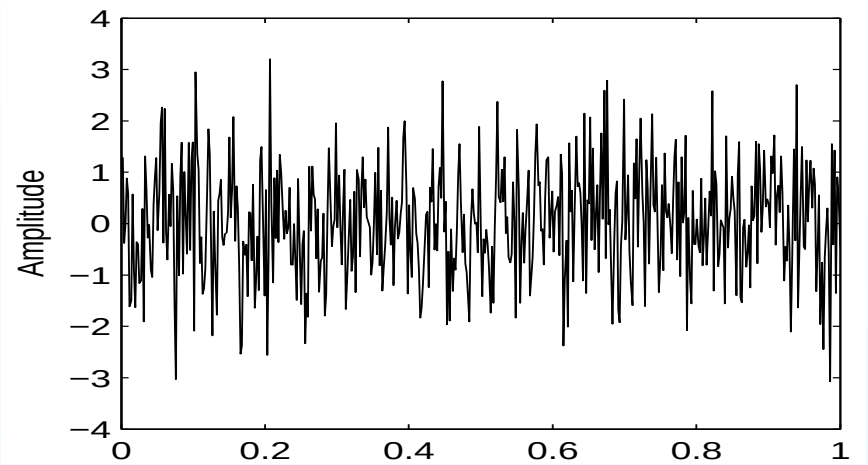
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage



Qu'est ce que c'est le bruit ?

- Définition problématique
- Modèle: vecteur aléatoire $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_N]^T \rightarrow$ chaque échantillon est une variable aléatoire x_k
  - même loi de probabilité: bruit stationnaire
  - variables indépendantes: bruit blanc

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

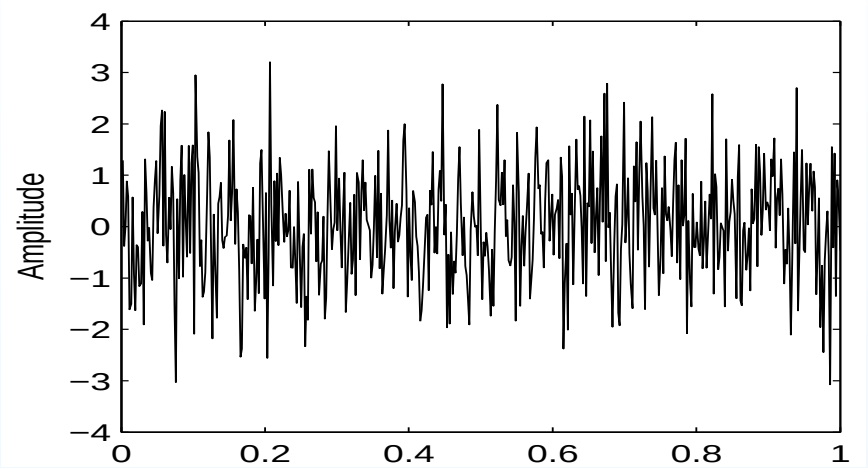
Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Définition



Qu'est ce que c'est le bruit ?

- Définition problématique
- Modèle: vecteur aléatoire $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_N]^T \rightarrow$ chaque échantillon est une variable aléatoire x_k
  - même loi de probabilité: bruit stationnaire
  - variables indépendantes: bruit blanc

Problème:

Comment le bruit se comporte par transformation linéaire et en particulier par projection sur une base orthonormée?

Propriétés statistiques

Caractérisation vecteur aléatoire x

- loi de probabilité $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$

Signaux: rappels
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
● Propriétés statistiques
● Projection orthogonale
Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Propriétés statistiques

Caractérisation vecteur aléatoire x

- loi de probabilité $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$
- modèle classique: bruit gaussian

$$p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \boldsymbol{R_x}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})^T \boldsymbol{R_x}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})\right) \tag{21}$$

  - vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu_x} = [\mu_{x_1}\ \mu_{x_2}\ \dots\ \mu_{x_N}]^T$
  - matrice de variance-covariance $N \times N$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R_x} &= \mathbb{E}[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})^T] \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \mathbb{E}[x_1x_2] & \dots & \mathbb{E}[x_1x_N] \\ \mathbb{E}[x_1x_2] & \sigma_{x_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbb{E}[x_1x_N] & & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Propriétés statistiques

Soit $y = A \cdot x \rightarrow$ transformation linéaire de x

- quelle est la loi de probabilité du vecteur y ?

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Propriétés statistiques

Soit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \rightarrow$ transformation linéaire de $\boldsymbol{x}$

- quelle est la loi de probabilité du vecteur $\boldsymbol{y}$?

Thèoreme 1 (de transformation linéaire) *Soit $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$ la densité de probabilité du vecteur aléatoire $\boldsymbol{x}$, et $\boldsymbol{b}$ un vecteur de coefficients. Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice $N \times N$ non singulière, alors $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ est un vecteur aléatoire dont la densité est donnée par:*

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\det \boldsymbol{A}|} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \mathbf{b})). \qquad (22)$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Propriétés statistiques

Soit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \rightarrow$ transformation linéaire de $\boldsymbol{x}$

- quelle est la loi de probabilité du vecteur $\boldsymbol{y}$?

Thèoreme 1 (de transformation linéaire) *Soit $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$ la densité de probabilité du vecteur aléatoire $\boldsymbol{x}$, et $\boldsymbol{b}$ un vecteur de coefficients. Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice $N \times N$ non singulière, alors $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ est un vecteur aléatoire dont la densité est donnée par:*

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\det \boldsymbol{A}|} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \mathbf{b})). \qquad (22)$$

Étapes de la démonstration: (x gaussian):

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Propriétés statistiques

Soit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \rightarrow$ transformation linéaire de $\boldsymbol{x}$

- quelle est la loi de probabilité du vecteur $\boldsymbol{y}$?

Thèoreme 1 (de transformation linéaire) *Soit $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$ la densité de probabilité du vecteur aléatoire $\boldsymbol{x}$, et $\boldsymbol{b}$ un vecteur de coefficients. Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice $N \times N$ non singulière, alors $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ est un vecteur aléatoire dont la densité est donnée par:*

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\det \boldsymbol{A}|} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \mathbf{b})). \qquad (22)$$

Étapes de la démonstration: (x gaussian):

- on pose $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Propriétés statistiques

Soit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \rightarrow$ transformation linéaire de $\boldsymbol{x}$

- quelle est la loi de probabilité du vecteur $\boldsymbol{y}$?

Thèoreme 1 (de transformation linéaire) *Soit $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$ la densité de probabilité du vecteur aléatoire $\boldsymbol{x}$, et $\boldsymbol{b}$ un vecteur de coefficients. Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice $N \times N$ non singulière, alors $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ est un vecteur aléatoire dont la densité est donnée par:*

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\det \boldsymbol{A}|} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \mathbf{b})). \qquad (22)$$

Étapes de la démonstration: (x gaussian):

- on pose $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})$
- on calcule $\boldsymbol{\mu_x}, \boldsymbol{R_x}$ et on remplace dans (21)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Propriétés statistiques

Soit $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \rightarrow$ transformation linéaire de $\boldsymbol{x}$

- quelle est la loi de probabilité du vecteur $\boldsymbol{y}$?

Thèoreme 1 (de transformation linéaire) *Soit $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$ la densité de probabilité du vecteur aléatoire $\boldsymbol{x}$, et $\boldsymbol{b}$ un vecteur de coefficients. Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice $N \times N$ non singulière, alors $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ est un vecteur aléatoire dont la densité est donnée par:*

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\det \boldsymbol{A}|} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \mathbf{b})). \qquad (22)$$

Étapes de la démonstration: (x gaussian):

- on pose $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})$
- on calcule $\boldsymbol{\mu_x}, \boldsymbol{R_x}$ et on remplace dans (21)
- on développe et on obtient (22), avec:
  - un vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu_y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu_x} + \boldsymbol{b}$
  - une matrice de variance-covariance $\boldsymbol{R_y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R_x}\boldsymbol{A}^T$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Propriétés statistiques

Modèle simplifié:

- bruit blanc stationnaire $\Leftrightarrow$ variables aléatoires i.i.d.
  - de distribution gaussienne
  - de moyenne nulle
  - d'écart-type σ

Signaux: rappels
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
● Propriétés statistiques
● Projection orthogonale
Débruitage

Propriétés statistiques

Modèle simplifié:

- bruit blanc stationnaire $\Leftrightarrow$ variables aléatoires i.i.d.
  - de distribution gaussienne
  - de moyenne nulle
  - d'écart-type σ

Paramètres de la loi:

- vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu_x} = \mathbf{0}$
- matrice de variance-covariance $N \times N$:

$$\boldsymbol{R_x} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})^T]$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

Projection orthogonale

Soit $\boldsymbol{W}$ une matrice orthogonale.
Les coefficients de la projection sont:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Alors:

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Projection orthogonale

Soit $\boldsymbol{W}$ une matrice orthogonale.
Les coefficients de la projection sont:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Alors:

- $\boldsymbol{x}$ gaussian $\Rightarrow$ $\boldsymbol{w}$ gaussian

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Projection orthogonale

Soit $\boldsymbol{W}$ une matrice orthogonale.
Les coefficients de la projection sont:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Alors:

- $\boldsymbol{x}$ gaussian $\Rightarrow$ $\boldsymbol{w}$ gaussian
- paramètres de la loi $p_{\boldsymbol{w}}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R_w} &= \boldsymbol{W R_x W}^T = \boldsymbol{W} \sigma^2 \mathbf{I} \boldsymbol{W}^T \\ &= \sigma^2 \mathbf{I} = \boldsymbol{R_x} \text{ et} \\ \boldsymbol{\mu_w} &= \boldsymbol{W \mu_x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Les coefficients d'ondelette d'un bruit blanc gaussian ont exactement la même distribution que le bruit

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Projection orthogonale

Soit $\boldsymbol{W}$ une matrice orthogonale.
Les coefficients de la projection sont:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Alors:

- $\boldsymbol{x}$ gaussian $\Rightarrow$ $\boldsymbol{w}$ gaussian
- paramètres de la loi $p_{\boldsymbol{w}}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R_w} &= \boldsymbol{W R_x W}^T = \boldsymbol{W} \sigma^2 \mathbf{I} \boldsymbol{W}^T \\ &= \sigma^2 \mathbf{I} = \boldsymbol{R_x} \text{ et} \\ \boldsymbol{\mu_w} &= \boldsymbol{W \mu_x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Les coefficients d'ondelette d'un bruit blanc gaussian ont exactement la même distribution que le bruit

A la différence des signaux informatifs, l'énergie du bruit ne se concentre pas dans quelques coefficients; au contraire, elle reste distribuée sur l'ensemble des coefficients.

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

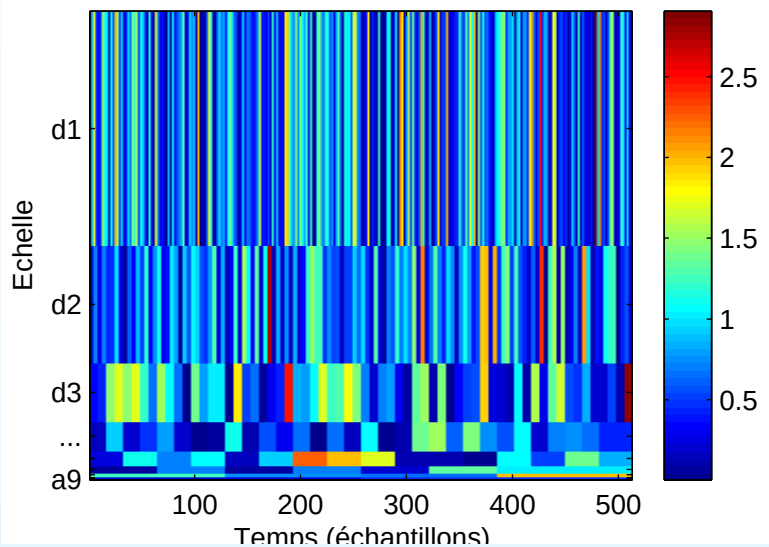
Débruitage

Transformée en ondelettes

La décomposition du bruit sur une base d'ondelettes 'sym8' s'écrit:

$$x(k) = \sum_{j,p} w^{j,p_j} \psi_{j,p_j}(k) + \sum_{p} w^{M+1,p_M} \phi_{M,p_M}(k). \qquad (23)$$

avec $w^{j,p_j} = \boldsymbol{w} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}$ les coefficients d'ondelette.



- énergie distribuée aléatoirement sur les pavés TF
- les coefficients $\rightarrow$ bruit blanc

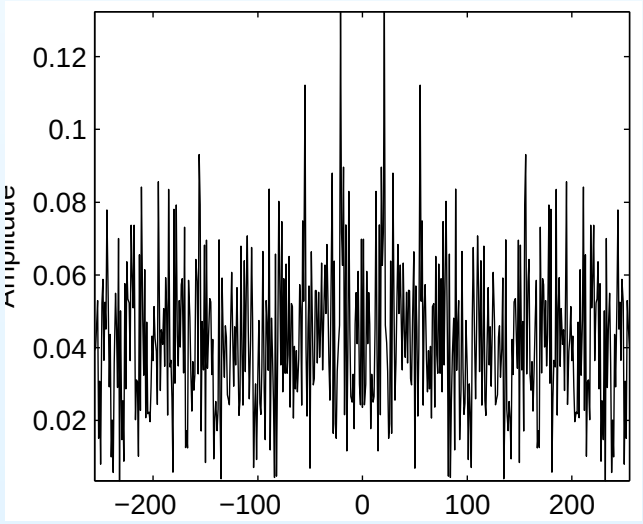
Transformée de Fourier

La décomposition du bruit sur une base d'exponentielles complexes s'écrit:

$$s_s(k) = \sum_{f=0}^{N-1} S(f) e^{2\pi j f \frac{k}{N}}, \text{ avec} \qquad (24)$$

$$S(f) = \langle s_s(k), e^{-2\pi j f \frac{k}{N}} \rangle,$$

le produit scalaire entre le signal et les fonctions de base.



Histogrammes

Distribution des coefficients (bruit gaussien $\mu = 0, \sigma = 1$):

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

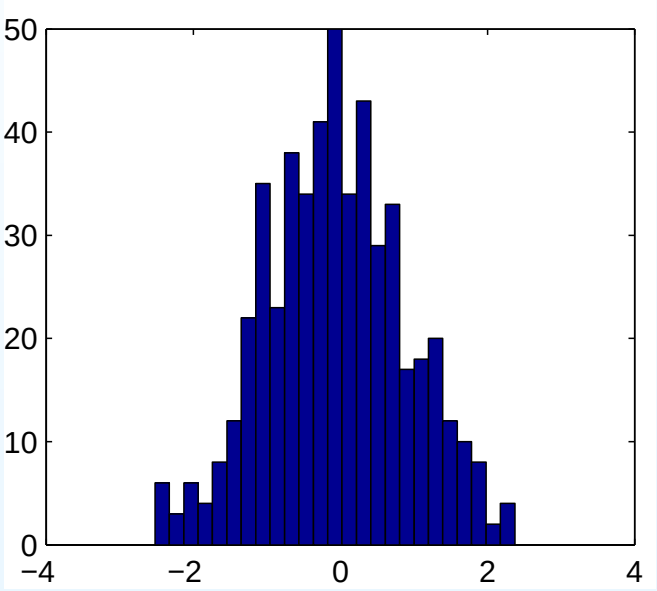
Signaux

Bruit

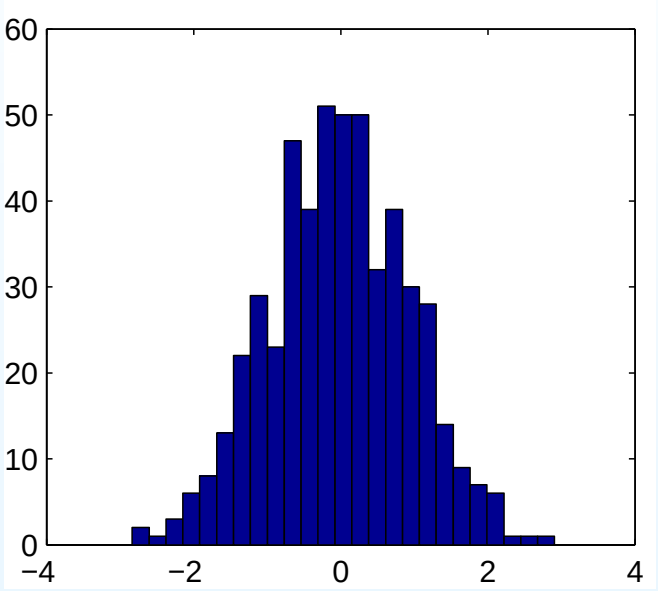
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Dirac



Ondelettes



Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

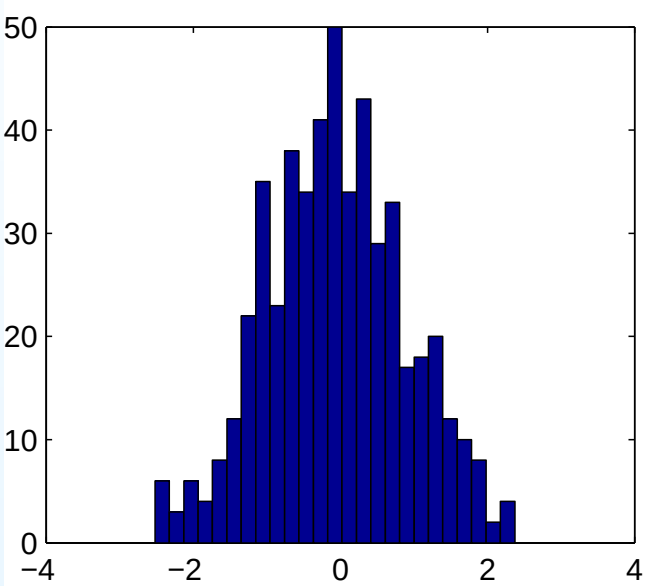
Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

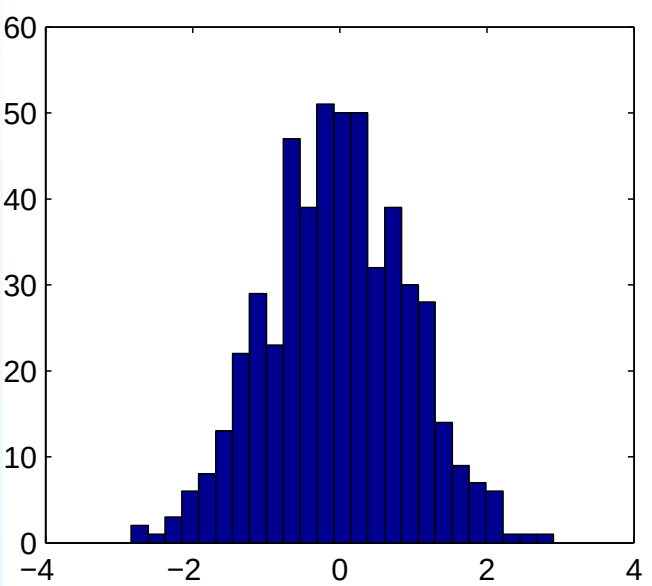
Histogrammes

Distribution des coefficients (bruit gaussien $\mu = 0, \sigma = 1$):

Dirac



Ondelettes



- énergie répartie dans le temps (sur les échantillons)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

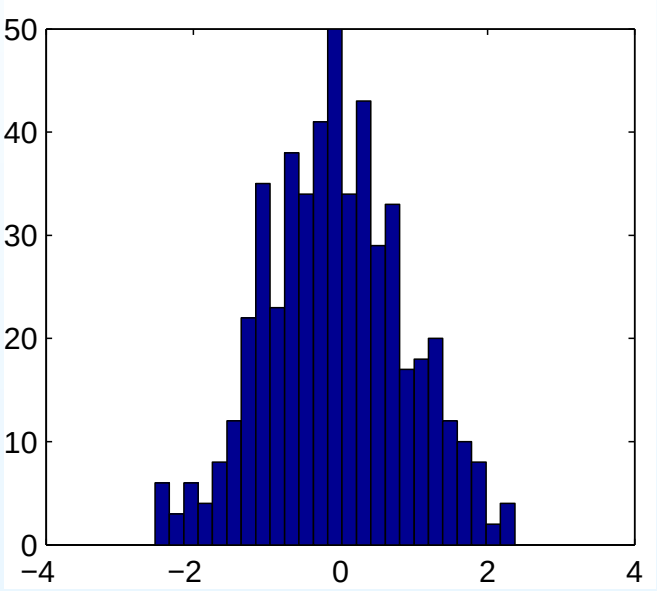
Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

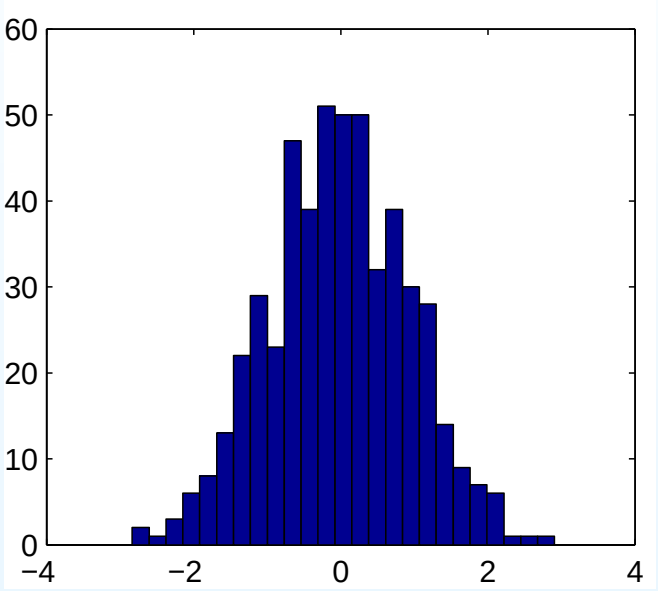
Histogrammes

Distribution des coefficients (bruit gaussien $\mu = 0, \sigma = 1$):

Dirac



Ondelettes



- énergie répartie dans le temps (sur les échantillons)
- distribution similaire sur une base de Fourier

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

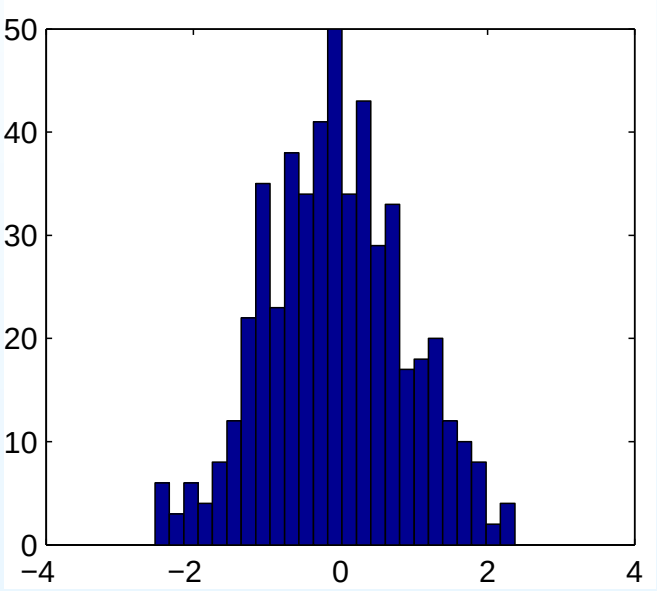
Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Histogrammes

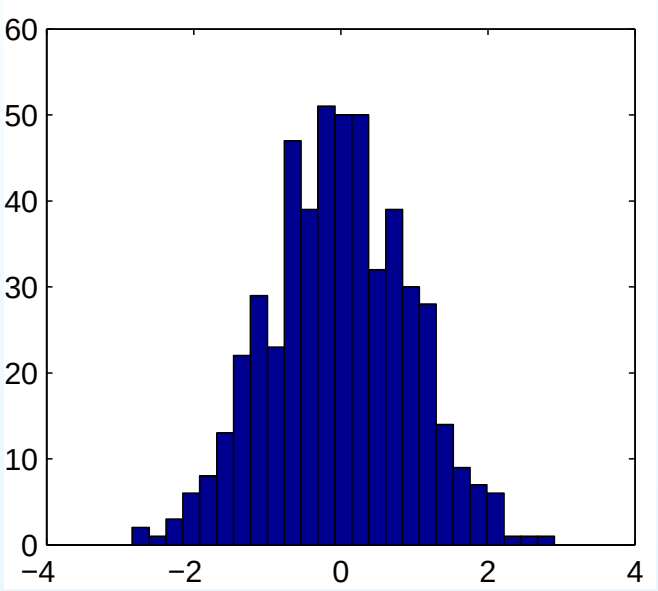
Distribution des coefficients (bruit gaussien $\mu = 0, \sigma = 1$):

Dirac



- énergie répartie dans le temps (sur les échantillons)
- distribution similaire sur une base de Fourier

Ondelettes



- énergie répartie sur le plan temps-fréquence (les coefficients d'ondelette)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

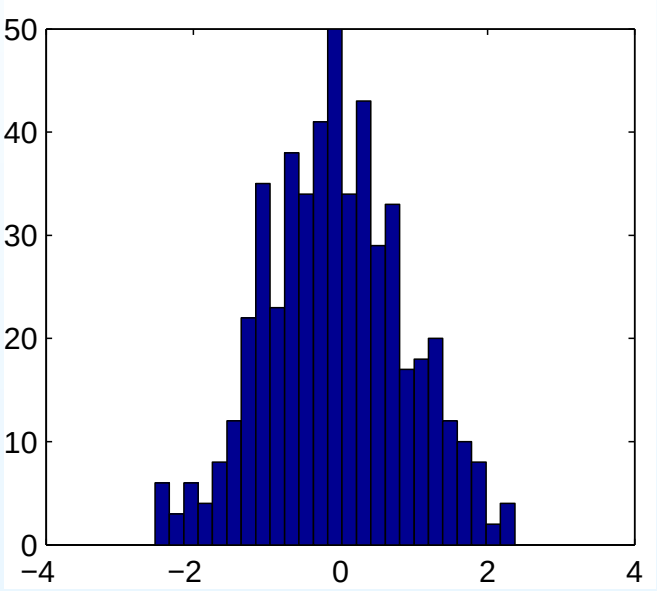
Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Histogrammes

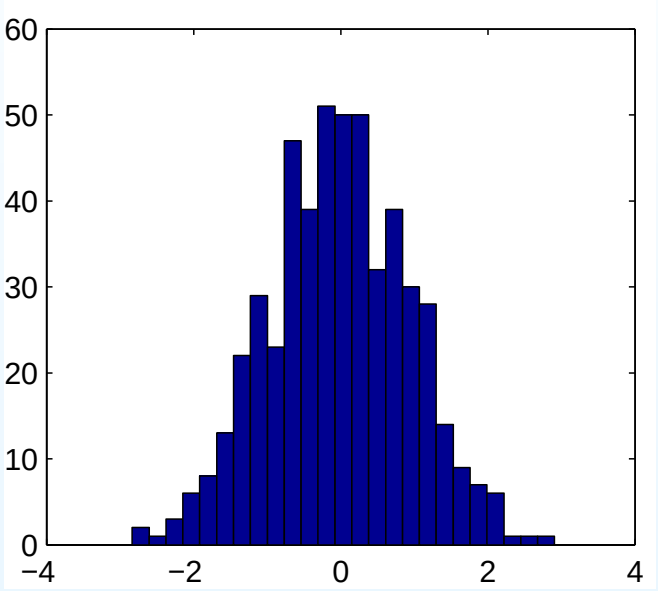
Distribution des coefficients (bruit gaussien $\mu = 0, \sigma = 1$):

Dirac



- énergie répartie dans le temps (sur les échantillons)
- distribution similaire sur une base de Fourier

Ondelettes



- énergie répartie sur le plan temps-fréquence (les coefficients d'ondelette)
- pas de grandes valeurs séparables par seuillage

Quelle base choisir?

Éléments de réponse:

- Si signal stationnaire $\longrightarrow$ Fourier

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Quelle base choisir?

Éléments de réponse:

- Si signal stationnaire $\longrightarrow$ Fourier
- Si signal non-stationnaire:

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Quelle base choisir?

Éléments de réponse:

- Si signal stationnaire $\longrightarrow$ Fourier
- Si signal non-stationnaire:
  - fréquences “pures” $\longrightarrow$ cosinus locaux, Fourier (Fourier à court terme si l’orthogonalité n’est pas nécessaire)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Quelle base choisir?

Éléments de réponse:

- Si signal stationnaire $\longrightarrow$ Fourier
- Si signal non-stationnaire:
  - fréquences “pures” $\longrightarrow$ cosinus locaux, Fourier (Fourier à court terme si l’orthogonalité n’est pas nécessaire)
  - inconnu $\longrightarrow$ ondelettes, paquets d’ondelettes
    - si transitoires courts $\longrightarrow$ ondelettes à support minimal (’daubechies’, ’coiflets’, ’symlets’)
    - si transitions abruptes $\longrightarrow$ ondelettes à peu de moments (par exemple ’haar’=’daubechies1’)
    - si transitoires “symétriques” $\longrightarrow$ ondelettes symétriques (’symlets’)
    - si basses fréquences $\longrightarrow$ profondeur de décomposition importante

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Quelle base choisir?

Éléments de réponse:

- Si signal stationnaire $\longrightarrow$ Fourier
- Si signal non-stationnaire:
  - fréquences “pures” $\longrightarrow$ cosinus locaux, Fourier (Fourier à court terme si l’orthogonalité n’est pas nécessaire)
  - inconnu $\longrightarrow$ ondelettes, paquets d’ondelettes
    - si transitoires courts $\longrightarrow$ ondelettes à support minimal (’daubechies’, ’coiflets’, ’symlets’)
    - si transitions abruptes $\longrightarrow$ ondelettes à peu de moments (par exemple ’haar’=’daubechies1’)
    - si transitoires “symétriques” $\longrightarrow$ ondelettes symétriques (’symlets’)
    - si basses fréquences $\longrightarrow$ profondeur de décomposition importante
  - algorithme de la meilleure base

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Quelle base choisir?

Éléments de réponse:

- Si signal stationnaire $\longrightarrow$ Fourier
- Si signal non-stationnaire:
  - fréquences “pures” $\longrightarrow$ cosinus locaux, Fourier (Fourier à court terme si l’orthogonalité n’est pas nécessaire)
  - inconnu $\longrightarrow$ ondelettes, paquets d’ondelettes
    - si transitoires courts $\longrightarrow$ ondelettes à support minimal (’daubechies’, ’coiflets’, ’symlets’)
    - si transitions abruptes $\longrightarrow$ ondelettes à peu de moments (par exemple ’haar’=’daubechies1’)
    - si transitoires “symétriques” $\longrightarrow$ ondelettes symétriques (’symlets’)
    - si basses fréquences $\longrightarrow$ profondeur de décomposition importante
  - algorithme de la meilleure base
  - . . .

Décompositions orthonormées

- signification physique (énergétique) des coefficients de décomposition

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Décompositions orthonormées

- signification physique (énergétique) des coefficients de décomposition
- représentation efficace des signaux à l'aide de fonctions de base bien choisies
  - concentration de l'énergie dans un nombre réduit de coefficients
  - coefficients significatifs pour la représentation $\equiv$ grands coefficients (énergétiques)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Décompositions orthonormées

- signification physique (énergétique) des coefficients de décomposition
- représentation efficace des signaux à l'aide de fonctions de base bien choisies
  - concentration de l'énergie dans un nombre réduit de coefficients
  - coefficients significatifs pour la représentation $\equiv$ grands coefficients (énergétiques)
- sans influence sur le bruit
  - l'énergie reste répartie sur l'ensemble de coefficients

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Décompositions orthonormées

- signification physique (énergétique) des coefficients de décomposition
- représentation efficace des signaux à l'aide de fonctions de base bien choisies
  - concentration de l'énergie dans un nombre réduit de coefficients
  - coefficients significatifs pour la représentation $\equiv$ grands coefficients (énergétiques)
- sans influence sur le bruit
  - l'énergie reste répartie sur l'ensemble de coefficients
- reconstruction à partir des grands coefficients
  - avec pertes (contrôlées)
  - signal informatif $\longrightarrow$ compression
  - signal + bruit $\longrightarrow$ débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit
- Propriétés statistiques
- Projection orthogonale

Débruitage

Décompositions orthonormées

- signification physique (énergétique) des coefficients de décomposition
- représentation efficace des signaux à l'aide de fonctions de base bien choisies
  - concentration de l'énergie dans un nombre réduit de coefficients
  - coefficients significatifs pour la représentation $\equiv$ grands coefficients (énergétiques)
- sans influence sur le bruit
  - l'énergie reste répartie sur l'ensemble de coefficients
- reconstruction à partir des grands coefficients
  - avec pertes (contrôlées)
  - signal informatif $\longrightarrow$ compression
  - signal + bruit $\longrightarrow$ débruitage
- **méthode de seuillage ?**

Débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signal+bruit – modélisation

Notations:

- signal mesuré et ses coefficients d'ondelette: x et w_x
- signal informatif et ses coefficients d'ondelette: c et w_c
- bruit (résidu) et ses coefficients d'ondelette: r et w_r
- signal débruité (estimation) et ses coefficients d'ondelette: $\hat{c}$ et $\hat{w}c$

Alors:

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signal+bruit – modélisation

Notations:

- signal mesuré et ses coefficients d'ondelette: $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{w_x}$
- signal informatif et ses coefficients d'ondelette: $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{w_c}$
- bruit (résidu) et ses coefficients d'ondelette: $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{w_r}$
- signal débruité (estimation) et ses coefficients d'ondelette: $\hat{\boldsymbol{c}}$ et $\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{c}$

Alors:

- signal+bruit:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{r} \Leftrightarrow x(k) = c(k) + r(k), k = 1 \dots N$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signal+bruit – modélisation

Notations:

- signal mesuré et ses coefficients d'ondelette: $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{w_x}$
- signal informatif et ses coefficients d'ondelette: $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{w_c}$
- bruit (résidu) et ses coefficients d'ondelette: $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{w_r}$
- signal débruité (estimation) et ses coefficients d'ondelette: $\hat{\boldsymbol{c}}$ et $\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{c}$

Alors:

- signal+bruit:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{r} \Leftrightarrow x(k) = c(k) + r(k), k = 1 \dots N$$

- décomposition en ondelettes:

$$\boldsymbol{w_x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{w_c} + \boldsymbol{w_r}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signal+bruit – modélisation

Notations:

- signal mesuré et ses coefficients d'ondelette: $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{w_x}$
- signal informatif et ses coefficients d'ondelette: $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{w_c}$
- bruit (résidu) et ses coefficients d'ondelette: $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{w_r}$
- signal débruité (estimation) et ses coefficients d'ondelette: $\hat{\boldsymbol{c}}$ et $\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{c}$

Alors:

- signal+bruit:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{r} \Leftrightarrow x(k) = c(k) + r(k), k = 1 \dots N$$

- décomposition en ondelettes:

$$\boldsymbol{w_x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{w_c} + \boldsymbol{w_r}$$

Rajouter du bruit au signal revient à rajouter du bruit à ses coefficients d'ondelette.

Débruitage - critère d'évaluation

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Erreur quadratique moyenne entre le signal informatif $\boldsymbol{c}$ et son estimation $\hat{\boldsymbol{c}}$

$$\begin{aligned} EQM_c &= ||\boldsymbol{c} - \hat{\boldsymbol{c}}||_2 = ||\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}})||_2 \\ &= ||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2 \end{aligned}$$

Débruitage - critère d'évaluation

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Erreur quadratique moyenne entre le signal informatif $\boldsymbol{c}$ et son estimation $\hat{\boldsymbol{c}}$

$$\begin{aligned} EQM_c &= ||\boldsymbol{c} - \hat{\boldsymbol{c}}||_2 = ||\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}})||_2 \\ &= ||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2 \end{aligned}$$

Attention:

1. A priori, choisir les P plus grands coefficients sert à construire une estimation $\hat{\boldsymbol{c}}$ proche du signal mesuré

$$\min\left(||\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{c}}||_2||\right) \neq \min\left(||\boldsymbol{c} - \hat{\boldsymbol{c}}||_2||\right)$$

Débruitage - critère d'évaluation

Signaux: rappels
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Erreur quadratique moyenne entre le signal informatif $\boldsymbol{c}$ et son estimation $\hat{\boldsymbol{c}}$

$$\begin{aligned} EQM_c &= ||\boldsymbol{c} - \hat{\boldsymbol{c}}||_2 = ||\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}})||_2 \\ &= ||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2 \end{aligned}$$

Attention:

1. A priori, choisir les P plus grands coefficients sert à construire une estimation $\hat{\boldsymbol{c}}$ proche du signal mesuré

$$\min\left(||\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{c}}||_2||\right) \neq \min\left(||\boldsymbol{c} - \hat{\boldsymbol{c}}||_2||\right)$$

2. $\hat{\boldsymbol{c}}$ est *une réalisation* de l'estimation, obtenue pour *une réalisation* du vecteur du bruit $\boldsymbol{r}$
   $\Rightarrow$ *Le risque à minimiser est:*

$$\rho = \mathbb{E}\left\{EQM_c\right\} = \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\right\}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

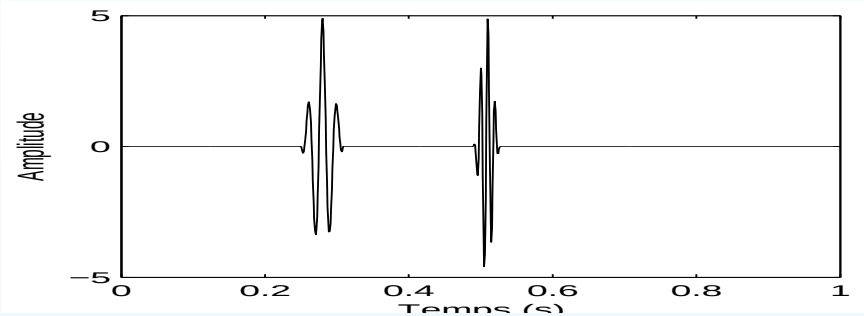
Signaux

Bruit

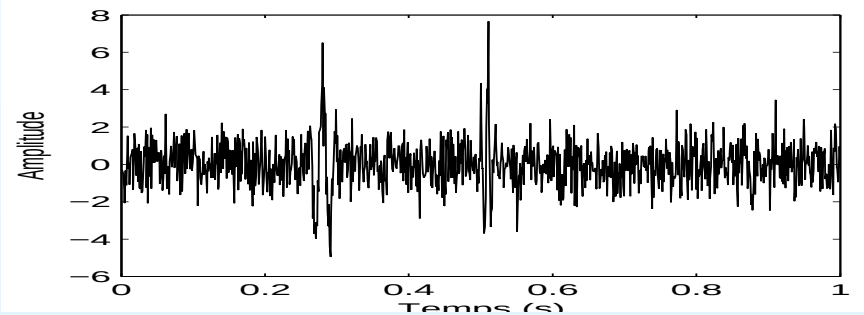
Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Exemple

- c: signal non-stationnaire simulé
- r: bruit gaussien stationnaire de $\mu = 0$ et $\sigma = 1$
- x signal de mesure $x = c + r$



signal simulé c



signal de mesure x

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

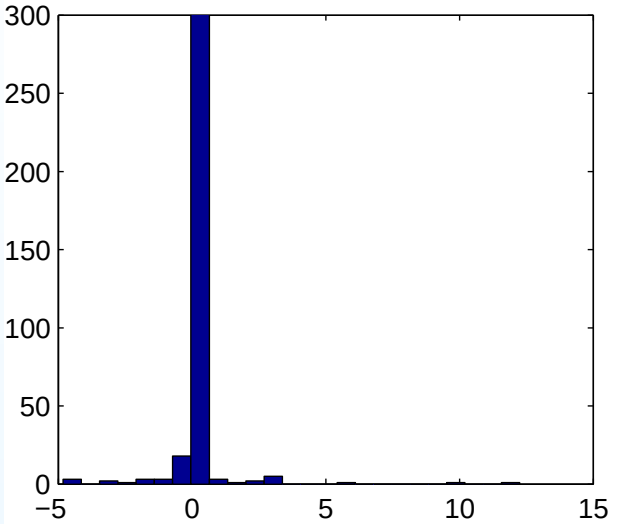
Ondelettes orthogonales

Signaux

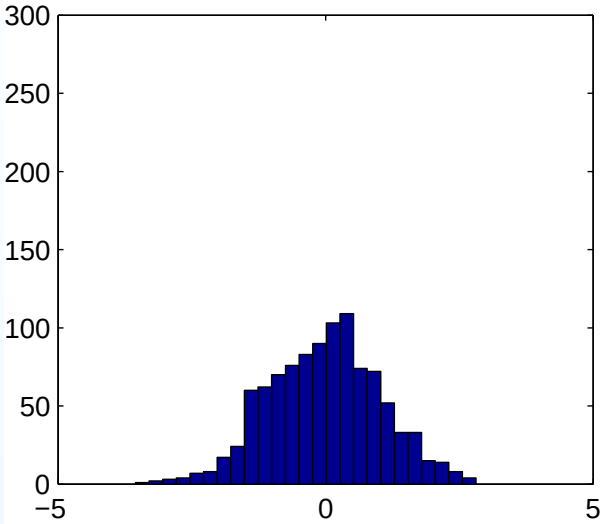
Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

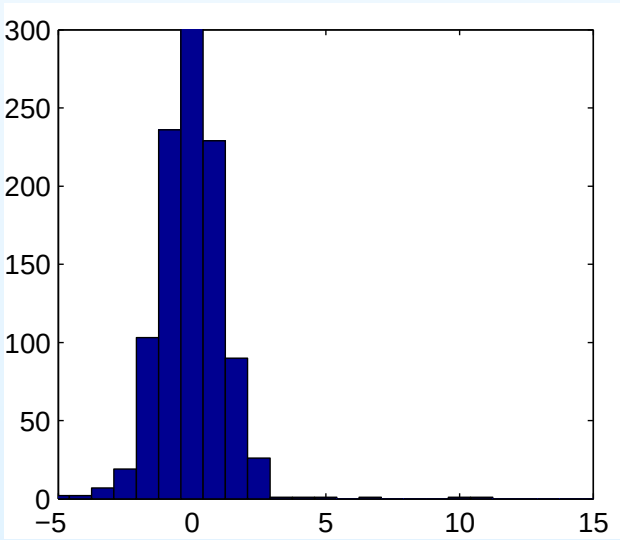
Histogrammes des coefficients d'ondelette



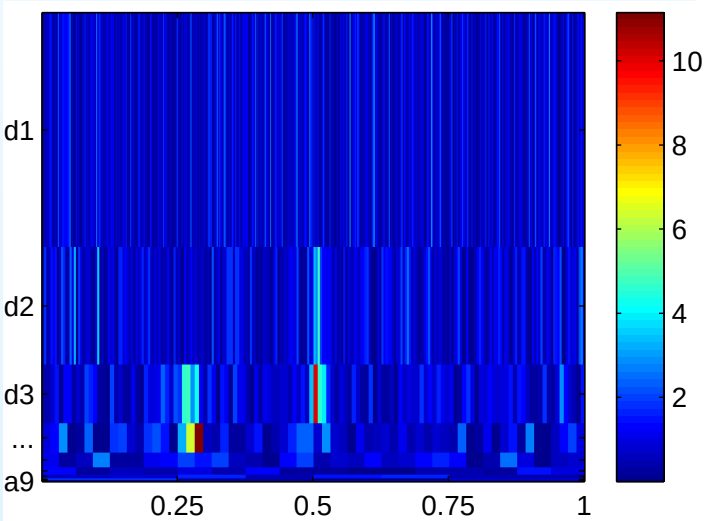
signal informatif w_c



bruit gaussien w_r



signal mesuré w_x



transformée en ondelettes w_x

Histogrammes des coefficients d'ondelette

Signaux: rappels

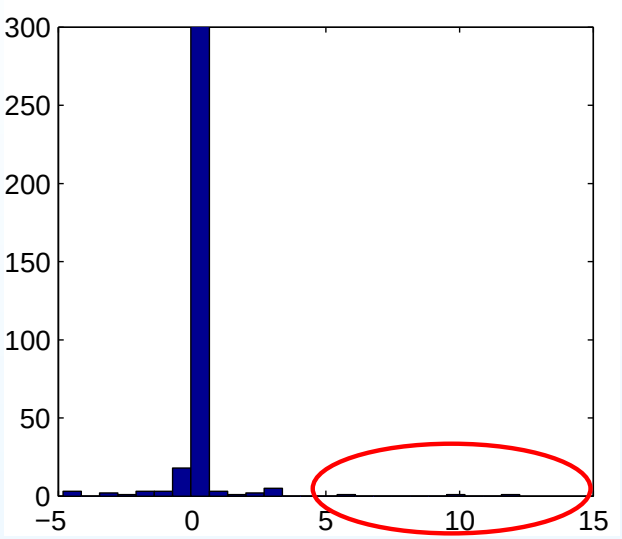
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

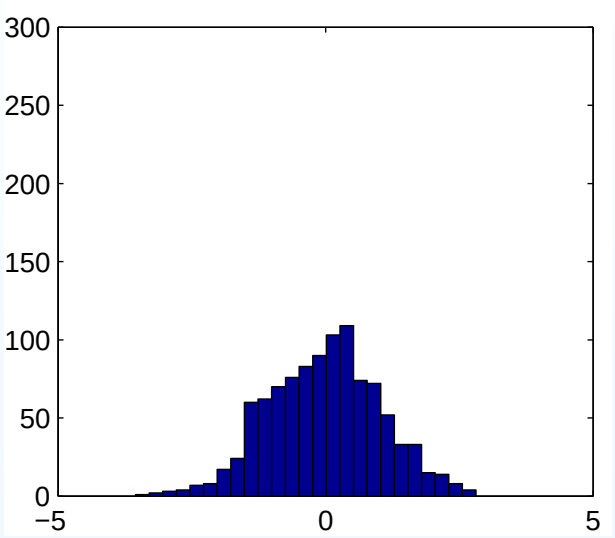
Signaux

Bruit

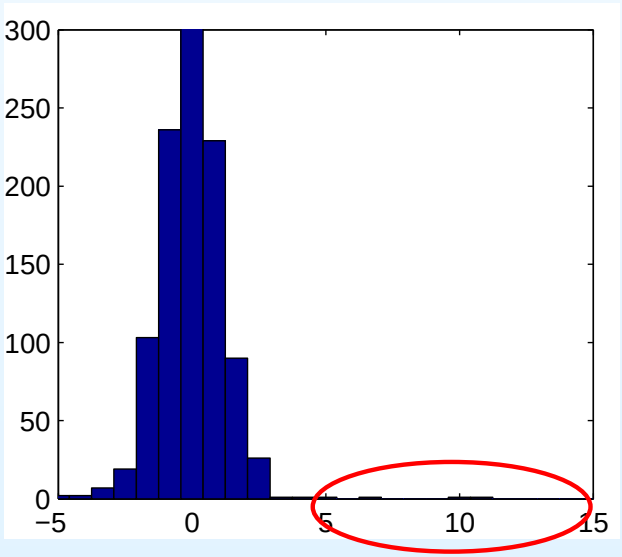
Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



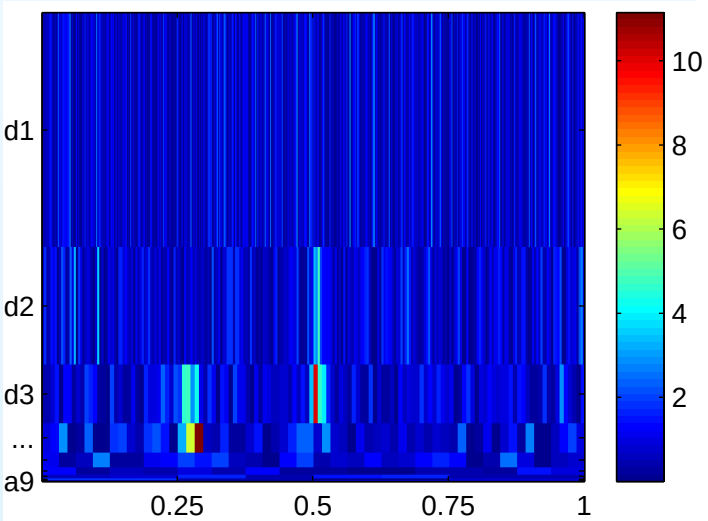
signal informatif w_c



bruit gaussien w_r



signal mesuré w_x



transformée en ondelettes w_x

Histogrammes des coefficients d'ondelette

Signaux: rappels

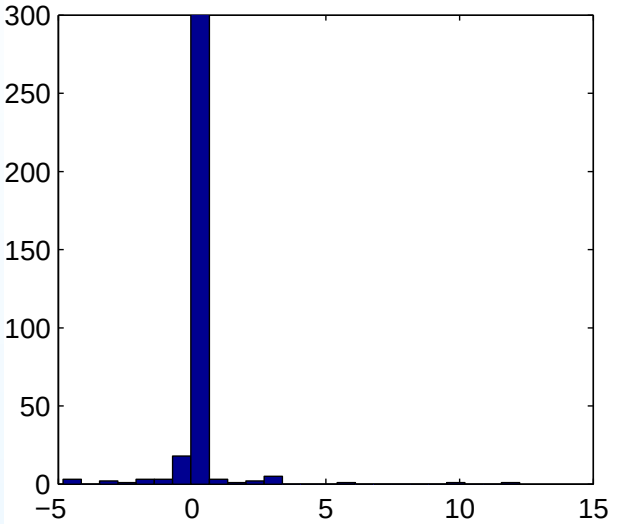
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

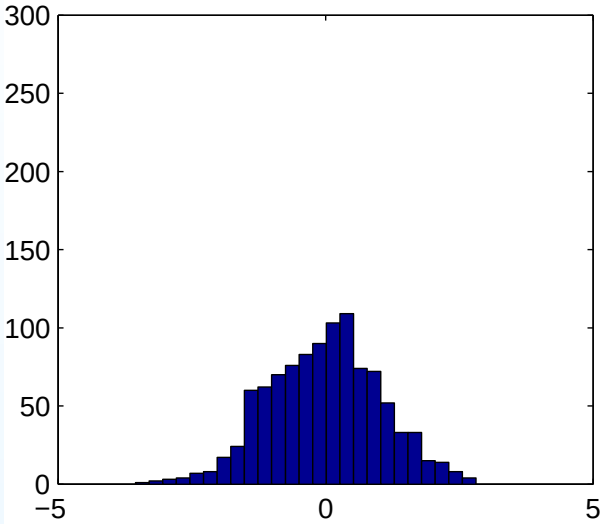
Signaux

Bruit

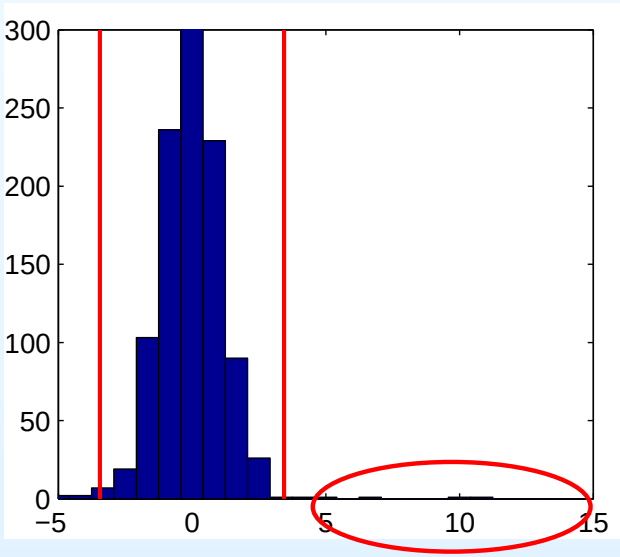
Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



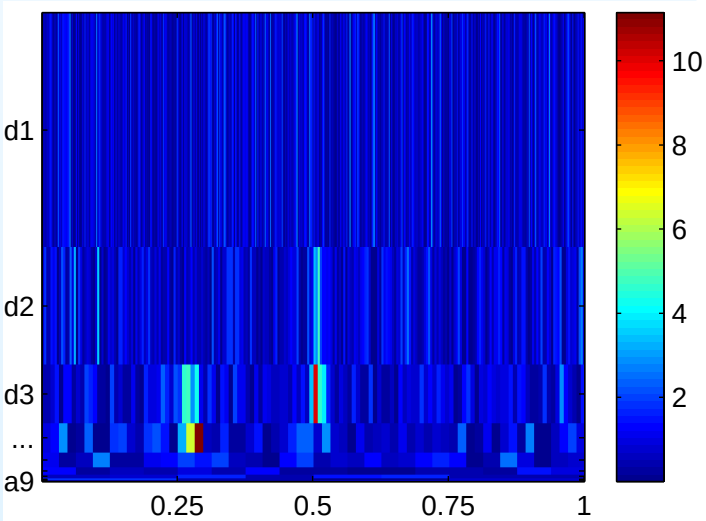
signal informatif w_c



bruit gaussien w_r



signal mesuré w_x



transformée en ondelettes w_x

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Stratégies de débruitage

- minimiser $\rho = \mathbb{E}\{EQM_c\} = \mathbb{E}\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\}$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Stratégies de débruitage

- minimiser $\rho = \mathbb{E}\{EQM_c\} = \mathbb{E}\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\}$

$\longrightarrow$ estimation des coefficients d'ondelette informatifs $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}$
- coefficients du signal mesuré $\boldsymbol{w_x}$
- hypothèses sur le bruit $\boldsymbol{r}$ (et ses coefficients $\boldsymbol{w_r}$):
  - blanc, stationnaire, moyenne $\mu = 0$, écart-type σ

Stratégies de débruitage

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

- minimiser $\rho = \mathbb{E}\{EQM_c\} = \mathbb{E}\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\}$

$\longrightarrow$ estimation des coefficients d'ondelette informatifs $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}$
- coefficients du signal mesuré $\boldsymbol{w_x}$
- hypothèses sur le bruit $\boldsymbol{r}$ (et ses coefficients $\boldsymbol{w_r}$):
  - blanc, stationnaire, moyenne $\mu = 0$, écart-type σ

$\longrightarrow$ modification des coefficients $w_x(k) \in \boldsymbol{w_x}$:
- multiplication par un coefficient a_k

$$\hat{w}_c(k) = a_k \cdot w_x(k)$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Stratégies de débruitage

- minimiser $\rho = \mathbb{E}\{EQM_c\} = \mathbb{E}\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\}$

$\rightarrow$ estimation des coefficients d'ondelette informatifs $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}$
- coefficients du signal mesuré $\boldsymbol{w_x}$
- hypothèses sur le bruit $\boldsymbol{r}$ (et ses coefficients $\boldsymbol{w_r}$):
  - blanc, stationnaire, moyenne $\mu = 0$, écart-type σ

$\rightarrow$ modification des coefficients $w_x(k) \in \boldsymbol{w_x}$:
- multiplication par un coefficient a_k

$$\hat{w}_c(k) = a_k \cdot w_x(k)$$

Qui est a_k?

$$a_k = \frac{w_c(k)^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Démonstration

Calculons le risque:

$$\rho = \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - \hat{w}_c(k))^2\right\}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Démonstration

Calculons le risque:

$$\rho = \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - \hat{w}_c(k))^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - a_k w_x(k))^2\right\}$$

Démonstration

Calculons le risque:

$$\rho = \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - \hat{w}_c(k))^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - a_k w_x(k))^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_c(k) - a_k(w_c(k) + w_r(k))\right]^2\right\}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Démonstration

Calculons le risque:

$$\rho = \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - \hat{w}_c(k))^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - a_k w_x(k))^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_c(k) - a_k(w_c(k) + w_r(k))\right]^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_c(k)(1 - a_k) - a_k w_r(k)\right]^2\right\}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Démonstration

Calculons le risque:

$$\rho = \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - \hat{w}_c(k))^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - a_k w_x(k))^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_c(k) - a_k(w_c(k) + w_r(k))\right]^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_c(k)(1-a_k) - a_k w_r(k)\right]^2\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left\{\left[w_c(k)(1-a_k) - a_k w_r(k)\right]^2\right\}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Démonstration

Calculons le risque:

$$\begin{aligned}
\rho &= \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - \hat{w}_c(k))^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - a_k w_x(k))^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_c(k) - a_k(w_c(k) + w_r(k))\right]^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_c(k)(1-a_k) - a_k w_r(k)\right]^2\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left\{\left[w_c(k)(1-a_k) - a_k w_r(k)\right]^2\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left\{w_c(k)^2(1-a_k)^2 + a_k^2 w_r(k)^2 - 2a_k(1-a_k)w_c(k)w_r(k)\right\}
\end{aligned}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Démonstration

Calculons le risque:

$$\rho = \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w_c} - \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}}||_2\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - \hat{w}_c(k))^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}(w_c(k) - a_k w_x(k))^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_c(k) - a_k(w_c(k) + w_r(k))\right]^2\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_c(k)(1-a_k) - a_k w_r(k)\right]^2\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left\{\left[w_c(k)(1-a_k) - a_k w_r(k)\right]^2\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left\{w_c(k)^2(1-a_k)^2 + a_k^2 w_r(k)^2 - 2a_k(1-a_k)w_c(k)w_r(k)\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(w_c(k)^2(1-a_k)^2 + a_k^2\sigma^2\right)$$

Démonstration

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

$$\rho = \sum_{k=1}^{N} \left(w_c(k)^2 (1 - a_k)^2 + a_k^2 \sigma^2 \right)$$

Minimiser le risque revient a minimiser chaque terme de la somme

En dérivant chaque terme par rapport à a_k, on trouve

$$a_k = \frac{w_c(k)^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2}$$

impossible à utiliser en pratique, car il dépend de $w_c(k)$.

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Simplification (1)

$$a_k = \frac{w_c(k)^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2}$$

Valeurs approximatives pour a_k:

- projection orthogonale

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |w_c(k)| > \sigma \\ 0, & \text{si } |w_c(k)| < \sigma \end{cases}$$

$$\hat{w}_c(k) = \begin{cases} w_x(k) & \text{si } |w_c(k)| > \sigma \\ 0, & \text{si } |w_c(k)| < \sigma \end{cases}$$

Simplification (1)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

$$a_k = \frac{w_c(k)^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2}$$

Valeurs approximatives pour a_k:

- projection orthogonale

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |w_c(k)| > \sigma \\ 0, & \text{si } |w_c(k)| < \sigma \end{cases}$$

$$\hat{w}_c(k) = \begin{cases} w_x(k) & \text{si } |w_c(k)| > \sigma \\ 0, & \text{si } |w_c(k)| < \sigma \end{cases}$$

- seuillage dur (*hard thresholding*):

$$\hat{w}_c(k) = \begin{cases} w_x(k) & \text{si } |w_x(k)| \geq S \\ 0, & \text{si } |w_x(k)| < S \end{cases}$$

Simplification (2)

$$a_k = 1 - \frac{\sigma^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2}$$

Valeurs approximatives pour a_k:

- atténuation

$$\hat{w}_c(k) = w_x(k) - w_x(k)\frac{\sigma^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Simplification (2)

$$a_k = 1 - \frac{\sigma^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2}$$

Valeurs approximatives pour a_k:

- atténuation

$$\hat{w}_c(k) = w_x(k) - w_x(k)\frac{\sigma^2}{w_c(k)^2 + \sigma^2}$$

- seuillage doux (*soft thresholding*):

$$\hat{w}_c(k) = \begin{cases} w_x(k) - S, & \text{si } w_x(k) \geq S \\ w_x(k) + S, & \text{si } w_x(k) \leq -S \\ 0, & \text{si } |w_x| < S \end{cases}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Comparaison dur-doux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

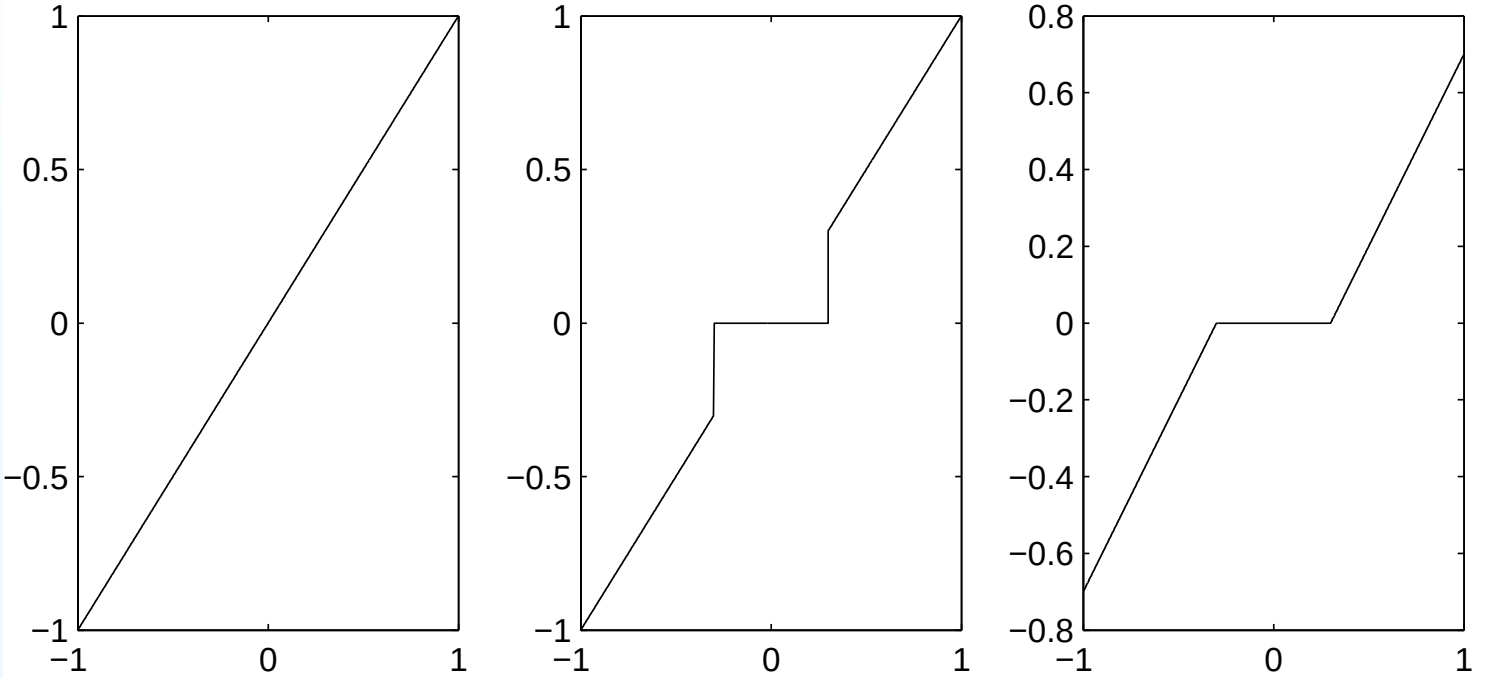
Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



coefficients d'origine | seuillage dur | seuillage doux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Comparaison dur-doux

Seuillage dur (*hard thresholding, "keep-or-kill"*):

- avantage:
  - choix naturel $\longrightarrow$ préserve l'amplitude du signal mesuré (EQM petite)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Comparaison dur-doux

Seuillage dur (*hard thresholding, "keep-or-kill"*):

- avantage:
  - choix naturel $\longrightarrow$ préserve l'amplitude du signal mesuré (EQM petite)
- inconvénient:
  - reconstruction "discontinue" $\longrightarrow$ tous les coefficients utilisés sont grands ($> S$)

Comparaison dur-doux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage dur (*hard thresholding, "keep-or-kill"*):

- avantage:
  - choix naturel $\longrightarrow$ préserve l'amplitude du signal mesuré (EQM petite)
- inconvénient:
  - reconstruction "discontinue" $\longrightarrow$ tous les coefficients utilisés sont grands ($> S$)
- recommendation:
  - seuil S grand $\longrightarrow$ peu de coefficients sont retenus, donc la probabilité jointe d'avoir un grand coefficient du signal et un grand coefficient du bruit au mêmes coordonnées temps-fréquence est faible

Comparaison dur-doux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage dur (*hard thresholding, "keep-or-kill"*):

- avantage:
  - choix naturel $\longrightarrow$ préserve l'amplitude du signal mesuré (EQM petite)
- inconvénient:
  - reconstruction "discontinue" $\longrightarrow$ tous les coefficients utilisés sont grands ($> S$)
- recommendation:
  - seuil S grand $\longrightarrow$ peu de coefficients sont retenus, donc la probabilité jointe d'avoir un grand coefficient du signal et un grand coefficient du bruit au mêmes coordonnées temps-fréquence est faible
- résultat attendu $\longrightarrow$ bonne estimation des transitoires, mais aussi des "artéfacts" assez importants dus aux grands coefficients du bruit

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Comparaison dur-doux

Seuillage doux (*soft thresholding, "shrink-or-kill"*):

- avantage:
  - propriétés mathématiques intéressantes pour certains algorithmes
  - reconstruction plus "continue"

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Comparaison dur-doux

Seuillage doux (*soft thresholding, "shrink-or-kill"*):

- avantage:
  - propriétés mathématiques intéressantes pour certains algorithmes
  - reconstruction plus "continue"
- inconvénient:
  - diminution artificielle de l'amplitude de l'estimation $\longrightarrow$ EQM plus grande

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Comparaison dur-doux

Seuillage doux (*soft thresholding, "shrink-or-kill"*):

- avantage:
  - propriétés mathématiques intéressantes pour certains algorithmes
  - reconstruction plus "continue"
- inconvénient:
  - diminution artificielle de l'amplitude de l'estimation $\longrightarrow$ EQM plus grande
- recommendation:
  - seuil S petit $\longrightarrow$ l'amplitude des coefficients retenus n'est pas beaucoup modifiée

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Comparaison dur-doux

Seuillage doux (*soft thresholding, "shrink-or-kill"*):

- avantage:
  - propriétés mathématiques intéressantes pour certains algorithmes
  - reconstruction plus "continue"
- inconvénient:
  - diminution artificielle de l'amplitude de l'estimation $\longrightarrow$ EQM plus grande
- recommendation:
  - seuil S petit $\longrightarrow$ l'amplitude des coefficients retenus n'est pas beaucoup modifiée
- résultat attendu $\longrightarrow$ moins bonne estimation des transitoires, mais l'amplitude des "artéfacts" dus au bruit est proche de 0

Comparaison dur-doux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

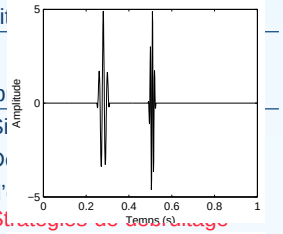
Ondelettes orthogonales

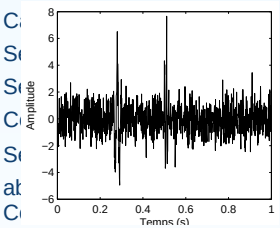
Signaux

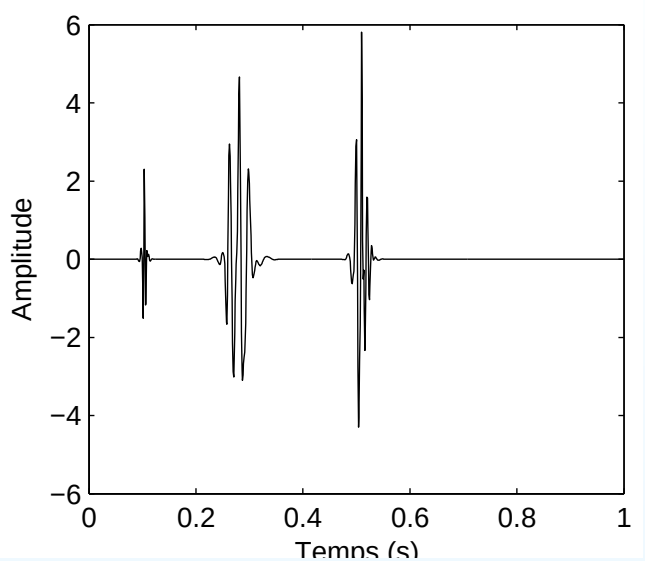
Bruit

Déb

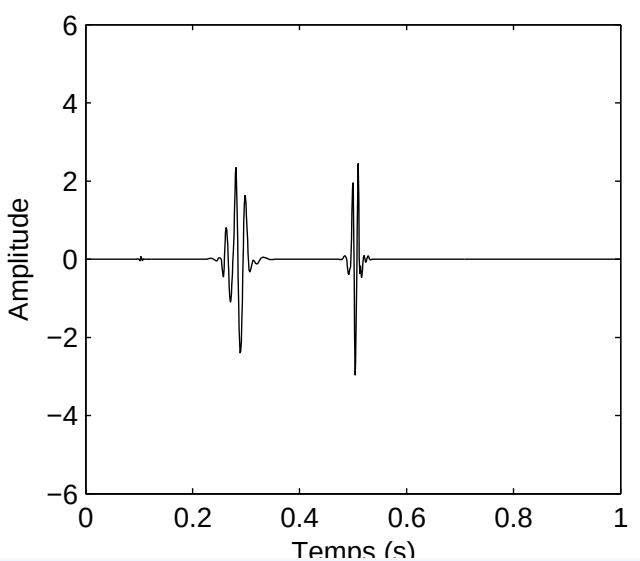
- Si
- D
  d'
- St
- C
- S
- S
- C
- S
  ab
- C



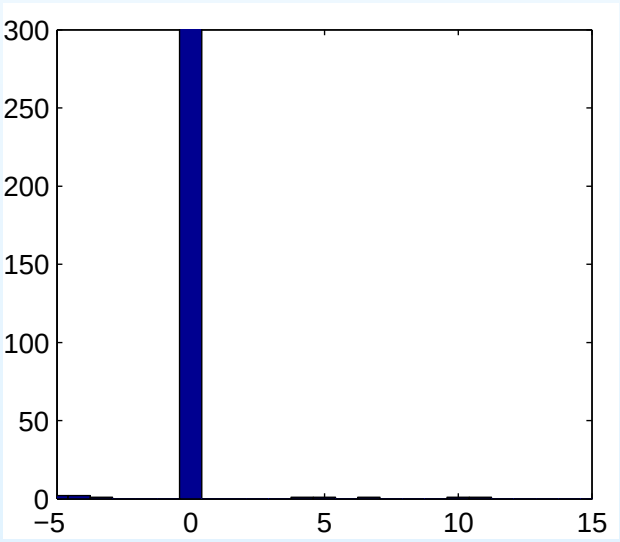




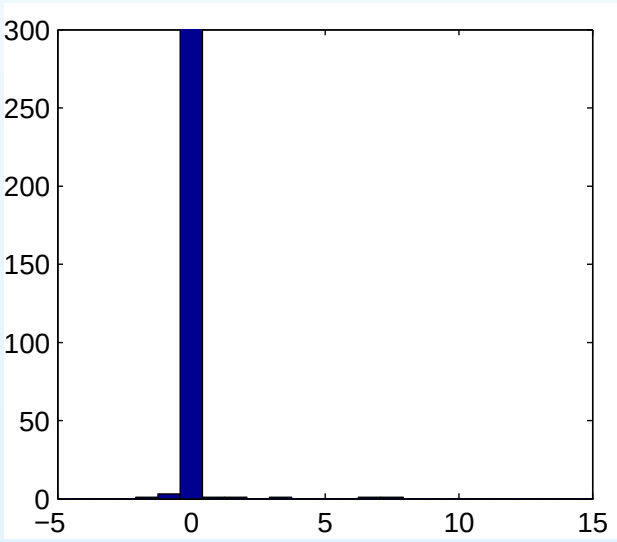
estimation $\hat{c}$ - seuillage dur (EQM=0.117)



estimation $\hat{c}$ - seuillage doux (EQM=0.165)



histogramme après seuillage dur



histogramme après seuillage doux

Comparaison dur-doux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

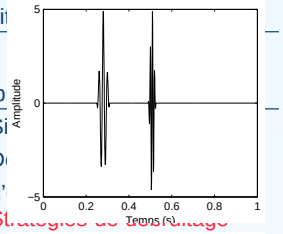
Ondelettes orthogonales

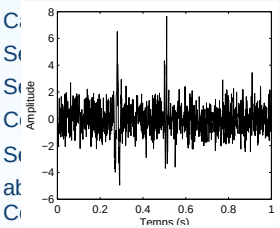
Signaux

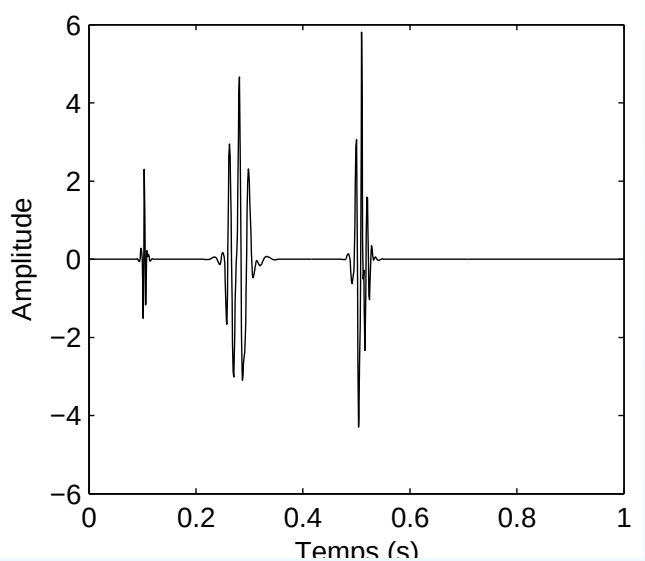
Bruit

Déb

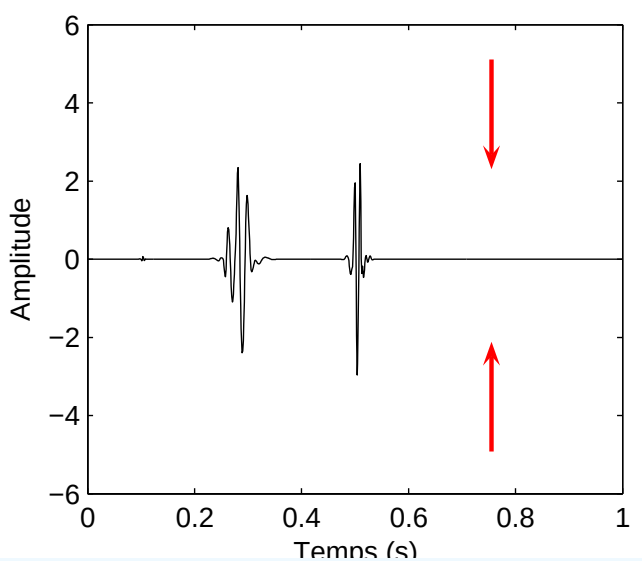
- Si
- D
  d'
- St
- C
- S
- S
- C
- S
  ab
- C



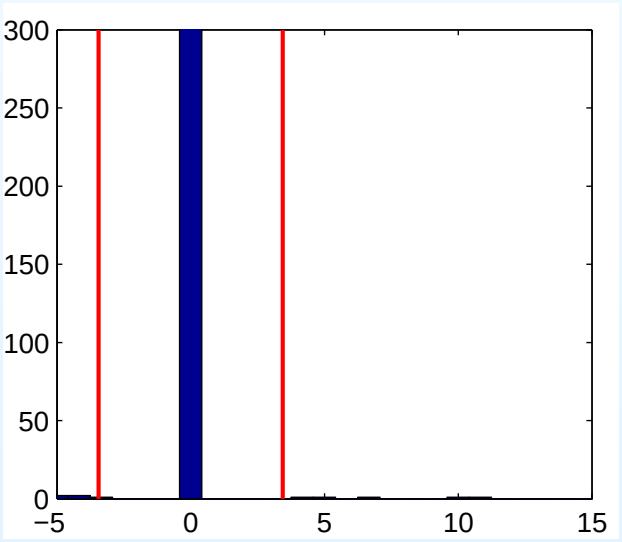




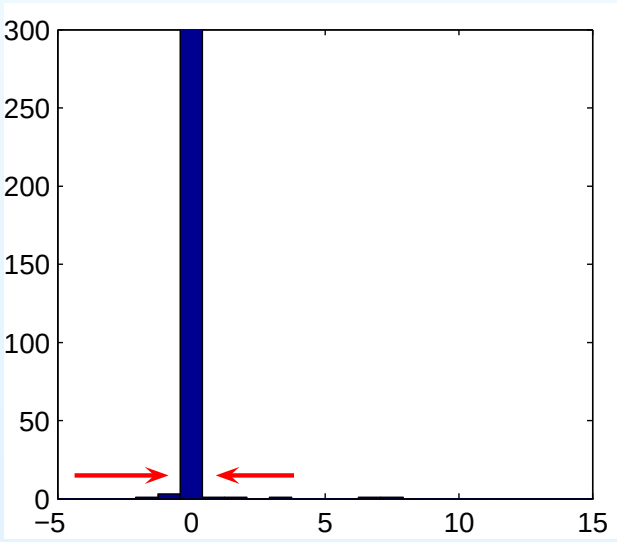
estimation $\hat{c}$ - seuillage dur (EQM=0.117)



estimation $\hat{c}$ - seuillage doux (EQM=0.165)



histogramme après seuillage dur



histogramme après seuillage doux

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Calcul du seuil

Méthodes:

- dizaines (centaines?) de méthodes

Calcul du seuil

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Méthodes:

- dizaines (centaines?) de méthodes
- méthodes les plus connues

Calcul du seuil

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Méthodes:

- dizaines (centaines?) de méthodes
- méthodes les plus connues
  - seuillage "universel"
    - le seuil est calculé pour que la probabilité d'avoir du bruit au delà $\longrightarrow 0$
    - élimination efficace du bruit gaussien
    - risque de non-détection

Calcul du seuil

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Méthodes:

- dizaines (centaines?) de méthodes
- méthodes les plus connues
  - seuillage "universel"
    - le seuil est calculé pour que la probabilité d'avoir du bruit au delà $\longrightarrow 0$
    - élimination efficace du bruit gaussien
    - risque de non-détection
  - seuillage SURE (*Stein Unbiased Risk Estimator*):
    - hypothèse: signal+bruit = signal mal mesuré $\longrightarrow$ estimer la valeur correcte à partir des mesures
    - moins élevé que le seuil universel $\longrightarrow$ risque de fausse détection

Calcul du seuil

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Méthodes:

- dizaines (centaines?) de méthodes
- méthodes les plus connues
  - seuillage "universel"
    - le seuil est calculé pour que la probabilité d'avoir du bruit au delà $\longrightarrow 0$
    - élimination efficace du bruit gaussien
    - risque de non-détection
  - seuillage SURE (*Stein Unbiased Risk Estimator*):
    - hypothèse: signal+bruit = signal mal mesuré $\longrightarrow$ estimer la valeur correcte à partir des mesures
    - moins élevé que le seuil universel $\longrightarrow$ risque de fausse détection
  - seuillage par détection des valeurs aberrantes (*outliers*)
    - principe: détecter les grandes valeurs dans un ensemble à l'aide de techniques statistiques (directes ou itératives) $\longrightarrow$ définition statistique des "grandes valeurs"

Seuillage universel

- soit $\boldsymbol{r} = [r(1), r(2), \ldots r(N)]$ un bruit gaussien blanc, stationnaire et normalisé (vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ et matrice de variance-covariance $\boldsymbol{R} = \mathbf{I}$).

  Pour simplifier la notation, comme tous les éléments de vecteur $\boldsymbol{\mu}$ et tous les éléments diagonaux de la matrice $\boldsymbol{R}$ sont identiques, on va noter la moyenne par μ (=0) et l'écart-type par σ (=1)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage universel

- soit $\boldsymbol{r} = [r(1), r(2), \ldots r(N)]$ un bruit gaussien blanc, stationnaire et normalisé (vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ et matrice de variance-covariance $\boldsymbol{R} = \mathbf{I}$).

  Pour simplifier la notation, comme tous les éléments de vecteur $\boldsymbol{\mu}$ et tous les éléments diagonaux de la matrice $\boldsymbol{R}$ sont identiques, on va noter la moyenne par μ (=0) et l'écart-type par σ (=1)
- soit $\boldsymbol{w_r}$ le vecteur des coefficients d'ondelette du bruit $\boldsymbol{r} \longrightarrow$ mêmes caractéristiques statistiques

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage universel

- soit $\boldsymbol{r} = [r(1), r(2), \ldots r(N)]$ un bruit gaussien blanc, stationnaire et normalisé (vecteur moyenne $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ et matrice de variance-covariance $\boldsymbol{R} = \mathbf{I}$).

  Pour simplifier la notation, comme tous les éléments de vecteur $\boldsymbol{\mu}$ et tous les éléments diagonaux de la matrice $\boldsymbol{R}$ sont identiques, on va noter la moyenne par μ (=0) et l'écart-type par σ (=1)
- soit $\boldsymbol{w_r}$ le vecteur des coefficients d'ondelette du bruit $\boldsymbol{r} \rightarrow$ mêmes caractéristiques statistiques
- soit $M_N = \max(w_r(1), w_r(2), \ldots w_r(N))$.

La probabilité que M_N soit inférieur à un seuil S est:

$$\begin{aligned} P(M_N \leq S) &= P(w_r(1) \leq S, w_r(2) \leq S, \ldots w_r(N) \leq S) \\ &= F^N(S), \end{aligned}$$

où $F(S)$ est la fonction de répartition:

$$F(S) = P(x \leq S) = \int_{-\infty}^{S} p(x)dx$$

Seuillage universel

- soit un seuil $S < \infty$ constant. Alors

$$F(S) < 1 \Rightarrow F^N(S) \rightarrow 0 \text{ pour } N \rightarrow \infty$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage universel

- soit un seuil $S < \infty$ constant. Alors

$$F(S) < 1 \Rightarrow F^N(S) \rightarrow 0 \text{ pour } N \rightarrow \infty$$

- seuil S_N qui doit augmenter avec N !

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage universel

- soit un seuil $S < \infty$ constant. Alors

$$F(S) < 1 \Rightarrow F^N(S) \rightarrow 0 \text{ pour } N \rightarrow \infty$$

- seuil S_N qui doit augmenter avec N !

Théorie des valeurs extrêmes
Etude de la distribution de probabilité des valeurs maximales d'une série de mesures.

- une tempête très violente, connaissant les mesures effectuées durant le siècle dernier
- un été caniculaire, connaissant les temperatures moyennes d'été sur 200 ans
- un coefficient d'ondelette supérieur au seuil

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage universel

- soit un seuil $S < \infty$ constant. Alors

$$F(S) < 1 \Rightarrow F^N(S) \to 0 \text{ pour } N \to \infty$$

- seuil S_N qui doit augmenter avec N !

Théorie des valeurs extrêmes
Etude de la distribution de probabilité des valeurs maximales d'une série de mesures.

- une tempête très violente, connaissant les mesures effectuées durant le siècle dernier
- un été caniculaire, connaissant les temperatures moyennes d'été sur 200 ans
- un coefficient d'ondelette supérieur au seuil

$\to$ tous les coefficients d'ondelette inférieurs au seuil

$\to$ probabilité de la valeur maximale

$$P(M_N \leq S_N)$$

Théorie des extrêmes

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Thèoreme 2 (des valeurs extrêmes) *: Soit* $M_N = \max(w_r(1), w_r(2), \ldots w_r(N))$, *avec* $w_r(k)$ *variables aléatoires i.i.d. Alors:*

$$P\left(a_N(M_N - b_N) \leq x\right) \rightarrow G(x)$$
$$P\left(a_N(M_N - b_N) \leq x\right) \approx G(x) \qquad (25)$$

où $G(x)$ *est une fonction de répartition de type Gumbel, Frechet ou Weibull.*

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Théorie des extrêmes

Thèoreme 2 (des valeurs extrêmes) *: Soit* $M_N = \max(w_r(1), w_r(2), \ldots w_r(N))$, *avec* $w_r(k)$ *variables aléatoires i.i.d. Alors:*

$$P\left(a_N(M_N - b_N) \leq x\right) \rightarrow G(x)$$
$$P\left(a_N(M_N - b_N) \leq x\right) \approx G(x) \qquad (25)$$

où $G(x)$ *est une fonction de répartition de type Gumbel, Frechet ou Weibull.*

Plus particulièrement, si la loi suivie par les variables aléatoires est est une loi normale p, on montre que:

$$\begin{aligned} G(x) &= \exp(-\exp(-x)) \quad \textit{(Gumbel)} \\ a_N &= \sqrt{2\log N} \\ b_N &= \sqrt{2\log N} - \frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}} \end{aligned} \qquad (26)$$

Valeur du seuil

- le membre gauche de (25) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} P\left(a_N(M_N - b_N) \leq x\right) &= P\left(M_N \leq \frac{x}{a_N} + b_N\right) \\ &= P\left(M_N \leq S_N\right), \end{aligned}$$

avec S_N une suite de nombres réels $S_N = x/a_N + b_N$.

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Valeur du seuil

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

- le membre gauche de (25) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} P\left(a_N(M_N - b_N) \leq x\right) &= P\left(M_N \leq \frac{x}{a_N} + b_N\right) \\ &= P\left(M_N \leq S_N\right), \end{aligned}$$

  avec S_N une suite de nombres réels $S_N = x/a_N + b_N$.
- on note $x = (S_N - b_N)a_N$ et on réécrit (25):

$$P\left(M_N \leq S_N\right) \approx G(S_N) = \exp\left(-\exp\left(-a_N(S_N - b_N)\right)\right).$$

Valeur du seuil

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

- le membre gauche de (25) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} P\left(a_N(M_N - b_N) \leq x\right) &= P\left(M_N \leq \frac{x}{a_N} + b_N\right) \\ &= P\left(M_N \leq S_N\right), \end{aligned}$$

  avec S_N une suite de nombres réels $S_N = x/a_N + b_N$.
- on note $x = (S_N - b_N)a_N$ et on réécrit (25):

$$P\left(M_N \leq S_N\right) \approx G(S_N) = \exp\left(-\exp\left(-a_N(S_N - b_N)\right)\right).$$

- en général, $G_{m,s}(x) \rightarrow$ fonction de répartition de Gumbel

$$G_{m,s}(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-m}{s}\right)\right)$$

  avec m la localisation et s la dispersion

Loi de Gumbel

$$G_{m,s}(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-m}{s}\right)\right)$$

Signaux: rappels

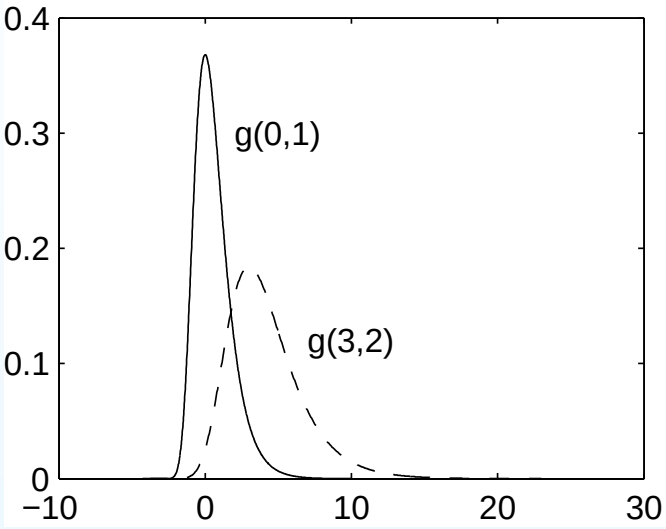
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

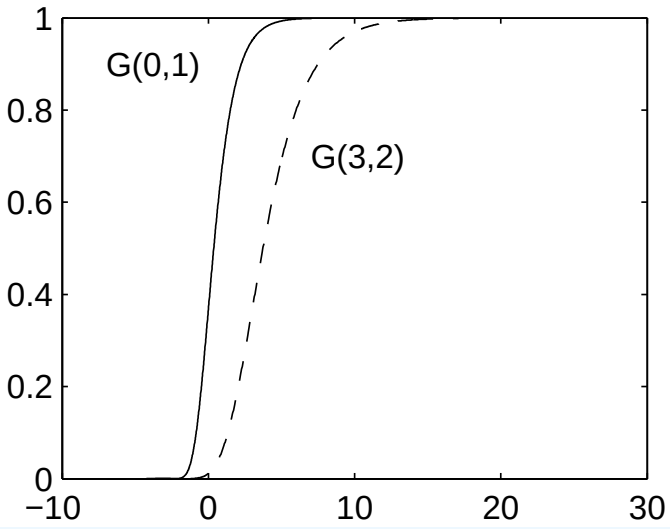
Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



lois de probabilité



fonctions de répartition

Loi de Gumbel

$$G_{m,s}(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-m}{s}\right)\right)$$

Signaux: rappels

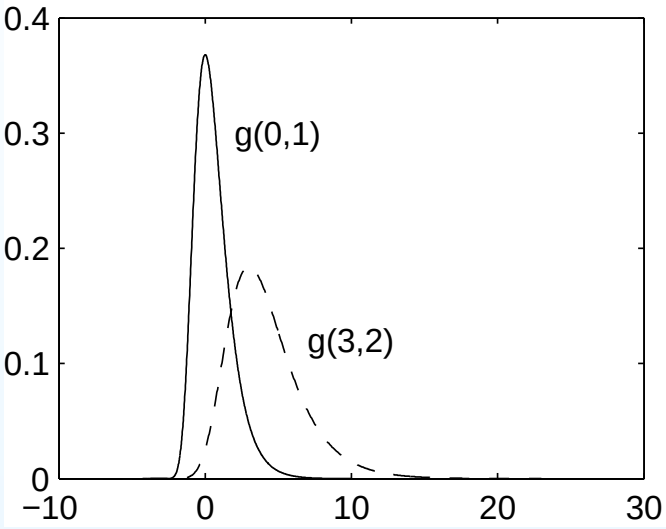
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

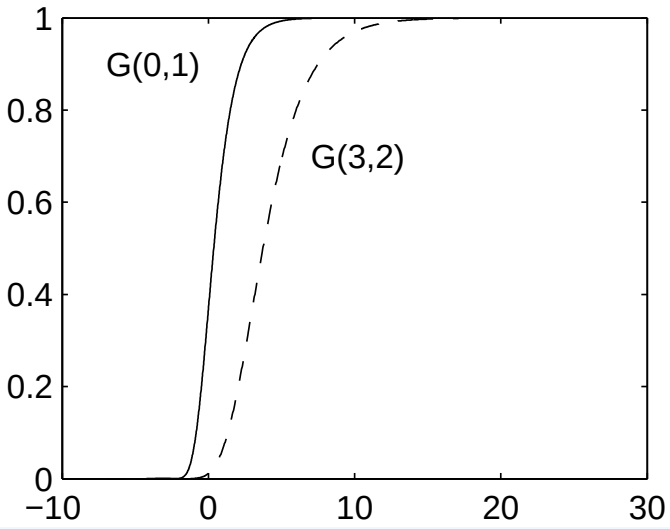
Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



lois de probabilité



fonctions de répartition

$$P\left(M_N \leq S_N\right) \approx G(S_N) = \exp\left(-\exp\left(-a_N(S_N - b_N)\right)\right)$$

$$m = b_N = \sqrt{2\log N} - \frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}}$$

$$s = \frac{1}{a_N} = \frac{1}{\sqrt{2\log N}}$$

Valeur du seuil

- Pour ne pas avoir du bruit supérieur au seuil, on veut que

$$G(S_N) = \exp\left(-\exp\left(-a_N(S_N - b_N)\right)\right) \to 1,$$

ce qui est équivalent à

$$a_N(S_N - b_N) \to \infty$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Valeur du seuil

- Pour ne pas avoir du bruit supérieur au seuil, on veut que

$$G(S_N) = \exp\left(-\exp\left(-a_N(S_N - b_N)\right)\right) \to 1,$$

ce qui est équivalent à

$$a_N(S_N - b_N) \to \infty$$

- cette condition est respectée pour

$$S_N = \sqrt{2\log N}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Valeur du seuil

- Pour ne pas avoir du bruit supérieur au seuil, on veut que

$$G(S_N) = \exp\left(-\exp\left(-a_N(S_N - b_N)\right)\right) \to 1,$$

ce qui est équivalent à

$$a_N(S_N - b_N) \to \infty$$

- cette condition est respectée pour

$$S_N = \sqrt{2\log N}$$

- seuil universel de Donoho et Johnstone

Démonstration - idée

$$a_N(S_N - b_N) = \sqrt{2\log N}\left(S_N - \sqrt{2\log N} + \frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}}\right)$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Démonstration - idée

$$a_N(S_N - b_N) = \sqrt{2\log N}\left(S_N - \sqrt{2\log N} + \frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}}\right)$$

- à l'infini:

$$S_N > \sqrt{2\log N} - \frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}}$$

Démonstration - idée

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

$$a_N(S_N - b_N) = \sqrt{2\log N}\left(S_N - \sqrt{2\log N} + \frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}}\right)$$

- à l'infini:

$$S_N > \sqrt{2\log N} - \frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}}$$

- mais le deuxième terme:

$$\frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}} \to 0 \text{ quand } N \to \infty$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Démonstration - idée

$$a_N(S_N - b_N) = \sqrt{2\log N}\left(S_N - \sqrt{2\log N} + \frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}}\right)$$

- à l'infini:

$$S_N > \sqrt{2\log N} - \frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}}$$

- mais le deuxième terme:

$$\frac{\log\log N + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log N}} \to 0 \text{ quand } N \to \infty$$

- seuil minimal (asymptotiquement optimal)

$$S_N = \sqrt{2\log N}$$

Discussion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

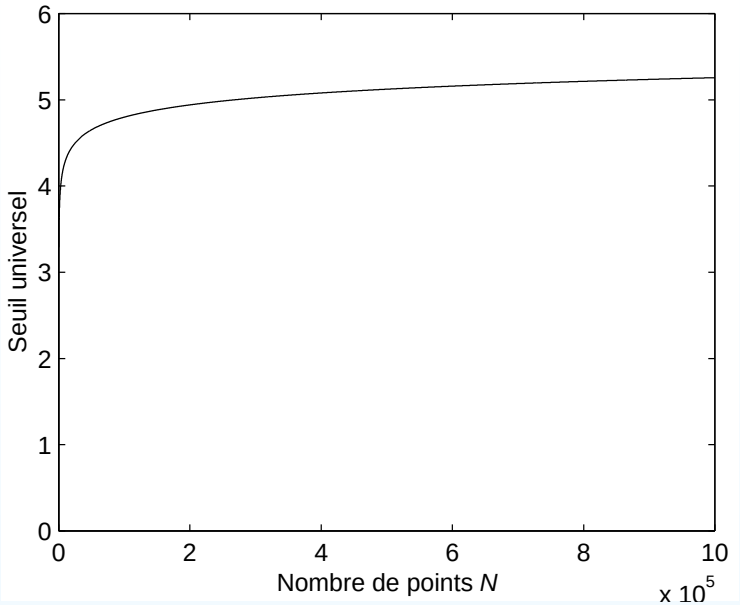
Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Évolution du seuil universel



Discussion

Signaux: rappels

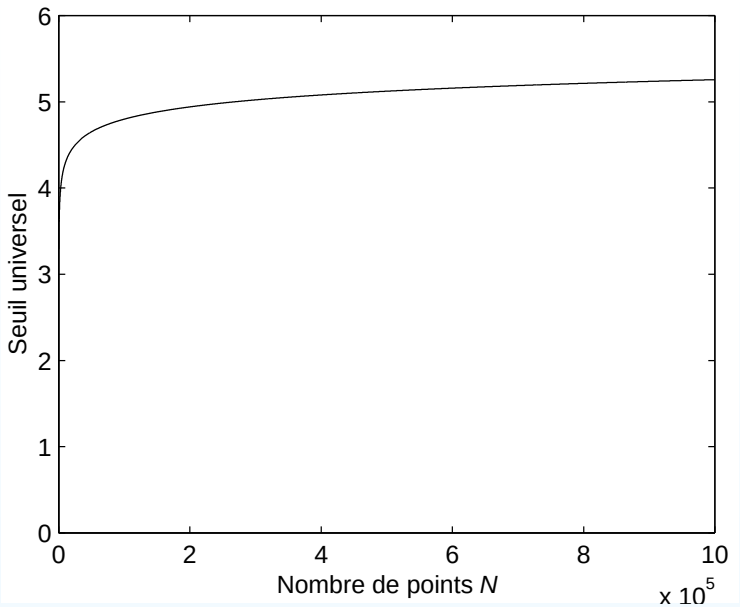
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)

Discussion

Signaux: rappels

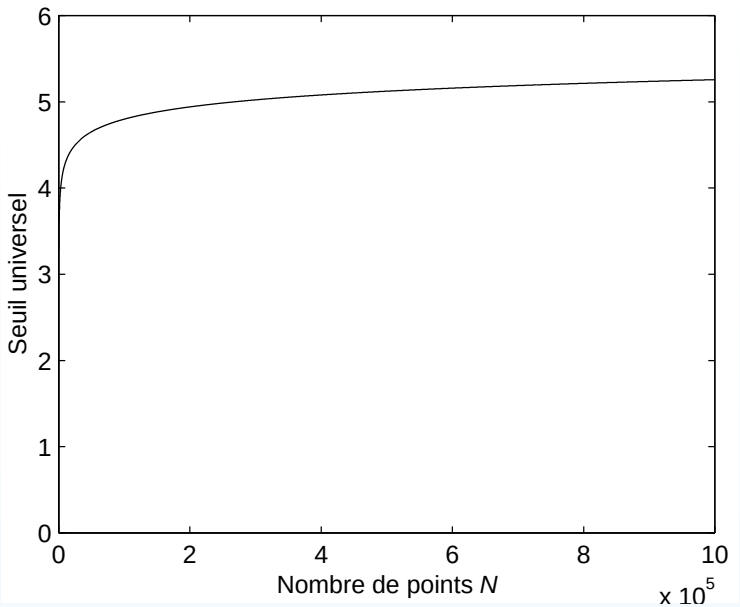
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)
- applicable facilement en pratique

Discussion

Signaux: rappels

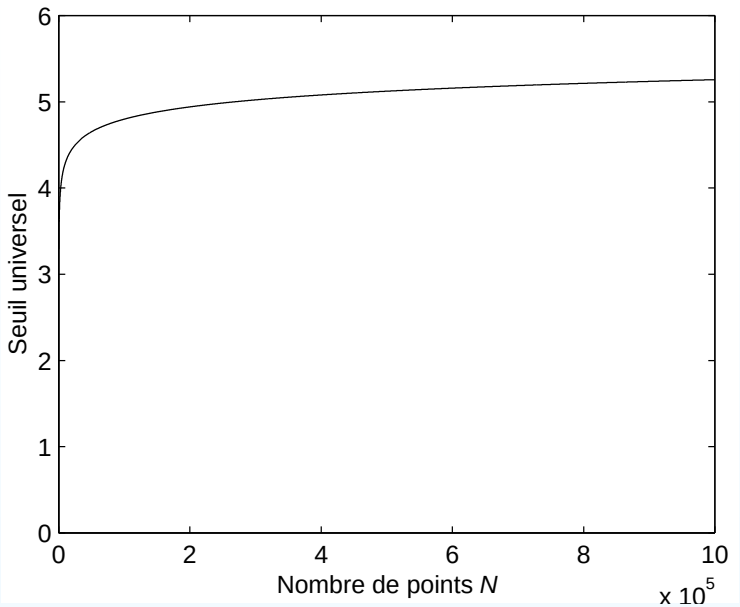
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)
- applicable facilement en pratique
- échantillons issus d'un même tirage

Discussion

Signaux: rappels

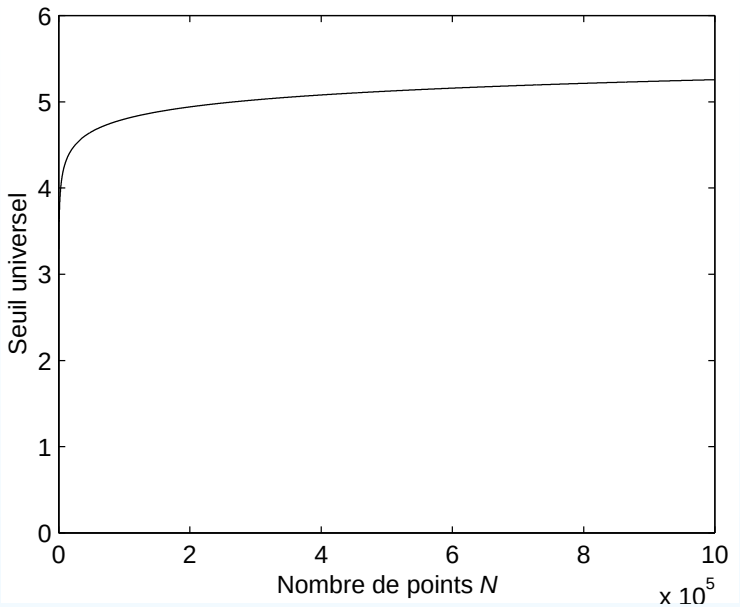
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)
- applicable facilement en pratique
- échantillons issus d'un même tirage
  $\Leftrightarrow$ fréquence d'échantillonnage modifiée (durée=ct.)

Discussion

Signaux: rappels

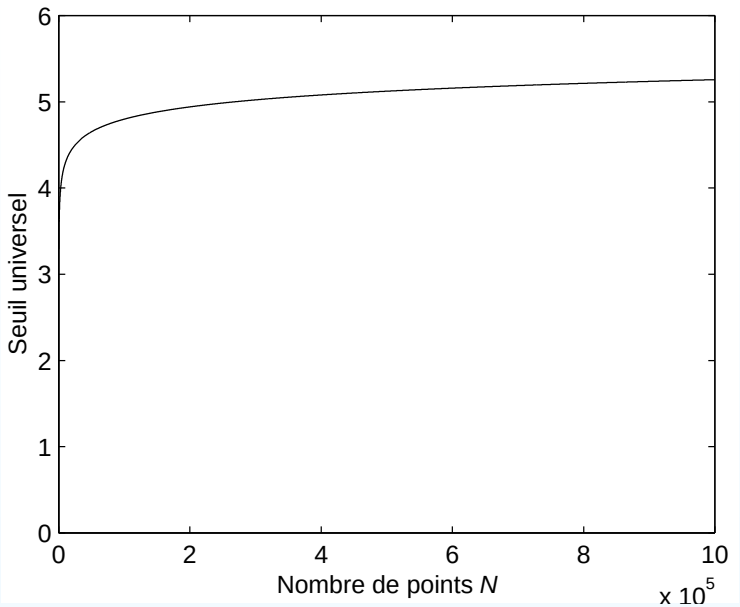
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)
- applicable facilement en pratique
- échantillons issus d'un même tirage
  $\Leftrightarrow$ fréquence d'échantillonnage modifiée (durée=ct.)
  $\Leftrightarrow$ amplitude des coefficients d'ondelette modifiée

Discussion

Signaux: rappels

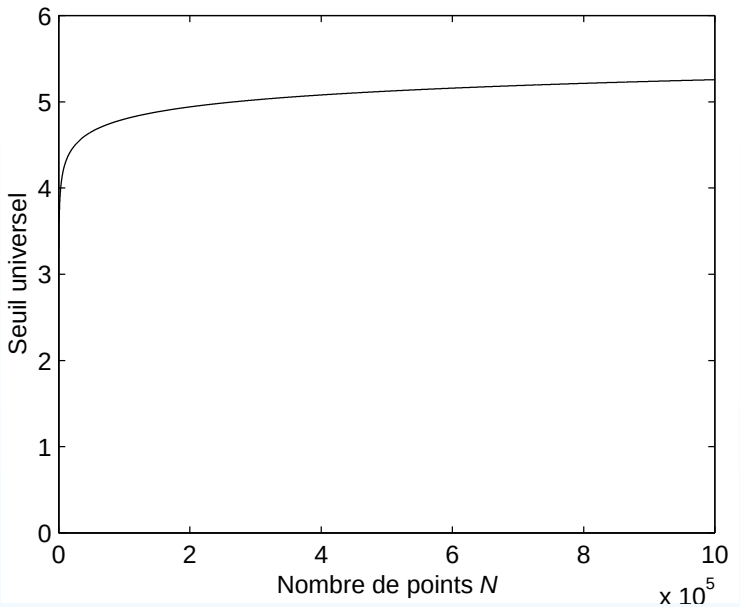
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)
- applicable facilement en pratique
- échantillons issus d'un même tirage
  $\Leftrightarrow$ fréquence d'échantillonnage modifiée (durée=ct.)
  $\Leftrightarrow$ amplitude des coefficients d'ondelette modifiée
  $\Rightarrow$ OK pour N modifié

Discussion

Signaux: rappels

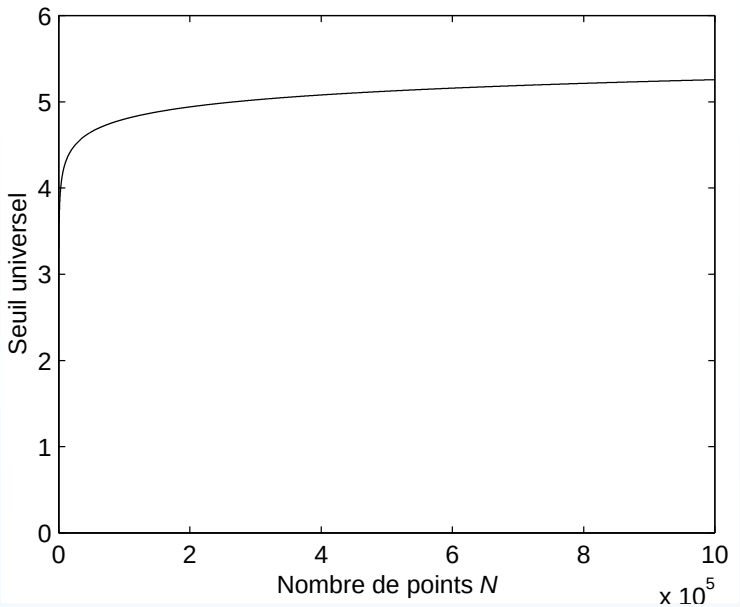
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)
- applicable facilement en pratique
- échantillons issus d'un même tirage
  $\Leftrightarrow$ fréquence d'échantillonnage modifiée (durée=ct.)
  $\Leftrightarrow$ amplitude des coefficients d'ondelette modifiée
  $\Rightarrow$ OK pour N modifié
- échantillons issus des tirages différents

Discussion

Signaux: rappels

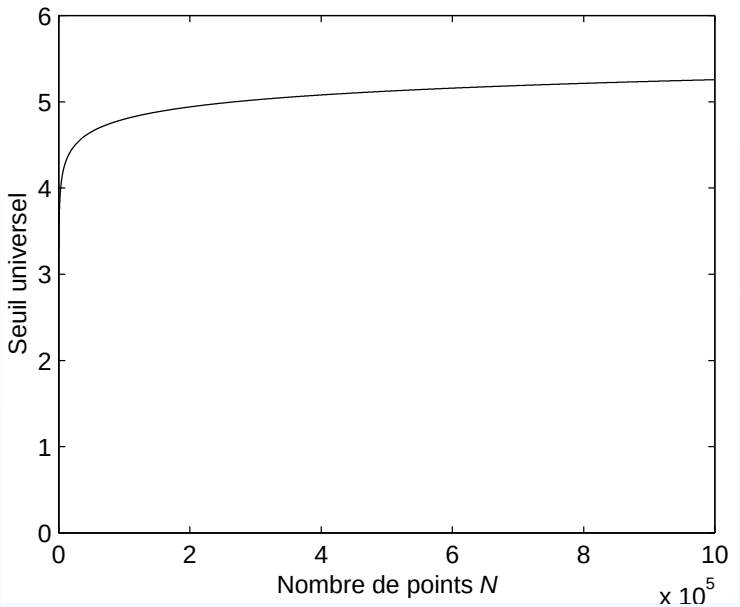
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)
- applicable facilement en pratique
- échantillons issus d'un même tirage
  $\Leftrightarrow$ fréquence d'échantillonnage modifiée (durée=ct.)
  $\Leftrightarrow$ amplitude des coefficients d'ondelette modifiée
  $\Rightarrow$ OK pour N modifié
- échantillons issus des tirages différents
  $\Leftrightarrow$ durée du signal modifiée (f_e=ct.)

Discussion

Signaux: rappels

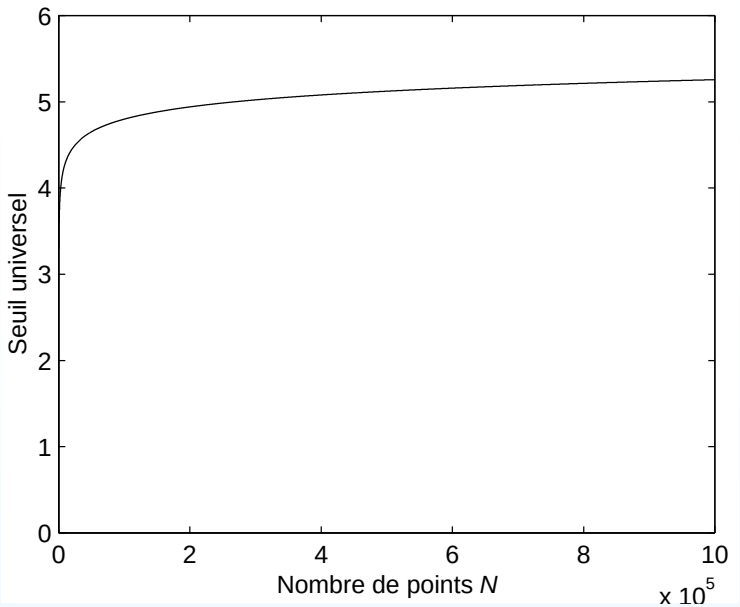
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)
- applicable facilement en pratique
- échantillons issus d'un même tirage
  $\Leftrightarrow$ fréquence d'échantillonnage modifiée (durée=ct.)
  $\Leftrightarrow$ amplitude des coefficients d'ondelette modifiée
  $\Rightarrow$ OK pour N modifié
- échantillons issus des tirages différents
  $\Leftrightarrow$ durée du signal modifiée (f_e=ct.)
  $\Leftrightarrow$ amplitude des coefficients d'ondelette constante

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

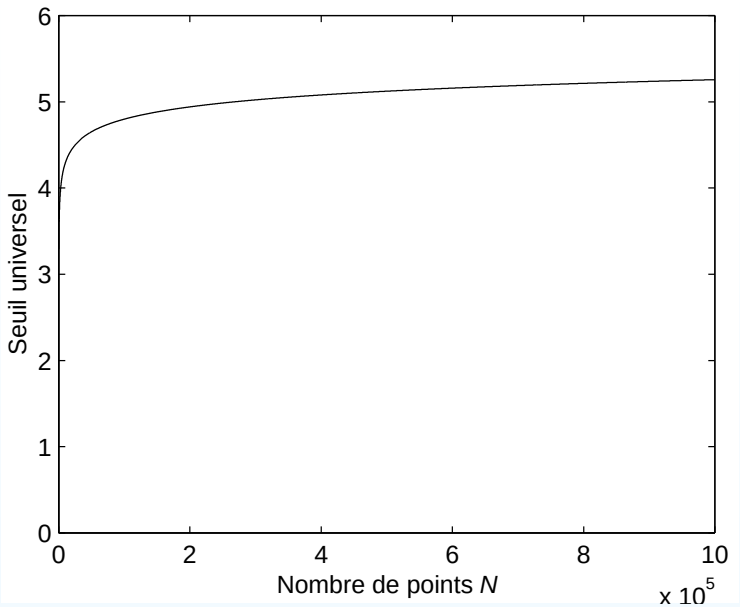
Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Discussion



Évolution du seuil universel

- résultat théorique puissant (bruit $\longrightarrow \infty$?)
- applicable facilement en pratique
- échantillons issus d'un même tirage
  $\Leftrightarrow$ fréquence d'échantillonnage modifiée (durée=ct.)
  $\Leftrightarrow$ amplitude des coefficients d'ondelette modifiée
  $\Rightarrow$ OK pour N modifié
- échantillons issus des tirages différents
  $\Leftrightarrow$ durée du signal modifiée (f_e=ct.)
  $\Leftrightarrow$ amplitude des coefficients d'ondelette constante
  $\Leftrightarrow$ NON pour N modifié

Discussion

Seuil universel $S = \sqrt{2 \log N}$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Discussion

Seuil universel $S = \sqrt{2 \log N}$

Et l'énergie du bruit ?

- on montre que, pour un bruit de $\sigma \neq 1$

$$S = \sigma \sqrt{2 \log N}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Discussion

Seuil universel $S = \sqrt{2 \log N}$

Et l'énergie du bruit ?

- on montre que, pour un bruit de $\sigma \neq 1$

$$S = \sigma \sqrt{2 \log N}$$

- estimation du σ

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Discussion

Seuil universel $S = \sqrt{2 \log N}$

Et l'énergie du bruit ?

- on montre que, pour un bruit de $\sigma \neq 1$

$$S = \sigma \sqrt{2 \log N}$$

- estimation du σ
  1. estimation classique $\hat{\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} w_x(k)^2 = \frac{1}{N} \sum_{j,p} (w_x^{j,p})^2$
     - grands coefficients dus au signal $\rightarrow$ estimation biaisée

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Discussion

Seuil universel $S = \sqrt{2 \log N}$

Et l'énergie du bruit ?

- on montre que, pour un bruit de $\sigma \neq 1$

$$S = \sigma \sqrt{2 \log N}$$

- estimation du σ
  1. estimation classique $\hat{\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} w_x(k)^2 = \frac{1}{N} \sum_{j,p} (w_x^{j,p})^2$
     - grands coefficients dus au signal $\rightarrow$ estimation biaisée
  2. estimation robuste
     - coefficients de l'échelle $j = 1$ (haute fréquence)
     - estimation à partir de la médiane θ:

$$\hat{\sigma} = \frac{\theta_{w^{1,p}}}{0,6745}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme

Seuillage universel, *VisuShrink*, *sqtwolog* (Matlab)

1. Décomposition en ondelettes
2. Estimation robuste du σ sur l'échelle $j = 1$
3. Calcul du seuil universel $S = \sigma\sqrt{2\log N}$
4. Seuillage des coefficients
   - seuillage dur
   - seuillage doux
5. Reconstruction du signal débruité

Algorithme rapide, efficace, facile à retenir
$\Rightarrow$ le plus utilisé.

Seuillage SURE

- soit $\boldsymbol{r} = [r(1), r(2), \ldots r(N)]$ un bruit gaussien blanc stationnaire
  - coefficients d'ondelette $\boldsymbol{w_r} = [w_r(1), w_r(2), \ldots w_r(N)]$ $\rightarrow$ même loi de probabilité
  - $w_r(k) \rightarrow$ variables aléatoires $\mathcal{N}(0, \sigma)$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE

- soit $\boldsymbol{r} = [r(1), r(2), \ldots r(N)]$ un bruit gaussien blanc stationnaire
  - coefficients d'ondelette $\boldsymbol{w_r} = [w_r(1), w_r(2), \ldots w_r(N)]$ $\rightarrow$ même loi de probabilité
  - $w_r(k) \rightarrow$ variables aléatoires $\mathcal{N}(0, \sigma)$
- soit $\boldsymbol{c} = [c(1), c(2), \ldots c(N)]$ le signal informatif
  - coefficients d'ondelette $\boldsymbol{w_c} = [w_c(1), w_c(2), \ldots w_c(N)]$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE

- soit $\boldsymbol{r} = [r(1), r(2), \ldots r(N)]$ un bruit gaussien blanc stationnaire
  - coefficients d'ondelette $\boldsymbol{w_r} = [w_r(1), w_r(2), \ldots w_r(N)]$ $\rightarrow$ même loi de probabilité
  - $w_r(k) \rightarrow$ variables aléatoires $\mathcal{N}(0, \sigma)$
- soit $\boldsymbol{c} = [c(1), c(2), \ldots c(N)]$ le signal informatif
  - coefficients d'ondelette $\boldsymbol{w_c} = [w_c(1), w_c(2), \ldots w_c(N)]$
- soit $\boldsymbol{x} = [x(1), x(2), \ldots x(N)]$ le signal mesuré $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{r}$
  - coefficients d'ondelette $\boldsymbol{w_x} = [w_x(1), w_x(2), \ldots w_x(N)]$ $\boldsymbol{w_x} = \boldsymbol{w_c} + \boldsymbol{w_r}$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE

- soit $\boldsymbol{r} = [r(1), r(2), \ldots r(N)]$ un bruit gaussien blanc stationnaire
  - coefficients d'ondelette $\boldsymbol{w_r} = [w_r(1), w_r(2), \ldots w_r(N)]$ $\rightarrow$ même loi de probabilité
  - $w_r(k) \rightarrow$ variables aléatoires $\mathcal{N}(0, \sigma)$
- soit $\boldsymbol{c} = [c(1), c(2), \ldots c(N)]$ le signal informatif
  - coefficients d'ondelette $\boldsymbol{w_c} = [w_c(1), w_c(2), \ldots w_c(N)]$
- soit $\boldsymbol{x} = [x(1), x(2), \ldots x(N)]$ le signal mesuré $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{r}$
  - coefficients d'ondelette $\boldsymbol{w_x} = [w_x(1), w_x(2), \ldots w_x(N)]$ $\boldsymbol{w_x} = \boldsymbol{w_c} + \boldsymbol{w_r}$
- soit $\hat{\boldsymbol{c}} = [\hat{c}(1), \hat{c}(2), \ldots \hat{c}(N)]$ le signal débruité
  - coefficients d'ondelette $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}} = [\hat{w}_c(1), \hat{w}_c(2), \ldots \hat{w}_c(N)]$
  - débruitage par attenuation des coefficients d'ondelette:

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{w_x} + g(\boldsymbol{w_x}),$$

où $g(\boldsymbol{w_x}) = [g_1(w_x(1)), g_2(w_x(2)), \ldots g_N(w_x(N))]$ une fonction faiblement dérivable

Seuillage SURE

Calculons le risque:

$$\rho_{SURE} = \mathbb{E}\left\{||\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE

Calculons le risque:

$$\begin{aligned}\rho_{SURE} &= \mathbb{E}\left\{||\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\}\end{aligned}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE

Calculons le risque:

$$\begin{aligned}\rho_{SURE} &= \mathbb{E}\left\{||\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{r}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\}\end{aligned}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE

Calculons le risque:

$$\begin{aligned}\rho_{SURE} &= \mathbb{E}\left\{||\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{r}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_r(k) + g_k(w_x(k))\right]^2\right\}\end{aligned}$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Calculons le risque:

$$\begin{aligned}
\rho_{SURE} &= \mathbb{E}\left\{||\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{X}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{X}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{R}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{X}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_r(k) + g_k(w_x(k))\right]^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_r(k)^2 + g_k(w_x(k))^2 + 2w_r(k)g_k(w_x(k))\right]\right\}
\end{aligned}$$

Seuillage SURE

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Calculons le risque:

$$
\begin{aligned}
\rho_{SURE} = & \ \mathbb{E}\left\{||\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
= & \ \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
= & \ \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{r}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
= & \ \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_r(k) + g_k(w_x(k))\right]^2\right\} \\
= & \ \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_r(k)^2 + g_k(w_x(k))^2 + 2w_r(k)g_k(w_x(k))\right]\right\} \\
= & \sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{w_r(k)^2\right\} + \mathbb{E}\left\{g_k(w_x(k))^2\right\} + 2\mathbb{E}\left\{w_r(k)g_k(w_x(k))\right\}\right]
\end{aligned}
$$

Seuillage SURE

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Calculons le risque:

$$
\begin{aligned}
\rho_{SURE} = & \mathbb{E}\left\{||\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
= & \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
= & \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{r}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
= & \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_r(k) + g_k(w_x(k))\right]^2\right\} \\
= & \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_r(k)^2 + g_k(w_x(k))^2 + 2w_r(k)g_k(w_x(k))\right]\right\} \\
= & \sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{w_r(k)^2\right\} + \mathbb{E}\left\{g_k(w_x(k))^2\right\} + 2\mathbb{E}\left\{w_r(k)g_k(w_x(k))\right\}\right] \\
= & \sum_{k=1}^{N}\left[\sigma^2 + \mathbb{E}\left\{g_k(w_x(k))^2\right\} + 2\mathbb{E}\left\{w_r(k)g_k(w_x(k))\right\}\right]
\end{aligned}
$$

Seuillage SURE

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Calculons le risque:

$$
\begin{aligned}
\rho_{SURE} = & \ \mathbb{E}\left\{||\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
= & \ \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
= & \ \mathbb{E}\left\{||\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{r}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{C}}||_2\right\} \\
= & \ \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_r(k) + g_k(w_x(k))\right]^2\right\} \\
= & \ \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[w_r(k)^2 + g_k(w_x(k))^2 + 2w_r(k)g_k(w_x(k))\right]\right\} \\
= & \sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{w_r(k)^2\right\} + \mathbb{E}\left\{g_k(w_x(k))^2\right\} + 2\mathbb{E}\left\{w_r(k)g_k(w_x(k))\right\}\right] \\
= & \sum_{k=1}^{N}\left[\sigma^2 + \mathbb{E}\left\{g_k(w_x(k))^2\right\} + 2\mathbb{E}\left\{w_r(k)g_k(w_x(k))\right\}\right] \\
= & \ N\sigma^2 + \sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{g_k(w_x(k))^2\right\}\right] + 2\sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{w_r(k)g_k(w_x(k))\right\}\right]
\end{aligned}
$$

Seuillage SURE *doux*

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage doux:

$$\hat{w}_c(k) = \begin{cases} w_x(k) - S, & \text{si } w_x(k) \geq S \\ w_x(k) + S, & \text{si } w_x(k) \leq -S \\ 0, & \text{si } |w_x(k)| < S \end{cases}$$

Estimation SURE: $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}} + g(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{x}})$, avec

$$\hat{g}_k((w_x(k))) = \begin{cases} -S, & \text{si } w_x(k) \geq S \\ S, & \text{si } w_x(k) \leq -S \\ -w_x(k), & \text{si } |w_x(k)| < S \end{cases}$$

Soit:

$$\begin{cases} P_1, & \text{le nombre de coeff.} \leq -S \\ P_2, & \text{le nombre de coeff.} \geq S \\ P = P_1 + P_2 \end{cases}$$

Seuillage SURE *doux*

Le risque devient:

$$\rho_{SURE} = N\sigma^2 + \sum_{k=1}^{N} \left[\mathbb{E}\left\{ g_k(w_x(k))^2 \right\} \right] + 2 \sum_{k=1}^{N} \left[\mathbb{E}\left\{ w_r(k) g_k(w_x(k)) \right\} \right]$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage

- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE *doux*

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Le risque devient:

$$\rho_{SURE} = N\sigma^2 + \sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{g_k(w_x(k))^2\right\}\right] + 2\sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{w_r(k)g_k(w_x(k))\right\}\right]$$

$$= N\sigma^2 + \sum_{k=1}^{N}\left[\underbrace{S^2\ldots S^2}_{P_1} \quad \underbrace{\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}}_{N-P_1-P_2} \quad \underbrace{S^2\ldots S^2}_{P_2}\right] +$$

$$2\sum_{k=1}^{N}\left[\underbrace{0\ldots 0}_{P_1} \quad \underbrace{\mathbb{E}\left\{-w_r(k)w_x(k)\right\}}_{N-P_1-P_2} \quad \underbrace{0\ldots 0}_{P_2}\right]$$

Seuillage SURE *doux*

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Le risque devient:

$$\rho_{SURE} = N\sigma^2 + \sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{g_k(w_x(k))^2\right\}\right] + 2\sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{w_r(k)g_k(w_x(k))\right\}\right]$$

$$= N\sigma^2 + \sum_{k=1}^{N}\left[\underbrace{S^2 \ldots S^2}_{P_1} \quad \underbrace{\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}}_{N-P_1-P_2} \quad \underbrace{S^2 \ldots S^2}_{P_2}\right] +$$

$$2\sum_{k=1}^{N}\left[\underbrace{0 \ldots 0}_{P_1} \quad \underbrace{\mathbb{E}\left\{-w_r(k)w_x(k)\right\}}_{N-P_1-P_2} \quad \underbrace{0 \ldots 0}_{P_2}\right]$$

$$= N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}}\left[\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}\right] -$$

$$2\sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}}\left[\mathbb{E}\left\{w_r(k)^2 + w_r(k)w_c(k)\right\}\right]$$

Seuillage SURE *doux*

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Le risque devient:

$$\rho_{SURE} = N\sigma^2 + \sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{g_k(w_x(k))^2\right\}\right] + 2\sum_{k=1}^{N}\left[\mathbb{E}\left\{w_r(k)g_k(w_x(k))\right\}\right]$$

$$= N\sigma^2 + \sum_{k=1}^{N}\left[\underbrace{S^2 \ldots S^2}_{P_1} \quad \underbrace{\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}}_{N-P_1-P_2} \quad \underbrace{S^2 \ldots S^2}_{P_2}\right] +$$

$$2\sum_{k=1}^{N}\left[\underbrace{0 \ldots 0}_{P_1} \quad \underbrace{\mathbb{E}\left\{-w_r(k)w_x(k)\right\}}_{N-P_1-P_2} \quad \underbrace{0 \ldots 0}_{P_2}\right]$$

$$= N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}}\left[\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}\right] -$$

$$2\sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}}\left[\mathbb{E}\left\{w_r(k)^2 + w_r(k)w_c(k)\right\}\right]$$

$$= N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}}\left[\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}\right] - 2(N-P)\sigma^2$$

Seuillage SURE *doux*

Minimiser le risque par rapport à S?

$$\rho_{SURE} = N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}} \left[\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}\right] - 2(N-P)\sigma^2$$

$\Rightarrow$ minimiser une estimation du risque

$$\hat{\rho}_{SURE} = N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}} \left[w_x(k)^2\right] - 2(N-P)\sigma^2$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE *doux*

Minimiser le risque par rapport à S?

$$\rho_{SURE} = N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}} \left[\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}\right] - 2(N-P)\sigma^2$$

$\Rightarrow$ minimiser une estimation du risque

$$\hat{\rho}_{SURE} = N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}} \left[w_x(k)^2\right] - 2(N-P)\sigma^2$$

On ne peut pas dériver (la somme dépend de S), mais:

- Si $S \in [w_x(k) \;\; w_x(k+1)]$, $\hat{\rho}_{SURE}$ augmente avec S

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE *doux*

Minimiser le risque par rapport à S?

$$\rho_{SURE} = N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}} \left[\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}\right] - 2(N-P)\sigma^2$$

$\Rightarrow$ minimiser une estimation du risque

$$\hat{\rho}_{SURE} = N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}} \left[w_x(k)^2\right] - 2(N-P)\sigma^2$$

On ne peut pas dériver (la somme dépend de S), mais:

- Si $S \in [w_x(k) \;\; w_x(k+1)]$, $\hat{\rho}_{SURE}$ augmente avec S

$\Rightarrow$ pour $S \in [w_x(k) \;\; w_x(k+1)]$, $\hat{\rho}_{SURE}$ est minimal si $S = w_x(k)$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE *doux*

Minimiser le risque par rapport à S?

$$\rho_{SURE} = N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}} \left[\mathbb{E}\left\{w_x(k)^2\right\}\right] - 2(N-P)\sigma^2$$

$\Rightarrow$ minimiser une estimation du risque

$$\hat{\rho}_{SURE} = N\sigma^2 + PS^2 + \sum_{\substack{k, \\ |w_x(k)|<S}} \left[w_x(k)^2\right] - 2(N-P)\sigma^2$$

On ne peut pas dériver (la somme dépend de S), mais:

- Si $S \in [w_x(k) \;\; w_x(k+1)]$, $\hat{\rho}_{SURE}$ augmente avec S

$\Rightarrow$ pour $S \in [w_x(k) \;\; w_x(k+1)]$, $\hat{\rho}_{SURE}$ est minimal si $S = w_x(k)$

$\Rightarrow$ on calcule $\hat{\rho}_{SURE}$ pour chaque $S = w_x(k)$ et on choisit LE seuil qui minimise le risque.

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE - algorithmes

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme:

1. Décomposition en ondelettes
2. Estimation robuste de σ sur l'échelle $j = 1$
3. Pour chaque coefficient d'ondelette $w_x(k)$:
   (a) seuil $S_{temp} = w_x(k)$
   (b) seuillage de l'ensemble de coefficients
   (c) estimation du risque $\hat{\rho}_{SURE}$
4. choix du seuil S_S minimisant le risque
5. Seuillage global des coefficients avec S_S
6. Reconstruction du signal débruité

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE - algorithmes

Algorithme:

1. Décomposition en ondelettes
2. Estimation robuste de σ sur l'échelle $j = 1$
3. Pour chaque coefficient d'ondelette $w_x(k)$:
   (a) seuil $S_{temp} = w_x(k)$
   (b) seuillage de l'ensemble de coefficients
   (c) estimation du risque $\hat{\rho}_{SURE}$
4. choix du seuil S_S minimisant le risque
5. Seuillage global des coefficients avec S_S
6. Reconstruction du signal débruité

- adaptatif (dépend des données)
- valeur inférieure au seuil universel S_U
- reconstruction plus "riche"
  - si le signal est rare dans le bruit $\rightarrow$ reconstruction bruité
  - si le signal est dense $\rightarrow$ reconstruction correcte

Seuillage SURE - améliorations

Adaptativité aux données $\rightarrow$ adaptativité par échelle!

Algorithme *RigrSure*:

1. Décomposition en ondelettes
2. Estimation robuste de σ sur l'échelle $j = 1$
3. Pour chaque échelle j:
   (a) Pour chaque coefficient d'ondelette $w_x^{j,p}$:
      i. seuil $S_{temp} = w_x^{j,p}$
      ii. seuillage des coefficients de l'échelle j
      iii. estimation du risque $\hat{\rho}_{SURE,j}$
   (b) choix du seuil $S_{S,j}$ minimisant le risque $\hat{\rho}_{SURE,j}$
   (c) Seuillage des coefficients de l'échelle j avec $S_{S,j}$
4. Reconstruction du signal débruité

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage SURE - améliorations

Signaux: rappels
Représentation des signaux non-stationnaires
Ondelettes orthogonales
Signaux
Bruit
Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme heuristique *HeurSure, SureShrink*:

- si le signal est "dense" $\rightarrow$ seuillage *RigrSure* S_S
- si le signal est rare (creux) $\rightarrow$ seuillage universel S_U

$$S = \begin{cases} S_U, & \text{si } ||x||_2 - \sigma^2 \leq \epsilon_N \\ S_S, & \text{si } ||x||_2 - \sigma^2 > \epsilon_N \end{cases}$$

$$\epsilon_N = \sigma^2 \sqrt{\frac{(\log N)^3}{N}}$$

$+$ **Estimation du bruit échelle par échelle (σ_j)**

Comparaison $S_U - S_S$

1. N augmente par l'augmentation de la durée

Signaux: rappels

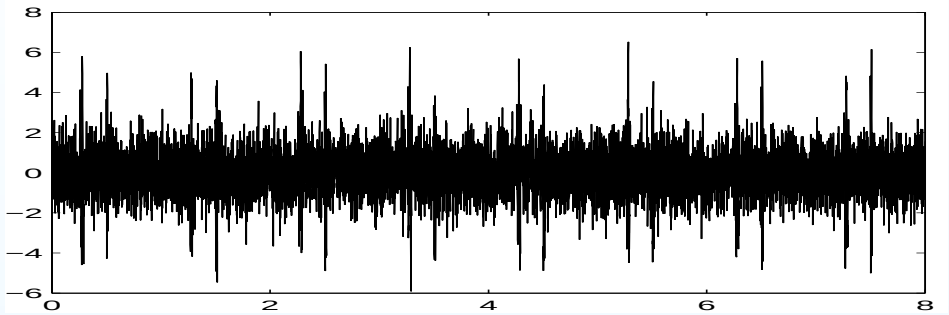
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

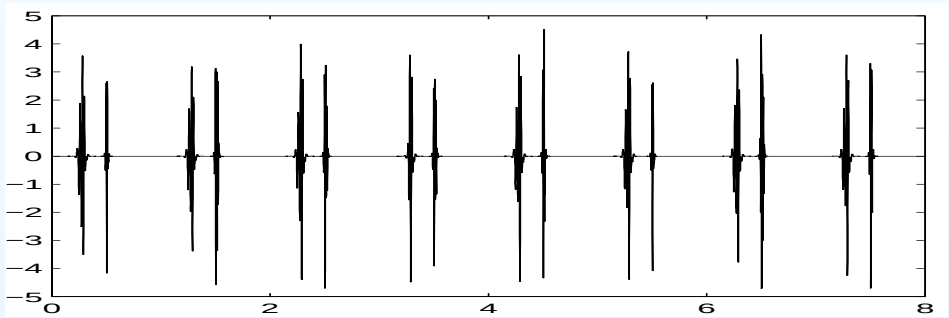
Signaux

Bruit

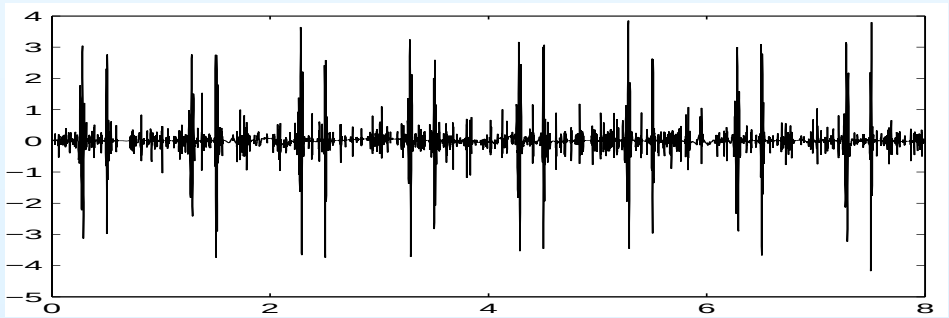
Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Signal bruité, durée 8 s, $f_e = 1024$ Hz.



Signal débruité, seuil universel (EQM ↗)



Signal débruité, seuil SURE (EQM ↘)

Comparaison $S_U - S_S$ - durée augmentée

Signaux: rappels

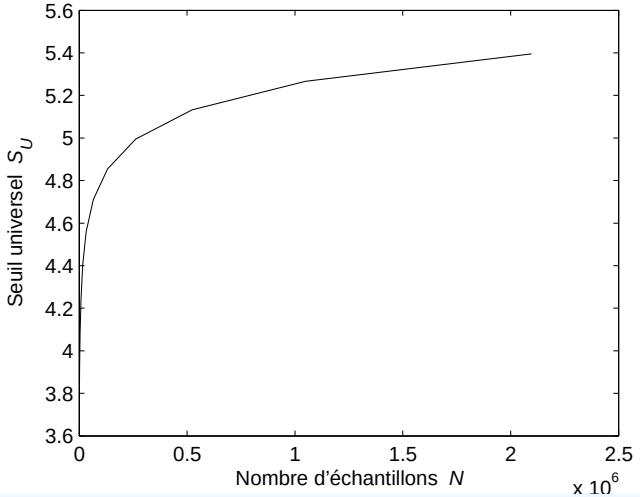
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

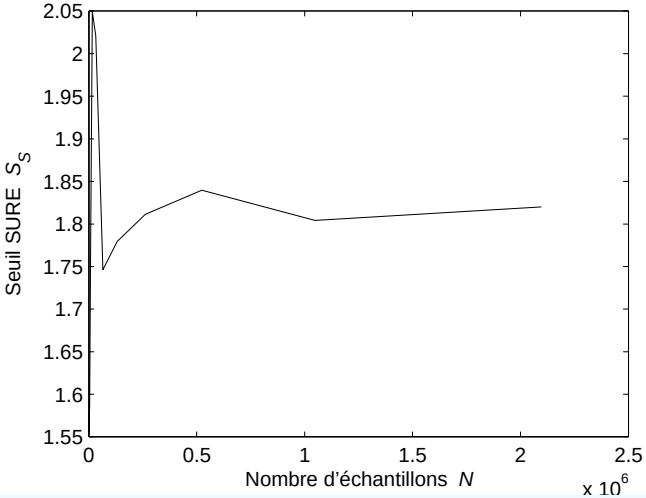
Signaux

Bruit

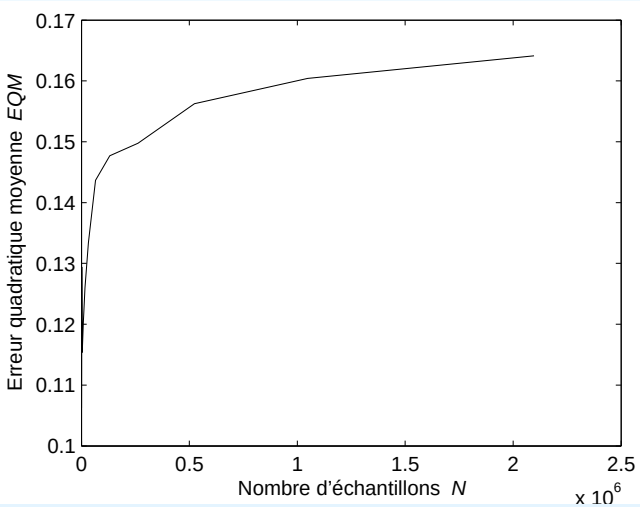
Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



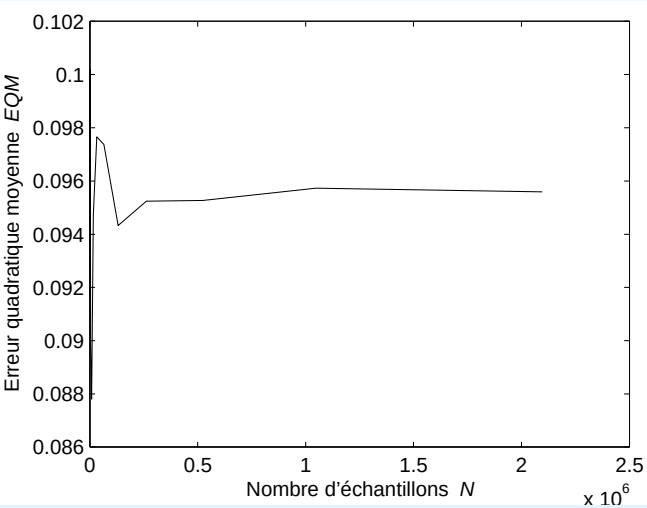
Évolution seuil universel



Évolution seuil SURE



Évolution EQM - seuil universel (dur)



Évolution EQM - seuil SURE (doux)

Comparaison $S_U - S_S$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

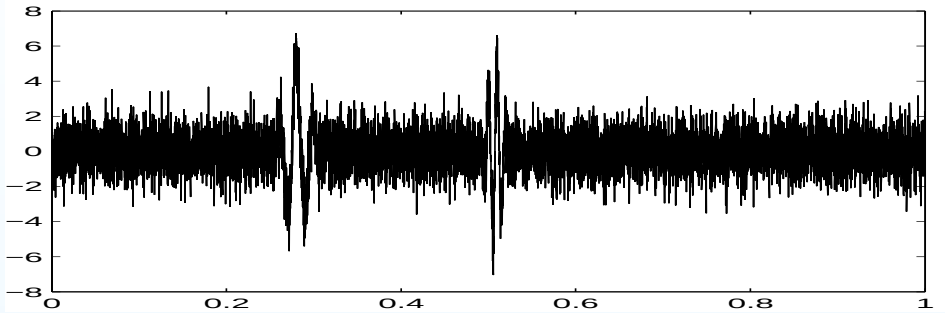
Ondelettes orthogonales

Signaux

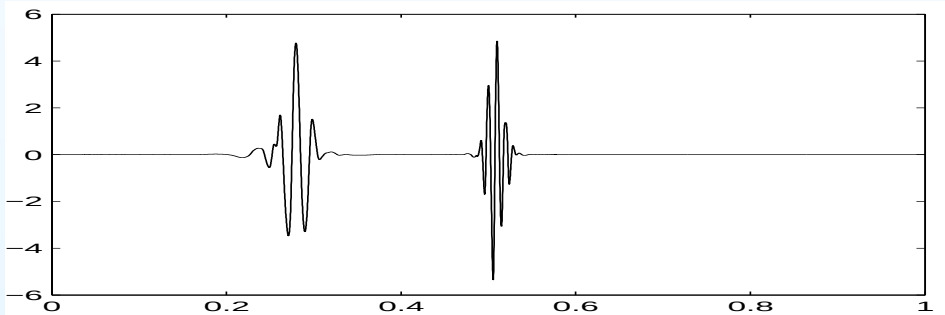
Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

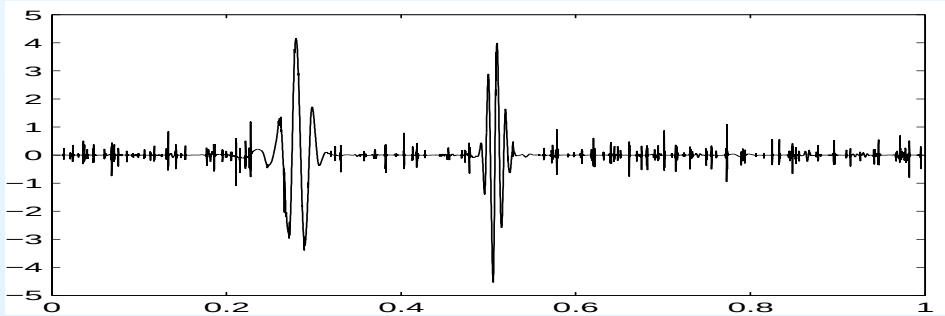
2. N augmente par l'augmentation de f_e



Signal bruité, durée 1 s, $f_e = 8192$ Hz.



Signal débruité, seuil universel (EQM ↘)



Signal débruité, seuil SURE (EQM ↗)

Comparaison $S_U - S_S$ - f_e augmentée

Signaux: rappels

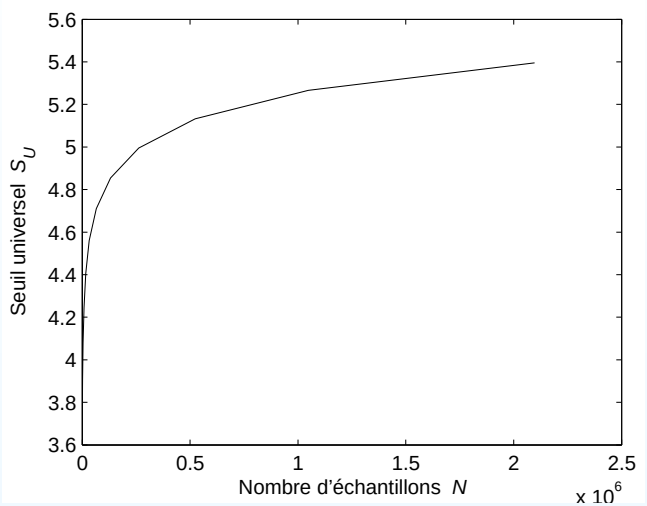
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

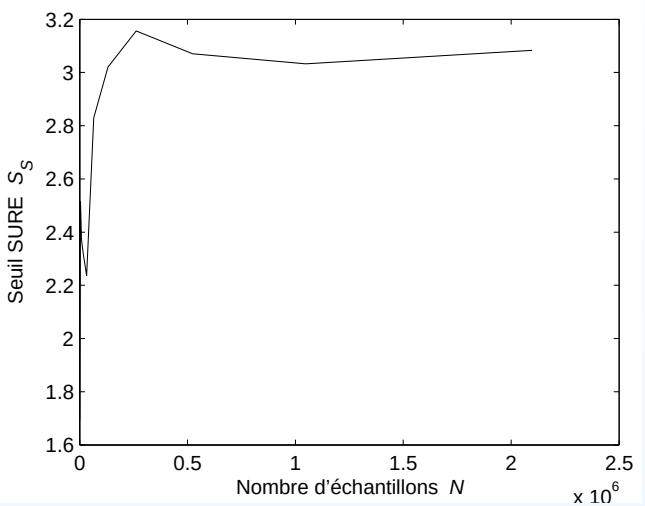
Signaux

Bruit

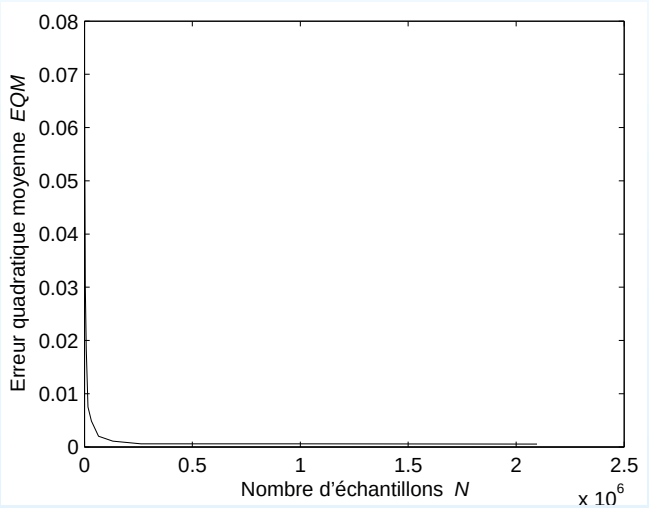
Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



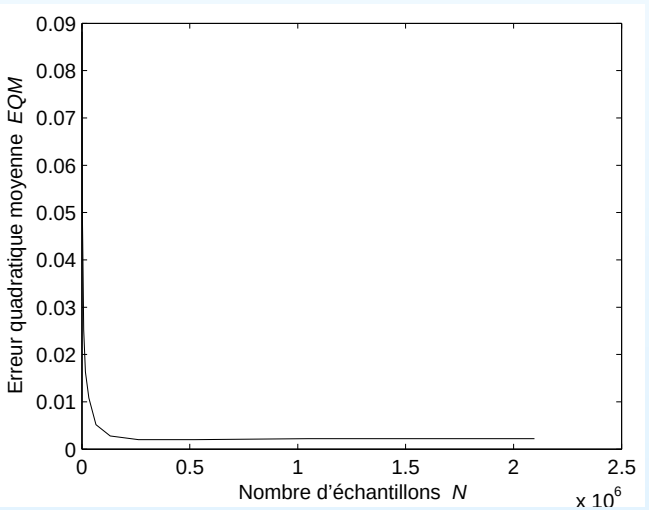
Évolution seuil universel



Évolution seuil SURE



Évolution EQM - seuil universel (dur)



Évolution EQM - seuil SURE (doux)

Seuillage par valeurs aberrantes

Principe: détecter les (trop) grandes valeurs dans une série de mesures $\longrightarrow$ définition statistique du “trop grand”

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d’évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $s_U - s_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage par valeurs aberrantes

Principe: détecter les (trop) grandes valeurs dans une série de mesures $\longrightarrow$ définition statistique du "trop grand"

Test d'hypothèses:

- soit une série de mesures $\boldsymbol{w_x = w_c + w_r}$ et, pour chaque élément $w_x(k)$, faisons les hypothèses:

  H_0: l'élément $w_x(k)$ est issu du bruit $\boldsymbol{w_r}$
  $\Leftrightarrow$ petite valeur absolue

  H_1: l'élément $w_x(k)$ n'est pas issu du bruit $\boldsymbol{w_r}$
  $\Leftrightarrow$ grande valeur absolue

- les coefficients significatifs du signal sont peu nombreux
  $\Rightarrow$ la probabilité que H_1 soit vraie $= \alpha \ll 1$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage par valeurs aberrantes

Principe: détecter les (trop) grandes valeurs dans une série de mesures $\longrightarrow$ définition statistique du "trop grand"

Test d'hypothèses:

- soit une série de mesures $\boldsymbol{w_x = w_c + w_r}$ et, pour chaque élément $w_x(k)$, faisons les hypothèses:

H_0: l'élément $w_x(k)$ est issu du bruit $\boldsymbol{w_r}$
$\Leftrightarrow$ petite valeur absolue

H_1: l'élément $w_x(k)$ n'est pas issu du bruit $\boldsymbol{w_r}$
$\Leftrightarrow$ grande valeur absolue

- les coefficients significatifs du signal sont peu nombreux
$\Rightarrow$ la probabilité que H_1 soit vraie $= \alpha \ll 1$

Choix du α:

- choix classiques: $\alpha \approx 0,01, \quad 0,05$
- si distribution gaussienne:

$$\alpha \approx 0,01 \Leftrightarrow \text{ seuil } S_V = 3\sigma$$
$$\alpha \approx 0,05 \Leftrightarrow \text{ seuil } S_V = 2\sigma$$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage par valeurs aberrantes

Algorithme classique:

1. Décomposition en ondelettes
2. Estimation *classique* de σ sur l'ensemble des coefficients

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} w_x(k)^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j,p} (w_x^{j,p})^2}$$

3. Choix du seuil $S_V = F_a\hat{\sigma}$ (classique: $F_a = 3$)
4. Seuillage global des coefficients d'ondelette
5. Reconstruction du signal débruité

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Seuillage par valeurs aberrantes

Algorithme classique:

1. Décomposition en ondelettes
2. Estimation *classique* de σ sur l'ensemble des coefficients

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} w_x(k)^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j,p} (w_x^{j,p})^2}$$

3. Choix du seuil $S_V = F_a\hat{\sigma}$ (classique: $F_a = 3$)
4. Seuillage global des coefficients d'ondelette
5. Reconstruction du signal débruité

Problème de robustesse de l'estimation de σ!

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Amélioration de la robustesse

Facteurs qui influencent l'estimation du σ:

- taille de l'échantillon
  $\longrightarrow$ applicable pour N grand

- valeurs aberrantes
  $\longrightarrow$ forme quadratique sensible aux grandes valeurs
  $\Rightarrow$ nécessité de détection et élimination des valeurs aberrantes
  $\Rightarrow$ estimation robuste de σ
  $\Leftrightarrow$ débruitage !

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Amélioration de la robustesse

Facteurs qui influencent l'estimation du σ:

- taille de l'échantillon
  $\longrightarrow$ applicable pour N grand

- valeurs aberrantes
  $\longrightarrow$ forme quadratique sensible aux grandes valeurs
  $\Rightarrow$ nécessité de détection et élimination des valeurs aberrantes
  $\Rightarrow$ estimation robuste de σ
  $\Leftrightarrow$ débruitage !

Solutions

- estimations basées sur des statistiques de rang (*rank statistics*)
  $\longrightarrow$ médiane, percentiles

- algorithmes itératifs

- ...

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithmes itératifs

Principe:

1. Choix d'un seuil pour détecter les grandes valeurs
2. Decomposition en ondelettes
3. Seuillage des coefficients d'ondelettes
4. Reconstruction d'une première estimation du signal ET du bruit résiduel
5. Calcul d'un critère d'efficacité du débruitage
6. Si le critère n'est pas atteint, refaire les pas 2 à 5 *sur le bruit résiduel*
7. Calculer l'estimation finale du signal débruité comme la somme des estimations de chaque itération

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithmes itératifs

Principe:

1. Choix d'un seuil pour détecter les grandes valeurs
2. Decomposition en ondelettes
3. Seuillage des coefficients d'ondelettes
4. Reconstruction d'une première estimation du signal ET du bruit résiduel
5. Calcul d'un critère d'efficacité du débruitage
6. Si le critère n'est pas atteint, refaire les pas 2 à 5 *sur le bruit résiduel*
7. Calculer l'estimation finale du signal débruité comme la somme des estimations de chaque itération

Avantage:

$\longrightarrow$ extraction maximale de l'information contenue dans le signal ($\Leftrightarrow$ estimation robuste du bruit)

Inconvénients:

$\longrightarrow$ risque de reconstruction bruitée

$\longrightarrow$ paramètres utilisateurs à régler (seuil et critère d'arrêt)

Algorithme WTST-NST

Signaux: rappels

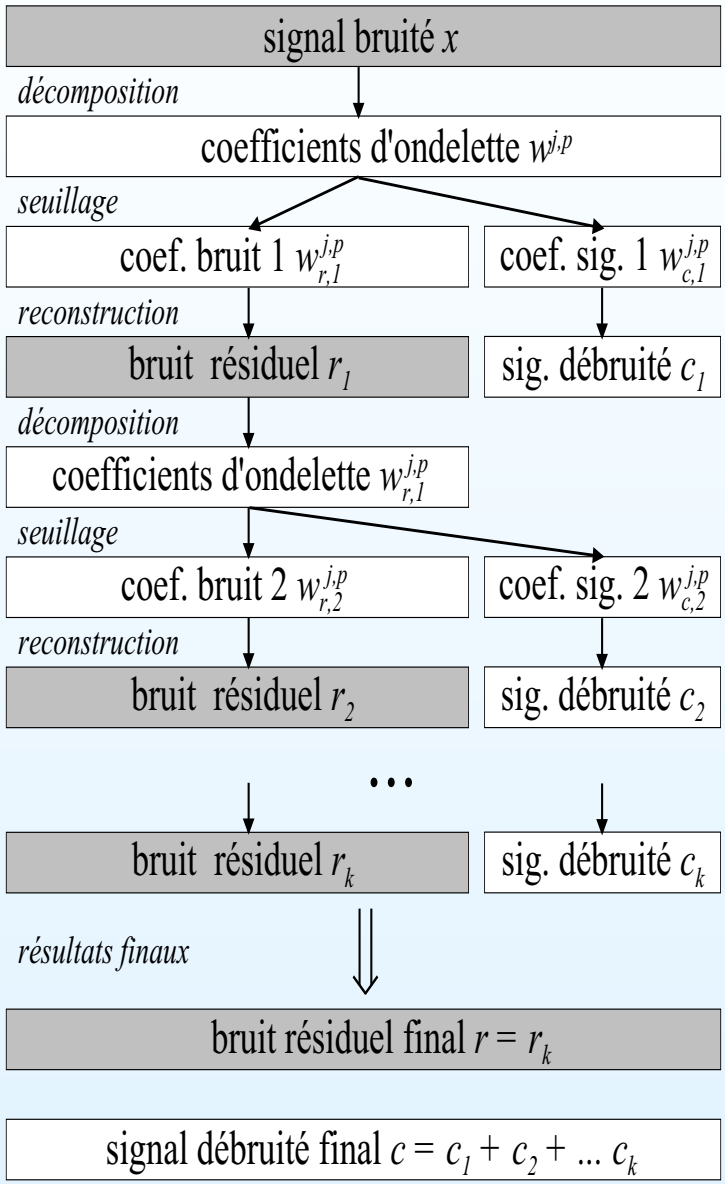
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Wavelet Transform Stationary - Nonstationary Filter

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

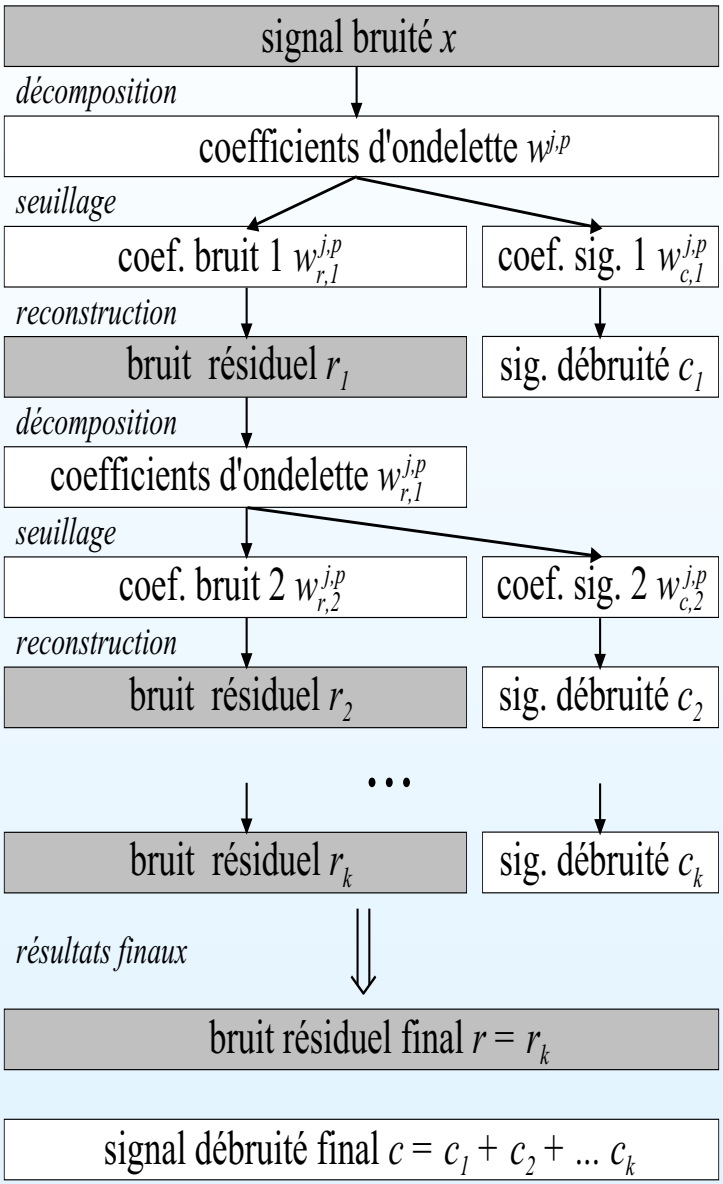
Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST



Wavelet Transform Stationary - Nonstationary Filter

- **Seuil:** $S_{l+1} = F_a \sigma_l$, où
  - l est l'itération,
  - F_a est un paramètre de réglage utilisateur,
  - σ_l est l'écart-type du bruit à l'itération l

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

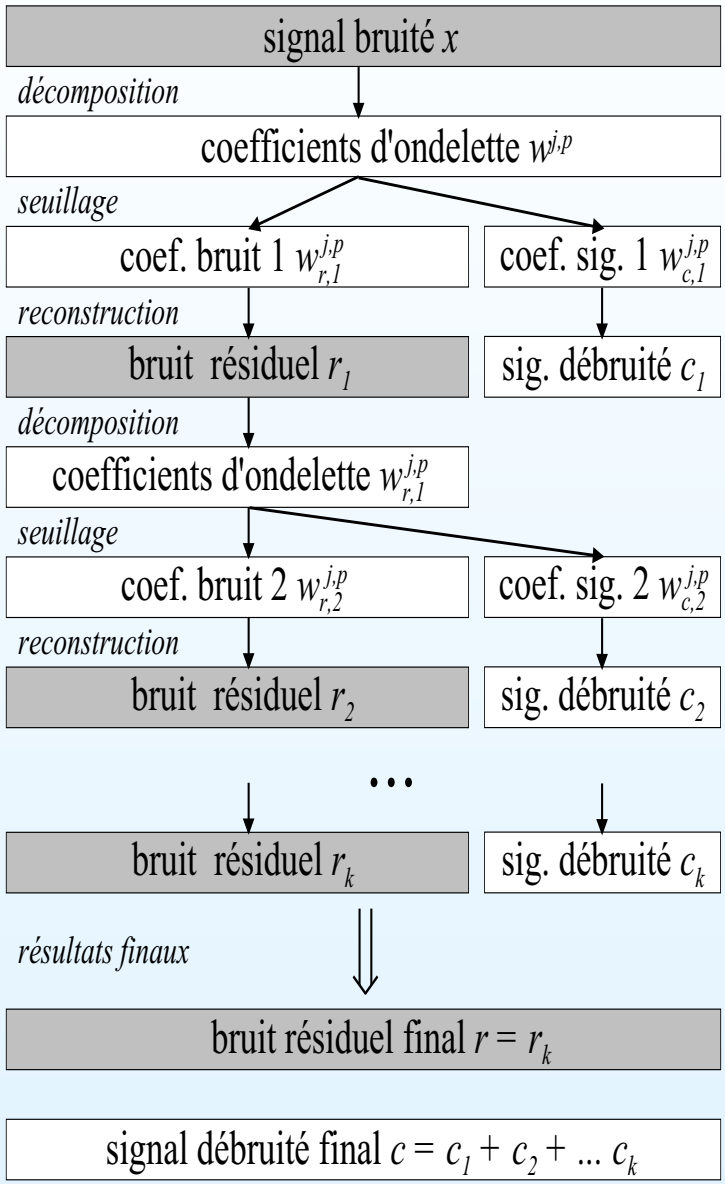
Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST



Wavelet Transform Stationary - Nonstationary Filter

- **Seuil:** $S_{l+1} = F_a \sigma_l$, où
  - l est l'itération,
  - F_a est un paramètre de réglage utilisateur,
  - σ_l est l'écart-type du bruit à l'itération l
- **Critère d'arrêt:**
  $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2 \leq \varepsilon$
  - $\|\boldsymbol{r}_l\|_2$ est l'énergie du bruit résiduel à l'itération l,
  - ε est un paramètre de réglage utilisateur,

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

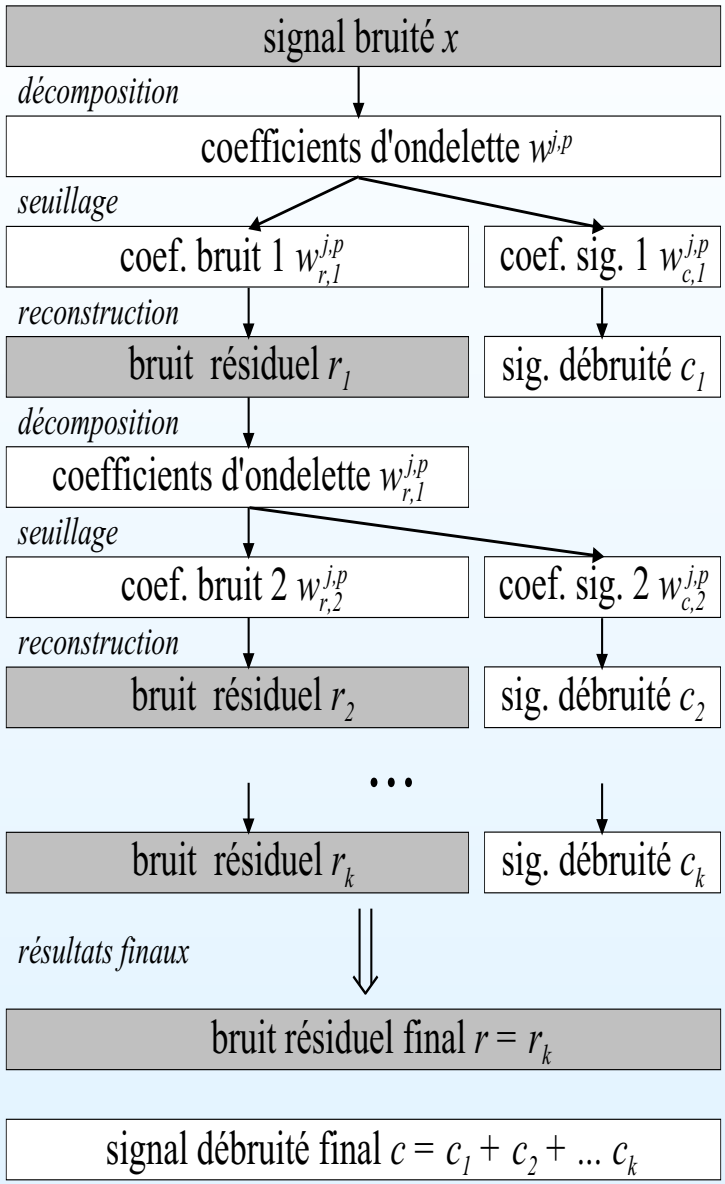
Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST



Wavelet Transform Stationary - Nonstationary Filter

- **Seuil:** $S_{l+1} = F_a \sigma_l$, où
  - l est l'itération,
  - F_a est un paramètre de réglage utilisateur,
  - σ_l est l'écart-type du bruit à l'itération l
- **Critère d'arrêt:**
  $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2 \leq \varepsilon$
  - $\|\boldsymbol{r}_l\|_2$ est l'énergie du bruit résiduel à l'itération l,
  - ε est un paramètre de réglage utilisateur,
- **Choix classiques des paramètres:**
  - $F_a = 3$,
  - $\varepsilon = 10^{-3}$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST

1. Choix du paramètre utilisateur F_a pour le calcul du seuil
2. Choix du paramètre utilisateur ε pour le critère d'arrêt
3. Initialisation (itération $l = 1$):
   - signal débruité $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{0}$
   - bruit résiduel $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{x}$
4. Répète:
   (a) Décomposition en ondelettes du $\boldsymbol{r}_l$
   (b) Seuillage des coefficients $\boldsymbol{w}_{r,l}$ pour obtenir:
   - $w_{c,l+1}(k) = \begin{cases} w_{r,l}(k), & \text{si } w_{r,l}(k) \geq F_a \sigma_l \\ 0, & \text{si } w_{r,l}(k) < F_a \sigma_l \end{cases}$
   - $w_{r,l+1}(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } w_{r,l}(k) \geq F_a \sigma_l \\ w_{r,l}(k), & \text{si } w_{r,l}(k) < F_a \sigma_l \end{cases}$

   (c) Reconstruction des estimations $\hat{\boldsymbol{c}}_{l+1}$ et $\hat{\boldsymbol{r}}_{l+1}$
   (d) Calcul du critère d'arrêt $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2$.
   Tant que $STC_{l+1} > \varepsilon$
5. Calcul de l'estimation du signal débruité $\hat{\boldsymbol{c}} = \sum_l \boldsymbol{c}_l$

Algorithme WTST-NST - améliorations

Propriétés des décompositions orthonormées:

1. **Orthogonalité:**
   $\rightarrow$ conservation de l'énergie: $\|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ critère d'arrêt:
   $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du bruit résiduel à chaque itération inutile

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST - améliorations

Propriétés des décompositions orthonormées:

1. **Orthogonalité:**
   $\rightarrow$ conservation de l'énergie: $\|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ critère d'arrêt:
   $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du bruit résiduel à chaque itération inutile
2. **Linéarité:**
   $\hat{\boldsymbol{c}} = \sum_l \boldsymbol{c}_l = \sum_l [\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}_{c,l}] = \boldsymbol{W}^{-1}\sum_l \boldsymbol{w}_{c,l}$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du signal informatif à chaque itération inutile

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST - améliorations

Propriétés des décompositions orthonormées:

1. **Orthogonalité:**
   $\rightarrow$ conservation de l'énergie: $\|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ critère d'arrêt:
   $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du bruit résiduel à chaque itération inutile
2. **Linéarité:**
   $\hat{\boldsymbol{c}} = \sum_l \boldsymbol{c}_l = \sum_l [\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}_{c,l}] = \boldsymbol{W}^{-1}\sum_l \boldsymbol{w}_{c,l}$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du signal informatif à chaque itération inutile
3. **Approche de point fixe:**

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST - améliorations

Propriétés des décompositions orthonormées:

1. **Orthogonalité:**
   $\rightarrow$ conservation de l'énergie: $\|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ critère d'arrêt:
   $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du bruit résiduel à chaque itération inutile
2. **Linéarité:**
   $\hat{\boldsymbol{c}} = \sum_l \boldsymbol{c}_l = \sum_l [\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}_{c,l}] = \boldsymbol{W}^{-1}\sum_l \boldsymbol{w}_{c,l}$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du signal informatif à chaque itération inutile
3. **Approche de point fixe:**
   - $S_l = F_a\sigma_l = F_a\sigma_{[\boldsymbol{w}_{r,l}]} = F_a\sigma_{[\boldsymbol{w}_{r,l-1}<S_{l-1}]} = f(S_{l-1})$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST - améliorations

Propriétés des décompositions orthonormées:

1. **Orthogonalité:**
   $\rightarrow$ conservation de l'énergie: $\|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ critère d'arrêt:
   $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du bruit résiduel à chaque itération inutile
2. **Linéarité:**
   $\hat{\boldsymbol{c}} = \sum_l \boldsymbol{c}_l = \sum_l [\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}_{c,l}] = \boldsymbol{W}^{-1}\sum_l \boldsymbol{w}_{c,l}$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du signal informatif à chaque itération inutile
3. **Approche de point fixe:**
   - $S_l = F_a\sigma_l = F_a\sigma_{[\boldsymbol{w}_{r,l}]} = F_a\sigma_{[\boldsymbol{w}_{r,l-1}<S_{l-1}]} = f(S_{l-1})$
   - existence du point fixe (convergence):
     $S_l = S_{l-1} = f(S_{l-1}) \Leftrightarrow \sigma_l = \sigma_{l-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{w}_{r,l} = \boldsymbol{w}_{r,l-1} \Leftrightarrow \varepsilon = 0$

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST - améliorations

Propriétés des décompositions orthonormées:

1. **Orthogonalité:**
   $\rightarrow$ conservation de l'énergie: $\|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ critère d'arrêt:
   $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du bruit résiduel à chaque itération inutile
2. **Linéarité:**
   $\hat{\boldsymbol{c}} = \sum_l \boldsymbol{c}_l = \sum_l [\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}_{c,l}] = \boldsymbol{W}^{-1}\sum_l \boldsymbol{w}_{c,l}$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du signal informatif à chaque itération inutile
3. **Approche de point fixe:**
   - $S_l = F_a\sigma_l = F_a\sigma_{[\boldsymbol{w}_{r,l}]} = F_a\sigma_{[\boldsymbol{w}_{r,l-1}<S_{l-1}]} = f(S_{l-1})$
   - existence du point fixe (convergence):
     $S_l = S_{l-1} = f(S_{l-1}) \Leftrightarrow \sigma_l = \sigma_{l-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{w}_{r,l} = \boldsymbol{w}_{r,l-1} \Leftrightarrow \varepsilon = 0$
   - élimination d'un paramètre utilisateur $\varepsilon = 0$!

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Algorithme WTST-NST - améliorations

Propriétés des décompositions orthonormées:

1. **Orthogonalité:**
   $\rightarrow$ conservation de l'énergie: $\|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ critère d'arrêt:
   $STC_{l+1} = \|\boldsymbol{r}_{l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{r}_l\|_2 = \|\boldsymbol{w}_{r,l+1}\|_2 - \|\boldsymbol{w}_{r,l}\|_2$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du bruit résiduel à chaque itération inutile
2. **Linéarité:**
   $\hat{\boldsymbol{c}} = \sum_l \boldsymbol{c}_l = \sum_l [\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}_{c,l}] = \boldsymbol{W}^{-1}\sum_l \boldsymbol{w}_{c,l}$
   $\Rightarrow$ Reconstruction du signal informatif à chaque itération inutile
3. **Approche de point fixe:**
   - $S_l = F_a\sigma_l = F_a\sigma_{[\boldsymbol{w}_{r,l}]} = F_a\sigma_{[\boldsymbol{w}_{r,l-1}<S_{l-1}]} = f(S_{l-1})$
   - existence du point fixe (convergence):
     $S_l = S_{l-1} = f(S_{l-1}) \Leftrightarrow \sigma_l = \sigma_{l-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{w}_{r,l} = \boldsymbol{w}_{r,l-1} \Leftrightarrow \varepsilon = 0$
   - élimination d'un paramètre utilisateur $\varepsilon = 0$!
   - conditions d'existence du point fixe !

Approche de point fixe

Signaux: rappels

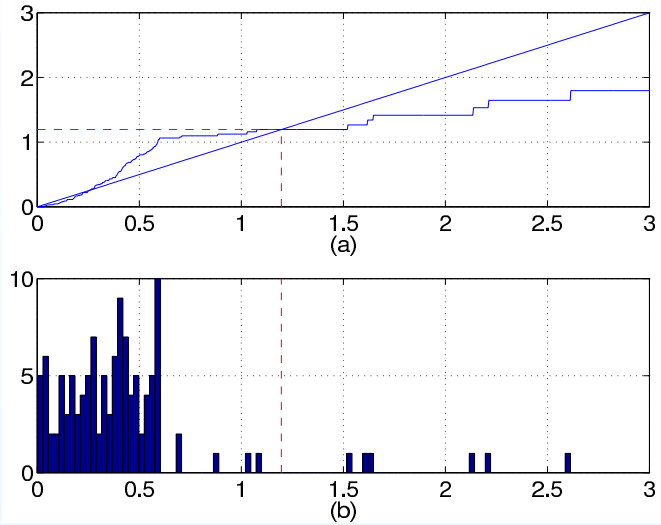
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Evolution du seuil:

- **Seuillage classique:** $F_a = 3$

Approche de point fixe

Signaux: rappels

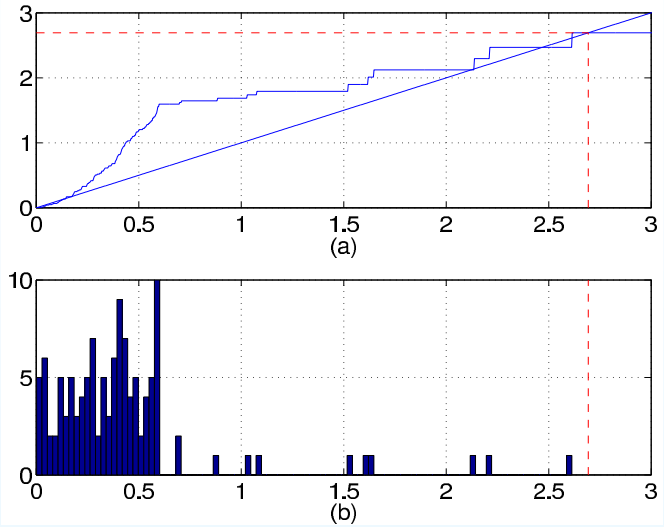
Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion



Evolution du seuil:

- **Seuillage classique:** $F_a = 3$
- **Seuillage fort:** $F_a = 4.5$
  - risque de surestimation de la puissance du bruit
  - "il n'y a rien d'informatif dans cette mesure !"
  - adapté si le signal est creux (rare dans le bruit)

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

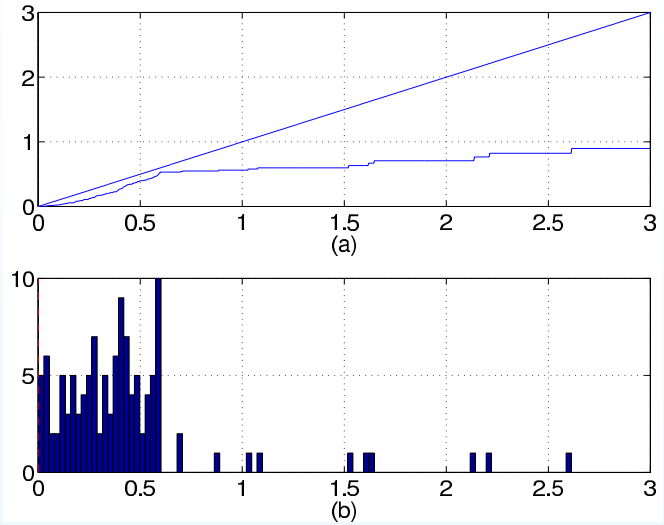
Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Approche de point fixe



Evolution du seuil:

- **Seuillage classique:** $F_a = 3$
- **Seuillage fort:** $F_a = 4.5$
  - risque de surestimation de la puissance du bruit
  - "il n'y a rien d'informatif dans cette mesure !"
  - adapté si le signal est creux (rare dans le bruit)
- **Seuillage classique:** $F_a = 3$
  - sous-estimation du bruit
  - "tout est intéressant !"
  - problème de convergence (critère d'arrêt jamais atteint)!

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes

Conclusion

Comparatif

- **Seuillage universel:**
  - $+$ détection des transitoires rares
  - $+$ élimination efficace du bruit gaussian
  - $+$ qualité visuelle (*VisuShrink* - aspect *noise free*)
  - $-$ trop important pour les signaux denses dans le bruit
  - $-$ dépendant de la taille du signal

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Comparatif

- **Seuillage universel:**
  - $+$ détection des transitoires rares
  - $+$ élimination efficace du bruit gaussian
  - $+$ qualité visuelle (*VisuShrink* - aspect *noise free*)
  - $-$ trop important pour les signaux denses dans le bruit
  - $-$ dépendant de la taille du signal
- **Seuillage SURE:**
  - $+$ débruitage relativement precis pour les signaux denses (EQM)
  - $+$ adaptativité aux caractéristiques des signaux
  - $-$ trop faible pour certains signaux (rares dans le bruit, faible rapport S/B, . . .)
  - $-$ aspect bruité

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Comparatif

- **Seuillage universel:**
  - $+$ détection des transitoires rares
  - $+$ élimination efficace du bruit gaussian
  - $+$ qualité visuelle (*VisuShrink* - aspect *noise free*)
  - $-$ trop important pour les signaux denses dans le bruit
  - $-$ dépendant de la taille du signal
- **Seuillage SURE:**
  - $+$ débruitage relativement precis pour les signaux denses (EQM)
  - $+$ adaptativité aux caractéristiques des signaux
  - $-$ trop faible pour certains signaux (rares dans le bruit, faible rapport S/B, . . .)
  - $-$ aspect bruité
- **Seuillage par valeurs aberrantes:**
  - $+$ sans a priori sur le type de bruit
  - $+$ non influencé par la taille du signal
  - $-$ paramètres utilisateur à choisir

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes

Conclusion

Autres algorithmes

- **Techniques locales en fréquence/échelle**
  - débruitage échelle par échelle
  - modélisation de la suite des coefficients par échelle

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes

Conclusion

Autres algorithmes

- **Techniques locales en fréquence/échelle**
  - débruitage échelle par échelle
  - modélisation de la suite des coefficients par échelle
- **Techniques locales en temps/espace**
  - estimation de l'écart-type par fenêtre glissante
  - détection de sauts de moyenne/variance sur le bruit

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes

Conclusion

Autres algorithmes

- **Techniques locales en fréquence/échelle**
  - débruitage échelle par échelle
  - modélisation de la suite des coefficients par échelle
- **Techniques locales en temps/espace**
  - estimation de l'écart-type par fenêtre glissante
  - détection de sauts de moyenne/variance sur le bruit
- **Techniques locales en temps-fréquence**
  - corrélation inter-échelles
  - détection de *patterns* dans le plan temps-frequence

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes

Conclusion

Autres algorithmes

- **Techniques locales en fréquence/échelle**
  - débruitage échelle par échelle
  - modélisation de la suite des coefficients par échelle
- **Techniques locales en temps/espace**
  - estimation de l'écart-type par fenêtre glissante
  - détection de sauts de moyenne/variance sur le bruit
- **Techniques locales en temps-fréquence**
  - corrélation inter-échelles
  - détection de *patterns* dans le plan temps-frequence
- **Techniques multi-base**
  - décomposition / débruitage itératifs sur plusieurs bases
  - paquets d'ondelettes

Signaux: rappels

Représentation des signaux non-stationnaires

Ondelettes orthogonales

Signaux

Bruit

Débruitage
- Signal+bruit – modélisation
- Débruitage - critère d'évaluation
- Stratégies de débruitage
- Calcul du seuil
- Seuillage universel
- Seuillage SURE
- Comparatif $S_U - S_S$
- Seuillage par valeurs aberrantes
- Conclusion

Autres algorithmes

- **Techniques locales en fréquence/échelle**
  - débruitage échelle par échelle
  - modélisation de la suite des coefficients par échelle
- **Techniques locales en temps/espace**
  - estimation de l'écart-type par fenêtre glissante
  - détection de sauts de moyenne/variance sur le bruit
- **Techniques locales en temps-fréquence**
  - corrélation inter-échelles
  - détection de *patterns* dans le plan temps-frequence
- **Techniques multi-base**
  - décomposition / débruitage itératifs sur plusieurs bases
  - paquets d'ondelettes
- **. . . à découvrir ?**