

Contribution à la commande optimale des systèmes dynamiques hybrides

Pierre RIEDINGER

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)

Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL)

2, Avenue de la forêt de Haye

54516 Vandoeuvre Cedex

14 janvier 2000

Avant-Propos

Ce travail a été effectué au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL) au sein du Groupe de Recherche en Automatique et Sécurité des Processus HYbrides (GRASPHY).

Je remercie vivement M. Manfred Morari, Professeur à L'Institut für Automatik de Zürich ainsi que M. Jean-Louis Ferrier, Professeur à l'Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur d'Angers (ISTIA) d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail malgré la charge de travail qu'ils leur incombent.

Ces remerciements s'adressent également à M. Yves Quenec'hdu, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité (Supélec) de Rennes qui a accepté de participer au jury de cette thèse et dont les activités au sein du Groupe 18 de la SEE m'ont permis de rencontrer une large communauté nationale œuvrant sur la thématique des Systèmes Dynamiques Hybrides.

J'exprime ma reconnaissance à mon ancien Professeur de Mathématique, M. Antoine Henrot actuellement Professeur de Mathématique à L'Ecole des Mines de Nancy (EMN) qui, par sa participation au jury, symbolise un lien entre ma formation initiale en mathématique et mes recherches actuelles en automatique (on ne renie pas ses origines).

Cette transversalité, c'est à toi, Christian Zanne, directeur de ma thèse et Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure du Génie des Systèmes Industriels (ENSGSI) que je la dois. Entreprendre une telle collaboration était risqué. C'était un pari audacieux et tu l'as gagné. Bravo! Plus encore que ta clairvoyance pratique, c'est ton indéniable sens pédagogique qu'il me faut saluer.

C'est une source de références et d'humours qui plus est disponible, c'est donc un plaisir renouvelé de côtoyer Frédéric Kratz, Maître de Conférences HdR à l'ENSEM et co-directeur de ce travail.

C'est l'intelligence de l'essentiel et c'est essentiel, j'ai nommé Claude Iung, Professeur à l'ENSEM.

Il serait dommage, dans ces remerciements, d'oublier ma famille, le choux qui m'a ouvert à la vie, la rose dont est sortie ma fille, Joséphine (je crois encore au Père Noël que voulez vous) et ... Sophie qui était à mon côté pendant toute cette période en soutien moral et matériel (ceux qui ont des enfants comprendront). Il me faut donc lui dire un tendre "merci, mon amour".

Je ne peux pas oublier Jamal Daafouz, Maître de Conférences à l'ENSEM qui est venu épauler mon travail par sa disponibilité et ses conseils. Ton aide me fût précieuse et je t'adresse toute ma reconnaissance et ma sympathie.

Bien sûr, l'ensemble du personnel du laboratoire a contribué à instaurer cette atmosphère sympathique de travail, c'est pourquoi je remercie vivement tous les collègues.

Table des matières

Introduction Générale	7
1 Introduction aux Systèmes Dynamiques Hybrides	11
1.1 L'espace des temps en question.	13
1.2 Les phénomènes hybrides	14
1.3 Exemple d'un processus hybride : La Machine Synchrone Auto-pilotée	18
1.3.1 Equations et principe de fonctionnement	18
1.3.2 Alimentation par un pont de Graetz : construction du système hybride	19
1.3.3 Modélisation d'une MSA dans un contexte hybride	20
1.4 La modélisation des SDH	24
1.4.1 Le modèle de Branicky	26
1.4.2 Les automates hybrides	29
1.4.3 D'autres approches	31
1.5 Les problèmes posés par les SDH	32
1.6 Le problème de la commande optimale en particulier	33
2 La Commande Optimale des Systèmes Dynamiques	39
2.1 Position du problème	39
2.2 Analyse du problème	40
2.2.1 Conditions nécessaires : Le Principe du Maximum	41
2.2.2 Conditions suffisantes et existence	46
2.3 Exemples introductifs à la commande optimale des SDH	47
2.3.1 Etude générale	48
2.3.2 Exemple de synthèse d'une commande	52
2.3.3 Un exemple critique	55
2.4 Conclusion du chapitre 2	59
3 La Commande Optimale des SDH	61
3.1 Préliminaire : Programmation dynamique et équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman	61
3.2 Formulation générale de conditions nécessaires	63
3.2.1 Prise en compte des sauts autonomes	63

3.2.2	Prise en compte des sauts commandés	66
3.3	Le principe du maximum pour les SDH	67
3.4	Exemple d'une hystérésis	72
3.4.1	Définition du problème de commande	72
3.4.2	Formulation et expression analytique de la solution	73
3.4.3	Synthèse de la commande	76
3.5	Conclusion du chapitre 3	80
4	La Commande Optimale en Temps	83
4.1	Loi de commande	84
4.2	Instants de commutation	86
4.3	Condition de normalité	89
4.4	Trajectoires singulières et normalité	95
4.5	Analyse d'un exemple critique.	97
4.5.1	Calcul de la condition de normalité	97
4.5.2	Trajectoires optimales pour le P_e	99
4.6	Exemple	103
4.6.1	Calcul de la condition de normalité	103
4.6.2	Synthèse de la commande	106
4.6.3	Existence	108
4.7	sous-optimalité	110
4.8	Conclusion du chapitre 4	113
5	La Commande par Critère Linéaire Quadratique	115
5.1	Loi de commande	116
5.2	Stabilité des systèmes hybrides linéaires	120
5.3	Stabilité des systèmes commutés	123
5.4	Vers la recherche d'algorithmes de synthèse de la commande	126
5.5	Instants de commutation pour des sauts commandés	128
5.6	Exemple	130
5.7	Conclusion du chapitre 5	133
	Conclusion générale et perspectives	135
	Annexes	139
	Annexe A	139
	Annexe B	141
	Annexe C	143
	Annexe D : Éléments de géométrie différentielle	144
	Algèbre de Lie et Crochet de Lie	144
	Commandabilité : La notion d'accessibilité	144
	Annexe E : Produit et Somme de Kronecker	146
	Références bibliographiques	147

Introduction Générale

Un des principaux objets de l'automatique est l'*étude* des *systèmes dynamiques* à des fins de *prises de décisions* et de *conduite*. Un système dynamique est une représentation, sous la forme d'un modèle mathématique, du comportement d'un ensemble de composantes de l'environnement humain. Ce modèle mathématique traduit au moyen d'une relation de causalité dite d'entrée-sortie (entrée-état), l'évolution de ces composantes sous l'effet d'actions extérieures. Cette relation permet alors de rechercher les actions à mener (commande) pour imposer au système un comportement désiré.

L'*étude* concerne alors le développement et l'application de concepts, de méthodes et de moyens pour la modélisation, l'analyse et la commande de ces systèmes. La *conduite* rassemble les notions de planification, ordonnancement, observation, surveillance, commande et supervision tandis que la *prise de décision* est davantage liée au traitement de l'information avec l'acquisition et le traitement de signaux et d'images, la reconnaissance et le diagnostic.

Les domaines d'applications de cette discipline sont particulièrement étendus puisqu'ils touchent l'ensemble des domaines où une dynamique et une relation de cause à effet peuvent être identifiées : citons par exemple la mécanique, l'électricité, la chimie, la biologie, le génie civil, l'économie, etc.

Deux classes de systèmes dynamiques sont habituellement distinguées dans la littérature suivant la nature discrète ou continue des variables mises en jeu. Les systèmes continus sont décrits par une relation d'évolution qui s'inscrit dans une durée tandis que l'évolution des systèmes discrets est décrite par une suite d'états dépendant d'une suite d'événements ordonnés. Les topologies fortes différentes de ces systèmes dynamiques ont conduit à des développements et à des concepts propres à chacune de ces classes.

Le concept de Système Dynamique Hybride (**SDH**) est né en 1987 aux journées de Santa Clara [Lev87] et désigne donc un système dynamique formé par le couplage et l'interaction de variables discrètes et continues.

Aujourd'hui, la réalité des systèmes industriels, les progrès réalisés dans la maîtrise de ces deux classes de systèmes dynamiques ainsi que dans le domaine des outils de réalisation, mais aussi les performances qu'attendent les utilisateurs (notamment

en sûreté de fonctionnement) ont conduit la communauté automatique à envisager une approche unifiée des problèmes de commande.

La richesse de comportement que l'on est en droit d'attendre des SDH (actions continues ponctuées de décisions fonctions de l'avancement des tâches entreprises) fonde de nombreux espoirs quant à leurs applications potentielles et mobilise une communauté scientifique sur un large éventail de disciplines (automatique, informatique, mathématique).

Mais cette diversité de comportements s'accompagne d'un coût : les outils, concepts et méthodes pensés pour des systèmes de natures différentes sont caduques ou nécessitent une sérieuse refondation afin d'être adaptés à ce nouveau contexte hybride.

Cette thèse s'inscrit dans cette thématique et aborde le problème de la commande optimale des SDH. L'organisation de ce mémoire est la suivante :

Le chapitre 1 est une introduction aux systèmes dynamiques hybrides. A partir de la notion de système dynamique, on introduit la nécessité d'un temps commun aux parties continues et discrètes. Un problème de blocage du système, lié à la notion de temps divergent et résultant du couplage des deux dynamiques, montre que la conception de SDH doit s'accompagner d'un certain nombre de précautions.

Un exemple réel de processus hybride permet ensuite d'introduire les différents phénomènes hybrides et deux modèles de SDH les plus couramment rencontrés dans la littérature sont présentés en détail : le modèle de Branicky fondé sur la classification des phénomènes hybrides et les automates hybrides. D'autres approches sont également mentionnées. Un bilan spécifique à la commande optimale des SDH termine ce chapitre.

Le chapitre 2 présente l'approche de la théorie de la commande optimale par le principe du maximum. Ce principe permet d'énoncer un ensemble de conditions nécessaires pour des problèmes de commande optimale très généraux. Deux exemples "académiques" de systèmes hybrides pour lesquels une application directe du principe du maximum est possible, nous conduisent alors à une introduction aux problèmes posés par la commande optimale des SDH.

Le chapitre 3 est consacré à l'extension du principe du maximum aux SDH. Cette extension permet en particulier de prendre en considération un phénomène hybride important (le saut autonome). Un exemple d'hystérésis pris dans la littérature illustre parfaitement l'avantage que procure la méthode sur des approches fondées sur la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Le principe du maximum conduit notamment à une analyse plus fine du problème aux instants de rupture de modèles (discontinuités). Pour cet exemple, l'expression analytique de la solution est déterminée.

La commande optimale en temps est abordée au chapitre 4 pour une classe de SDH “linéaires”. Un résultat montre comment effectuer la synthèse d’une commande optimale “bang-bang” par le calcul des instants de rupture de modèles et de commandes. Mais ce chapitre important souligne également les difficultés que l’on rencontre pour établir l’existence d’une solution. Une réponse proposée consiste à étudier les solutions d’un problème étendu, obtenu en relaxant les contraintes imposées sur le domaine de commande. L’existence garantie d’une solution pour ce problème permet alors de déduire les solutions optimales ou sous optimales pour le SDH.

Le dernier chapitre traite de la commande par critère quadratique. Pour un système linéaire, ce critère permet d’assurer le calcul d’une commande stabilisante en boucle fermée tout en limitant la dépense d’énergie nécessaire. L’équivalent hybride de ce problème de commande optimale est formulé et résolu. Ce résultat montre que la commande optimale peut être déterminée en résolvant une suite d’équations différentielles de Riccati. L’application du principe du maximum dans sa version étendue conduit également à deux résultats généraux de stabilité pour les SDH linéaires. Enfin, un dernier exemple “académique” illustre le travail effectué dans ce chapitre.

Chapitre 1

Introduction aux Systèmes Dynamiques Hybrides

Historiquement, deux classes de systèmes dynamiques ont fait l'objet d'études séparées suivant le caractère discret ou continu des variables mises en jeu. Une variable est dite discrète lorsqu'elle prend ses valeurs dans un ensemble discret (ensemble de points isolés) et inversement elle est continue si l'ensemble est continu. La représentation d'un système dynamique était soit purement discrète soit continue mais jamais les deux à la fois. La raison de cette séparation est essentiellement liée aux différentes métriques utilisées et recouvre donc un caractère théorique : *on ne pense pas un système continu et discret de la même manière*. Or cette stricte séparation ne reflète pas la réalité de la plupart des processus réels ; par exemple, dans :

- la prise en compte de seuils et/ou de discontinuités dans une régulation,
- l'amélioration des performances de systèmes de production par lots (Batch),
- l'optimisation de ressources, etc.

Cette interaction est bien connue dans les processus électromécaniques où des commandes événementielles agissent sur les grandeurs continues et modifient la dynamique du processus. Jusqu'à présent, les méthodes utilisées pour le calcul d'une commande sur ce type de processus consistent à approcher le système par un modèle moyen [Bog61, San85] : on est alors ramené à l'étude d'un système continu, et la dynamique obtenue est une moyenne de celle obtenue par discontinuités de modèles. Mais, cette approximation du système réel n'est valable uniquement que sous certaines conditions. Dans le cas général, il n'existe pas de cadre théorique.

La notion de Système Dynamique Hybride (**SDH**) est apparue dans [Lev87] où la nécessité de développer une théorie mêlant des signaux continus et discrets est soulignée. Cette nécessité trouve son origine dans de nombreux domaines :

- la simulation de procédés complexes composés de plusieurs unités et de modes opératoires continus,
- la conception de procédés “Batch” qui traitent par une recette séquentielle une matière représentée sous forme continue,
- la supervision de procédés et la sûreté de fonctionnement de systèmes multi-modèles,
- la mise au point de contrôleurs intelligents, c’est à dire de contrôleurs continus mais adaptant leur réponse suivant une logique discrète,
- l’ordonnancement et la gestion de tâches pour des systèmes temps réels,
- la modélisation du comportement dynamique des systèmes à temps de réponse contraint par leur environnement,
- la validation de logiciels multimedias,
- le contrôle du trafic aérien,
- la robotique,
- etc.

On le voit, et la liste n’est pas close, les besoins sont vastes et les applications potentielles multiples.

Les besoins se situent aussi bien au niveau de la modélisation, de la simulation et de l’analyse de ces systèmes que dans les aspects méthodologiques pour la conception de leur commande.

Ce thème de recherche rassemble une communauté scientifique d’horizon des plus variés : mathématiciens, automaticiens (automatique discrète et continue), informaticiens (génie logiciel, et théorie du langage (logique temporelle)), ingénieurs systèmes temps réels, ... et fait l’objet d’une intense activité de recherche ; citons les ouvrages collectifs : [HS93], [HS95], [HS96], [HS97], [HS98], [HSCC98], [JES98], [Tac98], [HSCC99], [MSR’99], [Aut99] et les nombreuses sessions dédiées aux SDH dans les plus grands congrès internationaux (American Control Conference (ACC), European Control Conference (ECC), Conference on Decision and Control (CDC),...).

L’équipe GRASPHY du CRAN, animée par le professeur C. Iung, a, depuis de nombreuses années, les processus électromécaniques comme domaine d’application privilégié. Ce sont des systèmes dynamiques hybrides dans lesquels les interactions entre les parties continues et événementielles sont particulièrement intimes. Au sein de cette équipe, l’approche fut tout d’abord résolument applicative. Elle débute en 1975 par la réalisation d’une commande numérique d’un pont de thyristors et par une première étude des problèmes posés par la simulation des systèmes électromécaniques ainsi obtenus où apparaît clairement la coopération entre automate et un

ensemble de modèles continus [Iun76], [Iun77]. Elle se poursuit par de nombreuses réalisations dans plusieurs domaines tout au long de la décennie 80 :

- commande : [Aub80], [Men85], [Mall95], [Hoh97], ...
- simulation : [Iun78], [Tri86], [Ibr93], [Hoh98], ...
- méthodes de conception : [Zan83], [Gue86], [Aub87], [Zan90], ...
- sûreté de fonctionnement : [Aub87], [Wan91], [Aub91], [Wan92], [Saw95], ...
- modélisation : [Iun78], [Lou81], [Del95], [Zan+95], ...
- validation : [Ibr93], [Zan93], ...

Depuis le début des années quatre-vingt-dix, l'approche "Systèmes Dynamiques Hybrides " est venue donner un cadre plus global à ces travaux et a souligné la nécessité de compléter cette démarche applicative par une approche plus formelle [Zan95].

1.1 L'espace des temps en question.

Un SDH est un système dynamique au sens classique, c'est à dire que :

- pour un ensemble ordonné T ,
- pour un ensemble d'états E ,
- pour un ensemble de valeurs de commande C ,
- et pour une classe de fonctions Ω mesurables de $T \rightarrow C$ non vide ayant la propriété de concaténation (i.e. si $\omega_1 \in \Omega$ sur $[t_1, t_2[$ et si $\omega_2 \in \Omega$ sur $[t_2, t_3[$ alors ω défini sur $[t_1, t_3[$ par $\omega = \omega_1$ sur $[t_1, t_2[$ et $\omega = \omega_2$ sur $[t_2, t_3[$ appartient à Ω),

il existe une application appelée fonction de transition d'état

$$\varphi : E \times T \times T \times C \rightarrow E \quad (1.1)$$

$$\varphi(x_0, t_0, t, u) = x(t) \quad (1.2)$$

vérifiant la propriété de semi-groupe, c'est à dire :

- $\varphi(x, t, t, u) = x, \forall u, t$ (consistance)
- si $\omega_2 = \omega_1$ sur $[t_1, t_2]$ alors $\varphi(x_0, t_0, t, \omega_1) = \varphi(x_0, t_0, t, \omega_2), \forall x_0$ et $t_0, t \in [t_1, t_2]$ (causalité)
- $\varphi(x_0, t_0, t_2, u) = \varphi(\varphi(x_0, t_0, t_1, u), t_1, t_2, u), \forall u, t$ (composition)

Mais, le mélange de systèmes dynamiques discrets et continus nécessite un certain nombre de précautions notamment en ce qui concerne la définition de l'espace des temps T .

En effet, pour un système discret, seul importe l'ordre dans lequel surviennent les différents événements et non la durée qui les sépare. Le temps est donc un ensemble

d'éléments muni d'une relation d'ordre sans notion de durée par exemple $\{1, 2, 3, \dots\}$ ou encore $\{a, b, c, \dots\}$.

Ce n'est bien sûr pas le cas, pour un système continu dans lequel le temps en tant que mesure de durée, est une notion fondatrice.

La mise en coopération de variables discrètes et continues impose que le temps soit défini comme un ensemble continu. La datation des événements de la partie discrète permet alors de plonger l'espace des temps discret dans l'espace des temps continu.

On voit alors que le seul moyen raisonnable pour représenter les variables discrètes, est de les considérer comme des variables continues constantes entre chaque date d'occurrence d'événements et prenant leurs valeurs dans des ensembles discrets.

Il subsiste toutefois un problème lié à la possibilité d'avoir un ensemble d'événements simultanés. Ce type de situation est acceptable si le nombre d'événements est fini et si l'on considère par convention que l'état obtenu est l'état induit par ces événements simultanés. Cette suite d'événements est alors considérée comme un macro événement. En revanche, le cas où le nombre d'événements est infini doit être rejeté car il mène à une situation de blocage du système par indétermination de l'état. On dit alors que le temps est "zeno" [Joh+99]. Par analogie, cette situation correspond à l'explosion de la solution en un temps fini d'un système différentiel continu.

La propriété de temps divergent ou encore non zeno n'est pas assurée automatiquement : c'est un problème lié à la conception d'un SDH et il est impératif que cette situation (temps zeno) ne se produise pas.

Avec notre convention sur les suites finies d'événements simultanés, on peut alors considérer que les variables discrètes sont constantes par morceaux. Cette classe de fonctions implique que le nombre de points de discontinuités est fini sur tout intervalle de temps borné. Comme ces variables prennent leurs valeurs dans des ensembles discrets, on identifiera très souvent ce type d'ensembles à $\mathbb{N}$ ou aux sous ensembles finis de $\mathbb{N}$, par isomorphisme.

1.2 Les phénomènes hybrides

Les phénomènes hybrides que l'on cherche à représenter dans un SDH sont des discontinuités sur les variables d'états et/ou sur les lois (et plus largement modèles) régissant l'évolution du système. Il s'agit donc de rendre compte de changements de comportements plus ou moins brutaux, résultant d'un parcours et d'actions dans le temps.

Certains phénomènes dont la durée est très brève comparée à l'échelle de temps d'observation du système sont considérés comme des discontinuités d'états et/ou de

modèles par soucis de simplification. Par exemple, dans un processus électromécanique, on ne modélise pas les phénomènes de commutation dans les interrupteurs statiques.

Supposons que la dynamique continue est déterminée par un système différentiel de la forme :

$$\dot{x} = \zeta(t), t \geq 0 \quad (1.3)$$

On distingue alors quatre types de phénomènes suivant qu'ils revêtent un caractère spontané ou provoqué sous l'effet d'une action extérieure et qu'ils affectent l'état ou les équations du modèle [Bra98+] :

- **Le saut de modèle autonome** : Le champ de vecteurs $\zeta(t)$ change de façon discontinue quand $x(\cdot)$ franchit une frontière de l'espace d'état.

Exemple : Ce phénomène permet de modéliser une hystérésis.

Considérons le système $\dot{x} = f(x) + u$ où $f(\cdot)$ est une fonction à valeurs multiples (figure 1.1).

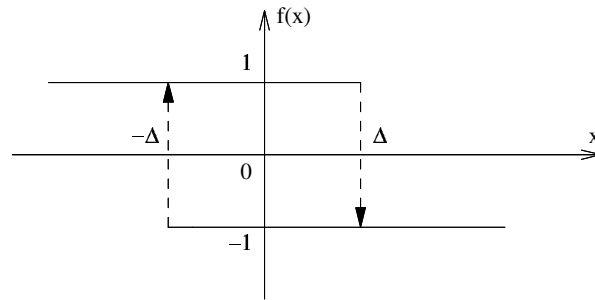


FIG. 1.1: Hystérésis

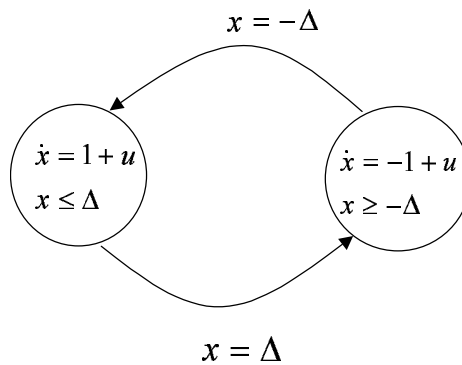


FIG. 1.2: Automate associé

Ce système hybride présente très clairement des discontinuités de champs de vecteurs aux points Δ et $-\Delta$. Un saut se produit du mode 1 vers le mode -1 lorsque la variable d'état x atteint par valeurs inférieures la frontière Δ . Réciproquement, le mode passe de -1 à 1 lorsque la variable d'état x atteint par valeurs supérieures la frontière $-\Delta$. La figure 1.2 représente l'automate associé à la dynamique discrète de ce processus.

- **Le saut de modèle commandé :** Le champ de vecteurs $\zeta(t)$ change de façon discontinue en réponse à une commande de contrôle.

Exemple : Soit un circuit électrique comportant un interrupteur u et dont les ouvertures et fermetures provoquent des basculements de modèles de la forme :

$$\dot{x} = f_k(x, v), k = 1, 2, \dots, K$$

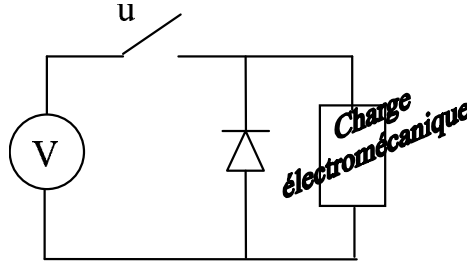


FIG. 1.3: Circuit électrique avec interrupteur

La commande comporte alors la grandeur continue V mais aussi la commande discrète u ($= 0$ ou 1) (figure 1.3).

- **Cas de discontinuités autonomes sur l'état :** L'état $x(\cdot)$ subit un saut de position en rencontrant une région de l'espace d'état.

Exemple : On peut représenter des phénomènes de collisions (figure 1.4).

Lorsque la balle frappe le mur, sa vitesse $v = [v_x, v_y]$ devient $[-r_x v_x, -r_y v_y]$, où $r_{x,y}$ représente un coefficient de restitution.

- **Cas de discontinuité commandé sur l'état :** L'état $x(\cdot)$ subit un saut de position sous l'effet d'une action.

Exemples :

- Ajout d'une quantité Q de produit à un instant t dans une cuve produisant un échelon sur le volume V .

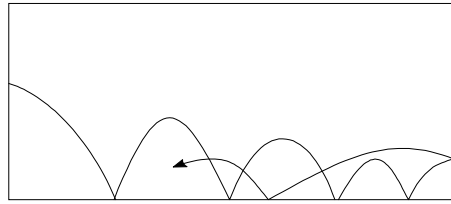
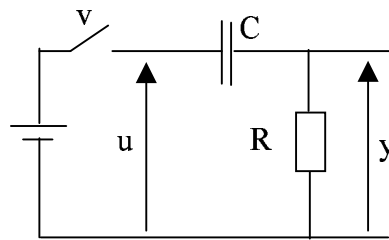


FIG. 1.4: Chocs élastiques

FIG. 1.5: Circuit RC

- Fermeture d'un circuit RC produisant une discontinuité sur la tension y (figure 1.5).

Une conséquence importante liée à ces phénomènes, est que le nombre de variables d'états nécessaires à la description du comportement dynamique du système peut varier avec les occurrences de ces discontinuités.

Aux instants de discontinuités, les conditions initiales du nouveau modèle (mode) sont déterminées à partir des conditions finales du précédent à l'aide de fonctions de raccordement.

Une autre façon de procéder est de garder une dimension constante pour l'ensemble des modes, égale à l'ordre du modèle le plus élevé, et d'adjoindre pour les modes d'ordre inférieur des contraintes algébriques. Le système hybride résultant est un système algébro-différentiel constant par morceaux et le raccordement des conditions initiales et finales aux instants de discontinuités s'obtient par projection sur les contraintes.

Dans la section suivante, nous allons présenter partiellement le fonctionnement d'un processus électromécanique dans lequel se produit l'ensemble de ces phénomènes.

1.3 Exemple d'un processus hybride : La Machine Synchrone Auto-pilotée

1.3.1 Equations et principe de fonctionnement

Une machine synchrone comporte au stator un enroulement triphasé, au rotor un enroulement d'excitation parcouru par un courant continu et des amortisseurs constitués par deux enroulements en court-circuit et en quadrature l'un par rapport à l'autre (figure 1.6).

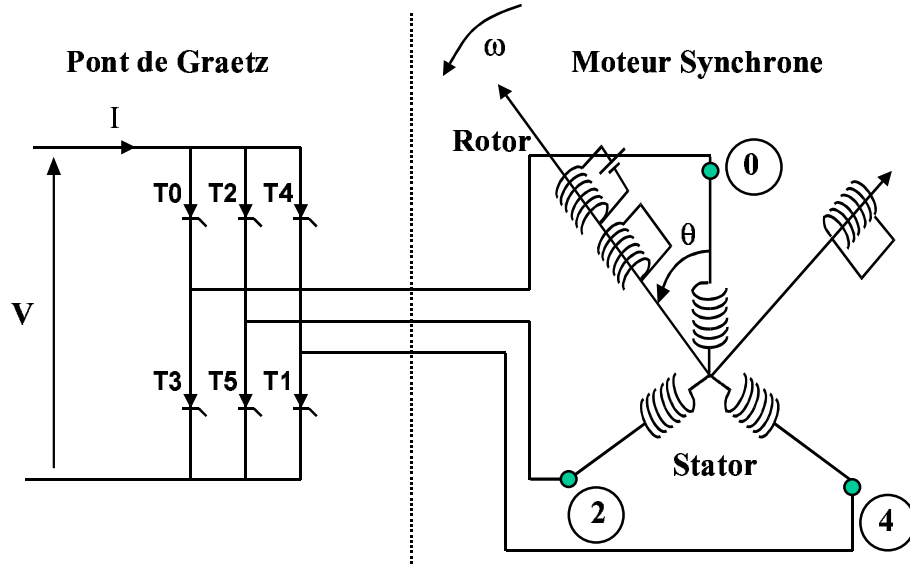


FIG. 1.6: La machine synchrone

Les équations à coefficients variables de la machine synchrone s'écrivent :

Equations électriques :

$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} L_s & M_{sr} \\ M_{sr}^T & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} V_s &= [V_0, V_2, V_4]^T & I_s &= [i_0, i_2, i_4]^T \\ V_r &= [V_f, 0, 0]^T & I_r &= [i_f, i_D, i_Q]^T \end{aligned}$$

Les indices 0, 2, 4 se rapportent aux phases de la machine (figure 1.6) et les indices s et r sont relatifs respectivement au stator et au rotor.

Equations mécaniques :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta &= \omega \\ \mathcal{J} \frac{d}{dt} \omega &= -f\omega + p(C_e - C_r) \end{aligned}$$

où p et f sont des paramètres. $\mathcal{J}$ désigne le moment d'inertie, C_r le couple résistant et C_e le couple moteur.

Notons que les impédances L_s , L_r et la mutuelle M_{sr} sont fonctions de la position angulaire θ alors que le terme $C_e - C_r$ dépend de l'intensité des courants.

1.3.2 Alimentation par un pont de Graetz : construction du système hybride

Pour maîtriser le fonctionnement du moteur, il est classique de l'alimenter par un pont de Graetz. (figure 1.6).

Ce montage permet d'obtenir un champ tournant à vitesse variable, par incrément de 60° , suivant les phases stator en conduction. Par exemple le passage de la paire de thyristors conducteurs (T_0, T_5) à la paire (T_0, T_1) provoque un décalage du champ stator de P_1 à P_2 (figure 1.7).

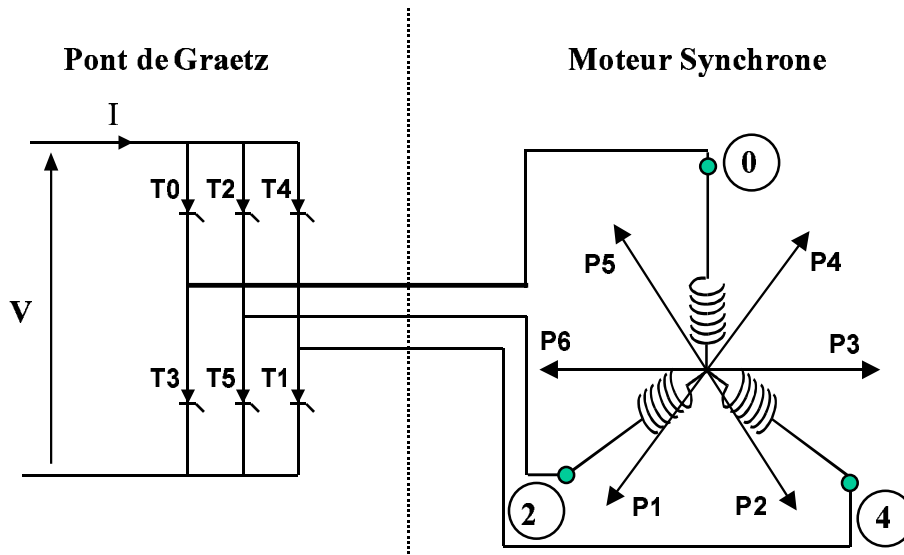


FIG. 1.7: Position du champ statorique

Thyristors en conduction	Position du champ statorique
T_0, T_5	P_1
T_1, T_0	P_2
T_2, T_1	P_3
T_3, T_2	P_4
T_4, T_3	P_5
T_5, T_4	P_6

Pour parvenir à ce résultat, le thyristor T_1 est devenu conducteur alors que le thyristor T_5 a cessé de conduire. Cette opération est obtenue par la mise en

court-circuit des phases 2 et 4 en allumant le thyristor T_1 . Si la tension V_4 est supérieure à V_2 , le courant i_4 augmente et le courant i_2 diminue grâce aux forces contre-électromotrices. Lorsque i_2 s'annule, T_5 s'éteint. Cette condition ne peut être réalisée que si les f.c.e.m sont suffisantes (soit pour une vitesse supérieure à 10% de la vitesse nominale environ). On parle alors de marche auto-pilotée. L'automate de commande produit une séquence d'allumage des thyristors en fonction des tensions V_0 , V_2 et V_4 de type : $T_1, T_2, \dots, T_i, T_{i+1}, \dots$

Ce mode de fonctionnement complète la marche en basse vitesse dite marche "pas à pas" au cours duquel on doit éteindre le courant dans un circuit avant de commuter au circuit suivant. Dans ce cas la séquence d'allumage dépend de la position du rotor.

Que peut on constater ?

1. A chaque allumage ou extinction des thyristors, les équations du modèle sont modifiées. L'écriture de ces équations nous permet de distinguer 12 modes de fonctionnements.
2. La dimension du système est modifiée selon qu'il y a deux ou trois thyristors conducteurs.
3. L'usage de thyristors dont l'extinction est conditionnée par l'annulation du courant ne permet pas de commander directement le passage d'un mode d'empiètement (trois thyristors fermés) à un mode de conduction (deux thyristors fermés).

Ces trois points illustrent parfaitement les caractéristiques d'un système hybride : on observe des commutations de modèles dont les espaces d'état n'ont pas les mêmes dimensions. Les commutations sont provoqués par des sauts commandés et autonomes.

1.3.3 Modélisation d'une MSA dans un contexte hybride

En régime stationnaire, les phénomènes électriques se répètent chaque 60° électriques pendant lesquels deux modes de fonctionnement différents se produisent alternativement : "la conduction" et "l'empiètement" (figure 1.8).

Mode 1 "Conduction"

Ce mode correspond au cas où deux thyristors sont conducteurs. Le courant I circule dans deux phases de la machine pendant que la troisième est ouverte. Six configurations du Pont de Graetz correspondent à ce cas de figure.

Pour l'exemple de la figure 1.8, la loi des noeuds et des mailles nous conduit aux équations de courant et de tension :

$$\begin{aligned} i_s &= [i_0, i_2, i_4]^T = [1, 0, -1]^T I \\ V_s &= V_0 - V_2 \end{aligned}$$

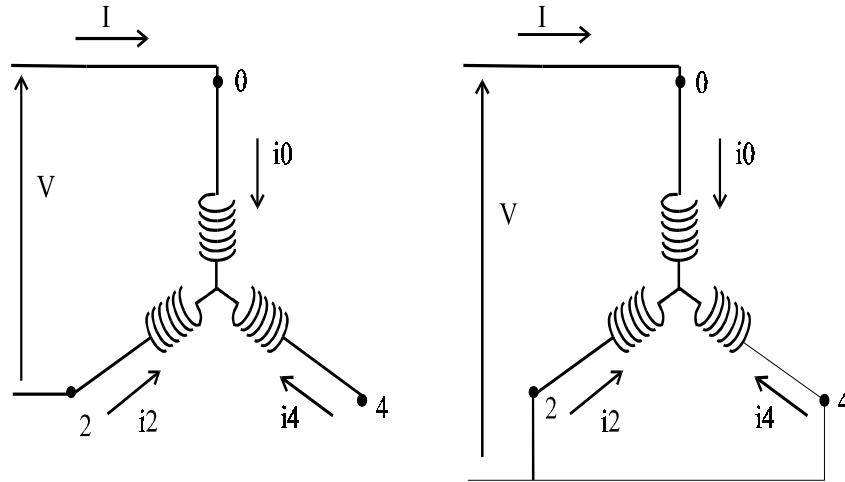


FIG. 1.8: Illustration des modes de fonctionnement

Par substitution dans les équations générales de la machine synchrone, nous disposons d'un système de **six** équations différentielles qui représente toutes les grandeurs de la machine pour l'intervalle de conduction.

On quitte ce mode "conduction" par un saut commandé en amorçant le thyristor T_1 . L'événement provoquant ce saut commandé est issu d'un franchissement de seuil par la position du rotor.

Mode 2 "Empiètement"

Ce mode correspond au cas où trois thyristors sont conducteurs. Le courant I est transféré d'une phase à une autre par une mise en court circuit de ces phases. Il y a également six configurations du pont de Graetz.

Toujours pour l'exemple de la figure, la loi des noeuds et des mailles nous conduit aux équations de courant et de tension :

$$i_s = [i_0, i_2, i_4]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I \\ J \end{bmatrix}$$

$$V_s = V_0 - (V_2 + V_4)/2$$

où la variable J représente la différence $i_4 - i_2$. C'est le courant de commutation dû au court-circuit.

Comme précédemment, en injectant ces relations dans les équations générales, on obtient un système de **sept** équations différentielles qui décrivent le mode "empiètement".

L'empiètement débute avec $J = I$ (amorçage du thyristor T_1 , $i_4 = 0$, $i_2 = -I$, figures 1.6, 1.8) et se termine avec $J = -I$ (extinction du thyristor T_5 , ($i_4 = -I$, $i_2 = 0$) figures 1.6, 1.8). On quitte alors ce mode de fonctionnement par un saut autonome déclenché par $i_2 = 0$.

Nous venons de voir que pour un tour électrique de la machine, nous disposons des équations des différents modes ; au total six couples “empiètement-conduction”. La marche auto-pilotée impose pour chaque couple une plage de fonctionnement de 60° . On enchaîne ces plages en amorçant un nouveau thyristor suivant une séquence $T_1, T_2, \dots, T_i, T_{i+1}, \dots$. L’amorçage se fait pour des positions déterminées du rotor qui puissent assurer la commutation naturelle de la machine (empiètement). On définit ces positions par l’angle d’allumage β . Cet angle d’allumage doit appartenir à un domaine où les contraintes suivantes sont respectées :

- Tout au long de l’empiètement, il faut que les phases à commuter soient polarisées dans le bon sens ($V_4 > V_2$ pour notre exemple) sinon un défaut de commutation se produit (refus d’extinction de T_5) : un nouveau saut autonome ($i_4 = 0$) conduit à un mode de fonctionnement de type “conduction” particulier dit “défaut onduleur” au cours duquel le courant devient énorme et peut détruire le dispositif.
- La durée de l’empiètement ne doit pas excéder 60° . Il est à noter que la durée de l’empiètement dépend du courant circulant dans le stator donc de l’angle d’allumage des thyristors mais aussi du courant d’excitation appliqué au rotor.

Ainsi, on peut définir une zone d’environ 40° (une marge de sécurité est appliquée) dans laquelle il est possible de choisir l’angle d’allumage β suivant la stratégie de commande utilisée.

On entre dans le mode “conduction” par un saut autonome qui est l’extinction d’un thyristor et la fin d’un empiètement. On quitte ce mode par un saut commandé en amorçant un thyristor lorsque l’angle d’allumage calculé par la commande, est atteint.

Une simulation de notre machine conduit alors aux résultats des figures 1.9, 1.10 et 1.11.

On remarquera que la durée du mode “empiètement” (annulation du courant dans une phase) est très inférieure à celle du mode “conduction” pour notre exemple et s’apparente à une discontinuité de la variable d’état (figures 1.9-1.10). Une modélisation plus simple pourra donc consister à négliger cette durée et à représenter le phénomène par une discontinuité sur l’état.

On peut observer que les sauts affectent davantage les variables électriques que la position et la vitesse (figure 1.11). La raison provient de la différence des ordres de grandeurs pour les constantes de temps de ces variables.

On notera également que le régime statique est obtenu par une succession périodique de régimes transitoires. C’est un aspect dynamique fondamental des systèmes hybrides et qui illustre la difficulté de la commande du processus.

On a pu constater sur cet exemple de processus électromécanique que l’usage d’interrupteurs dans un réseau électrique provoque lors de leur ouverture ou fermeture des changements de structure (équations et ordre des modèles) et conduit à des

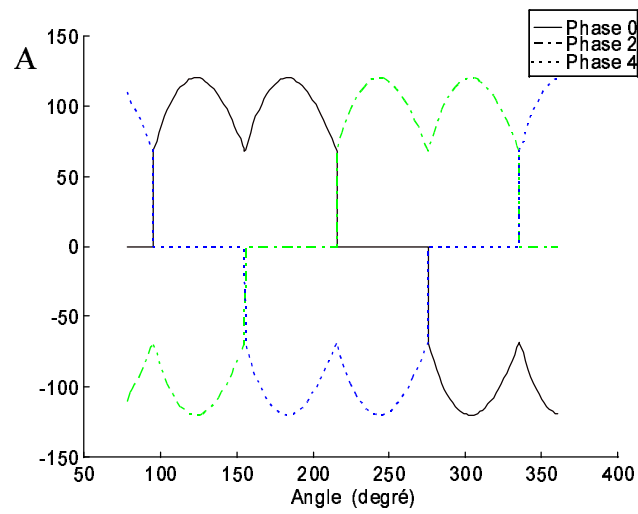


FIG. 1.9: Courants des phases stators

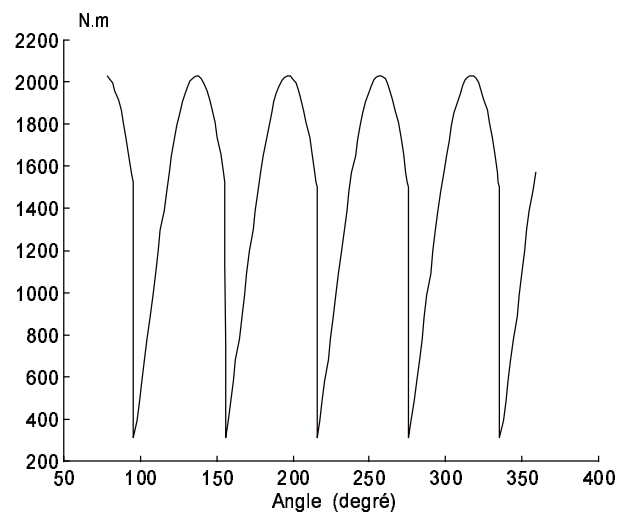


FIG. 1.10: Couple électromoteur

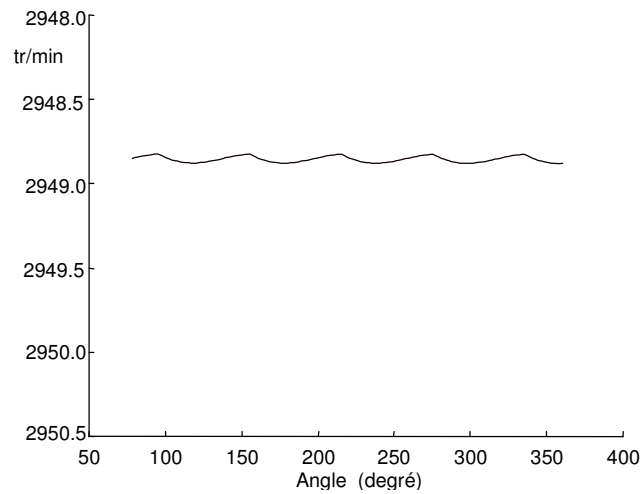


FIG. 1.11: Vitesse de rotation du moteur

systèmes continus par morceaux. La date d'occurrence de ces commutations (ouverture - fermeture des interrupteurs) est la grandeur de commande des grandeurs continues comme le courant, la vitesse de rotation, etc. de la machine électrique considérée. De plus, la conduite de ces systèmes montre qu'il ne s'agit plus d'étudier de manière isolée chaque configuration possible (mode) du système mais bien au contraire de pouvoir spécifier formellement les enchaînements des différents modèles.

1.4 La modélisation des SDH

On trouve un grand nombre d'approches suivant les objectifs et la diversité des systèmes représentés. Les cultures scientifiques des auteurs jouent un rôle non négligeable dans l'abstraction et la formalisation de ces systèmes, et les modèles proposés sont souvent une extension des modèles existants qu'ils soient continus ou discrets, aux cas hybrides.

Si nous nous basons sur la définition d'un système dynamique, on doit rendre compte au moyen d'une fonction de transition, de l'interaction de variables discrètes et continues sur un ensemble de temps continu. Les modèles existants diffèrent par la manière dont on décrit cette relation d'évolution et notamment par les objets manipulés (réseaux de Petri, automates, classe des systèmes algèbre différentiels considérés, discrétisation ou non du temps...).

Un schéma général permettant de représenter une communication entre les parties discrètes et continues peut être donné par la figure 1.12 [Gol89].

Ce schéma se compose de trois couches. Une partie continue définie comme une collection de systèmes différentiels, une partie discrète typiquement représentée par un automate fini et une partie servant d'interface de communication entre les deux

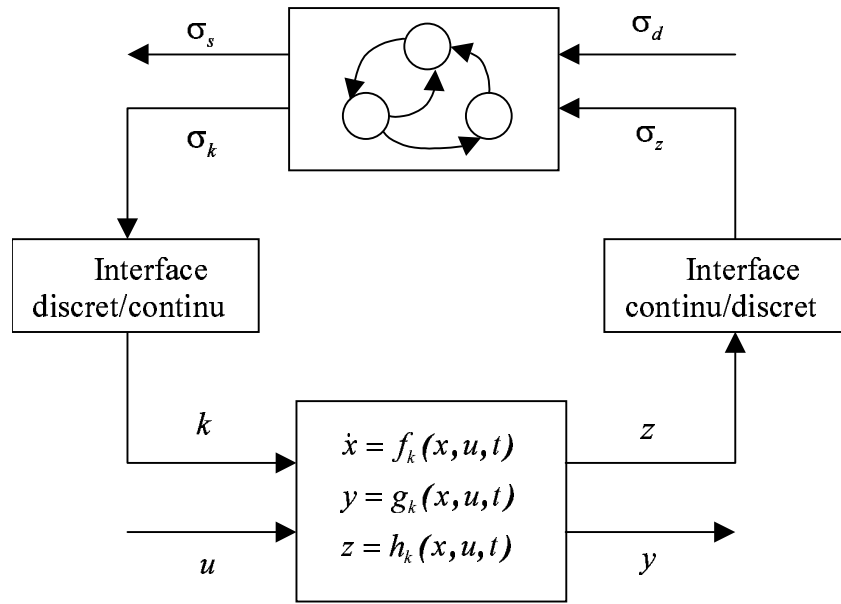


FIG. 1.12: Schéma général d'un SDH

précédentes. L'interface continu/discret traduit sous forme d'événements σ_z l'appartenance de la variable de sortie z à des régions de l'espace de sortie, tandis que l'interface discret/continu traduit les événements de sortie σ_k sous forme de numéro de modèle continu. Ici, le temps continu date les événements issus de la dynamique discrète. Notons que cette représentation n'assure pas un temps divergent, ni l'unicité de la solution.

La modélisation se divise principalement en deux approches :

- Une approche continue où la modélisation vise à l'analyse mathématique des propriétés du système. On y trouve des modèles formés par des collections d'équations algèbro-différentielles et un système à événements discrets (automate). Ce système à événements discrets est plus ou moins implicite lorsque l'on considère un état généralisé par ajout des variables et fonctions de transition discrète à la partie continue.
- Une approche discrète issue de l'extension des modèles discrets par intégration d'équations différentielles en lieu et place des états discrets. Les objectifs sont alors la validation formelle des modèles par simulation et la vérification de propriétés par des outils de preuve automatique (langage temporel).

1.4.1 Le modèle de Branicky

Dans [Bra95], M. S. Branicky propose une modélisation des systèmes hybrides sous la forme d'un système dynamique unique en intégrant la partie discrète à la partie continue. Cette approche recouvre les modèles de Tavernini [Tav87], Back-Guckenheimer-Myers [Bac92], Nerode-Kohn [Ner93+] et Brockett [Bro93] proposés antérieurement dans la littérature. Basé sur la classification des différents phénomènes hybrides, ce modèle définit très clairement un système hybride comme un système dynamique et précise la manière dont les changements de modèles interviennent.

Branicky définit un système hybride comme un système dynamique

$$H = [Q, \Sigma, A, C, D, G, F, V]$$

avec :

- Q l'ensemble des états discrets,
- $\Sigma = \{\Sigma_q\}_{q \in Q}$, une famille de systèmes dynamiques, où chaque système $\Sigma_q = [X_q, \mathbb{R}^+, f_q, U_q]$ est un système dynamique commandé avec :
 - X_q , l'ensemble des états, défini comme un ensemble connexe et fermé dans $\mathbb{R}^{d_q}$, $d_q \in \mathbb{N}^*$,
 - $f_q : X_q \times U_q \rightarrow X_q$ le champ de vecteurs décrivant la dynamique du système,
 - U_q le domaine de commande,
- $A = \{A_q\}_{q \in Q}$ une famille d'ensembles fermés A_q dans X_q appelés région de sauts autonomes,
- $C = \{C_q\}_{q \in Q}$ une famille d'ensembles fermés C_q dans X_q appelés région de sauts commandés,
- $D = \{D_q\}_{q \in Q}$ une famille d'ensembles fermés D_q dans X_q appelés région de destination,
- $G = \{G_q\}_{q \in Q}$ une famille de fonctions de transition discrète :

$$G_q : A_q \times V \rightarrow \cup_{q=0}^{\infty} D_q \times \{q\} \quad (1.4)$$

- $F = \{F_q\}_{q \in Q}$ une famille de fonctions de transition discrète :

$$F_q : C_q \rightarrow 2^Q \quad (1.5)$$

où 2^Q est l'ensemble des parties de Q ,

- V l'ensembles des commandes discrètes.

L'espace d'état hybride est alors défini par $S = \cup_{q=0}^{\infty} X_q \times \{q\}$.

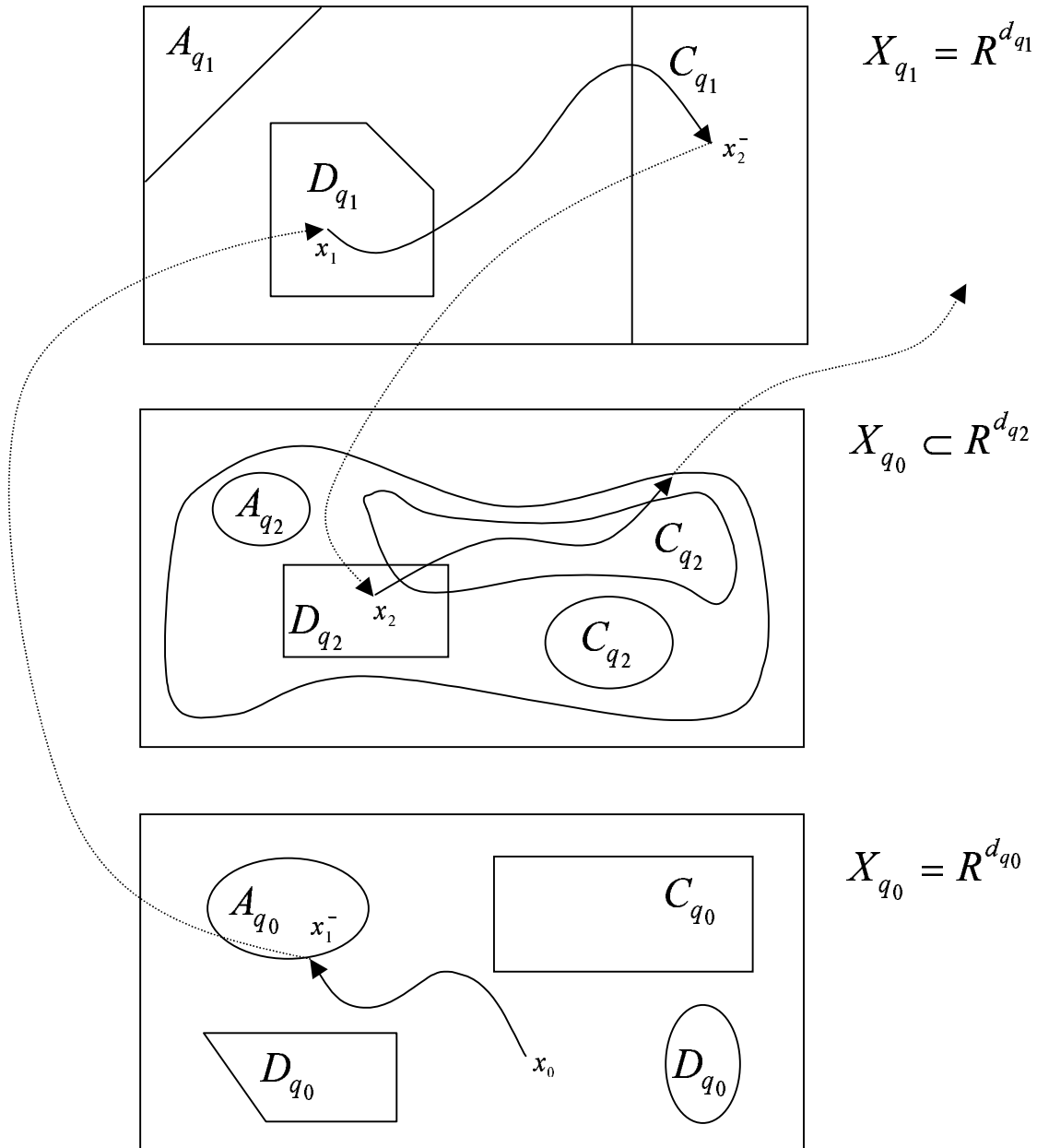


FIG. 1.13: Dynamique du Modèle de Branicky

La dynamique de H est alors la suivante (figure 1.13) :

On suppose que le système part d'une position initiale $s_0 = (x_0, q_0)$ telle que $x_0 \notin A_{q_0}$. Le système évolue alors suivant la dynamique imposée par le système différentiel $\dot{x} = f_{q_0}(x, u)$. Si l'état $x(\cdot)$ atteint au point x_1^- une des régions A_{q_0} ou C_{q_0} alors

- si $x_1^- \in A_{q_0}$, alors l'état est transporté à la position $(x_1, q_1) = G_{q_0}(x_1^-, v)$ suivant la décision $v \in V$.
- si $x_1^- \in C_{q_0}$, alors il est possible de prendre la décision de sauter vers un état discret $q_1 \in F_{q_0}(x_1^-)$ et un état continu élément de D_{q_1} tant que $x(\cdot) \in C_{q_0}$.

Dans les deux situations, le processus reprend depuis la position $s_1 = (x_1, q_1)$.

Il est également envisagé la possibilité d'avoir des sauts non instantanés en adjoignant deux fonctions de délai de transition :

Une fonction de délai de transition autonome :

$$\Delta_{aq} : A_q \times V \rightarrow R^+ \quad (1.6)$$

et une fonction de délai de transition commandée :

$$\Delta_{cq} : C_q \times D \rightarrow R^+ \quad (1.7)$$

On considère alors qu'avec l'occurrence d'un saut à l'instant t_1 , le système dynamique est "gelé" pendant un temps Δt_1 (déterminé par ces fonctions de délai), et repart de la position $s_1 = (x_1, q_1)$ à l'instant $t_1 + \Delta t_1$.

Pour garantir un temps divergent, l'hypothèse d'une distance minimale entre les zones de sauts autonomes et de destinations est faite par :

$$\inf_{q \in Q} d(A_q, D_q) > 0 \quad (1.8)$$

Il convient d'ajouter qu'un certain nombre d'hypothèses sont également posées pour :

- garantir l'existence et l'unicité de la solution sur chaque sous système continu (hypothèses classiques : Champs Lipschitz, etc),
- éviter des situations pathologiques sur les frontières des ensembles A_q, D_q, C_q et X_q ($\partial X_q \subset A_q$, champs transverses aux frontières, régularité des frontières, etc.).

Avec ce modèle, Branicky rend compte des enchaînements de modes continus et de leur articulation (et c'est son principal mérite), au moyen de la fonction de transition et des régions A, C, D mais il laisse dans l'ombre la partie discrète cachée dans la fonction de transition. Par conséquent, le pouvoir de description de la partie discrète est relativement faible.

On comprend alors que cette modélisation n'est pas de nature à clarifier les interactions entre les deux parties discrète et continue, pas plus qu'elle ne facilite la synthèse d'une loi de commande dans les cas complexes où un grand nombre d'états discrets sont envisagés. Mais rappelons-le, le but recherché était de décrire proprement un SDH comme un système dynamique or nous disposons à présent d'un modèle mathématique clair et précis.

Une description sous la forme d'un automate hybride est possible, et possède alors l'avantage de rendre la partie discrète plus lisible.

1.4.2 Les automates hybrides

Une autre modélisation des SDH est obtenue par l'extension de la théorie des automates à états finis en considérant pour chaque location discrète une équation différentielle [Nic93], [Alu94], [Alu95]. Un intérêt non négligeable d'une modélisation sous forme d'automate hybride est la modularité de cette approche. En effet des règles de compositions entre automates permettent une description sous forme de modules.

Un système hybride est défini comme un six-uplet $H(X, F, E, I, G, R)$ où

- $X = X_D \times X_C$ est l'espace d'état avec $X_D = \{q_1, \dots, q_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble fini des états discrets et X_C une variété.
- $F : X \rightarrow TX_C$ est une application qui associe à chaque état discret $q \in X_D$ un champ de vecteurs $F(q, \cdot)$ (TX_C est l'espace tangent à la variété X_C)
- $E \subseteq X_D \times X_D$ est l'ensemble des transitions discrètes
- $I : X_D \rightarrow 2^{X_C}$ est une application qui associe à $q \in X_D$ un ensemble dit invariant de la forme $I(q) \subseteq X_C$
- $G : E \rightarrow X_D \times 2^{X_C}$ est une application qui associe à chaque transition $e = (q_1, q_2) \in E$ une garde de la forme $\{q_1\} \times U, U \subset I(q_1)$
- $R : E \rightarrow X_D \times 2^{X_C}$ est une application qui associe à chaque transition $e = (q_1, q_2) \in E$ une réinitialisation de la forme $\{q_2\} \times V, V \subset I(q_2)$

La dynamique de ce système est alors obtenue par la concaténation d'une évolution continue et de sauts discrets.

Pour une position initiale (q, x) , une portion de trajectoire continue est obtenue en conservant l'état discret constant et en faisant évoluer x à partir de l'équation différentielle associée $\dot{x} = F(q, x)$ aussi longtemps que $x(\cdot)$ vérifie l'invariant $I(q)$. Si la trajectoire ne vérifie plus $I(q)$, une transition est forcée. De plus, si durant l'évolution continue, un état $(q, x(t))$ appartient à l'ensemble $G(e)$ pour une transition $e \in E$ alors cette transition est rendue disponible. Le système peut alors instantanément sauter de la position $(q, x(t))$ à la position $(q', x'(t)) \in R(e)$ et continuer à évoluer suivant la nouvelle dynamique $F(q', \cdot)$ associée à ce nouvel état discret.

On l'aura remarqué, ce système est très similaire au précédent.

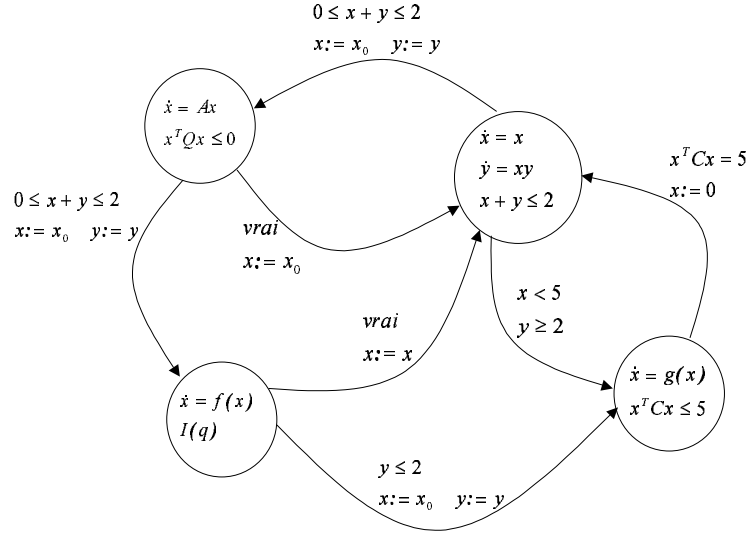


FIG. 1.14: Automate Hybride

L'ensemble invariant $I(q)$ est le complémentaire de la région de sauts autonomes A_q aux frontières prêt, la garde G correspond à la région de sauts commandés C et la fonction de réinitialisation permet de prendre en compte les discontinuités sur l'état.

Ce type de modèle est non déterministe au sens où les instants de franchissement des arcs et les positions d'arrivées ne sont pas donnés a priori. Autrement dit, la commande discrète n'est pas spécifiée à l'avance et l'analyse de l'automate conduit à des propriétés globales (vérifiées par toutes les trajectoires partant d'un même ensemble X_0). Des outils informatiques ont été développés dans cette optique [Dra94], [Hen95].

Un des problèmes essentiellement posés pour cette modélisation, est le problème de l'atteignabilité qui consiste à déterminer si une région de l'espace d'état est atteignable depuis une région initiale. Ce type de problèmes possède un intérêt évident pour des questions de sûreté de fonctionnement et de commandabilité.

La recherche d'une solution se fait sous la forme d'un algorithme qui détermine par pas de temps successifs les états atteignables.

La question principale est alors de savoir s'il existe un tel algorithme qui termine en un temps fini : c'est la notion de décidabilité [Hen95+], [Blo97]. Pour obtenir des classes de systèmes hybrides pour lesquelles la question de décidabilité peut être tranchée, le concept de bisimulation est défini dans [Hen95]. Ce concept permet de réduire la taille du problème (nombre de trajectoires) initialement infinie à une dimension finie en raisonnant par classes de trajectoires équivalentes.

Cependant, il convient de noter qu'il subsiste dans cette approche, un problème lié à la discrétisation du temps. La granularité du temps aussi petite soit elle, ne

permet pas de garantir les mêmes propriétés pour le système en temps continu.

Les classes de systèmes hybrides pour lesquelles le problème de l'atteignabilité est décidable se limitent actuellement [Laf99] aux champs linéaires $F(q, x) = A_q x$ avec des matrices A_q telles que :

- $A_q \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, et A_q est nilpotente
- $A_q \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, et A_q est diagonalisable et admet des valeurs propres rationnelles
- $A_q \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, et A_q a des valeurs propres imaginaires pures de la forme ir , $r \in \mathbb{Q}$.

Notons enfin que la prise en considération de champs plus complexes autorisant une commande continue u et une perturbation d de l'environnement sur le système, est proposée dans [Tom98] et [Lyg98], pour un modèle de contrôle du trafic aérien. On trouve dans les livres [HSCC99] et [HSCC98], une large revue d'articles portant sur le problème de la décidabilité et sur le calcul des régions atteignables par approximation.

1.4.3 D'autres approches

On trouve :

- Une approche pour la supervision de procédés qui reprend le modèle trois couches (figure 1.12). La commande continue est choisie dans un ensemble fini de valeurs constantes et les événements sont produits par des transitions entre régions de l'espace d'état continu. La dynamique hybride limitée à des commutations sur la commande de la partie continue, permet de faire l'analyse de la commandabilité et s'adapte à la supervision d'un système continu par un système discret [Sti95], [Ye95] et [Lem95].
- L'approche par graphes à liens (Bond graphs) permet, à partir de diagrammes de flux et de chaînes de causalité pour des systèmes physiques, de décrire les équations du modèle. Une extension qui intègre les discontinuités induites par les phénomènes discrets, conduit à une représentation sous forme de systèmes singuliers [Cor98], [Iqb97].
- Un modèle dynamique décrit par une famille de systèmes linéaires contraints par un ensemble d'inégalités mixtes (i.e. mélangeant des variables logiques et des variables continues) est formulé dans [Bem99+]. Cette approche permet, à l'aide de règles de conversions de propositions logiques sous forme d'inégalités linéaires mixtes, de représenter la classe des systèmes hybrides linéaires. La commande, la détection de fautes, l'estimation d'état et la vérification sont alors rendues possible par l'existence de techniques de résolution telles que la programmation linéaire (quadratique) entière mixte.
- La description d'un SDH sous la forme d'un modèle déclaratif, en l'occurrence un langage synchrone peut pour certaines classes de SDH être un outil puissant (informatique) d'analyse mais l'hypothèse de synchronisme des événements

n'est pas a priori capable de rendre compte de l'ensemble des systèmes hybrides [Ben90].

- De nombreux modèles de représentation à base de réseaux de Petri étendus font l'objet de recherches, [Dav97] et [All98]. Il semble que ce type de représentation soit assez bien adapté à la modélisation de procédés “Batch” et de systèmes manufacturiers. La représentation graphique est un atout pour la simulation mais une faiblesse d'outils d'analyse est incontestable (algèbre des dioïdes, [Coh95]).

1.5 Les problèmes posés par les SDH

Les problèmes posés par les SDH sont nombreux et on a pu s'en rendre compte à la lecture des pages précédentes. D'une part, on recense tous les problèmes issus des systèmes discrets et continus mais surtout de nouveaux dus à l'interaction de ces systèmes.

Comme nous l'avons mentionné pour les problèmes de vérification, les outils d'analyse des automates hybrides ont de grosses difficultés théoriques à intégrer les composantes continues, et, la dynamique continue est souvent très en retrait et se limite à de simples intégrateurs.

Du point de vue continu, les outils d'analyses s'accompagnent généralement d'hypothèses de régularité sur les données qu'il est difficile de satisfaire en présence de discontinuités sur l'état et/ou sur le modèle.

On recense comme problèmes liés aux automates :

- La validation des propriétés structurelles [Tan88], [Pra99], ...
- La vérification, [Man95], [Alu95], [Len96], [Var97], [Bem99], [Lyg99], ...
- La supervision [Ram89], [Won97], [Hey97], [Mal95], [Lem93], [Ner93], ...
- La sûreté de fonctionnement [MSR'99], ...
- L'optimisation de chemin dans un graphe [Tit94], [Asa99], ...

De son côté, la partie continue soulève des problèmes de :

- Stabilité : [Ye95+], [Hou96], [Lem97], [Bra98], [Ran2000], [Has99], [Bis99], ...
- Commandabilité et observabilité [Ner93+], [Blo99], [Xu99], ...
- Commande [Lyg98], [Lyg96].[Bra98+], [Hed99], ...
- Robustesse [Pet96], [Hu99], ...
- Identification,
- Diagnostic [Mig99], ...

A titre d'exemple, on peut citer le problème de stabilité. On montre qu'il est facile de produire un système hybride instable à partir de deux systèmes stables (figures 1.16, 1.17 et 1.18), et inversement.

Considérons donc deux systèmes linéaires S_1 et S_2 en évolution libre d'équations :

$$\dot{x} = A_i x, i = 1, 2 \quad (1.9)$$

où $A_1 = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ -10 & -0.1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} -0.1 & 10 \\ -1 & -0.1 \end{pmatrix}$. On construit alors un système hybride instable en commutant du système S_1 vers le système S_2 sur la droite $x_1 = 0$ et de S_2 vers S_1 sur la droite $x_2 = 0$ (figure 1.15). Le système est instable car aux instants successifs de commutation la norme du vecteur x ne cesse de croître.

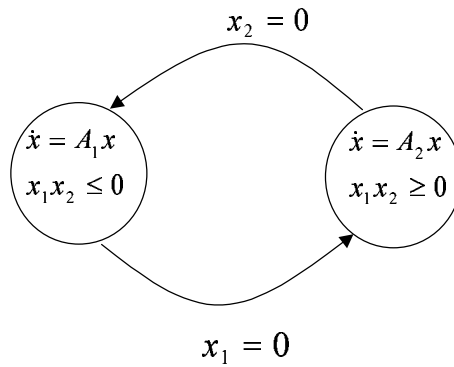


FIG. 1.15: Automate associé au système hybride

Nous reviendrons sur le problème de la stabilité au chapitre 5.

1.6 Le problème de la commande optimale en particulier

Lorsque l'on cherche à agir sur un système dynamique afin d'atteindre un objectif (une région, limiter une dépense d'énergie, un régime stable, ...), la recherche d'une commande efficace n'est pas a priori un problème simple. Dans les meilleurs cas, une heuristique permet d'approcher cet objectif [Iqb97], [Bis99] mais elle reste limitée au type de système étudié. Une approche plus systématique est d'aborder ce problème sous la forme d'un problème de commande optimale. On cherche alors la meilleure commande pour réaliser notre objectif. Plus exigeante en apparence, cette approche permet de formaliser le problème sous la forme d'un critère à minimiser et constitue alors un point d'accroche.

Peu de travaux ont été présentés à ce jour sur la commande optimale des SDH. Dans [Lu93], un modèle de système hybride formé par des sauts autonomes sur le champ de vecteurs est présenté. Le problème de la commande optimale est abordé avec des modèles continus discrétisés en temps. Cette discrétisation permet alors de résoudre le problème comme un problème de programmation dynamique. Les

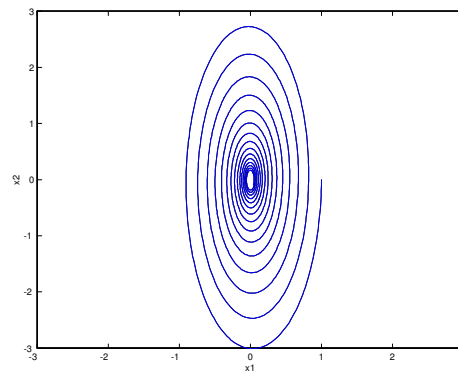


FIG. 1.16: Système 1 stable

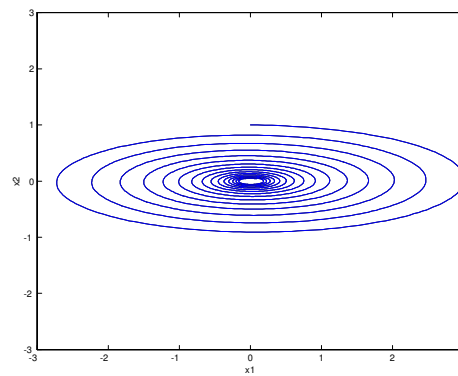


FIG. 1.17: Système 2 stable

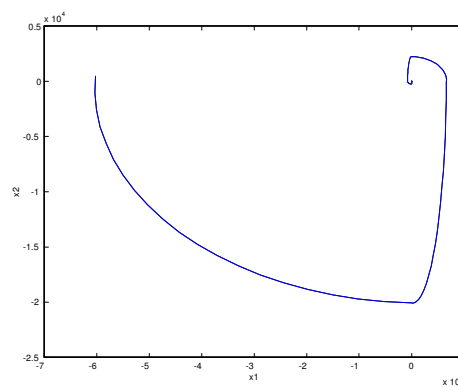


FIG. 1.18: Système hybride instable

auteurs soulignent la difficulté induite par les sauts de modèles, pour la convergence d'algorithme de descente (gradient) et proposent un algorithme basé sur la programmation dynamique avec contraintes.

La première approche générale du problème de la commande optimale des SDH est proposée par Branicky et al. [Bra94+]. A partir du modèle unifié du même auteur, un critère général composé d'un critère intégral et de coûts associés aux transitions discrètes c_a et commandées c_c , est proposé :

$$\int_T e^{-\alpha t} L(x, u) dt + \sum_q e^{-\alpha \sigma_q} c_a(x(\sigma_q), v_q) + \sum_q e^{-\alpha \zeta_q} c_c(x(\zeta_q), x(\zeta'_q)) \quad (1.10)$$

où $T = \mathbb{R}^+ \setminus (\cup_q [\tau_q, \Gamma_q])$ représente les intervalles de temps d'activité du système (voir ci-dessus : le modèle de Branicky), σ_q les instants de sauts autonomes et ζ_q, ζ'_q les instants de début et de fin des sauts commandés.

La fonction de Bellman $V(x)$ correspondant au coût optimal en partant de la position initiale x est considérée. Par un argument de programmation dynamique, on obtient alors :

Une trajectoire admissible $x(\cdot)$, déterminée par la donnée :

- de la condition initiale x_0, q_0
- des commandes $u(\cdot)$ et v_i
- des instants de saut $\tau_i, \Gamma_i, \sigma_i, \zeta_i, \zeta'_i$

est optimale si les conditions suivantes sont vérifiées :

- pour presque tout $t \in T$ et q tel que $x(t) \in X_q$,

$$\begin{aligned} \partial_x V(x) f_q(x, u) - \alpha V(x) + L(x, u) = \min_u \partial_x V(x) f_q(x, u) \\ - \alpha V(x) + L(x, u) \end{aligned} \quad (1.11)$$

- pour tout q ,

$$V(x(\sigma_q)) = \min_v \{ c_{aq}(x(\sigma_q), v) + e^{-\alpha \Delta_{aq}(x(\sigma_q), v)} V(G_q(x(\sigma_q), v)) \} \quad (1.12)$$

- pour tout q ,

$$V(x(\zeta_q)) = \min_{z \in D} \{ c_{cq}(x(\zeta_q), z) + e^{-\alpha \Delta_{cq}(x(\zeta_q), z)} V(z) \} \quad (1.13)$$

(1.11) est l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et (1.12)-(1.13) est une application directe du principe de programmation dynamique. Ces équations représentent

donc une extension de l'équation de Bellman. Un théorème d'existence en l'absence de sauts commandés sur la variable d'état x , est proposé par l'auteur.

Différents algorithmes pour résoudre ce problème sont exposés dans [Bra95+]. Une première méthode consiste à transformer le problème sous la forme d'un problème de programmation linéaire en remplaçant les égalités ci-dessus par des inégalités. Le lien avec la commande impulsionnelle [Ben84] est également souligné et un algorithme issu de ces systèmes est adapté.

La résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles (1.11) est en générale assez difficile en raison de la discontinuité de la solution par rapport à x et t et nécessite une discrétisation spatiale et temporelle. Une littérature abondante existe sur le sujet. Une méthode développée à partir de l'équation de "viscosité" [Lio82] qui généralise la solution de (1.11) en présence de discontinuités, est étendue au cas hybride.

Un exemple d'hystérésis est alors traité numériquement par l'algorithme suivant (problème aux frontières) :

1. Pour chaque i , fixer une valeur initiale à $V_i(x)$
2. Pour chaque i , pour $x \in A_i$ et $x \in C_i$, imposer respectivement les contraintes suivantes

$$V_i(x) := \min_v \{c_{a,i}(x, v) + e^{-\alpha \Delta_{a,i}(x,v)} V(G_i(x, v))\}$$

$$V_i(x) := V_i(x) \wedge \min_{z \in D} \{c_{c,i}(x, z) + e^{-\alpha \Delta_{c,i}(x,z)} V(z)\}$$
3. Mettre à jour chaque V_i en résolvant séparément (1.11) sous la contrainte déterminée au point 2.
4. Si la solution converge reprendre depuis le point 2.

Nous commenterons ce même exemple à la fin du chapitre 4 où nous proposons une solution analytique.

Pour un problème simplifié ne comportant que des sauts commandés, S. Hedlund et A. Rantzer [Hed99] présentent une méthode de discrétisation dans $\mathbb{R}^2$. L'approche basée sur un algorithme de programmation linéaire, conduit à un problème d'optimisation convexe et l'estimation du critère est déterminée par une borne inférieure et une borne supérieure. Deux exemples sont alors résolus.

Le problème de la synthèse d'un contrôleur qui garantit des spécifications de sûreté de fonctionnement, pour des automates hybrides comportant des champs de la forme $f_q(x, u, d)$ où d représente une perturbation de l'environnement sur le système, est exposé dans [Lyg98], [Lyg99].

La résolution de ce problème fait alors appel à la théorie des jeux [Chu62]. La stratégie de commande est déterminée en optimisant la commande u dans l'hypothèse où l'environnement d agit d'une façon des plus défavorables au système (pire cas) : c'est un problème de min-max.

Le critère ne comporte qu'un seul terme terminal et permet d'évaluer si la position finale appartient ou non à une région indésirable de l'espace. Une stratégie

gagnante est obtenue s'il existe au moins une commande u qui permet d'éviter cette région indésirable. La recherche de l'ensemble des conditions initiales (positions) menant à une stratégie gagnante, est l'objectif que l'on se fixe.

La principale difficulté soulignée par les auteurs réside encore une fois dans la résolution de l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Notons tout de même que ce problème d'optimisation n'est pas à proprement parler hybride puisqu'aucun changement de modèle n'intervient dans la recherche des bonnes trajectoires.

Une approche Lagrangienne est proposée dans [Ceb99] pour des systèmes comportant des sauts autonomes et un algorithme numérique de descente est utilisé pour un problème de poursuite de trajectoire.

Dans cette étude, un autre point de vue sur la commande optimale des SDH est abordé avec le Principe du Maximum de Pontryaguine [Pon64]. Dans le prochain chapitre, nous présentons cette approche. Deux exemples simples nous permettent d'illustrer ce principe, de montrer ses insuffisances ainsi que les difficultés liées à l'étude des processus hybrides.

Une extension aux SDH de ce principe du maximum fait l'objet du chapitre 3. Cette extension permet de prendre en considération l'ensemble des phénomènes hybrides. La fin de ce chapitre est consacrée à une application de ce principe sur un exemple proposé dans la littérature [Bra95]. Les chapitres 4 et 5 traitent de la commande optimale en temps et de la stabilité des SDH.

Chapitre 2

La Commande Optimale des Systèmes Dynamiques

2.1 Position du problème

Le plus vieux problème d'optimisation dont l'histoire nous a laissé une trace, remonte à l'antiquité. Il s'agissait de déterminer le plus court chemin joignant deux points. Une réponse intuitive souvent confondue avec celle du temps minimal, est tirée de l'expérience quotidienne de nos déplacements. Un bout de ficelle et quelques considérations géométriques confirment que nos déplacements, de préférence en ligne droite, ne sont pas toujours dénués de fondements. Vient ensuite, avec la construction de Carthage en 850 avant J-C, le problème posé par la reine Didon qui demanda pour la construction de sa ville "autant de terre que pouvait en contenir la peau d'un taureau". Pour résoudre ce problème, la Reine Didon découpa la peau en minces lanières qui, mises bout à bout, pouvaient entourer l'espace d'une ville. La solution de ce problème de la recherche de la plus grande aire obtenue à partir d'une courbe fermée était connue des grecs pour être le cercle.

Ce n'est qu'à la fin du *XVII^{ième}* siècle, avec le Brachystochrone de Jean Bernoulli [Ber1696] que le premier problème d'optimisation fait intervenir une dynamique et pose le problème de la recherche d'un chemin optimal. Considérant deux points A et B et un corps M soumis à son poids, Bernoulli s'interroge sur la trajectoire que doit suivre le corps M pour relier ces deux points en un temps minimal. Ce problème attire l'attention et l'enthousiasme de Leibnitz, Newton, L'Hôpital, Tschirnhaus ainsi que de Jacques le frère de Jean Bernoulli. Les solutions apportées par ce groupe vont être à l'origine des fondements du calcul des variations développé par la suite

par Euler, Lagrange et Legendre et complété plus tard par Weierstrass [Sus97]. Ces travaux marquent le début de la théorie de la commande optimale des systèmes dynamiques telle que nous l'entendons aujourd'hui.

La formulation actuelle d'un problème de commande a pour origine les problèmes de pilotage des missiles rencontrés durant les années 40. Ce problème a intéressé un grand nombre de mathématiciens et d'ingénieurs dont les efforts ont donné naissance à une nouvelle discipline scientifique : la théorie de la commande optimale. En toute généralité, le problème de commande peut être énoncé de la manière suivante : on entend par commande et on note $u(\cdot)$ tout élément d'une classe de fonctions définies sur un intervalle $[t_0, t_f]$ et prenant leurs valeurs dans un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^m$. A toute commande $u(\cdot)$ est associée un arc ou portion de trajectoire $x(\cdot)$ appelé état, solution de l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

avec $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ où X est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. La fonction f est donnée et x_0 peut être librement choisi dans un ensemble C_0 .

Un problème de commande optimale consiste alors à déterminer $u(\cdot)$ et x_0 tels que la fonction critère,

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (2.2)$$

soit minimisée sous la contrainte finale $x(t_f) \in C_1$ où C_1 est un ensemble donné. La fonction J est spécifiée par un problème concret, physique ou non, et représente par exemple une dépense d'énergie, d'argent, de temps, etc. L'instant initial t_0 est donné et l'instant final t_f peut être spécifié ou non. Il peut être également envisagé de considérer une dépendance explicite par rapport au temps t du domaine de commande U ainsi qu'une contrainte sur l'état de type :

$$g(t, x(t)) \geq 0 \quad (2.3)$$

La fonction ϕ représente un coût ou critère terminal à payer à l'arrivée. Le problème (2.1)-(2.2) contient à la fois un terme intégral et un terme final, on a un problème de Bolza. Lorsque seul le terme intégral apparaît, c'est un problème de Lagrange et dans l'autre cas, il s'agit d'un problème de Meyer.

2.2 Analyse du problème

L'étude d'un problème de commande optimale se scinde en trois étapes. La première doit permettre de répondre à la question : "Existe-t-il au moins une commande admissible minimisant le critère ?". C'est la question de l'existence de solutions. Puis, l'écriture de conditions nécessaires vérifiées par la (ou les) commande optimale définit alors un ensemble de commandes candidates. A partir du problème particulier

traité, on recherche enfin des conditions suffisantes (par exemple l'unicité) donnant la (ou les) solution optimale parmi l'ensemble des candidates.

Il va de soi que la nature et la régularité des différentes fonctions considérées dans la formulation du problème, y compris la classe des commandes admissibles, jouent un rôle prépondérant dans l'étude de ces trois phases. Le calcul des variations (méthodes variationnelles et approche lagrangienne) permet d'établir des conditions nécessaires lorsque le domaine de commande U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Mais il s'avère inapplicable pour des problèmes où la commande optimale est obtenue pour des valeurs situées sur la frontière du domaine U (commandes "bang-bang"). Les problèmes en temps optimal fournissent de beaux exemples où se rencontre cette situation.

2.2.1 Conditions nécessaires : Le Principe du Maximum

A la fin des années cinquante, un groupe de chercheurs russes formé de Pontryaguine, Boltianski, Gamkréldzé et Michtchenko propose un procédé mathématique appelé Principe du Maximum [Pon64], aboutissant à l'énoncé de conditions nécessaires pour résoudre des problèmes aux variations. Là où "les méthodes variationnelles traditionnelles s'avèrent inaptes à résoudre d'innombrables problèmes importants", l'équipe russe apporte à nombre d'entre eux des solutions. Le Principe du Maximum apparaît bien comme un principe au sens où il permet de générer des théorèmes suivant les hypothèses faites sur le problème de commande.

Un des grands intérêts de ce principe est que la faiblesse des hypothèses faites, autorise des classes de commandes admissibles extrêmement vastes. Dans sa première version, la plus grande classe est représentée par les commandes mesurables et bornées. Non moins intéressante est l'absence d'hypothèse sur la dérivabilité des fonctions f et L par rapport à la commande u . Nous verrons par la suite que ce dernier point est important et bien pratique pour résoudre un problème de commande de système hybride. Aujourd'hui, un affaiblissement des hypothèses de régularité sur les fonctions conduit à des versions fortes du Principe du Maximum [Cla90], [Jak98] et autorise la prise en compte de discontinuités. Hélas, la mise en oeuvre de ces versions nécessite une technicité mathématique parfois excessive au regard des problèmes de l'ingénieur.

Cas des systèmes à temps invariant

Sauf cas contraire, nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

Hypothèses (H_0) :

On note $f^1 \dots f^n$ les composantes de f et f^0 pour L .

1. Les fonctions f^i et $\frac{\partial f^i}{\partial x}$ pour $i = 0, \dots, n$ sont supposées données et continues sur le produit direct $\mathbb{R}^n \times \overline{U}$ ($X = \mathbb{R}^n$).
2. La fonction ϕ est continûment différentiable.
3. L'ensemble U est borné.

4. Les commandes admissibles sont mesurables au sens de Lebesgue ($\mathcal{L}$ -mesurable).
5. C_0 et C_1 sont des variétés continûment différentiables.

Alors, une version de base du Principe de Maximum pour un problème de type (2.1) et (2.2) sans dépendance explicite par rapport au temps et sans critère terminal s'énonce formellement de la manière suivante :

Soit la *fonction Hamiltonienne* H des variables λ_0, λ, x et u définie par :

$$H(\lambda_0, \lambda, x, u) = \lambda^T f(x, u) - \lambda_0 L(x, u) \quad (2.4)$$

où λ_0 est une constante positive $\lambda_0 \geq 0$ et soit le *Système Hamiltonien* (**SH**)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad - \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.5)$$

La seconde équation du **SH** est appelée *système adjoint* et $\lambda(\cdot)$ la *variable adjointe*.

Théorème 2.1 (PRINCIPE DU MAXIMUM (PM)) *Si $\hat{u}(\cdot)$, et $\hat{x}(\cdot)$ sont respectivement une commande admissible optimale et la trajectoire correspondante pour le problème de Lagrange (2.1)-(2.2), alors il existe une fonction absolument continue $\hat{\lambda}(\cdot)$ et une constante $\hat{\lambda}_0 \geq 0$, $(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}(t)) \neq (0, 0)$ sur $[t_0, t_f]$, telles que le quadruplet $(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}, \hat{x}, \hat{u})(\cdot)$ vérifie le **SH** (2.5) presque partout et les conditions dites de maximum suivantes :*

- i. pour tout $t \in [t_0, t_f]$, $\hat{u}(t)$ maximise la fonction Hamiltonienne

$$H(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \sup_{v \in U} H(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), v) \quad (2.6)$$

- ii. pour tout $t \in [t_0, t_f]$,

$$H(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv \text{Constante} \quad (2.7)$$

avec $\text{Constante} = 0$ si t_0 ou t_f ne sont pas spécifiés à l'avance.

- iii. De plus, $\hat{\lambda}(\cdot)$ doit vérifier aux instants initial et final les conditions de transversalité :

$$\hat{\lambda}(t_0) \in N_{C_0}(\hat{x}(t_0)) \quad \hat{\lambda}(t_f) \in N_{C_1}(\hat{x}(t_f)) \quad (2.8)$$

où $N_C(x)$ représente le sous-espace normal à C au point x (i.e. le sous-espace engendré par les vecteurs orthogonaux au plan tangent à C au point x).

Une trajectoire $x(\cdot)$ et une commande $u(\cdot)$ sont dites *extrémales* s'il existe un couple $(\lambda_0, \lambda(\cdot))$ tel que la condition i. du **PM** soit vérifiée. Ces trajectoires *extrémales* forment donc un ensemble de candidates à la résolution du problème. Il convient de signaler que cet ensemble peut être non vide même si le problème n'admet pas de solution optimale. En conséquence, une étude préalable sur l'existence de solution est absolument indispensable.

Remarque : La constante λ_0 est très rarement égale zéro et l'est dans des situations pathologiques. Aussi, dans la plupart des applications, on peut choisir $\lambda_0 = 1$.

Cas des systèmes à temps variant

Lorsqu'une dépendance explicite par rapport au temps des fonctions f et L est considérée, le **PM** admet une formulation équivalente. En effet dans cette situation, il est possible de remplacer le système d'équations initiales d'ordre n par un système d'équations, d'ordre $n + 1$ en posant $x_{n+1} = t$, (impliquant $\dot{x}_{n+1} = 1$).

La fonction Hamiltonienne s'écrit alors :

$$\mathcal{H}(\lambda_0, \lambda, x, u, x_{n+1}) = \lambda^T f(x, u, x_{n+1}) + \lambda_{n+1} \cdot 1 - \lambda_0 L(x, u, x_{n+1}) \quad (2.9)$$

Soit encore :

$$\mathcal{H}(\lambda_0, \lambda, x, u, x_{n+1}) = H(\lambda_0, \lambda, x, u, x_{n+1}) + \lambda_{n+1} \quad (2.10)$$

Le Système Hamiltonien (**SH**) devient,

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \quad - \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (2.11)$$

Sous les mêmes hypothèses, l'énoncé du **PM** pour la fonction $\mathcal{H}$ et le **SH** associé ne change pas.

Prise en compte d'un critère terminal : Le problème de Bolza

Considérons un problème de Bolza c'est-à-dire un problème d'optimisation sur un système à temps variant avec un critère intégral et terminal de la forme :

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (2.12)$$

Dans sa formulation initiale, le **PM** ne traitait que du cas sans critère terminal. Le but de cette partie est de montrer comment un critère terminal peut être pris en considération. Dans ce qui suit, nous allons montrer que la seule modification induite par l'adjonction de ce terme terminal, se situe au niveau des conditions de transversalité.

Si la dérivée par rapport au temps de $\phi(x(t_f), t_f)$ a un sens (par exemple : la fonction ϕ est continûment différentiable), on peut inclure ce critère terminal dans le critère intégral en écrivant :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[L(x(t), u(t), t) + \frac{d\phi}{dt}(x(t), t) \right] dt + \phi(x(t_0), t_0) \quad (2.13)$$

Pour x_0 et t_0 fixés, le dernier terme $\phi(x(t_0), t_0)$ est constant et ne joue aucun rôle dans le problème d'optimisation. Il peut par conséquent, être supprimé.

En posant,

$$\mathcal{L}(x(t), u(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \frac{d\phi}{dt}(x(t), t) \quad (2.14)$$

on retrouve une formulation classique.

Comme nous venons de le voir dans la section précédente (en posant $x_{n+1} = t$, $\dot{x}_{n+1} = 1$), la fonction Hamiltonienne du système est définie par :

$$\mathcal{H} = \lambda^T f(x, u, t) + \lambda_{n+1} \cdot 1 - \lambda_0 \mathcal{L}(x, u, t) \quad (2.15)$$

Et puisque $\frac{d\varphi}{dt}(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}^T(x, t) f(x, u, t)$, $\mathcal{H}$ devient :

$$\mathcal{H} = \lambda^T f(x, u, t) + \lambda_{n+1} - \lambda_0 (L(x, u, t) + \phi_t(x, t) + \phi_x(x, t)^T f(x, u, t)) \quad (2.16)$$

Par commodité, les dérivées partielles de ϕ par rapport à t ($x_{n+1} = t$) ou x sont notées en indice ϕ_t, ϕ_x .

Soit encore, en factorisant f :

$$\mathcal{H} = (\lambda - \lambda_0 \phi_x)^T f(x, u, t) + \lambda_{n+1} - \lambda_0 \phi_t - \lambda_0 L(x, u, t) \quad (2.17)$$

Effectuons le changement de variable :

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda_0 \phi_x \quad (2.18)$$

$$\tilde{\lambda}_{n+1} = \lambda_{n+1} - \lambda_0 \phi_t \quad (2.19)$$

et montrons alors que $X = \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$ et $\Lambda = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda} \\ \tilde{\lambda}_{n+1} \end{bmatrix}$ vérifient le système Hamiltonien :

$$\dot{X} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Lambda} \quad \dot{\Lambda} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial X} \quad (2.20)$$

où

$$\tilde{H}(\lambda_0, \tilde{\lambda}, x, u, t) = \tilde{\lambda}^T f(x, u, t) + \tilde{\lambda}_{n+1} - \lambda_0 L(x, u, t). \quad (2.21)$$

Pour $\dot{X}$, c'est évident. Calculons la dérivée de Λ :

$$\dot{\Lambda} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} - \lambda_0 \dot{\phi}_x \\ \dot{\lambda}_{n+1} - \lambda_0 \dot{\phi}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{H}_x - \lambda_0 \dot{\phi}_x \\ -\mathcal{H}_t - \lambda_0 \dot{\phi}_t \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

En développant, il vient :

$$\dot{\Lambda} = \begin{bmatrix} -f_x^T (\lambda - \lambda_0 \phi_x) + \lambda_0 \phi_{xx} f + \lambda_0 \phi_{xt} + \lambda_0 L_x - \lambda_0 \phi_{tx} - \lambda_0 \phi_{xx} f \\ -f_t^T (\lambda - \lambda_0 \phi_x) + \lambda_0 \phi_{xt} f + \lambda_0 \phi_{tt} + \lambda_0 L_t - \lambda_0 \phi_{tt} - \lambda_0 \phi_{tx} f \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

d'où par simplification, puisque $\phi_{tx} = \phi_{xt}$:

$$\dot{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 L_x(x, u, t) - f_x(x, u, t)^T \tilde{\lambda} \\ \lambda_0 L_t(x, u, t) - f_t(x, u, t)^T \tilde{\lambda} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Soit $\dot{\Lambda} = -\tilde{H}_X$.

La recherche d'un maximum de $\mathcal{H}$ est donc équivalente à la recherche d'un maximum de $\tilde{H}$.

Les conditions de transversalité deviennent :

$$\Lambda(t_f) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}(t_f) \\ \tilde{\lambda}_{n+1}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(t_f) - \lambda_0 \phi_x(x(t_f), t_f) \\ \lambda_{n+1}(t_f) - \lambda_0 \phi_t(x(t_f), t_f) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

où $(\lambda^T(t_f), \lambda_{n+1}(t_f))^T$ vérifie les conditions classiques de transversalité c'est-à-dire $(\lambda^T(t_f), \lambda_{n+1}(t_f))^T$ est orthogonal au plan tangent à la variété C_1 au point $(x(t_f), t_f)$.

Si on note par $N_C(x)$ le sous-espace normal au plan tangent à la variété C au point x , ces conditions de transversalité se traduisent par la relation :

$$\Lambda(t_f) \in N_{C_1}(x(t_f), t_f) - \lambda_0 \begin{bmatrix} \phi_x(x(t_f), t_f) \\ \phi_t(x(t_f), t_f) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Les conditions du **PM** sont donc inchangées sauf pour la condition de transversalité à l'instant final.

Le PM pour des hypothèses affaiblies

Pour des systèmes à temps variants, une version sans critère terminal, du **PM** est proposée par Berkovitz en 1974 [Ber74]. Les hypothèses plus faibles notamment en ce qui concerne la régularité des fonctions f^i , ($i = 0, \dots, n$), sont les suivantes :

On note $f^1 \dots f^n$ les composantes de f et f^0 pour L .

1. Les fonctions f^i , $i = 0, \dots, n$ sont supposées définies sur le produit $X \times U_0 \times [t_0, t_f]$ où X, U_0 sont des ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
2. Les fonctions $x \mapsto f^i(x, u, t)$, $i = 0, \dots, n$ sont de classes C^1 pour tout couple $(u, t) \in U_0 \times [t_0, t_f]$ et pour tout x fixé les applications $(u, t) \mapsto f^i(x, u, t)$, $i = 0, \dots, n$ sont Borel mesurable ($\mathcal{B}$ -mesurable).
3. L'ensemble U est un sous-ensemble de U_0 .
4. Une commande admissible est une application $[t_0, t_f] \mapsto u(t) \in U$ telle que pour tout compact K de X , il existe une fonction intégrable $t \mapsto \phi_K(t)$ telle que la majoration $\|f^i(x, u(t), t)\| + \left\| \frac{\partial f^i}{\partial x}(x, u(t), t) \right\| \leq \phi_K(t)$ soit vérifiée pour tout couple $(x, t) \in K \times [t_0, t_f]$ et tout indice i , $i = 0, \dots, n$.

Avec ces hypothèses, l'énoncé du **PM** est identique sauf pour la condition de maximum i. qui n'est plus vérifiée pour tout t mais pour presque tout t .

2.2.2 Conditions suffisantes et existence

La question de l'existence pour un problème de commande optimale se pose en ces termes : “Si il existe une commande admissible me permettant d'aller de l'ensemble C_0 à C_1 en respectant la contrainte (2.3) $g(t, x(t)) \geq 0$ avec un coût fini, en existe-t-il une qui minimise le coût de ce transfert ?”. Une réponse possible proposée par Clarke [Cla90] est la suivante :

Hypothèses (H_1)

1. $L(x, u, t)$ est $\mathcal{B} \times \mathcal{L}$ -mesurable¹ et semi-continue inférieurement en (x, u) .
2. $f(x, u, t)$ est $\mathcal{L}$ -mesurable en t et continue en (x, u) .
3. $U(\cdot)$ prend ses valeurs dans un ensemble fermé et son graphe est $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ -mesurable.
4. $g(t, x)$ est $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ -mesurable et semi-continue inférieurement en x .
5. C_0 et C_1 sont fermés ; ϕ est semi-continue inférieurement.
6. Pour tout t , pour tout ensemble borné S de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$\{u \in U(t) : (x, f(x, u, t)) \in S\} \quad (2.27)$$

est borné.

Théorème 2.2 Existence ([Cla90] p.222)

Sous les hypothèses (H_1) et si :

a) Pour tout x et t tels que $g(t, x(t)) \geq 0$, l'ensemble

$$\{[f(x, u, t), L(x, u, t) + \delta] : u \in U(t), \delta \geq 0\} \quad (2.28)$$

est convexe.

b) Il existe des fonctions bornées $\sigma(t)$, $\rho(t)$, et $\mu(t, \lambda)$ sommables en t telles que pour tout x et t satisfaisant $g(t, x(t)) \geq 0$, pour tout v de $U(t)$ et tout λ , on a la majoration :

$$H(1, \lambda, x, v, t) \leq \mu(t, \lambda) + |x| (\sigma(t) + \rho(t) |\lambda|) \quad (2.29)$$

c) C_0 est compact ; $\phi(s)$ est minorée sur C_1 par une fonction de la forme $c - m|s|$.

Alors, s'il existe au moins un couple admissible $(x, u)(\cdot)$ pour le problème de commande qui satisfait aux conditions initiales et finales, avec un coût fini alors il existe une solution optimale.

Ce théorème, bien que peu exigeant sur la régularité des fonctions ne peut évidemment pas faire l'économie de la condition a). En effet, l'hypothèse de convexité est le minimum en deçà duquel on ne peut plus garantir l'existence de manière aussi générale. Notons que la condition $\delta \geq 0$ est loin d'être négligeable puisque sans elle, le système $\dot{x} = u$ et $J = \int u^2 dt$ ne vérifie pas a).

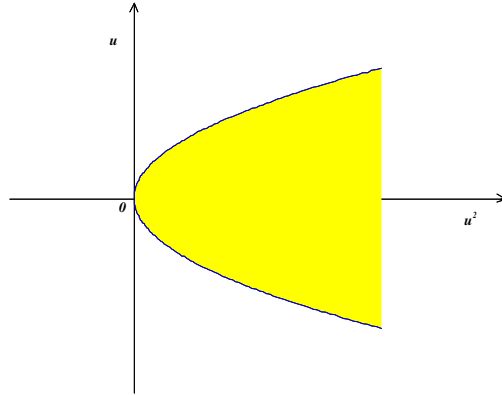


FIG. 2.1: Cas où l'ensemble $\{[u, u^2 + \delta] : u \in U(t), \delta \geq 0\}$ est convexe et où $\{[u, u^2] : u \in U(t)\}$ ne l'est pas.

En fait, le terme $\delta \geq 0$ dans a) permet de remplir la parabole (u^2, u) (figure 2.1)

Avec la même généralité, on a le théorème :

Théorème 2.3 *Conditions suffisantes [Cla90] p.220*

Si

- a) les hypothèses (H1) sont satisfaites,
 - b) $U(\cdot)$ prend ses valeurs dans un ensemble convexe,
 - c) ϕ est convexe,
 - d) $(x, u) \mapsto H(1, \lambda(t), x, u, t)$ est concave pour tout t ,
 - e) $(x, u)(\cdot)$ est une paire extrémale,
- alors $(x, u)(\cdot)$ résout le problème de commande.

Ici, encore l'hypothèse de concavité est la plus exigeante.

2.3 Exemples introductifs à la commande optimale des SDH

Cette partie a pour but de mettre en évidence des problèmes posés par la commande des SDH. A travers deux exemples simples, nous verrons en quoi les conditions nécessaires énoncées précédemment peuvent nous aider pour la synthèse d'une commande mais également leurs limites.

¹ $\mathcal{B} \times \mathcal{L}$ désigne la σ -algèbre sur $R^{n+m} \times [t_0, t_f]$ engendrée par les produits cartésiens $M \times N$ où M est un sous ensemble Borélien de R^{n+m} et N un sous ensemble Lebesgue mesurable de $[t_0, t_f]$.

2.3.1 Etude générale

Position du problème

L'exemple le plus simple de SDH pour lequel on puisse prendre en considération des discontinuités sur les champs de vecteurs de type saut commandé, est représenté par la classe des systèmes à commutations de modèles linéaires. Considérons donc un système du $2^{ième}$ ordre sans second membre avec deux modes de fonctionnements :

$$\dot{x} = \begin{cases} A_0 x & \text{si } \alpha = 0 \\ A_1 x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Le champ de vecteurs auquel l'état est soumis, subit une discontinuité lorsque la valeur de l'indice α est modifiée. Ce système peut être vu comme la simplification d'un processus électromécanique dont la commande est réalisée par des convertisseurs statiques. En effet, pour ce type de processus, l'usage de convertisseurs statiques provoque des basculements de modèles et permet d'assurer par exemple une commande en vitesse du processus.

La commande de ce système s'exerce donc par le numéro du modèle α , ou, plus exactement, par les dates d'occurrences des commutations d'un modèle à l'autre (instants de commutation). Pour des raisons qui tiennent à la nature des processus physiques étudiés, on décrit cette commande discrète par une fonction constante par morceaux. Ce choix garantit par définition, un nombre de commutations fini en un temps fini. La dynamique de ce système c'est à dire l'évolution du vecteur d'état $x(\cdot)$ pour une commande $\alpha(\cdot)$ donnée est donc déterminée par une séquence finie d'équations différentielles linéaires. Aux instants de commutation, lorsque $\alpha(\cdot)$ change de valeur, le champ de vecteurs subit une discontinuité mais le vecteur d'état reste continu sous l'effet lissant de l'intégration de ce champ.

Une représentation sous la forme d'un seul champ de vecteurs qui intègre la commande discrète est alors obtenue avec :

$$\dot{x}(t) = \alpha(t) A_1 x(t) + (1 - \alpha(t)) A_0 x(t) \quad (2.31)$$

où $\alpha(\cdot)$ est une fonction constante par morceaux prenant ses valeurs dans l'ensemble $D = \{0, 1\}$.

L'objectif est alors de faire la synthèse d'une commande qui permette pour une position initiale de la variable d'état x_0 , d'atteindre une position finale x_f en un temps minimum.

Le critère envisagé est donc de la forme :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (2.32)$$

avec $L(x, \alpha) \equiv 1$, $\phi_k \equiv 0$ et t_f libre.

Dans tout ce qui suit, on suppose qu'il existe au moins une trajectoire permettant de rejoindre x_f à partir de x_0 , c'est-à-dire que x_f est atteignable. On suppose également que les matrices A_0 et A_1 ont des valeurs propres complexes à partie imaginaire non nulle. La commande "discrète" α permet de basculer d'un mode sur l'autre. Les hypothèses de continuité de f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur le produit direct $X \times \overline{U}$ sont évidentes.

Construisons le système adjoint,

$$\dot{\lambda}(t) = - [\alpha(t)A_1^T \lambda(t) + (1 - \alpha(t))A_0^T \lambda(t)] \quad (2.33)$$

où λ représente la variable adjointe.

La fonction Hamiltonienne H du système est alors définie par l'expression (2.4),

$$H(\lambda_0, \lambda(t), x(t), \alpha(t)) = \alpha(t)\lambda(t)^T(A_1 - A_0)x(t) + \lambda^T A_0 x(t) - \lambda_0 \quad (2.34)$$

Remarque : Le terme constant $-\lambda_0$ dans (2.34) n'a aucun effet sur le maximum de H et peut être supprimé. Par conséquent, comme le temps final n'est pas fixé, la condition $H = 0$ (voir condition ii. du **PM**, section 2.2.1) devient $H \geq 0$ puisque $\lambda_0 \geq 0$ et $\lambda(t)$ ne doit jamais être égale à zéro.

Pour x et λ fixés, on voit que l'Hamiltonien est une fonction affine en la commande. Le maximum est alors atteint pour $\alpha(t) = 0$ ou 1 suivant le signe de la quantité $\lambda^T(A_1 - A_0)x$:

$$\alpha(t) = 0 \text{ si } \lambda^T(A_1 - A_0)x < 0 \quad (2.35)$$

$$\alpha(t) = 1 \text{ si } \lambda^T(A_1 - A_0)x > 0 \quad (2.36)$$

Les instants de commutation sont donc les instants où $\lambda^T(A_1 - A_0)x$ s'annule en changeant de signe.

La seconde condition nécessaire stipule que le long d'une trajectoire optimale le produit scalaire de la variable adjointe avec le champ de vecteurs du système direct soit positif (remarque ci-dessus). Autrement dit, on doit avoir :

$$\lambda^T A_0 x \geq 0, \text{ pour } \alpha(t) = 0 \quad (2.37)$$

$$\lambda^T A_1 x \geq 0, \text{ pour } \alpha(t) = 1 \quad (2.38)$$

Pour déterminer la commande optimale, c'est-à-dire les instants de commutation définis par la condition :

$$\lambda^T(t)(A_1 - A_0)x(t) = 0 \quad (2.39)$$

il faudrait connaître x et λ à un instant donné - t_0 par exemple - et en déduire $\alpha(0)$. L'intégration des équations (2.31) et (2.33) conduirait aux expressions de $x(t)$

et $\lambda(t)$ et on pourrait alors déduire les instants de commutation de la condition nécessaire (2.39). Or, si les points x_0 et x_f sont fixés, λ lui est libre en t_0 et t_f . L'intégration directe des systèmes n'est donc pas possible.

Dans la suite, nous allons montrer qu'il est possible de répondre à ce problème par la recherche d'un instant de commutation. On utilisera le vocable de "mode 1" lorsque le champ de vecteur employé est A_1x ($\alpha(t) = 1$) et "mode 0" lorsque le champ de vecteur employé est A_0x ($\alpha(t) = 0$).

On peut synthétiser la démarche à mettre en oeuvre par :

1. Dans un premier temps, on montre que les conditions d'optimalité permettent d'assurer que les commutations du mode 0 vers le mode 1 et du mode 1 vers le mode 0 sont possibles dans des zones qui s'excluent. On introduit ainsi le concept de carte de compatibilité.
2. On montre ensuite que si on suppose connu un instant de commutation, on peut déterminer tous les autres points de commutation.
3. On choisit dans la suite de faire le calcul à partir du dernier point de commutation. Le calcul du temps entre deux commutations en fonction de la position de x à la première des deux et la carte de compatibilité permet un choix intelligent du dernier point de commutation de la trajectoire.
4. Tracer des trajectoires.

Carte de compatibilité

Dire que l'on commute à un instant donné impose un choix implicite du mode suivi avant et après cet instant de commutation. En effet, en accord avec la première condition du **PM**, lorsque le produit scalaire $\lambda^T(A_1 - A_0)x = 0$ s'annule, la commande α ne peut être mise à la valeur 1 que si la dérivée de ce produit est positive et inversement pour la valeur 0 (2.35)-(2.36).

Cette dérivée a pour expression :

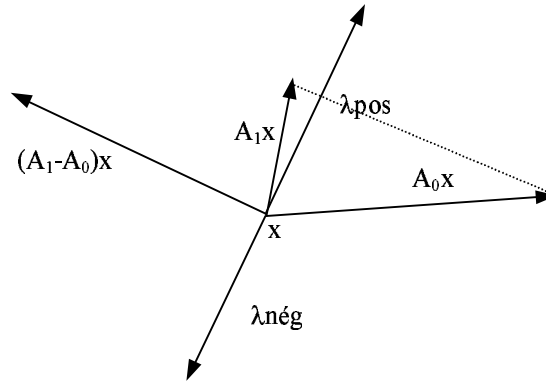
$$\frac{d}{dt}(\lambda^T(A_1 - A_0)x) = \dot{\lambda}^T(A_1 - A_0)x + \lambda^T(A_1 - A_0)\dot{x} \quad (2.40)$$

En remplaçant les dérivées de x et λ par leur expression, on obtient après développement,

$$\frac{d}{dt}(\lambda^T(A_1 - A_0)x) = \lambda^T(A_1 A_0 - A_0 A_1)x \quad (2.41)$$

Dans le plan, pour un x donné, il existe deux possibilité pour λ d'être orthogonal au vecteur $(A_1 - A_0)x$ (figure 2.2).

Mais, la seconde condition d'optimalité de la trajectoire à savoir $\lambda^T A_\alpha x \geq 0$, $\forall \alpha(t) \in \{0, 1\}$, (2.37)-(2.38), lève cette indétermination. Elle conduit en effet à prendre le vecteur λ orienté dans le sens des projections de A_1x et A_0x . On retient donc λ_{pos} (figure 2.2).

FIG. 2.2: Choix de λ

Pour déterminer si ce point de commutation conduit vers le mode 0 ou 1, il suffit alors d'évaluer la dérivée du produit scalaire, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}(\lambda_{pos}^T (A_1 - A_0)x) = \lambda_{pos}^T (A_1 A_0 - A_0 A_1)x \quad (2.42)$$

Une dérivée positive conduit alors du mode 0 vers le mode 1 et une dérivée négative du mode 1 vers le mode 0.

Le respect des équations (2.37), (2.38) et (2.39) conduit en fonction du signe de la dérivée (2.42) à une partition de l'espace des phases en secteurs angulaires de sommet l'origine du plan et de frontières les droites où les quantités $(A_0 - A_1)x$ et $(A_1 A_0 - A_0 A_1)x$ sont colinéaires (et éventuellement où les quantités $A_0 x$ et $A_1 x$ sont colinéaires si une inversion de position relative de ces deux vecteurs se produit conduisant à une inversion de choix de λ (figure 2.2)). Dans chacun de ces secteurs, une commutation vers un mode donné est autorisée ou non.

Dans la suite, nous appellerons cette partition, carte de compatibilité (figure 2.3).

Calcul des instants de commutation en fonction de l'un d'entre eux

Supposons connu le dernier instant de commutation t_{dc} , l'instant de commutation précédent t_{dc-1} est le zéro précédent de la fonction $P(t) = \lambda^T(t)(A_1 - A_0)x(t)$ où $\lambda(t) = e^{-A^T t} \lambda_{dc}$ et $x(t) = e^{At} x_{dc}$ avec $A = A_0$ ou A_1 .

x_{dc} et λ_{dc} vérifient $\lambda_{dc}^T (A_1 - A_0)x_{dc} = 0$ et représentent les valeurs de x et λ à l'instant t_{dc} .

On est donc conduit à résoudre les équations du type

$$\lambda_{dc}^T e^{-At} (A_1 - A_0) e^{At} x_{dc} = 0 \quad (2.43)$$

pour les instants de commutation successifs.

Au chapitre 4.2, on montrera que la fonction analytique $P(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Comme les racines du polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle sont connues ainsi que les conditions initiales, la forme analytique de $P(t)$ peut être déterminée. Les instants de commutation sont alors obtenus par la recherche des zéros de $P(t)$.

En **annexe A**, on montre également que la fonction $P(t)$ est périodique ($P(t + T) = P(t)$) de période $T = t_{A_0} + t_{A_1}$ où t_{A_0} et t_{A_1} représentent respectivement la durée d'activité du mode 0 et du mode 1 entre deux commutations (ces durées d'activités successives sont toujours les mêmes pour un choix de x_{dc} et λ_{dc}). Une conséquence directe de cette propriété est l'alignement des points de commutation sur des droites appelées "droites de commutation" passant par l'origine du plan de phase (voir par exemple la figure 2.4).

Ainsi, le choix d'un instant de commutation partitionne l'espace d'état en secteurs sur lesquels un mode est attribué. Notons qu'il ne peut y avoir plus d'une droite de commutation par secteur défini par la carte de compatibilité sinon au moins une commutation serait incompatible avec les conditions d'optimalité (figure 2.4).

Les rencontres successives de la trajectoire avec ces droites provoquent la commutation des modes (figure 2.4). La recherche de la commande optimale revient alors à trouver les bonnes droites de commutations.

Choix du dernier point de commutation et tracé des trajectoires

La commande optimale si elle existe, peut être obtenue par la recherche du dernier instant de commutation. Mais ce point de dernière commutation en accord avec la carte de compatibilité et des droites de commutation ne peut se faire que sur un intervalle de temps parfaitement déterminé comme nous allons le voir dans le premier exemple du paragraphe suivant.

Le deuxième exemple nous permettra d'aborder la question de l'existence de la trajectoire optimale.

2.3.2 Exemple de synthèse d'une commande

Considérons le cas où les matrices A_0 et A_1 sont données par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1.1 & 1.4 \\ -0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -0.3 & 1.1 \\ -0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Cherchons les trajectoires en temps optimal qui mènent au point final $x_f = (1, 0)$, le départ ayant lieu d'un point initial x_0 .

Détermination de la carte de compatibilité.

Cette carte présentée à la figure 2.3, indique les secteurs où une commutation vers un mode donné est compatible avec les conditions d'optimalité. Elle est indépendante

des positions initiale et finale choisies ; par exemple, dans le secteur $S2$, il est possible de commuter vers le mode 0 et uniquement vers le mode 0.

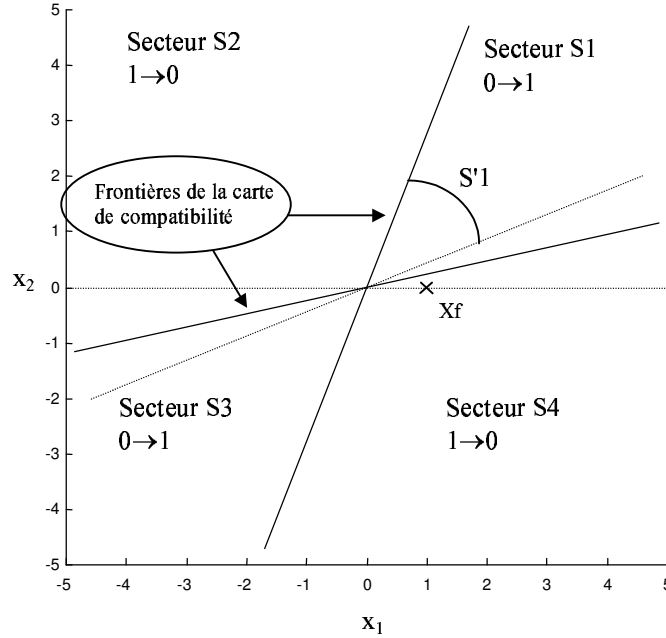


FIG. 2.3: Carte de compatibilité

Sur la figure 2.4, un exemple de trajectoire *extrémale* est représenté. Les instants de commutation interviennent de manière périodique lorsque la trajectoire rencontre les droites de commutations. Déterminer la trajectoire optimale consiste alors à rechercher les bonnes droites de commutations.

Sur la figure 2.3, on voit que le point final appartient au secteur $S4$ dans lequel seule une commutation vers le mode 0 peut se faire.

Supposons que la commande discrète finisse par la valeur 1 c'est-à-dire par le mode 1. La carte de compatibilité indique que la dernière commutation ne peut se faire que sur les secteurs $S1$ et $S3$. Mais, si elle est effectuée dans le secteur $S3$, une autre commutation suivra dans le secteur $S2$ (on tourne dans le sens trigonométrique) ce qui contredit l'hypothèse faite. Donc le seul secteur possible est $S1$. Encore faut-il que cette commutation n'en implique pas une autre (dans le secteur $S4$) avant de parvenir au point final.

On détermine aisément le sous-secteur $S1'$ (figure 2.3) au secteur $S1$ dans lequel une commutation vers le mode 1 est autorisée en remarquant que le cas limite implique une commutation au point final x_f (une commutation vers le mode 1 dans le secteur $S1 \setminus S1'$ implique une commutation vers le mode 0 dans le secteur $S4$ avant d'atteindre x_f et n'est donc pas admissible). Ce secteur $S1'$ est bien le seul secteur où une dernière commutation peut emprunter le mode 1.

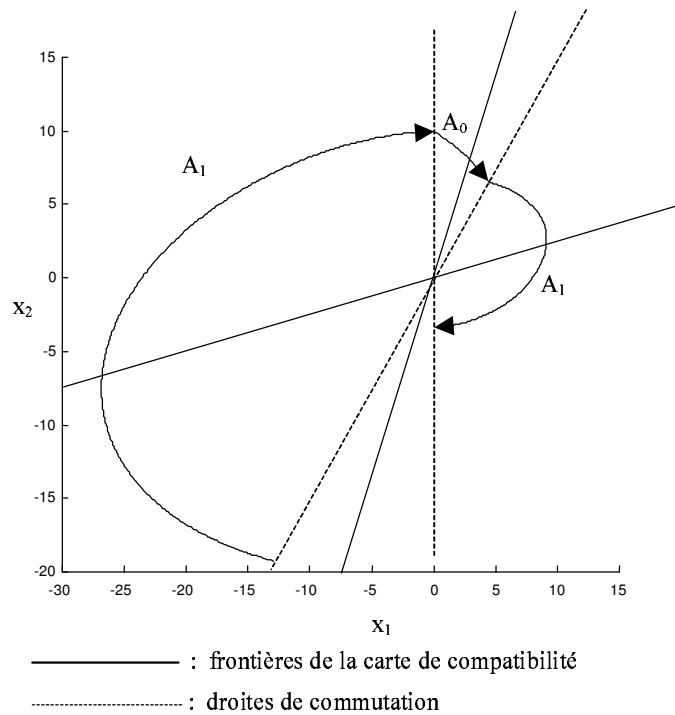


FIG. 2.4: Droites de commutation

Inversement, si la commande termine par la valeur 0, une dernière commutation a pu avoir lieu uniquement dans le secteur $S4$.

Ainsi la dernière commutation doit se faire dans le secteur $S1'$ si le dernier mode est le mode 1 et dans le secteur $S4$ si le dernier mode est 0. La séparation est obtenue précisément au point limite calculé pour obtenir $S1'$.

En conséquence, on obtient l'ensemble des trajectoires optimales (figure 2.5) en résolvant (2.43) à partir des secteurs $S1'$ et $S4$ où une dernière commutation est possible.

L'ensemble des trajectoires extrémales forme nous l'avons déjà dit des candidates potentielles à l'optimalité. Si pour une position initiale et finale données, il n'existe qu'une seule trajectoire *extrémale*, alors elle est optimale si l'existence d'une solution est garantie. Lorsqu'il existe plusieurs trajectoires extrémales, il est nécessaire en l'absence de conditions suffisantes d'évaluer le critère pour chacune d'entre-elles. Par exemple sur la figure 2.5, on peut voir que certaines trajectoires (zone encadrée) cessent d'être optimales, lorsqu'elles rencontrent d'autres trajectoires (en temps rétrograde).

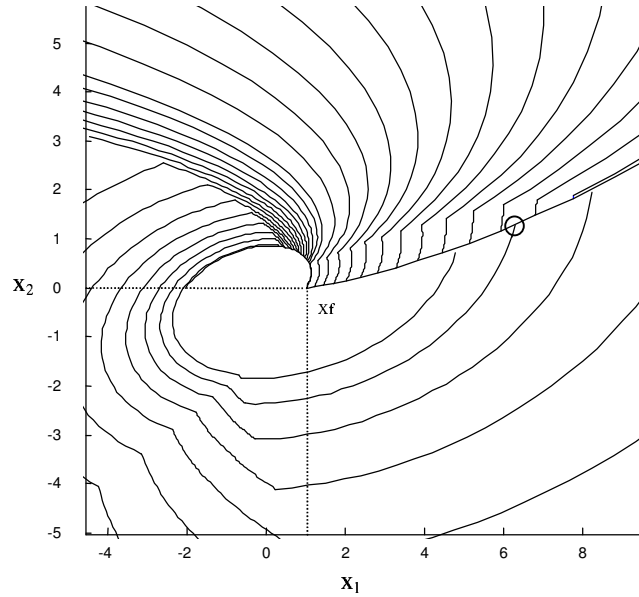


FIG. 2.5: Trajectoires optimales

2.3.3 Un exemple critique

Considérons à présent les matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -1.3 & 1.1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & -1.4 \\ 0.9 & -0.7 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

La carte de compatibilité détermine cette fois-ci huit secteurs (figure 2.6).

Le problème consiste à trouver le temps de parcours optimal pour aller de la position initiale $x_0 = (-1.1, -0.2)$ à la position finale $x_f = (-0.8, -0.4)$.

Nous avons tracé volontairement une trajectoire reliant x_0 à x_f (figure 2.7). Cette trajectoire n'est pas optimale puisqu'elle ne respecte pas la carte de compatibilité. En effet, la seule commutation qui est effectuée, se fait du mode 1 vers le mode 0 dans le secteur $S3$ où seule une commutation dans l'autre sens est possible.

Il existe donc un chemin reliant nos deux positions. On est en droit de se poser la question s'il en existe un qui soit optimal pour sa durée. Effectuons alors le tracé de l'ensemble des trajectoires qui terminent au point x_f pour une durée de parcours n'excédant pas le temps mis pour parvenir au point x_f sur notre exemple et qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité (figure 2.8).

On peut constater à l'évidence qu'aucune trajectoire ne passe dans un voisinage de x_0 . La conclusion de cet exemple critique est qu'il n'existe aucune trajectoire optimale reliant les positions initiale et finale pour la classe des commandes mesurables

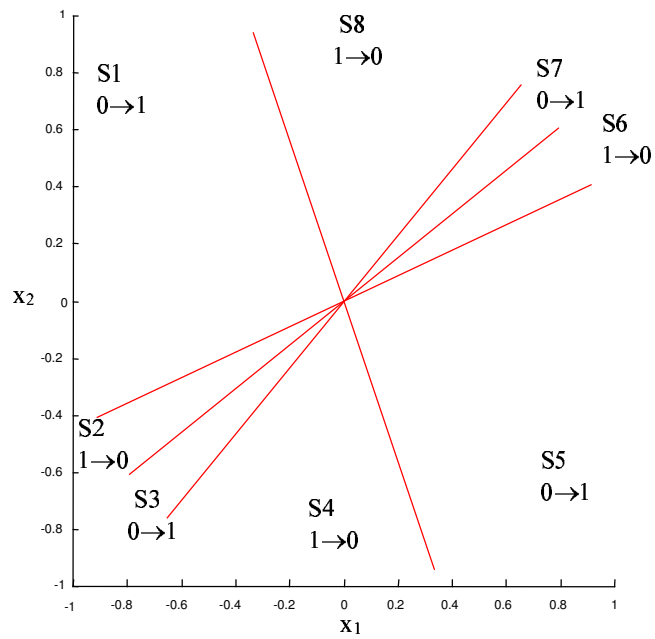
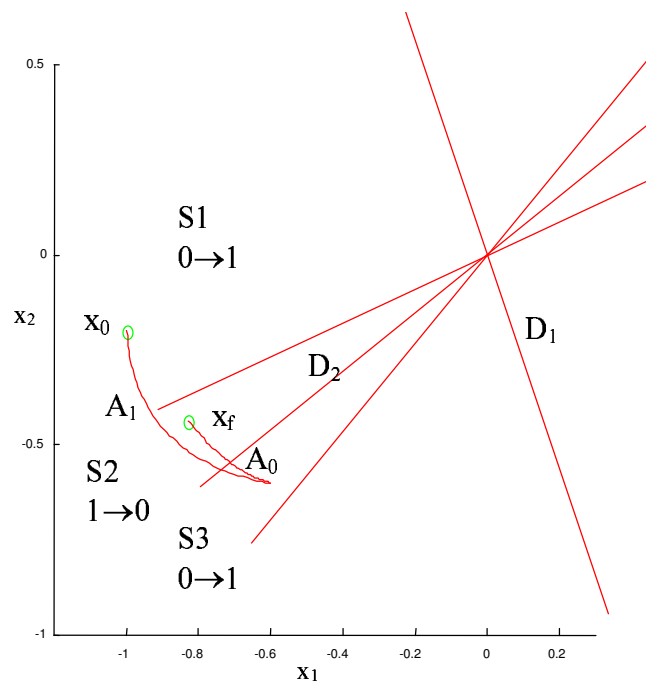


FIG. 2.6: Carte de compatibilité

FIG. 2.7: Trajectoire quelconque reliant x_0 à x_f en une commutation

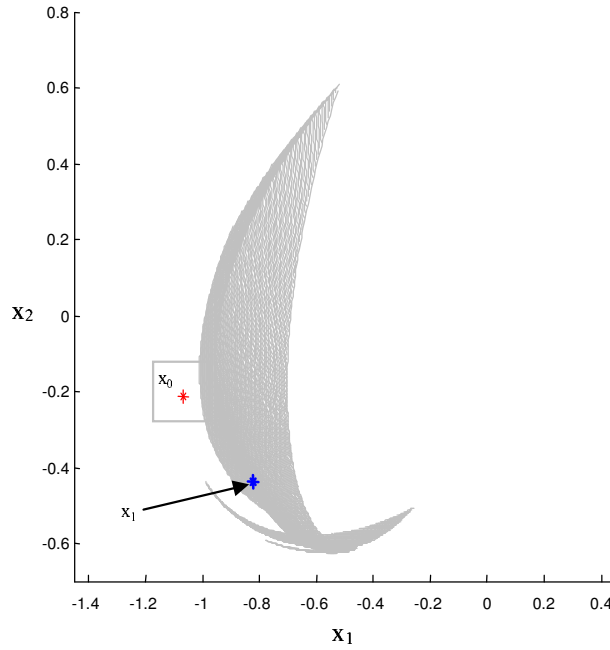


FIG. 2.8: Trajectoires extrémales joignant le point x_1 en un temps inférieur à T_1

et bornées. Ce résultat peut surprendre (au moins intuitivement !), une analyse plus poussée devrait lever le voile (Chap. 4.5).

Sur les deux figures 2.9 et 2.10, nous avons représenté des trajectoires menant de la position initiale à la position finale.

Ces trajectoires sont obtenues pour un nombre n de commutations autour de la frontière des secteurs $S2$ et $S3$. On remarque que plus ce nombre est élevé, meilleur est le temps de parcours comme en témoignent les temps Tn ci-dessus :

$$T1 = 1.4035 \quad T3 = 1.3489 \quad T5 = 1.3446 \quad T17 = 1.3435 \quad T_{\infty} = 1.3404.$$

Dans la suite de cet exposé (Chap. 4.5), nous montrerons que la trajectoire idéale est obtenue en glissant sur la frontière $S2-S3$ autrement dit lorsque la fréquence des commutations devient infinie d'où la non mesurabilité de la commande optimale. On peut toutefois élaborer des stratégies qui mènent à des trajectoires sous-optimales dès que l'on sait identifier de telles surfaces de glissement (figure 2.9 et 2.10).

Ce dernier exemple soulève la difficile question de l'existence d'une commande optimale. Nous venons de voir que cette commande n'existe pas forcément malgré l'existence d'au moins un chemin mais qu'il est néanmoins possible d'établir une commande sous-optimale.

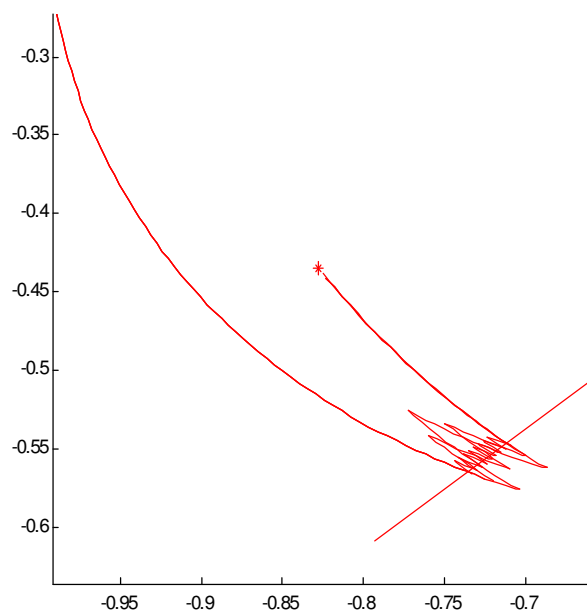


FIG. 2.9: Trajectoires sous-optimales

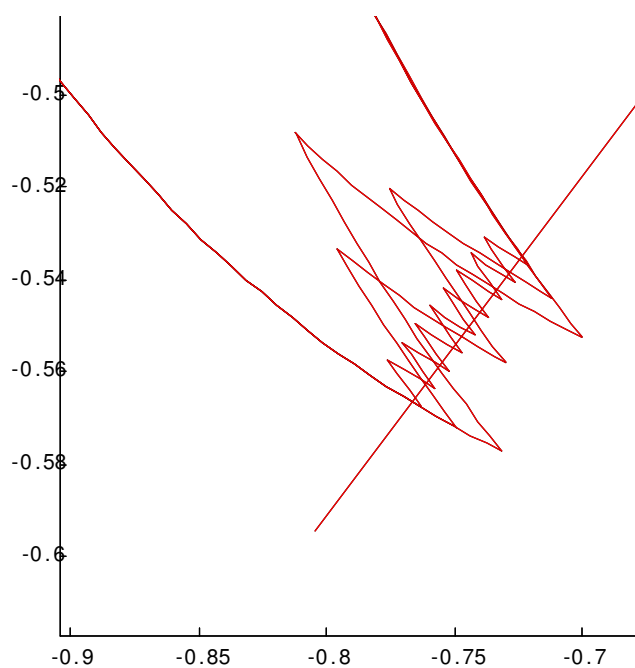


FIG. 2.10: Zoom autour de la surface de commutation

2.4 Conclusion du chapitre 2

Ce chapitre nous a tout d'abord permis de présenter le problème de la commande optimale pour des systèmes dynamiques continus tel que la théorie développée depuis les années 40 l'a abordée. Le Principe du Maximum de Pontryaguine, par l'introduction d'un système adjoint, permet de transformer un problème d'optimisation globale (recherche du minimum de la fonction critère) en un problème local (recherche du maximum de la fonction Hamiltonienne). Plus général que le calcul des variations notamment en ce qui concerne le domaine de commande, ce principe énonce des conditions nécessaires sur la commande optimale. Plusieurs versions de ce principe existent suivant les hypothèses de travail considérées : systèmes à temps variant ou invariant, régularité des fonctions, etc.

Initialement défini pour un problème de Lagrange, nous avons montré comment le problème de Bolza pouvait également être traité par cette approche. Les modifications induites par l'introduction d'un critère terminal se situent alors sur les conditions de transversalité. Ce résultat nous sera fort utile, lorsque nous aborderons par la suite le problème posé par les sauts autonomes.

Divers résultats généraux sur l'existence d'une solution optimale et sur l'établissement de conditions suffisantes ont été rapportés.

Nous avons ensuite présenté le problème de la commande optimale en temps pour la classe des systèmes dynamiques hybrides à commutations formée par deux systèmes linéaires en évolution libre que l'on active à tour de rôle par l'intermédiaire d'une commande discrète. Pour ce type de SDH, on peut formuler le problème de commande optimale sous une forme classique, grâce à l'écriture d'une combinaison convexe des deux champs de vecteurs. Une application directe du principe de maximum est alors possible. Sur un premier exemple et à partir d'un résultat, que nous démontrerons au chapitre 4, donnant les instants de commutation optimaux entre modèles, la synthèse de la commande optimale est réalisée. Sur un second exemple, l'absence d'une solution optimale malgré l'existence d'une commande permettant le transfert d'une position initiale à une position finale données, est mise en évidence. Nous reviendrons en détail sur ce problème au chapitre 4 en abordant la notion de trajectoire singulière et en considérant un problème étendu obtenu à l'aide de l'enveloppe convexe du domaine de commande.

Pour le moment, nous n'avons considéré qu'un type particulier de phénomène hybride à savoir le saut commandé. Le chapitre 3 va nous permettre d'étendre le principe du maximum aux SDH et notamment avec l'introduction du saut autonome.

Chapitre 3

La Commande Optimale des SDH

3.1 Préliminaire : Programmation dynamique et équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Considérons un problème de commande optimale défini par le système dynamique

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

et le critère

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (3.2)$$

avec $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n, u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, t \in [t_0, t_f]$. Les ensembles X et U sont des ouverts.

Les hypothèses de régularité sur les fonctions f, L et ϕ sont les suivantes :

1. f et les dérivées partielles de f par rapport à x et t , $f_{x,t}$ sont continues sur le produit $X \times U \times [t_0, t_f]$.
2. $L : X \times U \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $\phi : X \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continûment différentiables.

On suppose qu'il existe une commande optimale $\hat{u}(\cdot)$ qui réalise le minimum de J pour toute position initiale x_0 et instant de départ t_0 .

Notons $\hat{J}(x(t), t, t_f)$ le coût optimal obtenu en partant à l'instant t de la position $x(t)$ en minimisant le critère sur l'intervalle de temps $[t, t_f]$. $\hat{J}(x(t), t, t_f)$ est appelée

fonction de Bellman et vérifie l'équation du même nom [Son90] :

$$\hat{J}(x(t), t, t_f) = \inf_u \left(\int_t^\tau L(x(s), u(s), s) ds + \hat{J}(x(\tau), \tau, t_f) \right), \forall \tau \in [t, t_f] \quad (3.3)$$

où $x(\tau)$ est la position résultante de $x(t)$ sous l'action de la commande $u(\cdot)$ sur l'intervalle de temps $[t, \tau]$.

Autrement dit, pour tous les états intermédiaires $x(\tau)$ obtenus à l'instant τ à l'aide de toutes les commandes admissibles $u|_{[t_0, \tau]}$, le minimum de J est atteint pour la commande $\hat{u}|_{[t_0, \tau]}$ qui minimise la somme formée du coût pour aller de x_0 à $x(\tau)$ et du coût optimal obtenu sur l'intervalle de temps restant $[\tau, t_f]$ depuis la position $x(\tau)$.

C'est le *principe de la programmation dynamique*.

On voit donc que dans un processus dynamique, une suite de décisions est optimale si, quels que soient l'état et l'instant considérés sur la trajectoire qui lui est associée, les décisions ultérieures constituent une suite optimale de décisions pour le sous-problème dynamique ayant cet état et cet instant comme conditions initiales (*Principe d'optimalité de Bellman*).

Si l'on note $\hat{u}(\cdot)$ la commande optimale qui réalise le minimum de (3.3) alors :

$$\hat{J}(x(t), t, t_f) = \int_t^\tau L(x(s), \hat{u}(s), s) ds + \hat{J}(x(\tau), \tau, t_f), \forall \tau \in [t, t_f] \quad (3.4)$$

Par conséquent la *fonction de Bellman* évaluée le long d'une trajectoire optimale, est absolument continue et sa dérivée définie presque partout (p.p.), est déterminée par la relation :

$$\frac{d\hat{J}(x(t), t, t_f)}{dt} = -L(x(t), \hat{u}(t), t) \text{ p.p.} \quad (3.5)$$

Puisque $\frac{d\hat{J}(x(t), t, t_f)}{dt} = \hat{J}_t + \hat{J}_x^T \dot{x}$, nous pouvons donc écrire cette équation comme :

$$\hat{J}_t(x(t), t, t_f) = -L(x(t), \hat{u}(t), t) - \hat{J}_x(x(t), t, t_f)^T f(x(t), \hat{u}(t), t) \text{ p.p.} \quad (3.6)$$

(ce qui montre que les dérivées partielles de $\hat{J}$ ont un sens le long des trajectoires optimales).

Par ailleurs, comme

$$\hat{J}(x(t), t, t_f) \leq \int_t^\tau L(x(s), u(s), s) ds + \hat{J}(x(\tau), \tau, t_f), \forall \tau \in [t, t_f] \quad (3.7)$$

pour toute commande $u(\cdot)$ quelconque, en formant le taux d'accroissement

$$\frac{\left(\hat{J}(x(\tau), \tau, t_f) - \hat{J}(x(t), t, t_f) \right)}{\tau - t} \quad (3.8)$$

on obtient la minoration :

$$\frac{\left(\hat{J}(x(\tau), \tau, t_f) - \hat{J}(x(t), t, t_f)\right)}{\tau - t} \geq \frac{-\int_t^\tau L(x(s), u(s), s) ds}{\tau - t} \quad (3.9a)$$

Par passage à la limite, on constate que $\hat{J}(x(t), t, t_f)$ décroît moins vite que le coût instantané $-L(x(t), u(t), t)$ pour toute commande $u(\cdot)$. Autrement dit, on obtient l'inégalité :

$$\hat{J}_t(x(t), t, t_f) \geq -L(x(t), u(t), t) - \hat{J}_x(x(t), t, t_f)^T f(x(t), u(t), t) \quad (3.10)$$

pour toute commande $u(\cdot)$.

(3.6) et (3.10) se résument par le théorème :

Théorème 3.1 (L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman) *La fonction de Bellman pour le problème de commande optimale (3.1)(3.2) avec les hypothèses de régularité sur les données satisfaites, vérifie l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman :*

$$\hat{J}_t(x(t), t, t_f) = -\inf_u \left(L(x(t), u, t) + \hat{J}_x(x(t), t, t_f)^T f(x(t), u, t) \right) \text{ p.p.} \quad (3.11)$$

avec la condition aux limites $\hat{J}(x(t_f), t_f, t_f) = \phi(x(t_f), t_f)$.

Remarque : L'équation (3.11) ne garantit en aucun cas la continuité de la fonction de Bellman $\hat{J}(x(t), t, t_f)$ par rapport à x puisque (3.11) n'est valable que dans les directions accessibles par une commande $u(\cdot)$. Par conséquent, la résolution numérique de (3.11) est en général un problème difficile.

3.2 Formulation générale de conditions nécessaires

Une formulation générale de conditions nécessaires pour un problème de commande de système hybride qui intègre les discontinuités de modèles occasionnées par les phénomènes discrets, est l'objectif de cette partie. Nous nous limiterons volontairement à des discontinuités sur le champ de vecteurs et nous ne considérerons pas de saut sur la variable d'état bien que la prise en compte de cette situation puisse se faire par l'adjonction de fonctions de saut suffisamment régulières (cf. remarque en fin de section 3.3). Une démarche progressive est adoptée par la suite. Nous commencerons par considérer le saut autonome dont la prise en compte a déjà fait l'objet de travaux dans le passé mais pour une approche de type Lagrangienne [Bry69]. Puis nous proposerons une formulation qui intègre le saut commandé.

3.2.1 Prise en compte des sauts autonomes

Un saut autonome est provoqué lorsque la trajectoire rencontre une frontière délimitant une région de l'espace $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$. Cette frontière peut être représentée

par un vecteur de fonctions à p composantes ($p < n$), $C(x, t) = 0$. On suppose que $C(x, t)$ est une variété continûment différentiable. Si pour un instant τ , la trajectoire vérifie la condition frontière $C(x(\tau), \tau) = 0$ alors une discontinuité se produit sur le champ de vecteurs.

Supposons donc qu'un premier ensemble d'équations :

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), u_1(t), t) \quad (3.12)$$

est appliqué pour $t < \tau$ où τ est l'instant pour lequel $C(x(\tau), \tau) = 0$.

A cet instant τ , un second ensemble d'équations :

$$\dot{x}(t) = f_2(x(t), u_2(t), t) \quad (3.13)$$

est substitué au premier pour $t > \tau$.

Le critère à minimiser peut être généralisé sous la forme

$$J = \int_{t_0}^{\tau} L_1(x(t), u_1(t), t) dt + \int_{\tau}^{t_f} L_2(x(t), u_2(t), t) dt \quad (3.14)$$

où L_2 n'est pas forcément identique à L_1 .

Dans notre situation, l'équation de *Bellman* (3.3) sur la surface de commutation devient :

$$\hat{J}(x(t_0), t_0) = \inf_{u_1} \left(\int_{t_0}^{\tau} L_1(x(t), u_1(t), t) dt + \inf_{u_2} \int_{\tau}^{t_f} L_2(x(t), u_2(t), t) dt \right) \quad (3.15)$$

avec l'hypothèse : τ est fixé tel que $C(x(\tau), \tau) = 0$.

Ainsi, ce problème, vu sous l'angle de la programmation dynamique, se scinde en deux :

Problème 1 : pour $t > \tau$, il faut résoudre le problème de minimisation

$$\hat{J}_2(x(\tau), \tau) = \inf_{u_2} \int_{\tau}^{t_f} L_2(x(t), u_2(t), t) dt \quad (3.16)$$

avec $(x(\tau), \tau)$ fixé et $\dot{x}(t) = f_2(x(t), u_2(t), t)$.

La fonction Hamiltonienne de ce problème s'écrit (on considère t comme une composante fictive x_{n+1} (Chap. 2.2.1)) :

$$\mathcal{H}_2(\lambda_0, \lambda_2, x, u_2, t) = \lambda_2^T f_2(x, u_2, t) + \lambda_{2,n+1} - \lambda_0 L_2(x, u_2, t) \quad (3.17)$$

et la résolution de ce problème classique nous fournit $\lambda_2(\tau)$ et $H_2(\tau) = -\lambda_{2,n+1}$.

Problème 2 : pour $t < \tau$, on doit résoudre le problème de minimisation

$$\hat{J}_1(x(t_0), t_0) = \inf_{u_1} \left(\int_{t_0}^{\tau} L_1(x(t), u_1(t), t) dt + \hat{J}_2(x(\tau), \tau) \right) \quad (3.18)$$

avec la contrainte terminale $C(x(\tau), \tau) = 0$.

Notons bien que le couple $(x(\tau), \tau)$ n'est pas fixé. $\hat{J}_2(x(\tau), \tau)$ représente alors un coût terminal pour ce deuxième problème. Or nous avons vu au chapitre précédent que l'intégration d'un critère terminal ne modifie que les conditions de transversalité à l'instant final. Nous pouvons donc établir les conditions de transversalité associées à un saut autonome à l'instant τ .

Elles sont données par les équations (2.26) du chapitre 2 et conduisent à :

$$\lambda_1(\tau) = -\lambda_0 \frac{\partial \hat{J}_2}{\partial x} + \frac{\partial C^T}{\partial x} \pi \quad (3.19a)$$

$$\lambda_{1,n+1}(\tau) = -\lambda_0 \frac{\partial \hat{J}_2}{\partial t} + \frac{\partial C^T}{\partial t} \pi \quad (3.19b)$$

où $\left[\pi^T \frac{\partial C}{\partial x} \quad \pi^T \frac{\partial C}{\partial t} \right]^T$ définit un vecteur normal à la variété $C(x, t) = 0$ au point $(x(\tau), \tau)$, π étant de dimension p (C est une variété continûment différentiable).

Par ailleurs, comme la dérivée de $\frac{d\hat{J}_2}{dt}$ conduit à l'équation aux dérivées partielles (3.6) :

$$\frac{\partial \hat{J}_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial \hat{J}_2}{\partial x} \right)^T f_2 = -L_2 \quad (3.20)$$

Soit encore :

$$-\lambda_0 \frac{\partial \hat{J}_2}{\partial t} - \lambda_0 \left(\frac{\partial \hat{J}_2}{\partial x} \right)^T f_2 - \lambda_0 L_2 = 0 \quad (3.21)$$

Cette dernière égalité est l'expression de la fonction Hamiltonienne ($t = x_{n+1}$) :

$$\mathcal{H}_2(\lambda_0, \lambda_2, x, \hat{u}_2, x_{n+1}) = 0 \quad (3.22)$$

avec $\lambda_2 = -\lambda_0 \frac{\partial \hat{J}_2}{\partial x}$ et $\lambda_{2,n+1} = -\lambda_0 \frac{\partial \hat{J}_2}{\partial t}$.

Par substitution dans (3.19), il vient également :

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{\partial C^T}{\partial x} \pi \quad (3.23a)$$

$$\lambda_{1,n+1} = \lambda_{2,n+1} + \frac{\partial C^T}{\partial t} \pi \quad (3.23b)$$

Enfin, en ne considérant que les fonctions Hamiltoniennes réduites ($H = \lambda^T f - \lambda_0 L = -\lambda_{n+1}$) :

$$\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) + \frac{\partial C^T(x(\tau), \tau)}{\partial x} \pi \quad (3.24a)$$

$$H_1(\lambda_0, \lambda_1, x, \hat{u}_1, x_{n+1}) = H_2(\lambda_0, \lambda_2, x, \hat{u}_2, x_{n+1}) - \frac{\partial C^T(x(\tau), \tau)}{\partial t} \pi \quad (3.24b)$$

Nous venons donc d'établir les conditions de transversalité associées aux sauts autonomes.

3.2.2 Prise en compte des sauts commandés

Les phénomènes discrets envisagés dans cette section sont des discontinuités sur le champ de vecteurs provoquées de manière volontaire.

Formellement, la dynamique continue de ces systèmes est obtenue à partir d'une collection finie de champs de vecteurs que l'on commute au cours du temps. Autrement dit, la variable d'état à un instant t est soumise à l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u_k(t), t) \quad (3.25)$$

où la variable d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$, l'indice k est choisi parmi un ensemble fini d'indices, $k \in \underline{K} = \{1, \dots, K\}$ et $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^{m_k}$.

Une discontinuité sur le champ de vecteurs est alors provoquée lorsque la valeur de cet indice k est modifiée (k devient maintenant une commande). Physiquement, cette discontinuité peut correspondre par exemple à l'ouverture ou à la fermeture d'un interrupteur électrique (GTO par exemple), d'une vanne TOR (Tout Ou Rien), d'un relais, etc. La commande que constitue le choix du modèle, est donc obtenue par une fonction constante par morceaux $t \mapsto k(t) \in \underline{K}$ avec $t \in [t_0, t_f]$. Une représentation qui intègre cette grandeur de commande peut alors être définie sous la forme d'un seul champ de vecteurs de la manière suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^K q_k(t) f_k(x(t), u_k(t), t) = f(q, x, u, t) \quad (3.26)$$

où $q_k(t)$ représente la $k^{ième}$ composante du vecteur booléen $q(t) \in Q$ avec

$$Q = \left\{ \alpha \in \{0, 1\}^K / \sum_{k=1}^K \alpha_k = 1 \right\} \quad (3.27)$$

Avec ce choix de domaine de commande discret Q , $q(t)$ a une et une seule composante non nulle égale à 1.

Un critère hybride peut alors être défini en associant à chaque modèle d'indice k un critère par :

$$J = \sum_{k=1}^K \left(q_k(t_f) \phi_k(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} q_k(t) L_k(x(t), u_k(t), t) dt \right) \quad (3.28)$$

L'objectif fixé est alors la synthèse d'une loi de commande optimale $(u(t), q(t))$ pour un critère (3.28) donné. La formulation (3.26) à (3.28) permet une utilisation directe du *Principe du Maximum de Pontryaguine* moyennant les hypothèses classiques sur les champs de vecteurs f_k , les fonctions L_k et les domaines de commandes U_k . Notons que ce problème est clairement non linéaire (3.26). Un problème de commande optimale hybride de ce type apparaît bien comme un problème de commande optimale non linéaire avec un domaine de commande composé d'une partie discrète.

Comme l'ensemble des différents modes est fini et comme le champ de vecteurs (3.26) est une combinaison linéaire des champs f_k , la condition de maximum peut être reformulée pour une trajectoire *extrémale* par :

$$\mathcal{H}(\lambda_0, \lambda(t), x(t), u(t), d(t), t) = \max_k \left(\sup_{v \in U_k} \mathcal{H}_k(\lambda_0, \lambda(t), x(t), v, t) \right) \quad (3.29)$$

pour tout $t \in [t_0, t_f]$ où

$$\mathcal{H}_k(\lambda_0, \lambda(t), x(t), u_k(t), t) = \lambda^T(t) f_k(x(t), u_k(t), t) + \lambda_{n+1}^T(t) - \lambda_0 L_k(x(t), u_k(t), t) \quad (3.30)$$

Ainsi, si $\sup_{v \in U_k} \mathcal{H}_k(\lambda_0, \lambda(t), x(t), v, t) > \sup_{v \in U_\ell} \mathcal{H}_\ell(\lambda_0, \lambda(t), x(t), v, t)$ pour tout $\ell \in \underline{K}$ et $\ell \neq k$ alors le mode actif est le $k^{i\grave{e}me}$ mode.

De plus, on peut remarquer que :

$$\mathcal{H}_k(\lambda_0, \lambda, x, u_k, t) = \sup_{v \in U_k} \mathcal{H}_k(\lambda_0, \lambda, x, v, t) \quad (3.31)$$

est exactement la condition d'optimalité obtenue pour un système différentiel unique.

Autrement dit, pour un x et un λ donnés à un instant t , la commande discrète optimale (i.e. le numéro de modèle) est obtenue pour la plus grande condition de maximum associée à chacun des modèles k (3.31). A un instant de saut commandé du mode k vers un mode ℓ , les conditions de transversalité suivantes sont alors vérifiées :

$$\sup_{v \in U_\ell} \mathcal{H}_\ell(\lambda_0, \lambda, x, v, t) = \sup_{v \in U_k} \mathcal{H}_k(\lambda_0, \lambda, x, v, t) \quad (3.32)$$

$$\lambda^+ = \lambda^- \quad (3.33)$$

(3.33) est une condition de continuité sur la variable adjointe λ .

3.3 Le principe du maximum pour les SDH

La prise en compte des sauts commandés de modèles étant faite, l'énoncé d'une version hybride du principe du maximum peut maintenant être envisagé. Pour un SDH, les modes autorisés à un instant t , sont déterminés par la partie discrète en fonction des états discret $k(t)$ et continu $x(t)$ et suivant la valeur d'une entrée discrète $d(t)$. L'ensemble de ces modes est donc obtenu par une fonction de transition ν associée à un automate de la forme (cf. Chap. 1.4) :

$$k(t) = \nu(x(t^-), k(t^-), d(t), t) \quad k(t_0) = k_0 \quad (3.34)$$

où $k(t) \in \underline{K} = \{1, 2, \dots, K\}$, $d(t) \in \underline{D} = \{1, 2, \dots, D\}$ avec K et D des entiers naturels.

Pour concilier la dynamique discrète et continue, le temps est défini comme une variable continue et les variables discrètes, $k(\cdot)$ et $d(\cdot)$, sont considérées comme des fonctions constantes par morceaux. Par conséquent, la fonction de transition $\nu : \mathbb{R}^n \times \underline{K} \times \underline{D} \times [t_0, t_f] \rightarrow \underline{K}$ est continue par morceaux à droite. Cette mention est figurée par t^- dans (3.34). Il est à noter que la condition “ $k(\cdot)$ est constant par morceaux” implique quelques précautions quant à la spécification de l’automate hybride. En effet, le modèle ne doit pas tolérer la possibilité d’une suite infinie de sauts en un temps fini (voir Chap. 1.1).

L’image de $\underline{D}$ par ν pour un état $(x(t), k(t))$ et un t donnés, est l’ensemble des modes disponibles. On le note $\underline{S}(t)$:

$$\underline{S}(t) = \nu(x(t^-), k(t^-), \underline{D}, t) \quad (3.35)$$

Ce n’est pas un ensemble statique mais un ensemble constant par morceaux résultant de l’évolution de x et k . L’ajout et le retrait de certains de ses éléments interviennent lors du changement de régions des variables continues x et t ou lors des sauts de modèle k (autonomes ou commandés).

On suppose que les régions de saut autonome et commandé sont des ensembles fermés. Les frontières de ces régions sont définies par des contraintes égalités de type $C_k(x, t) = 0$ où C_k est une variété continûment différentiable. Il convient alors de distinguer deux nouveaux types de sauts :

- un saut du mode k vers le mode k' , noté $e = (k, k')$ est dit *contraint* lorsque l’une des conditions suivantes est vérifiée :

$$k \notin \underline{S}(t) \text{ ou } k' \notin \underline{S}(t^-) \quad (3.36)$$

Ces transitions résultent de la vérification par (x, t) d’une contrainte égalité $C_k(x, t) = 0$ modifiant l’ensemble $\underline{S}(\cdot)$. Elles correspondent aux sauts autonomes ($k \notin \underline{S}(t)$ i.e. k n’est plus disponible) mais également aux sauts commandés provoqués par l’arrivée de (x, t) sur la frontière de la région de saut commandé ($k' \notin \underline{S}(t^-)$ i.e. k' devient disponible).

- un saut $e = (k, k')$ à l’instant t est dit *sans contrainte* lorsque les conditions suivantes sont réunies :

$$k \in \underline{S}(t) \text{ et } k' \in \underline{S}(t^-) \quad (3.37)$$

Ces transitions correspondent à une partie des sauts commandés (k et k' sont disponibles avant et à l’instant t).

Par ailleurs, nous supposerons que l’évolution de x est sans contrainte au sens où pour un mode k , la trajectoire continue $x(\cdot)$ n’est jamais contrainte d’évoluer sur

une frontière $C_k(x, t) = 0$ délimitant une région de saut ¹. Les rencontres avec ces frontières s'accompagnent donc soit d'un changement de mode (*saut contraint*), soit d'une poursuite de trajectoire (entrée ou sortie d'une région de saut commandé sans saut).

Par la suite, nous noterons τ_i , ($i = 0, 1, 2, \dots$) les instants où une discontinuité de modèle se produit et/ou l'ensemble $\underline{S}(\cdot)$ est modifié suite à un changement de régions des variables continues x et t et (σ_i) la sous-suite des instants de commutation.

Avec ces notations, sur chaque intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}[$, l'état continu est déterminé par le système différentiel associé au mode actif k :

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u_k(t), t) \quad x(t_0) \in C_0 \quad (3.38)$$

Il va de soi que la séquence des instants τ_i n'est pas fixée à l'avance mais dépend du couple de commande (d, u) . On peut alors écrire une forme générale du critère :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L_{k(t)}(x(t), u_k(t), t) dt \quad (3.39)$$

L'optimisation de ce critère J est alors obtenue suivant les grandeurs de commandes discrète $d(\cdot)$ et continue $u(\cdot)$.

Définissons pour chaque indice k la fonction Hamiltonienne réduite associée :

$$H_k(\lambda_0, \lambda, x, u, t) = \lambda^T f_k(x, u_k, t) - \lambda_0 L_k(x, u_k, t) \quad (3.40)$$

avec λ_0 une constante positive ($\lambda_0 \geq 0$) et le système Hamiltonien comme :

$$\dot{x} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda} \quad -\dot{\lambda} = \frac{\partial H_k}{\partial x} \quad (3.41)$$

Alors, on peut énoncer une version hybride du principe du maximum :

Théorème 3.2 (Principe du Maximum *version pour un système hybride*)

Si $(u, d)(\cdot)$ et $(x, k)(\cdot)$ sont respectivement une commande admissible optimale et la trajectoire correspondante pour le problème (3.34)(3.38) et (3.39), alors il existe une fonction vecteur absolument continue par morceaux $\lambda(\cdot)$ et une constante $\lambda_0 \geq 0$, $(\lambda_0, \lambda(t)) \neq (0, 0)$ sur $[t_0, t_f]$, telle que :

1. Le sextuplet $(\lambda_0, \lambda, x, k, u, d)(\cdot)$ satisfait le système Hamiltonien associé (3.41) presque partout
2. Pour un état généralisé $(\lambda_0, \lambda, x, k)(t)$ donné à un instant t donné, la condition suivante de maximum est vérifiée si t n'est pas un instant de commutation

$$H_k(\lambda_0, \lambda, x, u, t) = \max_{d \in \underline{D}} \left(\sup_{v \in U_m} H_m(\lambda_0, \lambda, x, v, t) \right) \quad (3.42)$$

$$\text{où } m = \nu(x, k, d, t) \quad (3.43)$$

¹Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, il est nécessaire d'intégrer ces contraintes dans l'énoncé du PM par adjonction de multiplcateur de Lagrange.

3. Aux instants de commutation σ_i (i.e. quand (3.42) n'est pas obtenue pour le mode k mais pour le mode j), la condition de transversalité suivante est satisfaite :

(a) si σ_i est un instant de saut contraint sur une variété définie par p ($p < n$) contraintes égalités, $C_k(x, t) = 0$, depuis le mode k vers le mode j alors :

$$\lambda(\sigma_i^+) = \lambda(\sigma_i^-) - \frac{\partial C_k^T(x(t), t)}{\partial x} \pi \Big|_{t=\sigma_i} \quad (3.44)$$

$$H_j^+(\lambda_0, \lambda, x, u_j, \sigma_i) = H_k^-(\lambda_0, \lambda, x, u_k, \sigma_i) + \frac{\partial C_k^T(x(t), t)}{\partial t} \pi \Big|_{t=\sigma_i} \quad (3.45)$$

avec π de dimension p .

(b) si σ_i est un instant de saut sans contrainte depuis le mode k vers le mode j alors :

$$\lambda(\sigma_i^+) = \lambda(\sigma_i^-) \quad (3.46)$$

$$H_j^+(\lambda_0, \lambda, x, u_j, \sigma_i) = H_k^-(\lambda_0, \lambda, x, u_k, \sigma_i) \quad (3.47)$$

4. De plus, $\lambda(\cdot)$ doit vérifier aux instants initial et final les conditions de transversalité :

$$\lambda(t_0) \in N_{C_0}(x(t_0)) \quad \lambda(t_f) \in N_{C_1}(x(t_f)) \quad (3.48)$$

où $N_C(x)$ représente le sous-espace normal à C au point x (i.e. le sous-espace engendré par les vecteurs orthogonaux au plan tangent à C au point x).

Preuve :

La justification de cette version hybride du principe du maximum nécessite une réécriture du problème de commande qui permet une application directe du principe du maximum et du principe de programmation dynamique.

Posons donc :

- $\underline{S}^i$ l'ensemble constant $\underline{S}^i = \underline{S}(t)$ pour t pris sur l'intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ (3.35).
- Par convention d'écriture, comme l'ensemble $\underline{S}^i$ est isomorphe à $\{1, \dots, \text{card}(\underline{S}^i)\}$, les indices $k \in \underline{S}^i$ seront renumérotés de 1 à $\text{card}(\underline{S}^i)$, noté $S^i = \text{card}(\underline{S}^i)$, sur chaque intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Avec ces notations, sur chaque intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}[$, l'état continu est déterminé par le système différentiel :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{S^i} q_k(t) f_k(x(t), u_k(t), t) \quad (3.49)$$

où $q_k(t)$ représente la $k^{ième}$ composante du vecteur booléen $q(t) \in Q^i$ avec

$$Q^i = \left\{ \alpha \in \{0, 1\}^{S^i} / \sum_{k=1}^{S^i} \alpha_k = 1 \right\} \quad (3.50)$$

On peut alors écrire une forme générale du critère (toujours avec notre convention d'écriture sur les indices de modèles) :

$$J = \sum_{i \geq 0} \sum_{k=1}^{S^i} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} q_k(t) L_k(x(t), u_k(t), t) dt \quad (3.51)$$

L'optimisation de ce critère est alors obtenue suivant les grandeurs de commandes discrète q et continue u .

La *fonction Hamiltonienne* associée est définie sur chaque intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\lambda_0, \lambda, x, u, q, t) &= \lambda^T \sum_{k=1}^{S^i} q_k f_k(x, u_k, t) + \lambda_{n+1} - \lambda_0 \sum_{k=1}^{S^i} q_k L_k(x, u_k, t) \\ \mathcal{H}(\lambda_0, \lambda, x, u, q, t) &= \sum_{k=1}^{S^i} q_k \mathcal{H}_k(\lambda_0, \lambda, x, u_k, t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

où $\mathcal{H}_k(\lambda_0, \lambda, x, u_k, t) = \lambda^T f_k(x, u_k, t) + \lambda_{n+1} - \lambda_0 L_k(x, u_k, t)$.

Enfin, à $\mathcal{H}$, on associe le *Système Hamiltonien* (SH), de dimension $2n + 2$,

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \quad - \dot{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (3.53)$$

Des deux sections précédentes, on obtient alors directement le résultat en distinguant les sauts *sans contraintes* (application directe du principe du maximum) des sauts *constraints* (application de la programmation dynamique).

Remarque : Les conditions de transversalité associées aux sauts *non constraints* peuvent également se déduire de la programmation dynamique. En effet, comme le couple (x, t) est libre aux instants de sauts *sans contraintes*, λ et λ_{n+1} dans (2.25) sont nuls et on retrouve les conditions de transversalité (3.46)(3.47). En revanche, cette façon de procéder ne permet pas d'établir (3.42) et (3.43).

Remarque : Les cas de discontinuités sur l'état x et le temps t peuvent maintenant être envisagés. Supposons donc que deux fonctions de saut Ψ_k et Φ_k sur respectivement les variables x et t soient données et soient suffisamment régulières. Lorsqu'un saut autonome ou commandé intervient du mode k vers le mode j , l'état saute d'une position (x, t) à une position $(\Psi_k(x, t), \Phi_k(x, t))$ et poursuit sa course suivant une dynamique déterminée par un champ f_j et pour un critère L_j . Toujours par la programmation dynamique, on obtient les conditions de transversalité :

- si σ_i est un instant de saut *sans contrainte* depuis le mode k vers le mode j alors :

$$\lambda(\Phi_k(x, t)) = \lambda(\sigma_i^-) \quad (3.54)$$

$$H_j^+(\lambda_0, \lambda, \Psi(x, t), u_j, \Phi_k(x, t)) = H_k^-(\lambda_0, \lambda, x, u_k, \sigma_i) \quad (3.55)$$

- si σ_i est un instant de saut *contraint* sur une variété définie par p ($p < n$) contraintes égalités, $C_k(x, t) = 0$, depuis le mode k vers le mode j alors :

$$\lambda(\Phi_k(x, t)) = \lambda(\sigma_i^-) - \frac{\partial C_k^T(x(t), t)}{\partial x} \pi \Big|_{t=\sigma_i} \quad (3.56)$$

$$H_j^+(\lambda_0, \lambda, \Psi(x, t), u_j, \Phi_k(x, t)) = H_k^-(\lambda_0, \lambda, x, u_k, \sigma_i) + \frac{\partial C_k^T(x(t), t)}{\partial t} \pi \Big|_{t=\sigma_i} \quad (3.57)$$

avec π de dimension p .

3.4 Exemple d'une hystérésis

Nous avons choisi cet exemple proposé par Branicky dans son mémoire de thèse [Bra95] car nous pensons qu'il illustre bien comment la mise en oeuvre des conditions nécessaires d'optimalité permet d'arriver à la solution formelle du problème. Cet exemple est suffisamment simple pour que l'on puisse mener les calculs jusqu'au bout, mais il montre aussi que les conditions de transversalité au passage des frontières induisent des trajectoires de manières diverses qu'il n'est pas possible de prévoir a priori.

3.4.1 Définition du problème de commande

Considérons le système hybride défini par :

$$\dot{x} = f(x) + u \quad (3.58)$$

où la fonction à valeurs multiples $f(x)$ est représentée sur la figure 3.1.

Le problème de commande proposé est de minimiser le critère,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (qx^2 + u^2) e^{-t} dt \quad (3.59)$$

avec une dynamique définie par l'équation (3.58), $x(0) = x_0$ et $u(t) \in \mathbb{R}$.

Par la suite nous utiliserons l'indice $i = -1, 1$ pour distinguer les deux modèles $\dot{x} = f_i(x, u)$, $i = -1, 1$ où

$$f_i(x, u) = i + u \quad (3.60)$$

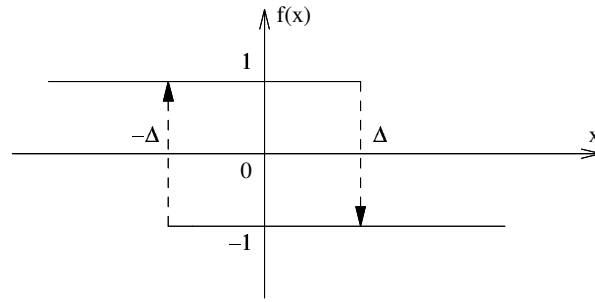


FIG. 3.1: Hystérésis

Ce système hybride présente très clairement des discontinuités de champ de vecteurs aux points intérieurs Δ et $-\Delta$. La nature de ces discontinuités est de type saut autonome. Un saut se produit du mode 1 vers le mode -1 lorsque la variable d'état x atteint par valeurs inférieures la frontière Δ . Réciproquement, le mode passe de -1 à 1 lorsque la variable d'état x atteint par valeurs supérieures la frontière $-\Delta$. La figure 3.2 représente l'automate associé à la dynamique discrète de ce processus.

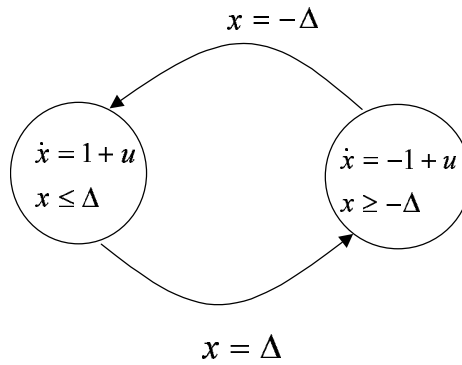


FIG. 3.2: Automate associé

3.4.2 Formulation et expression analytique de la solution

Définissons la fonction Hamiltonienne par ($\lambda_0 = 1$) :

$$H_i(\lambda, x, u, t) = \lambda^T f_i(x, u) - \frac{1}{2}(qx^2 + u^2)e^{-t} \quad (3.61)$$

et le système Hamiltonien associé :

$$\dot{x} = \frac{\partial H_i}{\partial \lambda} = f_i(x, u) \quad (3.62a)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H_i}{\partial x} = qxe^{-t} \quad (3.62b)$$

En exprimant la condition de maximum de la fonction Hamiltonienne, on obtient une commande $u(\cdot)$ définie en fonction de $\lambda(\cdot)$ sous la forme :

$$\frac{\partial H_i}{\partial u} \equiv 0 \Leftrightarrow u = \lambda e^t \quad (3.63)$$

Le système Hamiltonien satisfait alors pour une trajectoire *extrémale* le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^t \\ qe^{-t} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Une discontinuité de champ de vecteurs intervient à un instant τ lorsque la trajectoire $x(\cdot)$ rencontre Δ ou $-\Delta$. Ces conditions de frontières associées à chaque mode de fonctionnement peuvent être formalisées par les contraintes égalités,

$$C_i(x(t), t) \equiv x - i\Delta = 0 \quad (3.65)$$

Examinons les conditions de passage du mode i vers le mode $-i$. Les conditions de transversalité à ces instants τ sont obtenues par les relations (3.44)(3.45) :

$$\lambda_{-i}(\tau^+) = \lambda_i(\tau^-) - \alpha_i \left. \frac{\partial C_i}{\partial x} \right|_{t=\tau} \quad (3.66a)$$

$$H_{-i}(\tau^+) = H_i(\tau^-) + \alpha_i \left. \frac{\partial C_i}{\partial t} \right|_{t=\tau} \quad (3.66b)$$

si $C_i(x(\tau), \tau) = 0$ est satisfaite, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et où τ^- et τ^+ représentent respectivement les valeurs limites inférieure et supérieure de τ .

Comme $\frac{\partial C_i}{\partial x} \equiv 1$ et $\frac{\partial C_i}{\partial t} \equiv 0, \forall i$, (3.66) est reformulé dans (3.67) par :

$$\lambda_i(\tau^-) = \lambda_{-i}(\tau^+) + \alpha_i \quad (3.67a)$$

$$H_i(\tau^-) = H_{-i}(\tau^+) \quad (3.67b)$$

Pour déterminer les nombres α_i , il faut résoudre (3.67) en utilisant (3.61), (3.63). Ce calcul conduit facilement à l'expression polynomiale en α_i :

$$(\alpha_i + 2ie^{-t})(\alpha_i + 2\lambda_{-i}) = 0 \quad (3.68)$$

Ainsi, (3.67a) est maintenant définie par les deux possibilités :

$$\lambda_{-i}(\tau^+) = -\lambda_i(\tau^-) \quad (3.69a)$$

$$\lambda_{-i}(\tau^+) = \lambda_i(\tau^-) + 2ie^{-t} \quad (3.69b)$$

De (3.63), on déduit les discontinuités de commande aux instants de commutation :

$$u_{-i}(\tau^+) = -u_i(\tau^-) \quad (3.70a)$$

$$u_{-i}(\tau^+) = u_i(\tau^-) + 2i \quad (3.70b)$$

L'une produit une poursuite de trajectoire dans le même sens, l'autre l'inverse et dans les deux cas, la valeur absolue du champ est inchangée.

En effet, puisque :

$$\dot{x}(\tau^-) = i + u_i(\tau^-) \quad (3.71a)$$

$$\dot{x}(\tau^+) = -i + u_{-i}(\tau^+) \quad (3.71b)$$

par substitution de (3.70a) ou de (3.70b), on obtient :

$$\dot{x}(\tau^+) = -(i + u_i(\tau^-)) = -\dot{x}(\tau^-) \quad (3.72a)$$

$$\text{ou } \dot{x}(\tau^+) = i + u_i(\tau^-) = \dot{x}(\tau^-) \quad (3.72b)$$

Par ailleurs, comme $u = e^t \lambda$, (3.64) peut être réécrit comme le système à temps invariant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Par suite, l'évolution du système peut être entièrement déterminée en fonction des choix de commande (3.70) effectués aux instants de saut.

Considérons donc la suite d'instants $[0, \tau_1, \dots, \tau_k, \dots]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ où τ_k est l'instant de la $k^{\text{ième}}$ commutation. La suite est éventuellement finie ou réduite à 0. Alors la solution analytique de (3.73) prend la forme sur chaque intervalle de temps $[\tau_k, \tau_{k+1}]$:

$$x_i(t) = \frac{i}{q} + A_k e^{r_1(t-\tau_k)} + B_k e^{r_2(t-\tau_k)} \quad (3.74a)$$

$$u_i(t) = -i + r_1 A_k e^{r_1(t-\tau_k)} + r_2 B_k e^{r_2(t-\tau_k)} \quad (3.74b)$$

avec

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4q}}{2} \leq 0, \forall q \geq 0 \quad (3.74c)$$

$$r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4q}}{2} \geq 1, \forall q \geq 0 \quad (3.74d)$$

$$A_k = \frac{1}{r_1 \sqrt{1 + 4q}} (r_2 i - q x_i(\tau_k) - r_1 u_i(\tau_k)) \quad (3.74e)$$

$$B_k = \frac{1}{r_2 \sqrt{1 + 4q}} (-r_1 i + q x_i(\tau_k) + r_2 u_i(\tau_k)) \quad (3.74f)$$

Les constantes A_k, B_k sont déterminées à partir des conditions de transversalité (3.70).

3.4.3 Synthèse de la commande

Observons tout d'abord que par symétrie, la résolution du système

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{-i} \\ \dot{u}_{-i} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_{-i} \\ u_{-i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

avec les conditions initiales $u_{-i}(\tau_k)$ et $x_{-i}(\tau_k) = i\Delta$ est équivalente, au signe près, à la résolution du système

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{u}_i \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

avec les conditions initiales $u_i(\tau_k) = -u_{-i}(\tau_k)$ et $x_i(\tau_k) = -i\Delta$.

Pour cette raison et pour simplifier, nous ne raisonnerons que sur le mode $i = 1$ (c'est-à-dire avec le système (3.76) pour $i = 1$).

Dans (3.74e) et (3.74f), $x_i(\tau_k)$ est donc identiquement égale à $-\Delta$ et les conditions de transversalité se traduisent par :

$$u(\tau_k^+) = u(\tau_k^-) \quad (3.77a)$$

$$\text{ou } u(\tau_k^+) = -u(\tau_k^-) - 2 \quad (3.77b)$$

Cette convention étant fixée, on peut rechercher parmi les trajectoires vérifiant les conditions nécessaires énoncées, celles dont le coût associé est fini.

Pour une position initiale et une commande initiale données, l'intégration du système ne produit pas une trajectoire unique puisque des bifurcations apparaissent aux instants de commutation suivant le choix de commande effectué. Cependant, il s'avère que le choix (3.77b) conduit systématiquement à une trajectoire divergente et un coût infini.

En effet, comme une commutation sur Δ n'est possible que si la vitesse de x est positive, on a la condition $\dot{x}(\tau_k^-) = 1 + u(\tau_k^-) \geq 0$, soit $u(\tau_k^-) \geq -1$. Le choix (3.77b) définit alors une commande $u(\tau_k^+) \leq -1$ pour une position initiale, suivant notre convention, égale à $-\Delta$. D'après la forme analytique de la solution (3.74), une étude du sens de variation de $u(t)$ en fonction de la condition initiale $u(\tau_k^+)$ montre que $u(t)$ décroît strictement pour tout $t \geq \tau_k^+$, tant que $u(\tau_k^+) \leq \frac{r_1 + q\Delta}{r_2}$ (voir le tableau de variations en Annexe B). Et comme $-1 < \frac{r_1 + q\Delta}{r_2}$, on conclut que pour tout $t \geq \tau_k^+$,

$$\dot{x}(t) < \dot{x}(\tau_k^+) = 1 + u(\tau_k^+) \leq 0$$

Aussi, la trajectoire diverge vers $-\infty$. Comme $B_k < 0$ dès que $u(\tau_k^+) < \frac{r_1 + q\Delta}{r_2}$, la croissance de $qx^2 + u^2 \approx (q + r_2^2)B_k^2 e^{2r_2(t-\tau_k)}$ plus rapide que la décroissance de $e^{-(t-\tau_k)}$ entraîne un coût infini.

Par conséquent, seul le choix (3.77a) peut être retenu et le système devient déterministe pour une position initiale et une commande initiale données.

Aussi, on notera de manière indifférente $u_k = u(\tau_k^+) = u(\tau_k^-)$ la valeur de u à la $k^{\text{ième}}$ commutation.

A présent si l'on suppose que la séquence des instants de commutation est finie, comme $r_2 > 1, \forall q > 0$, il est nécessaire que B_k soit nul pour la dernière commutation sinon, et pour la même raison que précédemment, on obtient un coût infini. Dans cette éventualité ($B_k = 0$) et suivant le dernier mode i emprunté, $x_i(t)$ converge vers $\frac{i}{q}$ et $u_i(t)$ vers $-i$. Notons qu'une séquence finie ne peut s'obtenir que si le régime permanent peut être atteint, soit pour la condition $\frac{1}{q} \leq \Delta$. On obtient l'ensemble de ces trajectoires en intégrant en temps rétrograde le système (3.76), à partir du dernier instant de commutation et avec des conditions finales fournies par l'égalité $B_k = 0$ soit $u_k = \frac{r_1 + q\Delta}{r_2}$.

Lorsque la séquence est infinie, on montre en **Annexe B** que la seule trajectoire permettant d'obtenir un coût fini est déterminée par la condition $u_{k+1} = u_k$, pour tout k .

Cette condition est vérifiée en résolvant le système d'équations suivant d'inconnues τ_{k+1} et u_k ,

$$u_{k+1} = u_k \quad (3.78a)$$

$$x(\tau_{k+1}) = \Delta \quad (3.78b)$$

En **Annexe C**, il est montré que ce système d'équations n'admet de solution que pour les valeurs de q inférieures à $q_{\max} = \frac{2 + \sqrt{4 + \Delta^2}}{\Delta^2}$.

En résumé, on obtient l'ensemble des trajectoires candidates en fonction du nombre de commutations et de la valeur de q .

Lorsque $\frac{1}{q} > \Delta$, il existe une seule trajectoire obtenue en résolvant (3.78), correspondant à un mouvement périodique et à un nombre de commutations infini.

Lorsque $\frac{1}{q} \leq \Delta$ et $q \geq q_{\max}$, il existe une seule trajectoire obtenue sans commutation avec la condition initiale $B_k = 0$.

Lorsque $\frac{1}{q} \leq \Delta$ et $q < q_{\max}$, il existe une seule trajectoire (obtenue en résolvant (3.78)) correspondant à un nombre de commutations infini et une trajectoire par nombre fini k de commutations envisagées.

Pour les deux premiers cas, la commande optimale est définie sans ambiguïté (voir respectivement les figures 3.3 et 3.4 et les figures 3.5 et 3.6). Pour le dernier cas, il nous faut calculer le critère suivant le nombre de commutations envisagé.

Un calcul explicite de ce critère, d'après la forme analytique de la solution est possible et doit nous permettre de déterminer la solution optimale.

Sur la figure 3.7, une comparaison du coût en fonction de q et suivant le nombre de commutations est faite. La courbe en pointillé représente le coût associé au mouvement périodique obtenu pour un nombre de commutations infini. La courbe supérieure en trait plein est le coût obtenu sans commutation ($B_k = 0$). La valeur

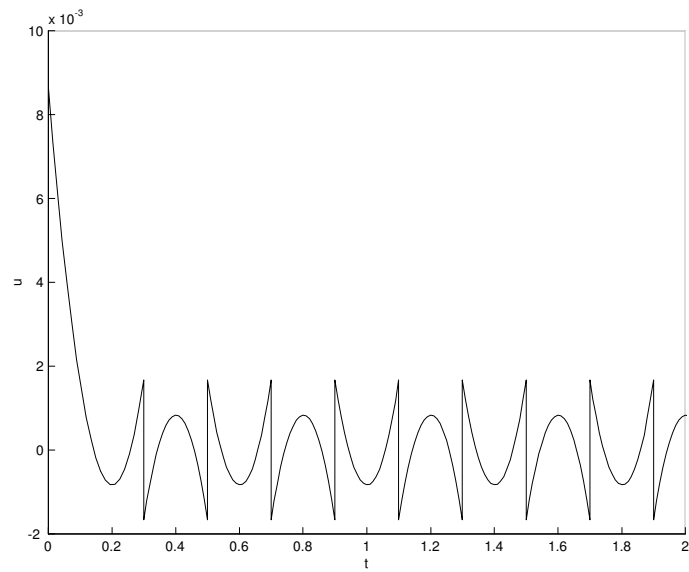


FIG. 3.3: Commande optimale, $q = \frac{1}{2}$, $x_0 = -0.2$, $\Delta = 0.1$

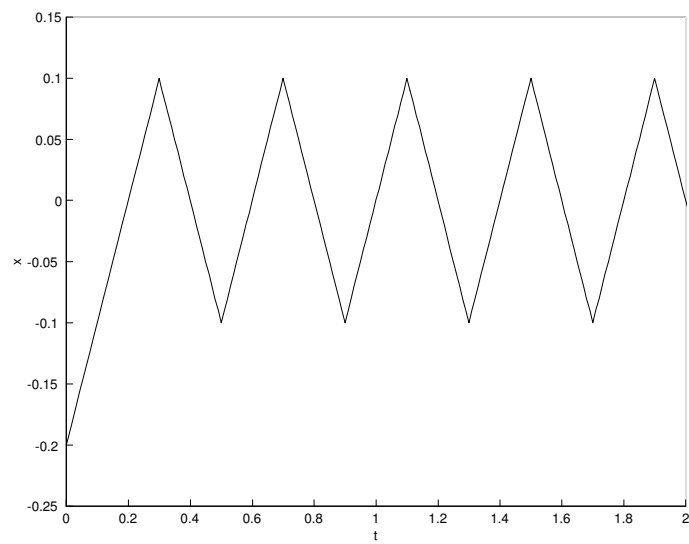
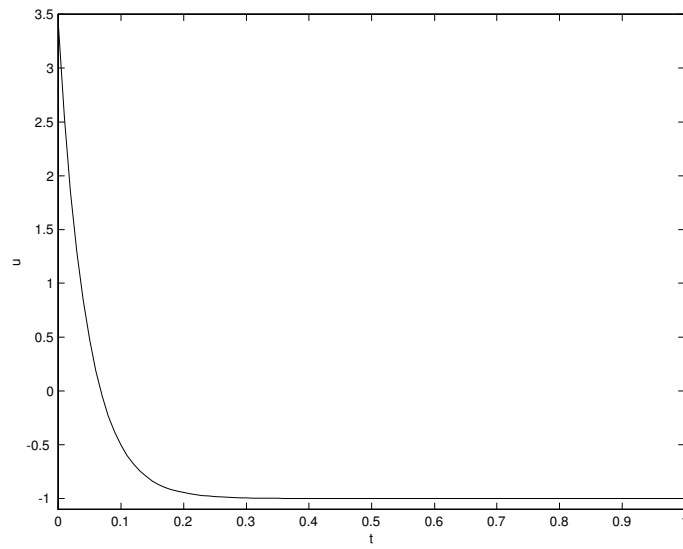
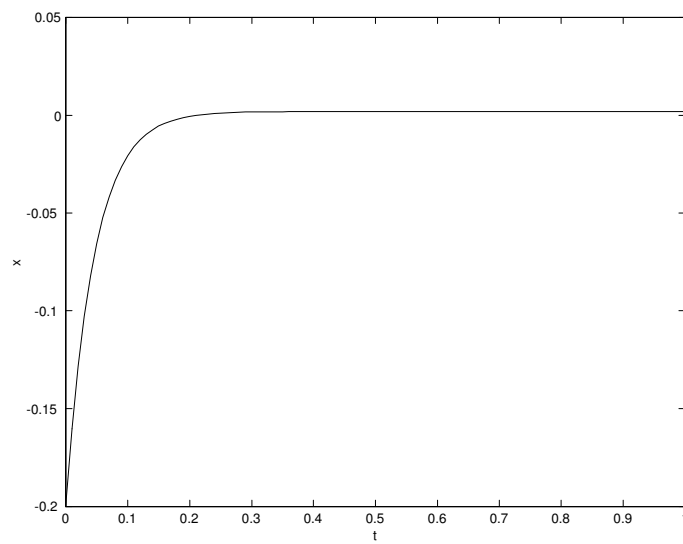


FIG. 3.4: Trajectoire optimale, $q = \frac{1}{2}$, $x_0 = -0.2$, $\Delta = 0.1$

FIG. 3.5: Commande optimale, $q = 500$, $x_0 = -0.2$, $\Delta = 0.1$ FIG. 3.6: Trajectoire optimale, $q = 500$, $x_0 = -0.2$, $\Delta = 0.1$

limite de q pour laquelle le mouvement périodique peut être défini correspond au point d'intersection des deux courbes. Entre ces deux extrêmes, on trouve suivant le nombre k de commutations envisagé, des coûts intermédiaires (ici $k = 1, 2, \dots, 20$). On observe que plus le nombre de commutations est élevé plus la valeur du critère est améliorée (figure 3.7). Le cas optimal est alors obtenu pour le cas cyclique : $k = \infty$. Par exemple, pour $q = 400 < q_{\max}$ la commande et la trajectoire optimale sont représentées sur les figures 3.8 et 3.9.

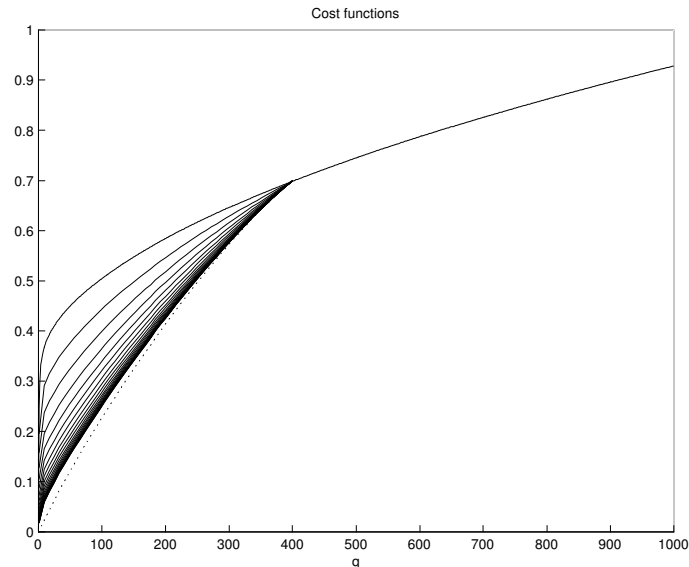


FIG. 3.7: Comparaison des différents coûts en fonction de q et du nombre k de commutations envisagé ; trait plein supérieur : sans commutation ($k = 0, x \rightarrow \frac{1}{q}$), traits pleins intermédiaires $k = 1, 2, \dots, 20$, trait pointillé : séquence ∞ de commutations (x périodique)

3.5 Conclusion du chapitre 3

Dans ce chapitre, une extension du Principe de Maximum aux systèmes hybrides a été proposée. Cette formulation intègre des discontinuités sur les champs de vecteurs définissant la dynamique continue du système. Ces discontinuités peuvent être de types autonomes ou commandées. Ce résultat a été obtenu principalement à partir de l'intégration d'un critère terminal au PM (Problème de Bolza Chap. 2.2.1) et de l'équation de Bellman (Programmation dynamique section 3.1) mais aussi par une combinaison convexe de champs de vecteurs permettant de représenter le saut commandé. Comme il l'a été souligné (remarque consécutive au PM version hybride), le cas de sauts sur la variable d'état continue peut aisément s'envisager à l'aide de fonctions de saut et revient à traiter ces situations comme des discontinuités sur les champs de vecteurs.

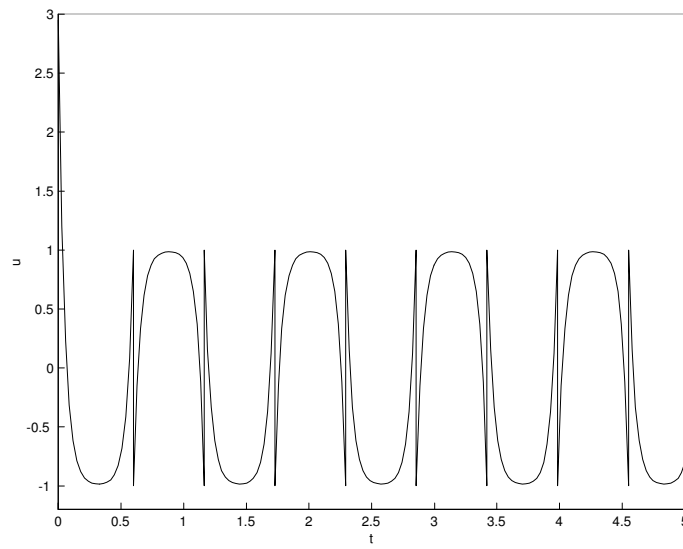


FIG. 3.8: Commande optimale, $q = 400$, $x_0 = -0.2$, $\Delta = 0.1$

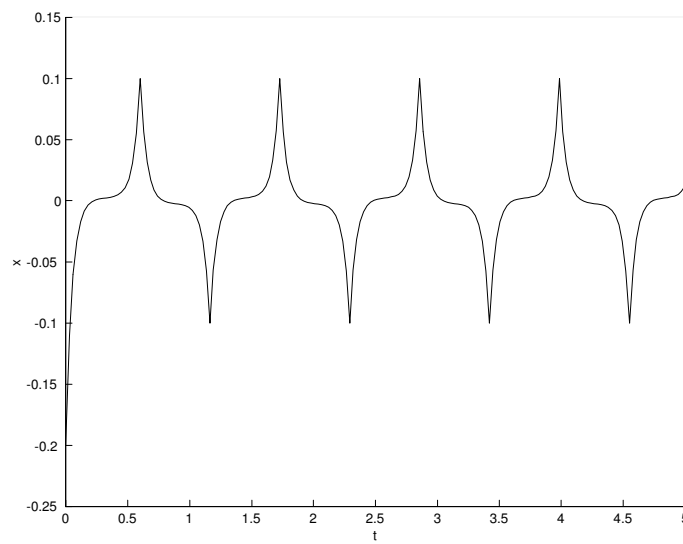


FIG. 3.9: Trajectoire optimale, $q = 400$, $x_0 = -0.2$, $\Delta = 0.1$

Un exemple d'une hystérésis repris des travaux de Branicky, est alors entièrement traité. Cet exemple montre que la solution analytique peut être déterminée par notre méthode. En outre, l'analyse menée pour déterminer la trajectoire optimale a permis de mettre en évidence une bifurcation dans la solution optimale en fonction de la valeur d'un paramètre q relatif au critère. Cette bifurcation n'a pas été détectée par la recherche numérique proposée dans [Bra95].

Chapitre 4

La Commande Optimale en Temps

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à une classe spéciale de systèmes hybrides : la classe des systèmes hybrides linéaires. Cette classe est obtenue pour des SDH dont les parties continues sont linéaires. Les champs de vecteurs auxquels la variable d'état $x(\cdot)$ est soumise, sont donc de la forme :

$$f_k(x, u_k) = A_k x + B_k u_k \quad (4.1)$$

où la variable d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$, l'indice k est choisi parmi un ensemble fini d'indices, $k \in \underline{K} = \{1, \dots, K\}$ et $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^{m_k}$.

Dans le cadre de la commande optimale, il paraît naturel de voir quels types de résultats on peut espérer obtenir sur ces systèmes, en raison de leur relative simplicité. On comprendra qu'une démarche fondée sur des exemples simples vers de plus complexes soit notre fils conducteur.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la commande optimale en temps avant d'aborder, au chapitre suivant, la commande par critère quadratique. Pour une position initiale x_0 et une position finale x_f données dans l'espace d'état, le problème consiste à trouver parmi les commandes admissibles celle(s) qui minimise(nt) le temps de transfert de l'état $x(\cdot)$ de la position x_0 à la position x_f .

Comme nous l'avons vu au Chapitre 2 sur deux exemples académiques, un premier problème est d'établir l'existence d'une solution optimale. Malgré l'existence d'au moins une commande admissible permettant de relier les points x_0 et x_f avec un coût fini, il n'existe pas toujours une commande optimale. Nous traitons ce problème en détail aux sections 4.3, 4.4 et 4.5 en abordant la notion de trajectoire singulière.

A la section 4.2, il est montré comment déterminer les instants de commutation. Ce résultat intéressant permet alors de faire la synthèse de la commande. Un exemple complet illustre la méthode en section 4.6.

Lorsque l'existence d'une commande optimale est mise en défaut, on peut déterminer une commande sous-optimale à partir de l'étude d'un problème étendu. Cette commande sous-optimale est alors obtenue par mode glissant à partir de la solution du problème étendu. La section 4.7 justifie cette approche.

4.1 Loi de commande

Le critère envisagé est donc de la forme :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (4.2)$$

avec $L_k(x, u_k) \equiv 1$ et $\phi_k \equiv 0$, pour tout k .

Les systèmes hybrides que nous considérons dans cette partie, peuvent commuter à tout instant et en tout point d'un modèle à un autre (sauts commandés non contraints). On peut donc les représenter par le système d'équations suivant :

$$\dot{x}(t) = A_k x(t) + B_k u_k(t) \quad (4.3)$$

$$k(t) = \nu(x(t), k(t^-), d(t), t) \equiv d(t) \quad (4.4)$$

L'automate est ici réduit à l'entrée discrète $d(t) \in \underline{K} = \{1, \dots, K\}$ (i.e. au numéro de modèle utilisé).

Alors une représentation sous la forme d'un seul champ de vecteurs qui intègre l'ensemble des modes, peut être donnée par (Chap. 3.2.2) :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^K q_k(t) (A_k x(t) + B_k u_k(t)) \quad (4.5)$$

où $q_k(t)$ est la $k^{ième}$ composante du vecteur booléen $q(t)$ ($q_k(t) \in \{0, 1\}$) dont une et une seule composante doit être égale à 1. Autrement dit, $q(t)$ appartient à l'ensemble Q défini par :

$$Q = \left\{ \alpha \in \{0, 1\}^K : \sum_{k=1}^K \alpha_k = 1 \right\} \quad (4.6)$$

Aussi par bijection, on confondra $q(t)$ avec la commande discrète $d(\cdot)$. L'intérêt de (4.5) est d'intégrer la commande discrète dans l'équation d'état continue et ainsi de ne former qu'un seul système. On peut remarquer que la non linéarité des systèmes hybrides est ici clairement évidente.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire le Système Hamiltonien comme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^K d_k(t) (A_k x(t) + B_k u_k(t)) \quad (4.7a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = - \sum_{k=1}^K d_k(t) A_k^T \lambda(t) \quad (4.7b)$$

avec la fonction Hamiltonienne associée

$$H(\lambda_0, \lambda(t), x(t), u(t), d(t)) = \sum_{k=1}^K d_k(t) \lambda^T(t) (A_k x(t) + B_k u_k(t)) - \lambda_0 \quad (4.8)$$

Le principe du maximum (version classique) établit alors qu'une condition nécessaire pour que la commande $(u, d)(.)$ et la trajectoire $x(.)$ soient optimales est qu'il existe une fonction absolument continue $\lambda(t)$, non identiquement nulle, vérifiant l'équation (4.7b) presque partout (p.p.) sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ et telle que :

$$i. \quad H(\lambda(t), x(t), u(t), d(t)) = \max_k \left(\sup_{v \in U_k} \lambda^T(t) (A_k x(t) + B_k v) \right) \quad (4.9)$$

$$ii. \quad H(\lambda(t), x(t), u(t), d(t)) \geq 0 \text{ sur } [t_0, t_f] \quad (4.10)$$

Remarques :

- Le terme $-\lambda_0$ dans (4.8) n'a aucun effet sur le maximum de H et a été supprimé. Par conséquent, comme le temps final n'est pas fixé, la condition $H = 0$ (cf PM Chap. 2.2.2) devient (4.10) et $\lambda(t)$ ne doit jamais être égale à zéro.
- Comme x_0 et x_f sont donnés, λ est libre aux instants initial et final.

Afin d'éviter des commandes infinies, le domaine de commande doit être borné. Les hypothèses suivantes sont alors faites :

Hypothèse : *Le domaine de commande associé à chaque commande $u_k(.)$ est un polyèdre convexe fermé noté U_k .*

Désignons par :

$$e_k^1, e_k^2, \dots, e_k^{p_k} \quad (4.11)$$

les p_k sommets du polyèdre U_k associé au mode k .

Sous l'hypothèse de normalité définie à la section 4.3, on montre que les valeurs de la commande $u(.)$ pour une trajectoire optimale sont obtenues aux sommets e_k^j ,

$j \in \underline{p}_k$ des polyèdres. La preuve est donnée à la même section avec le théorème 4.2. Ce type de commande est dite “bang-bang”.

Pour une trajectoire *extrémale*, une question importante est alors de déterminer les instants où une commutation entre sommets e_k^j , $j \in \underline{p}_k$ et/ou modes $k \in \underline{K}$ doit avoir lieu. La réponse à cette question fait l’objet de la prochaine section (Théorème 4.1).

4.2 Instants de commutation

Considérons une trajectoire *extrémale* $x(\cdot)$ à un instant t qui ne soit pas un instant de commutation, avec une commande obtenue sur le $j^{\text{ième}}$ sommet associé au mode k , c’est-à-dire, pour :

$$u_k(t) = e_k^j, \quad d_k(t) = 1 \quad j \in \underline{p}_k \quad (4.12)$$

Puisque, par définition d’une commande *extrémale*, la fonction Hamiltonienne est maximale pour la commande (4.12), toutes les différences formées avec les autres valeurs possibles de l’Hamiltonien sont positives. En particulier, pour les commandes situées sur les sommets des domaines de commande, on peut écrire :

$$\lambda^T(t) (A_k x(t) + B_k e_k^j) - \lambda^T(t) (A_\ell x(t) + B_\ell e_\ell^i) > 0, \forall \ell \in \underline{K}, \forall i \in \underline{p}_\ell \quad (i \neq j \text{ si } k = \ell) \quad (4.13)$$

Posons $P_{k,\ell}^{j,i}(\cdot)$ les fonctions du temps définies pour tout $\ell \in \underline{K}$ et pour tout $i \in \underline{p}_\ell$ ($i \neq j$ si $k = \ell$) par :

$$P_{k,\ell}^{j,i}(t) = \lambda^T(t) ((A_k - A_\ell)x(t) + B_k e_k^j - B_\ell e_\ell^i) > 0 \quad (4.14)$$

$P_{k,\ell}^{j,i}(\cdot)$ étant la différence entre deux Hamiltonien, un instant de commutation intervient au premier instant t où au moins une des fonctions $P_{k,\ell}^{j,i}(\cdot)$, ($\forall \ell \in \underline{K}, \forall i \in \underline{p}_\ell$ ($i \neq j$ si $k = \ell$)) s’annule en changeant de signe.

$P_{k,\ell}^{j,i}(\cdot)$ est une fonction absolument continue et si T_k^j dénote l’intervalle de temps où la commande (4.12) est la solution de (4.9), $P_{k,\ell}^{j,i}(\cdot)$ est analytique sur T_k^j puisque $x(\cdot)$ et $\lambda(\cdot)$ sont solutions du système d’équations différentielles à coefficients constants (4.7).

La forme analytique des fonctions $P_{k,\ell}^{j,i}(\cdot)$ se déduit du théorème ci-dessous. On obtient alors facilement les zéros de ces fonctions par une recherche numérique.

Théorème 4.1 $P_{k,\ell}^{j,i}(\cdot)$ vérifie une équation différentielle ordinaire à coefficients constants dont l’équation caractéristique est déterminée par le polynôme $S_k Q_k$ où S_k est le polynôme minimal symétrique associé à la matrice A_k et Q_k le polynôme minimal associé à la matrice

$$A_k^T \otimes I_n - I_n \otimes A_k$$

($\otimes$ est le produit de Kronecker¹, [Gra81]).

La solution générale est alors de la forme

$$P_{k,\ell}^{j,i}(t) = \sum_m a_m(t) e^{-\beta_m t} + \sum_m b_m(t) e^{\gamma_m t} \quad (4.15)$$

où β_m, γ_m sont respectivement les valeurs propres distinctes des matrices A_k et $A_k^T \otimes I_n - I_n \otimes A_k$, et a_m, b_m des polynômes avec des degrés inférieurs aux multiplicités des valeurs propres associées.

Preuve :

Considérons deux champs de vecteurs différentiables, f et g , et définissons la fonction analytique $P(t)$ comme le produit

$$P(t) = \lambda^T(t) g(x(t)) \quad (4.16)$$

où les dynamiques de x et λ sont données par les équations différentielles

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.17)$$

et

$$\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \lambda \quad (4.18)$$

En dérivant successivement $P(t)$ par rapport à t , on obtient l'expression :

$$\frac{d^m P}{dt^m}(t) = \langle \lambda(t), ad_f^m g(x(t)) \rangle \quad (4.19)$$

où $ad_f^m g$ est le crochet de Lie d'ordre m .

Rappelons que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs f et g , est un champ de vecteurs, noté $[f, g]$, défini par l'opérateur différentiel d'ordre un :

$$[f(x), g(x)] = \frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x) g(x) \quad (4.20)$$

La $k^{\text{ième}}$ -itération du crochet de Lie de f sur g est alors définie par la récurrence (voir [Nij90] pour plus de détails)² :

$$ad_f^k g(x) = [f(x), ad_f^{k-1} g(x)] \quad (4.21)$$

de terme initial

$$ad_f^0 g(x) = g(x) \quad (4.22)$$

¹voir Annexe E : Produit de Kronecker

²voir Annexe D : Eléments de Géométrie Différentielle

Si dans un premier temps, nous supposons que les champs f et g sont linéaires c'est-à-dire de la forme $f(x) = Mx$ et $g(x) = Nx$ alors le premier crochet de f sur g , est donné par l'expression $[Mx, Nx] = (NM - MN)x$.

Aussi, on peut identifier cet opérateur à une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ ($ad_M^1(.) : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$) qui associe à une matrice donnée N , la matrice $NM - MN$. Définissons alors l'opérateur colonne $col(.)$ qui à une matrice $A = [A_1 \dots A_n]$ associe le vecteur colonne $col(A) = [A_1^T \dots A_n^T]^T$ où $A_1, \dots, A_n$ sont les colonnes de A .

Alors une propriété remarquable est [Wei91] :

$$col(ACB) = (B^T \otimes A)col(C) \quad (4.23)$$

Aussi, si nous formons $col(N)$, $col(I_n NM)$ et $col(MN I_n)$, il est facile de vérifier à l'aide de cette propriété que $ad_f^1(.) : col(N) \mapsto \tilde{M} col(N)$ où la matrice $\tilde{M}$ est définie par la relation :

$$\tilde{M} = M^T \otimes I_n - I_n \otimes M \quad (4.24)$$

De plus, les valeurs propres de $\tilde{M}$ sont formées par les différences :

$$\gamma_j = \beta_k - \beta_i, \quad j = 1, \dots, n^2, \quad i, k = 1, \dots, n \quad (4.25)$$

et les vecteurs propres associés par les produits :

$$V_j = V_k \otimes V_i \quad (4.26)$$

où les β_i, β_k , représentent les valeurs propres de la matrice M , et V_k et V_i représentent les vecteurs propres respectivement des matrices M^T et M .

Posons Q le polynôme minimal de $\tilde{M} = M^T \otimes I_n - I_n \otimes M$. Comme les valeurs propres de $\tilde{M}$ sont déterminées par (4.25), le degré de Q est au plus $n(n-1)$ (zéro est une valeur propre de multiplicité au moins égale à n).

En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, on établit, pour toute matrice N ,

$$Q(ad_M)(N) = \sum_m \mu_m ad_M^m(N) = 0 \quad (4.27)$$

où les μ_m sont les coefficients du polynôme Q .

Nous pouvons alors conclure de (4.19) et (4.27), que la fonction scalaire $P(t)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$Q(P)(t) = \sum_m \mu_m \frac{d^m P}{dt^m}(t) = 0 \quad (4.28)$$

Si maintenant, les champs f et g ne sont plus linéaires mais affines, $f(x) = Mx + c$ et $g(x) = Nx + d$, de la même façon, l'équation suivante est obtenue :

$$Q(ad_{f(x)})(g)(x) = Q(ad_{Mx})(N)(x) + V \quad (4.29)$$

avec un terme additionnel V constant.

Comme $Q(ad_{Mx})(N)(x)$ est identiquement nul, en appliquant successivement l'opérateur différentiel ad_f à cette relation, on obtient :

$$ad_f^k Q(ad_f)(g)(x) = (-1)^k M^k V \quad (4.30)$$

On peut alors conclure par le théorème de Cayley-Hamilton

$$SQ(ad_f)(g)(x) = 0$$

avec S le polynôme symétrique du polynôme minimal de M (i.e. $S(-x) = -R(x)$ si R est le polynôme minimal de M). Ceci complète la preuve de ce théorème.

Remarque : Dans l'expression (4.29), le vecteur constant V est déterminé à partir de la relation de récurrence :

$$\frac{d^m P}{dt^m}(t) = \lambda^T \left(ad_{Mx}^m(N)x + \left\{ (-1)^m \sum_{k=1}^m (-1)^k ad_{Mx}^{k-1}(M^{m-k}N)c + (-1)^m M^m d \right\} \right) \quad (4.31)$$

4.3 Condition de normalité

Dans certains cas (champs de vecteurs particuliers, zones particulières de l'espace d'état, etc.) le maximum de l'Hamiltonien ne définit pas la commande de manière unique. Dans ces situations, la recherche d'une solution nécessite des traitements particuliers où s'introduit la notion de trajectoires singulières [Jak98].

Les commandes discrètes définies au chapitre 3, sont des commandes constantes par morceaux. La condition de normalité abordée dans cette section va permettre de garantir l'absence de trajectoire singulière pour cette classe de commande.

Pour cela, nous allons considérer un problème étendu (P_e) obtenu en relaxant les contraintes posées sur le domaine discret de commande (4.6). La condition de normalité garantira alors que les solutions optimales du problème étendu (si elles existent) coïncident avec les solutions optimales du problème hybride.

Comme l'existence d'une commande optimale *mesurable* est garantie pour ce problème étendu (**Théorème 2.2**), le **corollaire 4.2** page 96 est un lien entre les solutions du P_e qui seraient *constantes par morceaux* et les solutions hybrides. Aussi, ce résultat peut-il conduire à une condition suffisante pour l'existence de solutions au problème hybride.

Au chapitre 2 section 2.2.2, un théorème d'existence sous certaines hypothèses de convexité du problème a été énoncé. Il s'avère qu'un système hybride ne peut

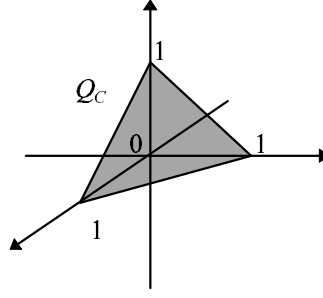


FIG. 4.1: Domaine de commande étendu pour un SDH formé de trois états discrets

satisfaire une telle hypothèse en raison de la non convexité du domaine de commande et de la violation de la condition a)³.

On peut cependant remédier à cette difficulté si le domaine de commande discret Q est étendu à son enveloppe convexe Q_c (figure 4.1),

$$Q_c \equiv co(Q) = \left\{ \alpha \in [0, 1]^K : \sum_{k=1}^K \alpha_k = 1 \right\} \quad (4.32)$$

Le problème de commande avec un domaine étendu à Q_c , est appelé problème étendu (P_e). Notons que la classe des commandes admissibles discrètes n'est pas modifiée et reste *constante par morceaux*. Le champ de vecteurs noté $f_{P_e}(x, u, d)$, est maintenant défini comme une combinaison convexe des champs associés à chaque mode.

Ce qui suit est un peu technique mais va nous permettre de faire correspondre les solutions éventuelles du P_e aux solutions du problème hybride initial. Par des considérations géométriques, on se propose d'établir dans quels cas la commande admissible $(u, d)(\cdot)$ sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$, est uniquement définie par la première condition de maximum (4.9).

Rappelons qu'un hyperplan H de dimension $(n-1)$ est dit supporter un ensemble fermé et convexe $M(\subset \mathbb{R}^n)$ au point $y \in \partial M \cap H$ si M est entièrement situé dans l'un des deux demi-espaces définis par H ⁴. Si un vecteur h est normal à cet hyperplan d'appui H de M au point y alors $h^T y = \sup_{z \in M} h^T z$.

Aussi, pour un instant t fixé et un état $x(t)$ donné, le champ de vecteurs, $f_{P_e}(x, u, d)$, est représenté par l'ensemble de points $\Lambda = co\{f_k(x, U_k) : k \in \underline{K}\}$ ⁵.

³Pour tout x et t , l'ensemble

$$\{[f(x, u, t), L(x, u, t) + \delta] : u \in U(t), \delta \geq 0\}$$

est convexe.

⁴ ∂M désigne la frontière de l'ensemble M

⁵ $co\{M\}$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble M

Cet ensemble est un polyèdre fermé et convexe. La figure 4.2 en est une illustration dans un espace d'état de dimension deux pour un système formé de trois modes.

Si le point $x(t)$ est situé le long d'une trajectoire *extrémale* (i.e. vérifie la condition de maximum du PM) et si $\lambda(t)$ est le vecteur adjoint correspondant alors le champ pour le problème étendu, $f_{P_e}(x, u, d)$, appartient à l'ensemble des points $\partial\Lambda \cap P$ où P est l'hyperplan d'appui de Λ défini par $\lambda(t)$. Plus précisément, la fonction Hamiltonienne $\lambda^T f_{P_e}(x, u, d)$ atteint son maximum pour un point situé sur un sommet de Λ , ou bien sur une face entière Γ de Λ .

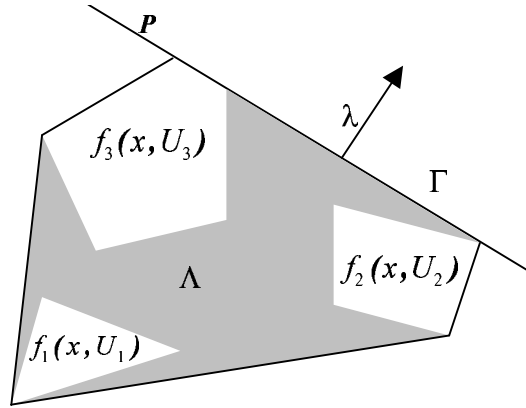


FIG. 4.2: Hyperplan P d'appui sur Λ

Si P contient une face Γ de Λ , alors on peut conclure que la commande (u, d) n'est pas uniquement définie à cet instant. Ceci peut être sans conséquence si la situation se produit pour un nombre fini d'instants (ensemble de mesure nulle).

L'ensemble $\Lambda(t)$ a seulement un nombre fini de faces à un instant donné. Comme $x(\cdot)$ est une fonction continue, $\Lambda(\cdot)$ évolue de manière continue. Par conséquent, le nombre de faces en fonction du temps est une fonction constante par morceaux puisqu'une nouvelle configuration intervient seulement lorsqu'un sommet de $f_k(x(t), U_k)$, pour un certain k , rejoint ou quitte la frontière de $\Lambda(t)$. Le nombre total de faces entre un instant initial et final est donc fini⁶.

Supposons maintenant qu'il existe un ensemble infini d'instants $\gamma_0(\subset [t_0, t_f])$ pour lequel le maximum de H est atteint sur une des faces de $\Lambda(t)$. Comme le nombre total des faces est fini, on peut choisir un sous-ensemble infini γ_1 de γ_0 tel que le maximum de H soit atteint sur une même face $\Gamma(\cdot)$ ($\Gamma(\cdot)$ dépend du temps). Comme les commandes admissibles pour la partie discrète sont supposées constantes par morceaux, il existe un intervalle de temps E qui contient un nombre infini d'éléments de γ_1 et où la commande discrète est constante (i.e. $d(t) \equiv \alpha, \alpha \in Q_c$).

⁶Cette affirmation ne constitue pas une démonstration mais nous l'accepterons comme hypothèse de travail.

Sur cet intervalle E , le système Hamiltonien (4.7a)(4.7b) apparaît comme un système linéaire commandé et un système linéaire ($d(t) \equiv \alpha$) :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (A_k x(t) + B_k u_k(t)) \text{ sur } E \quad (4.33)$$

$$\dot{\lambda}(t) = - \sum_{k=1}^K \alpha_k A_k^T \lambda(t) \text{ sur } E \quad (4.34)$$

Pour toute arête de la face $\Gamma(t)$, il existe des indices $k, \ell (\in \underline{K})$, $j \in \underline{p_k}$, $i \in \underline{q_\ell}$, tels que le vecteur défini par la différence des deux sommets de $\Gamma(t)$:

$$w(t) = f_k(x(t), e_k^j) - f_\ell(x(t), e_\ell^i) \quad (4.35)$$

soit dirigé le long de cette arête de $\Gamma(t)$.

Le vecteur $w(t)$ est orthogonal à $\lambda(t)$ et nous avons :

$$\lambda^T(t)w(t) = 0 \quad (4.36)$$

pour tout $t \in \gamma_1 \cap E$.

Deux types de faces doivent alors être distingués en fonction du fait qu'elles contiennent ou non au moins deux sommets obtenus pour le même mode.

Dans le cas où tous les sommets sont définis pour des modes distincts ($k \neq \ell$), (4.33) prends la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (A_k x(t) + B_k e_k^j) \text{ sur } E \quad (4.37)$$

avec $j \in (1, \dots, p_k)$. Autrement dit, la commande continue $u_k(\cdot)$ doit être constante sur E et égale à e_k^j pour un indice $j \in (1, \dots, p_k)$. Par suite, les fonctions $x(\cdot)$ et $\lambda(\cdot)$ sont analytiques sur E ainsi que le produit scalaire $\lambda^T(t)w(t)$. On en déduit l'identité :

$$\lambda^T(t)w(t) \equiv 0 \text{ sur } E \quad (4.38)$$

En dérivant successivement cette relation par rapport au temps t , on parvient à l'aide des expressions (4.34) et (4.37) à :

$$\frac{d^m(\lambda^T(t)w(t))}{dt^m} = \lambda^T(t)ad_{\Phi(x)}^m w(t) = 0, \forall m \geq 0 \quad (4.39)$$

où $\Phi(x(t)) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (A_k x(t) + B_k e_k^j)$ (voir Annexe D pour la définition de l'opérateur ad).

Or, (4.39) ne peut être vérifiée que si la distribution de champs de vecteurs $\Delta(x) = \text{Gen} \left\{ ad_{\Phi(x)}^m w(t), m = 0, 1, \dots, n^2 - 1 \right\}$ ⁷ est de dimension strictement inférieure à n . Sinon $\lambda(t)$ s'annule de manière identique sur E ce qui contredit l'hypothèse de non trivialité de la solution $\lambda(t)$ de (4.34).

Supposons maintenant qu'il existe au moins deux sommets de la face $\Gamma(t)$ obtenus pour le même mode k . Dans cette situation, on peut considérer l'arête particulière définie par ces deux sommets. Alors dans (4.35), la dépendance de w par rapport au temps t et l'état x disparaît puisque $w = B_k(e_k^j - e_k^i)$. Observons que ce choix particulier nous permet d'éviter la difficulté que l'on rencontre pour dériver $w(t)$ sans hypothèse sur la commande $u(t)$. Comme la variable adjointe $\lambda(t)$ résout un système linéaire à temps invariant, $\lambda(\cdot)$ est une fonction analytique ainsi que le produit $\lambda^T(t)w$. Ainsi, on a sur tout l'intervalle E ,

$$\lambda(t)^T w \equiv 0 \quad (4.40)$$

Comme précédemment en dérivant successivement, on obtient la relation de récurrence :

$$\frac{d^m(\lambda^T(t)w)}{dt^m} = \lambda^T(t)A^m w = 0, \forall m \geq 0 \quad (4.41)$$

avec

$$A = - \sum_{k=1}^K \alpha_k A_k \quad (4.42)$$

Cette relation ne peut être satisfaite que si w appartient à un sous-espace strict de $\mathbb{R}^n (\neq \mathbb{R}^n)$ qui est invariant par l'application A . Sinon $\{w, Aw, \dots, A^{n-1}w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda(t)$ s'annule identiquement sur E ce qui contredit l'hypothèse de non trivialité de $\lambda(t)$.

Nous sommes maintenant en mesure de rejeter définitivement les points où l'unicité de la solution de (4.9) ne peut être garantie (sauf peut être sur un ensemble fini d'instants) avec la condition suivante :

Pour tout x , on considère le polyèdre $\Lambda(x) = \text{co} \{f_k(x, U_k) / k = 1, \dots, K\}$ et ses faces. Pour chacune d'entre-elles, notée $\Gamma(x)$, il existe toujours des indices $k, \ell (\in \underline{K})$, $i \in (1, \dots, p_\ell)$, $j \in (1, \dots, p_k)$, tels que le vecteur $w_{k,\ell}^{j,i}(x) = f_k(x, e_k^j) - f_\ell(x, e_\ell^i)$ soit dirigé le long d'une de ses arêtes et un vecteur constant $\alpha \in Q_c$ tel que le point $\Phi(x, \alpha) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (A_k x + B_k e_k^j)$ appartienne à la face $\Gamma(x)$.

⁷ $\text{Gen} \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est l'espace vectoriel généré par les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Définition 4.1 *Le problème hybride de commande optimale avec les hypothèses (H_1) ⁸ est dit normal si la distribution de champs de vecteurs obtenue pour le problème étendu (P_e)*

$$\Delta_{k,\ell}^{j,i}(x, \alpha) = \text{Gen} \{ \text{ad}_{\Phi(x,\alpha)}^m w_{k,\ell}^{j,i}(x), m = 0, 1, \dots, n^2 - 1 \} \quad (4.43)$$

est de dimension constante n pour tout x , tout $w_{k,\ell}^{j,i}(x)$ et tout champ $\Phi(x, \alpha)$.

Remarque : La condition de normalité traduit le fait qu'il n'existe pas de sous-classes de commandes *extrémales* admissibles pour le P_e qui rendent ce système localement fortement non accessible⁹. Nous renvoyons à la lecture de [Nij90] pour de plus amples détails.

Théorème 4.2 *Si le problème de commande optimale est normal alors toutes les commandes extrémales $(u, d)(\cdot)$ sont bang-bang et constantes par morceaux. De plus, les trajectoires extrémales pour le P_e correspondent aux trajectoires extrémales du problème hybride.*

Preuve :

Si le problème de commande en temps optimal est normal, les relations (4.39) (et (4.41)) ne sont jamais satisfaites pour le P_e et la condition (4.9) définit de manière unique la commande en fonction de $\lambda(t)$ excepté pour un ensemble fini d'instants. Ainsi, la condition (4.9) de maximum est réalisée sur les sommets du polyèdre $\Lambda(t)$ i.e. la commande discrète prend ses valeurs sur un sommet de Q_c , et la commande continue prend ses valeurs sur les sommets du polyèdre U_k associé à la commande discrète. Autrement dit, toutes les commandes *extrémales* sont bang-bang.

Considérons l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ et scindons le en un nombre fini de parties obtenues pour les instants où la condition (4.9) n'est pas définie de manière unique. Alors on peut montrer aisément que la commande $(u(\cdot), d(\cdot))$ est constante sur chacun de ces intervalles, voir ([Pon64], pp.114-115) pour la preuve (la raison principale est que la fonction $P_{k,\ell}^{j,i}(t) = \lambda^T(t) w_{k,\ell}^{j,i}(t)$ est continue sur ces intervalles). On arrive alors à la conclusion que si une commande optimale en temps existe, elle est bang-bang et constante par morceaux.

Corollaire 4.2 : *Si P_e est normal et admet une solution, cette solution est aussi une solution pour le problème hybride.*

⁸cf. Chapitre 2.2.2

⁹voir Annexe D : Éléments de Géométrie Différentielle pour la définition de la notion d'accessibilité

Preuve :

c'est évident puisque la commande optimale est bang bang.

La condition de normalité peut apparaître comme une condition forte puisque des commandes bang-bang sont imposées aux trajectoires *extrémales* du P_e . Mais comme nous le verrons par la suite, l'existence de solution au problème hybride est fortement reliée à la normalité du problème.

Remarques :

- La condition de normalité implique que l'équation (4.15) n'est jamais identiquement nulle pour la classe des commandes admissibles.
- Nous montrerons comment on peut de manière pratique vérifier si la condition de normalité est satisfaite ou non dans les prochaines sections.

4.4 Trajectoires singulières et normalité

La condition de normalité énoncée précédemment caractérise une classe particulière de trajectoires : les trajectoires singulières obtenues pour une commande discrète constante par morceaux.

En effet, considérons en toute généralité un système sur $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.44)$$

où $u(\cdot)$ est une fonction bornée mesurable de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^m$ et f une fonction analytique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.

Posons $x(t, x_0, u)$ la solution de (4.44) à l'instant t pour une commande $u(\cdot)$ telle que $x(0) = x_0$. Considérons alors pour un t et x_0 fixés, l'application F_{t, x_0} qui à tout élément v pris dans un voisinage V de $u(\cdot)$ fait correspondre $x(t, x_0, v)$.

Par définition la commande $u(\cdot)$ et la trajectoire $x(\cdot)$ sur l'intervalle de temps $[0, t]$ sont dites *singulières* si la dérivée de Fréchet¹⁰ de F_{t, x_0} , évaluée au point u , n'est pas de plein rang.

On peut caractériser une trajectoire singulière avec la proposition suivante

Théorème 4.3 ([Bon98]) *Les trois assertions suivantes sont équivalentes*

- (a) $(x(\cdot), u(\cdot))$ est singulière
- (b) le système linéaire $\frac{d\delta x}{dt} = f_x(x, u)\delta x + f_u(x, u)\delta u$ n'est pas commandable

¹⁰F est dérivable au sens de Fréchet en un point u si on peut écrire : $F(u + w) = F(u) + \langle F'(u), w \rangle + o(w)$ avec $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{o(w)}{\|w\|} = 0$. La forme linéaire $F'(u)$ est appelée Fréchet dérivée en u .

(c) $(x(.), u(.))$ est une solution du système Hamiltonien contraint

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad -\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (4.45)$$

où $H = \lambda^T f(x, u)$ et λ est non nul.

Notons que les termes $f_x(x, u)$ et $f_u(x, u)$ définissent les matrices temps variants $A(t) = f_x(x(t), u(t))$ et $B(t) = f_u(x(t), u(t))$.

Dans notre situation et en conservant les mêmes notations, lorsque le maximum est atteint sur un intervalle de temps non nul sur une face $\Gamma(t)$, on peut restreindre le domaine de commande à la sous-variété $V(t) = \{u \in U : f(x, u) \in \Gamma(t)\}$.

Alors, le système ainsi défini est singulier puisque :

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_V = 0 \text{ c'est-à-dire } \lambda(t)^T f_u(x(t), u(t)) \delta u(t) = 0, \forall \delta u(t) \in V(t) \quad (4.46)$$

Remarque : En toute rigueur, il existe un changement de variable $\hat{u} = \varphi(x, u|_V)$ et $\hat{x} = \phi(x)$ avec $\varphi(., u), \phi(.)$ des difféomorphismes C^1 tels que les équations (4.45) soient vérifiées pour

$$H = \lambda^T g(\hat{x}, \hat{u}) \text{ où } g(\hat{x}, \hat{u}) = f(\phi^{-1}(\hat{x}), \varphi^{-1}(\hat{u})) \quad (4.47)$$

Dans la base associée à ce changement de variable, la dernière relation $\frac{\partial H}{\partial \hat{u}} = 0$ conduit à

$$\lambda^T g_{\hat{u}}(\hat{x}, \hat{u}) = \lambda^T f_u \varphi_{\hat{u}}^{-1} = 0 \quad (4.48)$$

La condition de normalité peut apparaître comme une condition restrictive sur la classe des systèmes hybrides. Hélas, elle ne l'est pas assez pour permettre de garantir l'existence d'une solution optimale dans le cas général. Une bonne condition mais extrême consisterait à rejeter toutes possibilités de trajectoires singulières mesurables et non pas seulement constantes par morceaux. La proposition ci-dessus montre qu'il est a priori difficile de vérifier si un système possède ou non des trajectoires singulières. En revanche, la condition de normalité peut être évaluée et conduit à un indicateur permettant d'estimer si le problème de commande hybride a de bonnes chances d'admettre ou non une solution optimale.

4.5 Analyse d'un exemple critique.

Reprenons donc l'exemple critique de commande optimale en temps du chapitre 2.3.3. Le système hybride considéré est formé de deux systèmes linéaires du second ordre en évolution libre :

$$\dot{x}(t) = d(t) A_1 x(t) + (1 - d(t)) A_0 x(t), \quad d(t) \in \{0, 1\} \quad (4.49)$$

avec $A_0 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -1.3 & 1.1 \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & -1.4 \\ 0.9 & -0.7 \end{pmatrix}$.

Les matrices A_0 et A_1 ont toutes les deux des valeurs propres complexes et les mouvements des trajectoires autour de l'origine sont de sens inverse (sens trigonométrique et anti-trigonométrique).

La fonction Hamiltonienne H est donnée par,

$$H(\lambda, x, d) = d(t) \lambda^T(t) (A_1 - A_0) x(t) + A_0 x(t) \quad (4.50)$$

Pour des valeurs données de x et λ , on peut remarquer que H est une fonction affine de la commande d . Le maximum de H est par conséquent atteint pour la loi de commande :

$$d(t) = 0 \text{ si } \lambda^T(t) (A_1 - A_0) x(t) < 0 \quad (4.51a)$$

$$d(t) = 1 \text{ si } \lambda^T(t) (A_1 - A_0) x(t) > 0 \quad (4.51b)$$

Comme nous l'avons suggéré au chapitre 2.3.3, en traçant l'ensemble des trajectoires *extrémales* pour un couple (x_0, x_f) , il semble que ce problème n'admette pas pour tout couple de points (x_0, x_f) de solution optimale en temps malgré l'existence d'au moins un trajet reliant x_0 à x_f (figures 4.3 et 4.4). La preuve de cette affirmation fait l'objet de la suite de l'exposé.

Tout d'abord, nous montrerons que le système ne vérifie pas la condition de normalité puis que la trajectoire optimale pour le P_e existe et est constante par morceaux sans être bang-bang.

4.5.1 Calcul de la condition de normalité

Pour cet exemple, il s'agit de déterminer s'il existe un x et un $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\dim(\Delta_{0,1}(x, \alpha)) < n$ où

$$\Delta_{0,1}(x, \alpha) = \text{Gen} \{ ad_{\alpha A_1 x + (1-\alpha) A_0 x}^m (A_1 - A_0) x, m = 0, 1, \dots \} \quad (4.52)$$

S'il existe un état x et un nombre réel $\alpha \in [0, 1]$ tels que $\dim(\Delta_{0,1}(x, \alpha)) < n$ alors ce sous-espace Δ admet un vecteur orthogonal λ . Par suite, on doit résoudre les équations d'inconnues λ , x et α , suivantes :

$$\langle \lambda, ad_{\alpha A_1 x + (1-\alpha) A_0 x}^m (A_1 - A_0) x \rangle_n = 0, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.53)$$

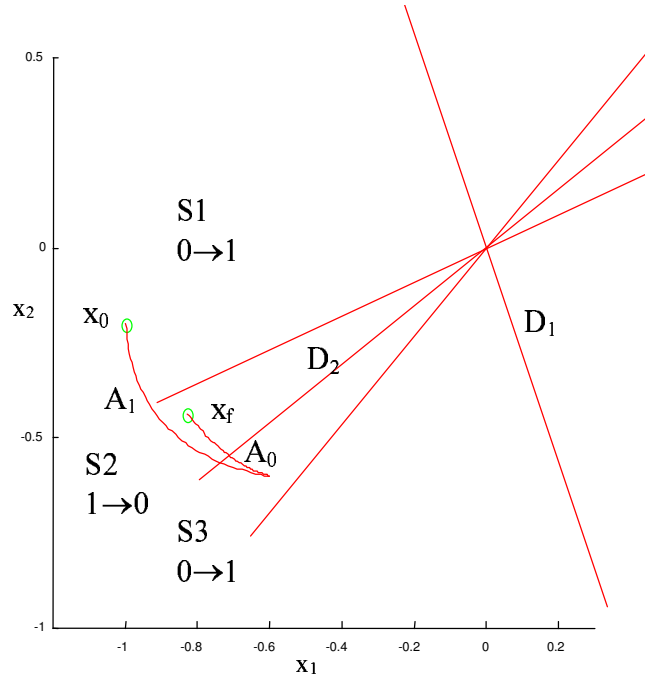


FIG. 4.3: Trajectoire quelconque reliant x_0 à x_f en une commutation

où la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

De manière équivalente, le membre de gauche de (4.53) peut être reformulé par (voir Annexe E et la section 4.2) :

$$\langle \lambda, ad_{\alpha A_1 x + (1-\alpha)A_0 x}^m (A_1 - A_0) x \rangle_n = \left\langle x \otimes \lambda, \tilde{M}_\alpha^m col(A_1 - A_0) \right\rangle_{n^2} \quad (4.54)$$

avec $\tilde{M}_\alpha = M_\alpha^T \otimes I_n - I_n \otimes M_\alpha$ et $M_\alpha = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_0$.

D'où le problème : Trouver λ , x et α tels que :

$$\left\langle x \otimes \lambda, \tilde{M}_\alpha^m col(A_1 - A_0) \right\rangle_{n^2} = 0, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.55)$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire de considérer pour m des valeurs supérieures au degré du polynôme minimal associé à $\tilde{M}_\alpha$. Soit en général, $m = 0, 1, \dots, n(n-1)$. En effet, comme les valeurs propres de $\tilde{M}_\alpha$ sont déterminées à partir des valeurs propres ξ_i , $i = 1, \dots, n$ de M_α en formant les différences $\xi_i - \xi_j$, $i, j = 1, \dots, n$, il existe un zéro de multiplicité au moins égal à n si les valeurs propres ξ_i sont toutes distinctes.

De (4.55), on observe que : *Le système hybride ne vérifie pas la condition de normalité si et seulement si le vecteur $col(A_1 - A_0)$ appartient à un sous-espace stable du faisceaux $\tilde{M}_\alpha$ et si il existe un vecteur orthogonal à ce sous-espace de la forme $x \otimes \lambda$.*

Les solutions de (4.55) sont alors déterminées en résolvant formellement la relation d'appartenance :

$$x \otimes \lambda \in \text{Ker} \begin{bmatrix} \text{col}(A_1 - A_0) & \tilde{M}_\alpha^1 \text{col}(A_1 - A_0) & \cdots & \tilde{M}_\alpha^{n(n-1)} \text{col}(A_1 - A_0) \end{bmatrix}^T \quad (4.56)$$

Application Numérique : (4.56) conduit à :

$$x \otimes \lambda \in \left(\frac{1}{10} \frac{213\alpha-79}{17\alpha-3} \quad 1 \quad -\frac{21\alpha-13}{17\alpha-3} \quad \frac{1}{10} \frac{373\alpha-149}{17\alpha-3} \right)^T \quad (4.57)$$

Comme $x \otimes \lambda = [x_1 \lambda_1, x_1 \lambda_2, x_2 \lambda_1, x_2 \lambda_2]^T$, la résolution du système d'équations (4.57) fournit deux commandes discrètes α_1 et α_2 ,

$$\alpha_1 = \frac{114}{293} - \frac{5}{115149} \sqrt{8108769} \cong 0.2654 \quad (4.58)$$

$$\alpha_2 = \frac{114}{293} + \frac{5}{115149} \sqrt{8108769} \cong 0.5127 \quad (4.59)$$

obtenues pour des x éléments respectivement des droites D_1 et D_2 et définies par,

$$D_1 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = \frac{1}{3440} (1807 - \sqrt{8108769}) x_1\} \quad (4.60)$$

$$D_2 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = \frac{1}{1408} (-1807 + \sqrt{8108769}) x_1\} \quad (4.61)$$

On peut donc conclure que la condition de normalité n'est pas satisfaite pour ce système. De plus, ce calcul montre qu'il n'existe pas de trajectoire singulière pour le système hybride, c'est-à-dire que la prise en considération dans la loi de commande (4.51) du cas où $\lambda^T(t)(A_1 - A_0)x(t) \equiv 0$ avec $d(t) \in \{0, 1\}$ est sans objet.

Par conséquent, pour l'exemple critique pris au chapitre 2.3.3 qui consiste à trouver le temps de parcours optimal pour aller de la position initiale $x_0 = (-1.1, -0.2)$ à la position finale $x_f = (-0.8, -0.4)$, le tracé des trajectoires *extrémales* depuis la position finale x_f prouve qu'il n'existe pas de candidate à l'optimalité puisque aucune de ces trajectoires ne parvient en un temps inférieur à T_1 à relier x_0 à x_f (figures 4.3 et 4.4). Rappelons qu'aucune de ces trajectoires ne passe par x_0 ce qui traduit le fait qu'il n'y a pas de solution optimale (cf. Chap. 2.3.3.).

4.5.2 Trajectoires optimales pour le P_e

Comme toutes les hypothèses relatives au théorème d'existence cité au chapitre 2.2.2. sont vérifiées pour le P_e , il existe une commande mesurable.

Dans le calcul des expressions,

$$\frac{d^m}{dt^m} \langle \lambda, (A_1 - A_0) x \rangle_n = \langle \lambda, ad_{\alpha A_1 x + (1-\alpha) A_0 x}^m (A_1 - A_0) x \rangle_n \quad (4.62)$$

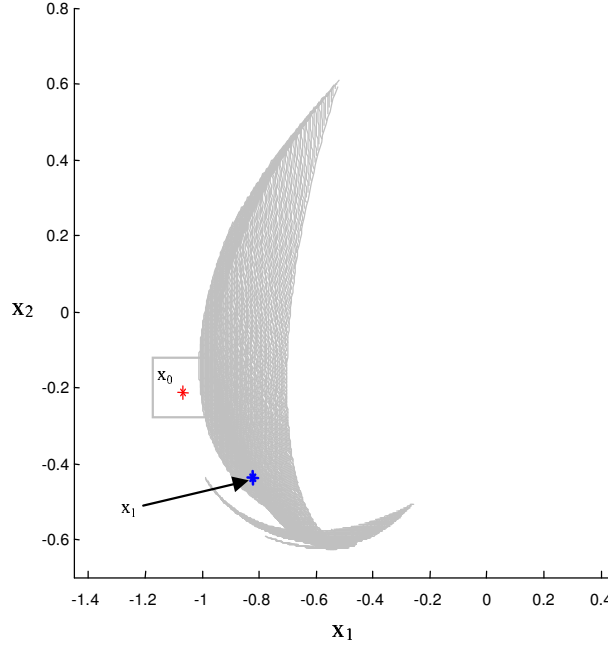


FIG. 4.4: Trajectoires extrémales joignant le point x_1 en un temps inférieur à T_1

on peut observer que la commande discrète α n'intervient pas de manière explicite pour $m \leq 2$.

En effet, on a successivement :

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda, ad_{\alpha A_1 x + (1-\alpha)A_0 x}^0 (A_1 - A_0)x \rangle &= \langle \lambda, (A_1 - A_0)x \rangle \\
 \langle \lambda, ad_{\alpha A_1 x + (1-\alpha)A_0 x}^1 (A_1 - A_0)x \rangle &= \langle \lambda, (A_1 A_0 - A_0 A_1)x \rangle \\
 \langle \lambda, ad_{\alpha A_1 x + (1-\alpha)A_0 x}^2 (A_1 - A_0)x \rangle &= \langle \lambda, [\alpha(A_1 - A_0) + A_0, (A_0 A_1 - A_1 A_0)]x \rangle
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Par conséquent, toutes les trajectoires singulières mesurables doivent vérifier ces trois relations. Or, la valeur $m = 2$ est précisément la valeur limite de m ($m = n(n-1)$) dans le calcul de la distribution de champs $\Delta_{0,1}(x, \alpha)$. On en déduit que les seules commandes mesurables générant des trajectoires singulières sont constantes par morceaux et correspondent aux valeurs α_i trouvées précédemment.

La synthèse de la commande optimale pour P_e et pour le couple de points (x_0, x_f) doit donc faire intervenir au moins une des commandes α_i puisqu'aucune commande bang-bang ne résout le problème.

Observons que sur les droites D_1 et D_2 , lorsque la fonction $P(t) = \langle \lambda, (A_1 - A_0)x \rangle$ est nulle, les valeurs possibles de la commande sont définies par l'ensemble $\{0, \alpha_i, 1\}$, $i = 1, 2$. Les valeurs 0 et 1 provoquent le départ de D_i , $i = 1, 2$.

On détermine aisément par quelques considérations géométriques, celle qui relie x_0 à x_f avec un temps optimal. En effet, on remarque que la droite D_1 joue le rôle d'un ascenseur (éloignement de l'origine) pour les trajectoires l'empruntant tandis que la droite D_2 joue un rôle inverse (figure 4.5). Par conséquent, atteindre la position x_f depuis x_0 ne peut être réalisé que si la trajectoire suit la droite D_2 (figure 4.5).

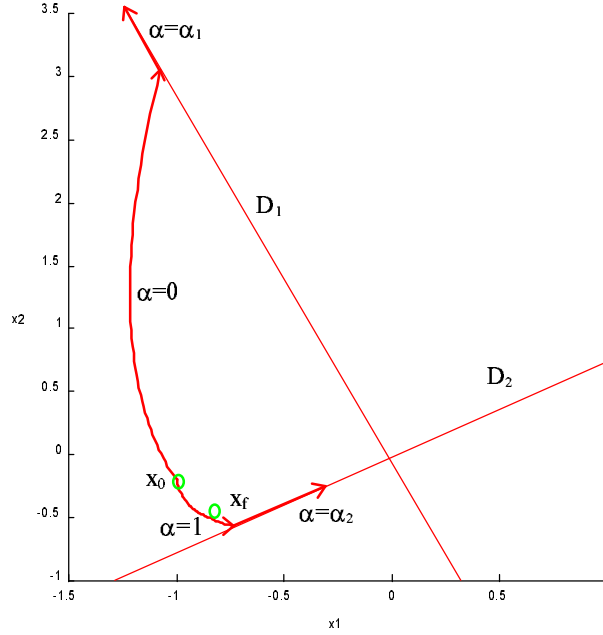


FIG. 4.5: Recherche de la trajectoire singulière

La trajectoire optimale emprunte alors le mode 1 de x_0 vers la droite D_2 , à l'instant où la droite D_2 est atteinte, la commande passe à la valeur α_2 jusqu'à la position sur D_2 qui permet d'atteindre x_f avec le mode 0 (figure 4.7). Toute autre tentative fournit un temps de parcours supérieur.

Une commande hybride sous-optimale peut alors être recherchée par mode glissant le long de la droite D_2 (cf.section.5.7) (figure 4.7).

Remarque : Lorsque le lieu des valeurs propres du faisceau

$M_\alpha = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_0$ est tracé, on observe qu'aux valeurs α_1 et α_2 de α correspondent les valeurs propres réelles respectivement maximum et minimum du faisceau (figure 4.6).

Par ailleurs, le théorème (4.3) implique que les systèmes,

$$\dot{x} = \mathcal{A}_i x + \mathcal{B}_i v \quad (4.64)$$

$$\text{avec } \mathcal{A}_i = \alpha_i A_1 + (1 - \alpha_i) A_0 \quad (4.65)$$

$$\text{et } \mathcal{B}_i = (A_1 - A_0) x_i(t), x_i(t) \in D_i, i = 1, 2 \quad (4.66)$$

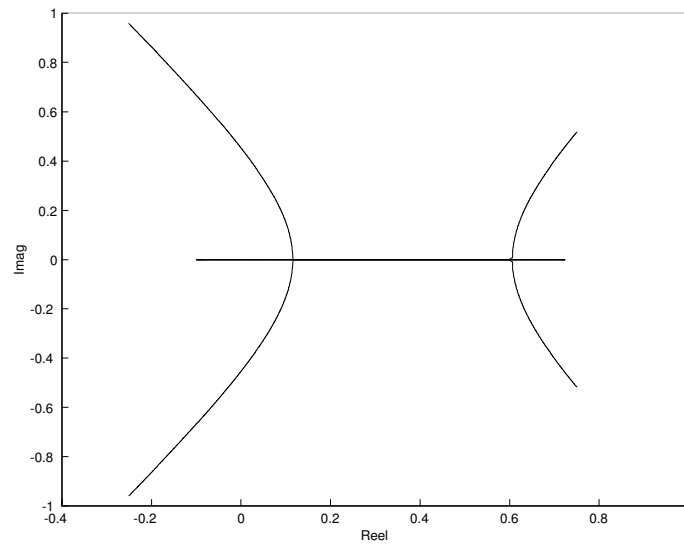


FIG. 4.6: Lieu des valeurs propres du faisceau $M_\alpha = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_0$. Les valeurs extrêmes sur l'axe des réels correspondent aux commandes α_1 et α_2

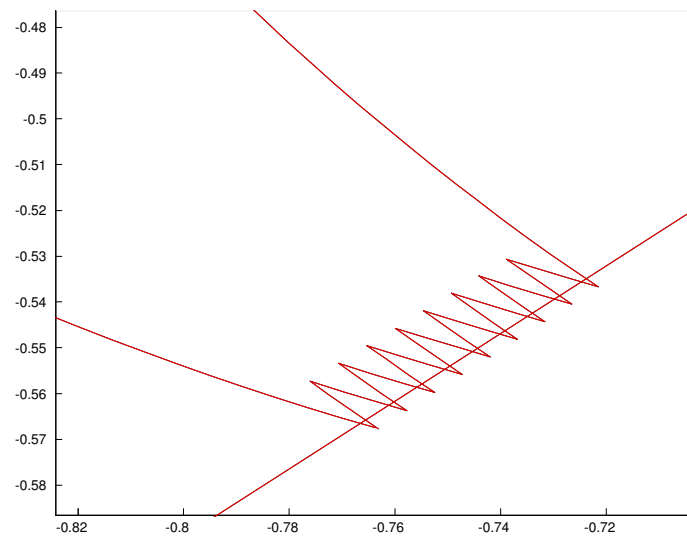


FIG. 4.7: Trajectoire sous-optimale par mode glissant

sont non commandables. Par conséquent, les vecteurs $(A_1 - A_0)x_i(t)$ et $x_i(t)$ appartiennent à des sous-espaces stables de $\mathcal{A}_i$ (pas forcément les mêmes), et en l'occurrence les droites D_i .

Il est intéressant de remarquer que le cas extrême est obtenu pour des matrices A_i qui commutent entre elles. En effet, les sous-espaces stables sont alors communs et il existe une infinité de commande ne vérifiant pas la condition de normalité (l'ordre d'utilisation d'une commande ne joue pas).

Enfin, cet exemple souligne qu'il est préférable de relaxer les contraintes imposées au domaine de commande en étudiant les solutions issues du P_e et d'en déduire une commande optimale ou sous-optimale pour le problème hybride.

L'existence d'une solution optimale pour le problème hybride ne peut être justifiée que si les solutions du P_e pour la classe des commandes mesurables ne sont pas singulières. L'ensemble des candidates *extrémales* et admissibles pour le problème hybride peut être non vide bien que le problème n'admette pas de solution.

La détermination de ces trajectoires singulières est en général un problème difficile [Jak98]. La section 4.6.3 illustre sur un exemple de dimension modeste comment ce calcul peut être effectué.

4.6 Exemple

Considérons un système hybride construit avec deux systèmes commandés du second ordre :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_0 x(t) + B_0 u_0(t), & \text{si } d = [1 \ 0] \\ A_1 x(t) + B_1 u_1(t), & \text{si } d = [0 \ 1] \end{cases} \quad (4.67)$$

où les matrices A_0 et A_1 sont définies par, $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_0 = B_1 = I_2$.

Le domaine de commande continue U est identique pour les deux modes et est formé par le carré $U = U_0 = U_1 = [-1, 1]^2$ (figure 4.8).

On se propose alors de résoudre le problème de descente optimale vers l'origine $O = (0, 0)$ depuis un état initial donné.

4.6.1 Calcul de la condition de normalité

De manière générique, le calcul de la condition de normalité pour des systèmes linéaires peut s'inspirer de ce qui suit :

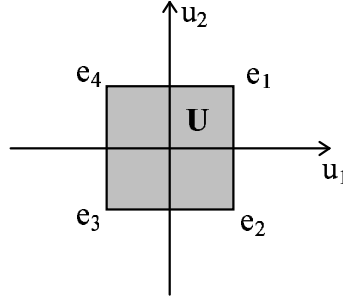


FIG. 4.8: Domaine de commande

Il s'agit de déterminer s'il existe un état x et une commande α tels que l'espace engendré par la distribution $\Delta_{0,1}(x, \alpha)$ soit de dimension inférieure à n , c'est-à-dire :

$$\dim(\Delta_{0,1}(x, \alpha)) < n \quad (4.68)$$

où

$$\Delta_{0,1}(x, \alpha) = \text{Gen} \left\{ ad_{\alpha(A_1x+b_1)+(1-\alpha)(A_0x+b_0)}^m (A_1 - A_0)x + b_1 - b_0, m = 0, 1, \dots \right\} \quad (4.69)$$

On pose alors le changement de variable suivant :

$$\tilde{x} = x + (\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_0)^{-1}(\alpha b_1 + (1 - \alpha)b_0) \quad (4.70)$$

de sorte que, l'écriture de,

$$ad_{\alpha(A_1x+b_1)+(1-\alpha)(A_0x+b_0)}^m (A_1 - A_0)x + b_1 - b_0 \quad (4.71)$$

devient équivalente à

$$ad_{\alpha A_1 \tilde{x} + (1-\alpha)A_0 \tilde{x}}^m (A_1 - A_0) \tilde{x} + c \quad (4.72)$$

avec le terme constant $c = b_1 - b_0 - (A_1 - A_0)(\alpha(A_1 - A_0) + A_0)^{-1}(\alpha(b_1 - b_0) + b_0)$.

A présent, si il existe un état $\tilde{x}$ et une constante $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\dim(\Delta_{0,1}(\tilde{x}, \alpha)) < n$ alors ce sous-espace admet un vecteur orthogonal λ . Si bien que nous avons :

$$\langle \lambda, ad_{\alpha A_1 \tilde{x} + (1-\alpha)A_0 \tilde{x}}^m (A_1 - A_0) \tilde{x} + c \rangle_n = 0, m = 0, 1, \dots \quad (4.73)$$

Le développement de ces relations (voir Annexe E) revient à rechercher λ , $\tilde{x}$ et α tels que, pour $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda, ad_{\alpha A_1 \tilde{x} + (1-\alpha)A_0 \tilde{x}}^m (A_1 - A_0) \tilde{x} + c \rangle_n &= \left\langle \tilde{x} \otimes \lambda, \tilde{M}_\alpha^m \text{col}(A_1 - A_0) \right\rangle_{n^2} \\ &\quad + \langle \lambda, (-M_\alpha)^m c \rangle_n \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

avec $\tilde{M}_\alpha = M_\alpha^T \otimes I_n - I_n \otimes M_\alpha$ et $M_\alpha = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_0$.

Posons alors :

$$\hat{M}_\alpha = \begin{pmatrix} \tilde{M}_\alpha & 0_{n^2 \times n} \\ 0_{n \times n^2} & -M_\alpha \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

et les relations (4.74) deviennent,

$$\begin{aligned} \left\langle \lambda, ad_{\alpha A_1 \tilde{x} + (1-\alpha)A_0 \tilde{x}}^m (A_1 - A_0) \tilde{x} + c \right\rangle_n &= \left\langle \begin{bmatrix} \tilde{x} \otimes p \\ p \end{bmatrix}, \hat{M}_\alpha^m \begin{bmatrix} col(A_1 - A_0) \\ c \end{bmatrix} \right\rangle_{n^2+n} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Comme les champs considérés dans les expressions des crochets de Lie itérés sont linéaires à temps invariant, le nombre d'itérations m nécessaires est fini et est égal au degré du polynôme minimal associé à $\hat{M}_\alpha$. Soit en général, $m = 0, 1, \dots, n^2$.

Ainsi, il suffit de vérifier la relation :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \otimes \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \in Ker \left[\begin{bmatrix} col(A_1 - A_0) \\ c \end{bmatrix} \quad \hat{M}_\alpha \begin{bmatrix} col(A_1 - A_0) \\ c \end{bmatrix} \quad \dots \quad \hat{M}_\alpha^{n^2} \begin{bmatrix} col(A_1 - A_0) \\ c \end{bmatrix} \right]^T \quad (4.77)$$

Application Numérique : Pour tous les choix de couples de sommets constituant une arête de la face Γ , (4.77) conduit à :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \otimes \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \in \left[-\frac{1}{3} \frac{31\alpha-22}{4\alpha-3} \quad -\frac{5\alpha-4}{4\alpha-3} \quad 1 \quad -\frac{1}{3} \frac{40\alpha-31}{4\alpha-3} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (4.78)$$

D'où $\lambda = 0$ ce qui contredit l'hypothèse de non trivialité. Par conséquent le système hybride possède la propriété de normalité.

Comme les conditions d'existence pour le P_e muni de la classe des commandes mesurables sont vérifiées, il existe une commande optimale mesurable pour le P_e . L'existence pour le problème hybride n'est a priori pas garantie puisque le P_e peut très bien avoir une commande optimale mesurable qui ne soit pas bang-bang mais par exemple, continue par morceaux et non constante. En fait, cette commande est un peu plus que mesurable : elle est C^∞ par morceaux. Nous le démontrerons à la section *Existence*.

Pour le problème de descente à l'origine, on montrera qu'il n'existe pas de commande non bang-bang pour le P_e qui puisse résoudre le problème, prouvant ainsi l'existence pour le problème hybride. Mais avant tout, effectuons la synthèse des commandes *extrémales*.

4.6.2 Synthèse de la commande

Dans le cas présent, le système adjoint s'écrit :

$$\dot{\lambda}(t) = \begin{cases} -A_0^T \lambda(t), & \text{si } d = [1 \ 0] \\ -A_1^T \lambda(t), & \text{si } d = [0 \ 1] \end{cases} \quad (4.79)$$

Pour un x donné, si l'ensemble de points formé par $A_k x + B_k U_k, k = 0, 1$ (figure 4.9) est tracé, il apparaît de manière évidente que, si le vecteur λ est situé dans le secteur α , le maximum de H est obtenu pour le sommet $A_1 x + e_1$. Un instant de commutation survient lorsque λ quitte ce secteur angulaire. Dans le cas linéaire, il est facile de déterminer quand cet événement se produit mais ici α évolue avec le temps en raison d'une dépendance vis à vis de la variable x .

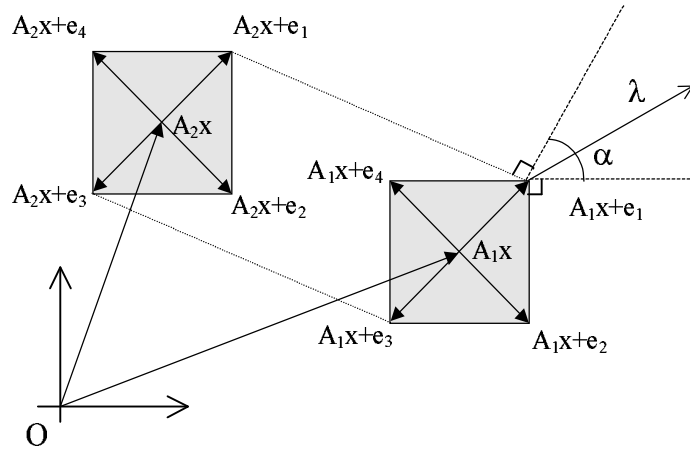


FIG. 4.9:

Cependant le théorème sur les instants de commutation (section 4.2) nous permet de déterminer cet instant. Supposons connues à un instant t les variables $x(t)$ et $\lambda(t)$, alors les expressions analytiques des fonctions $P_{1,\ell}^{1,j}(\cdot)$, pour $j = 1, 2, 4$ et $\ell = 0, 1$ ($j \neq 1$ si $\ell = 1$) sont entièrement déterminées en résolvant les équations différentielles définies par l'équation (4.15). Toutes les racines ((4.15) et (4.25)) et toutes les conditions initiales (4.19) sont connues. Ainsi, le premier instant où l'une d'entre elles s'annule est aisément déterminé par la recherche de leurs zéros. Cet instant correspond à un instant de commutation.

Avec un choix approprié de λ à l'instant final ($\lambda = (\cos(\theta), \sin(\theta))$) et (4.9), (4.10) satisfaites), toutes les trajectoires *extrémales* finissant à l'origine du plan sont construites (figure 4.10) et l'intervalle de temps pendant lequel une commande est effective, est précisément déterminé.

Rappelons que les trajectoires optimales forment un sous-ensemble des trajectoires *extrémales*. Ainsi, si pour un état initial donné, il existe une et une seule

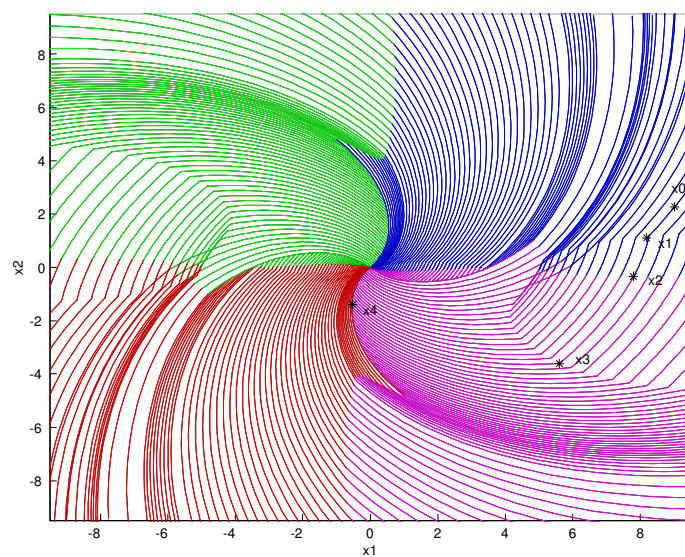


FIG. 4.10: Trajectoires extrémales dans le plan de phase

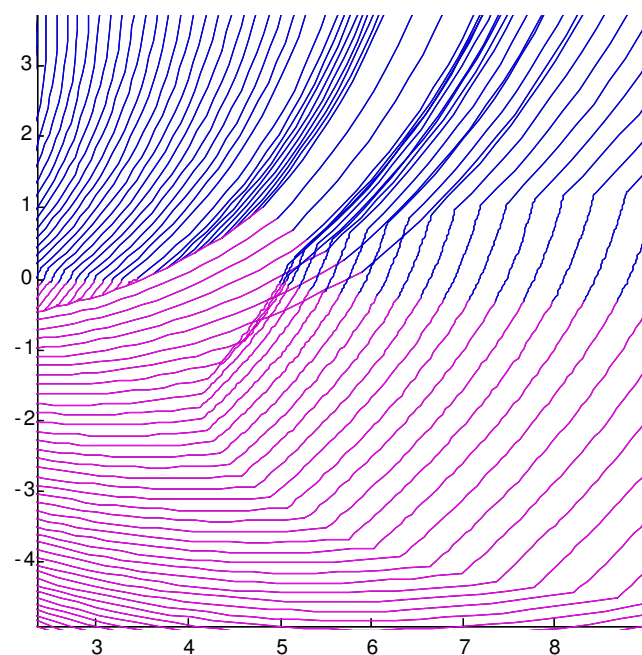


FIG. 4.11: Zoom dans une zone de trajectoires multiples

trajectoire *extrémale* qui résout le problème, et si l'existence d'une solution est démontrée, alors on peut conclure à l'optimalité de cette trajectoire. En revanche, lorsque plusieurs candidates à l'optimalité se présentent, la décision doit être prise en déterminant laquelle est optimale c'est-à-dire, en évaluant le critère.

Dans notre cas, quand on trace l'ensemble de ces trajectoires *extrémales*, on trouve des régions (figure 4.11) où plusieurs trajectoires atteignent le même point ; par exemple $x = (5.5, 0)$. Pour éviter cette difficulté, un problème ouvert est de détecter quand une trajectoire optimale cesse de l'être (Notion de points conjugués [Bon98]).

Sur la figure 4.10, on a représenté l'ensemble des trajectoires *extrémales*. Compte tenu de la remarque précédente, une grande partie de ces trajectoires peuvent être considérées comme optimales (unicité). Par exemple, si on débute du point $x_0 \approx (9.5, 2)$, la commande optimale en temps est obtenue par $d = [1 \ 0]$ et $u = e_3$ jusqu'à la position x_1 où la commande commute vers $d = [0 \ 1]$ et $u = e_3$ et ainsi de suite. Au final la séquence bang-bang est $d = [1 \ 0], [0 \ 1], [0 \ 1], [1 \ 0], [1 \ 0]; u = e_3, e_3, e_4, e_4, e_1$.

4.6.3 Existence

Le théorème d'existence étant vérifié pour le P_e , il existe une commande optimale mesurable (si la classe des commandes admissibles pour le P_e sont les commandes mesurables). Le but de cette partie est de montrer que ces solutions sont en fait bang-bang et continues par morceaux.

D'après la première condition du PM, on sait que cette commande est obtenue sur la frontière du domaine convexe $\Lambda(x) = \text{co} \{f_k(x, U) \mid k = 0, 1\}$ (figure 4.9). Comme la condition de normalité est vérifiée, les seules commandes admissibles pour le P_e et non admissibles pour le problème hybride sont des commandes non constantes par morceaux obtenues sur les faces de $\Lambda(x)$. Comme U est identique pour les deux systèmes, les seules faces de $\Lambda(x)$ pour lesquelles on puisse en trouver sont définies pour des modes différents et des sommets identiques (figure 4.9). Autrement dit elles sont de la forme

$$\Gamma(x) = \{w \mid w = \alpha(A_1 - A_0)x + A_0x + e, \alpha \in [0, 1], e \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\} \quad (4.80)$$

Par conséquent, sur ce type de faces, le P_e est un système affine en la commande et le champ $f_{P_e}(x, \alpha)$ sur l'une de ces faces est de la forme :

$$f_{P_e}(x, \alpha) = f(x) + \alpha g(x)$$

avec $\alpha \in [0, 1]$, $f(x) = A_0x + e$, e fixé dans l'ensemble $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $g(x) = (A_1 - A_0)x$.

Comme la trajectoire est singulière, on a par définition : $\langle \lambda, g \rangle \equiv 0$.

Lorsque le champ de vecteurs est affine en la commande, ce produit est toujours au moins deux fois dérivable. L'expression de la dérivée est obtenue par le calcul successif des crochets de Lie itérés de $f(x) + \alpha g(x)$ sur $g(x)$.

Soit, par les expressions :

$$\langle \lambda, ad_{f_{P_e}}^0(g) \rangle = \langle \lambda, g \rangle \equiv 0 \quad (4.81a)$$

$$\langle \lambda, ad_{f_{P_e}}^1(g) \rangle = \langle \lambda, [f, g] \rangle \equiv 0 \quad (4.81b)$$

$$\langle \lambda, ad_{f_{P_e}}^2(g) \rangle = \langle \lambda, [f, [f, g]] + \alpha [g, [f, g]] \rangle \equiv 0 \quad (4.81c)$$

Deux situations sont alors envisageables :

1. Si $\langle \lambda, [g, [f, g]] \rangle \neq 0$ alors la commande α est définie de manière unique par :

$$\alpha = - \frac{\langle \lambda, [f, [f, g]] \rangle}{\langle \lambda, [g, [f, g]] \rangle} \quad (4.82)$$

De plus, α est analytique et vérifie l'équation différentielle :

$$\dot{\alpha} = - \frac{\langle \lambda, [f, [f, [f, g]]] \rangle + \alpha \langle \lambda, [g, [f, [f, g]]] + [f, [g, [f, g]]] \rangle + \alpha^2 \langle \lambda, [g, [g, [f, g]]] \rangle}{\langle \lambda, [g, [f, g]] \rangle} \quad (4.83)$$

2. Si $\langle \lambda, [g, [f, g]] \rangle \equiv 0$ sur un intervalle de temps non nul alors on doit avoir également $\langle \lambda, [f, [f, g]] \rangle \equiv 0$ et on peut poursuivre les dérivations sur chacune des identités pour obtenir une condition d'ordre supérieure sur α , c'est-à-dire :

$$\langle \lambda, [f, [f, [f, g]]] + \alpha [g, [f, [f, g]]] \rangle = 0 \quad (4.84)$$

$$\text{et } \langle \lambda, [f, [g, [f, g]]] + \alpha [g, [g, [f, g]]] \rangle = 0 \quad (4.85)$$

Remarque : Dans le cas particulier où

$$\langle \lambda, [h_m, [h_{m-1}, [\dots [h_0, g]]]] \rangle = 0, \forall m > 0, h_i = g \text{ ou } f, i = 0, \dots, m \quad (4.86)$$

on retrouve la définition d'un système fortement non-accessible (cf. Annexe D). La commande α est alors indéfinie.

Notons E_1 l'ensemble des (x, λ) pour lesquels il existe au moins un $\alpha \in [0, 1]$ tel que les relations (4.81) soient vérifiées pour au moins un sommet e et $S_1 = \{(x, \lambda) \in E_1 \mid \langle \lambda, [g, [f, g]] \rangle \equiv 0\}$.

Pour notre système et par un calcul formel, on montre que S_1 est réduit à l'ensemble vide. Les seules trajectoires singulières sont donc définies à partir de E_1 et

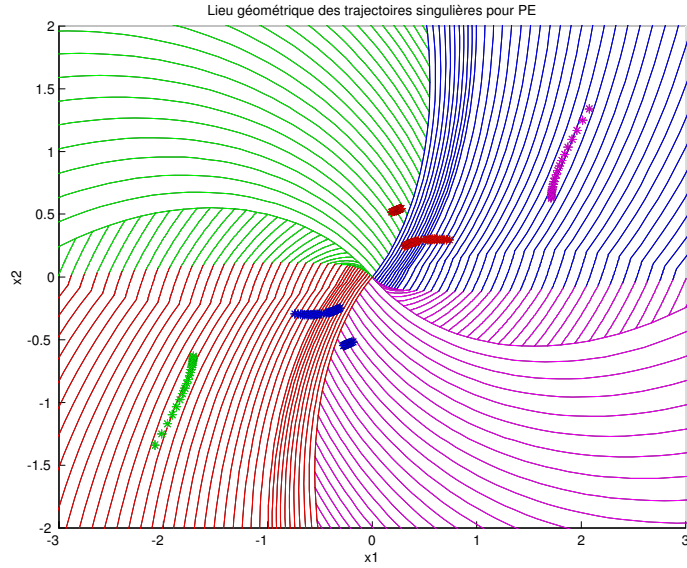


FIG. 4.12: Lieu géométrique des trajectoires singulières

(4.82). Nous avons tracé le lieu géométrique de E_1 dans le plan de phase en surimpression sur les trajectoires *extrémales* trouvées précédemment (figure 4.12). On observe très clairement qu'aucune des trajectoires *extrémales* ne commute dans la région définie par l'ensemble E_1 . Par conséquent, il n'existe aucune trajectoire qui soit singulière sur un intervalle de temps donné (arbitraire) et qui permette de rejoindre l'origine du plan de phase.

Les solutions sont donc bang-bang, le **corollaire 4.2** (section 4.3) s'applique et le système hybride admet une commande optimale.

4.7 sous-optimalité

Comme nous l'avons souligné, la question de l'existence d'une solution ne peut faire l'économie de l'étude des trajectoires singulières sur l'enveloppe convexe du domaine de commande. L'ensemble de ces trajectoires singulières (si elles existent) définissent des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'une solution optimale (mesurable) est singulière sur au moins un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, il est possible d'obtenir une commande sous-optimale pour le système hybride par mode glissant sur la variété différentielle.

Considérons donc un système défini par la combinaison convexe des deux modes d'un système hybride :

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)f_1(x(t), u_1(t)) + (1 - \alpha(t))f_0(x(t), u_0(t)) \quad (4.87)$$

Supposons que la trajectoire optimale $\hat{x}(\cdot)$ obtenue pour une commande $(\hat{\alpha}(\cdot), \hat{u}_0(\cdot), \hat{u}_1(\cdot))$, $t \in [t_1, t_2]$ soit singulière sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$. La

commande optimale $\hat{\alpha}(\cdot)$ est donc supposée mesurable et non bang bang.

Alors, cette trajectoire peut être approchée à l'aide d'une commande bang-bang, $\alpha(t) \in \{0, 1\}$, et constante par morceaux, et les mêmes commandes continues $u_0(\cdot)$ et $u_1(\cdot)$ sur $[t_1, t_2]$.

Posons :

$$\begin{aligned} f^+(x(t), t) &= f_1(x(t), u_1(t)) \\ f^-(x(t), t) &= f_0(x(t), u_0(t)) \\ \hat{f}(x(t), t) &= \hat{\alpha}(t)f^+(x(t), t) + (1 - \hat{\alpha}(t))f^-(x(t), t) \end{aligned}$$

Théorème 4.4 *Sous les hypothèses $(H_0)^{11}$, si il existe des constantes positives ε , C_1 , C_2 telles que :*

- i. *La condition initiale satisfait $\|\hat{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq C_1\varepsilon$.*
- ii. *La moyenne $\left\| \int_{t_1}^t (\mathbb{I}_{\{\alpha=1\}}(\hat{\alpha}(t) - 1) + \mathbb{I}_{\{\alpha=0\}}\hat{\alpha}(t)) (f^+ - f^-)(x(\tau), \tau) d\tau \right\| \leq C_2\varepsilon$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$, où le symbole $\mathbb{I}_{\{\cdot\}}$ définit la fonction indicatrice.*
- iii. *$\hat{f}$ satisfait une condition de Lipschitz i.e.*

$$\exists B > 0, \forall x, \forall y, \forall t, \left\| \hat{f}(x(t), t) - \hat{f}(y(t), t) \right\| \leq B \|x(t) - y(t)\| \quad (4.88)$$

alors il existe une constante positive C telle que $\|\hat{x}(t) - x(t)\| < C\varepsilon$, pour tout $t \in [t_1, t_2]$

Preuve :

Par intégration, les expressions de $\hat{x}(t)$ et $x(t)$ s'expriment par :

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^t (\mathbb{I}_{\{\alpha=1\}}f^+(x(\tau), \tau) + \mathbb{I}_{\{\alpha=0\}}f^-(x(\tau), \tau)) d\tau \quad (4.89)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t_1) + \int_{t_1}^t \hat{f}(\hat{x}(\tau), \tau) d\tau \quad (4.90)$$

La norme de la différence entre (4.90) et (4.89) est alors estimée par :

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t) - x(t)\| &\leq \|\hat{x}(t_1) - x(t_1)\| + \int_{t_1}^t \left\| \hat{f}(\hat{x}(\tau), \tau) - \hat{f}(x(\tau), \tau) \right\| d\tau + \\ &\left\| \int_{t_1}^t \mathbb{I}_{\{\alpha=1\}} \left(\hat{f}(x(\tau), \tau) - f^+(x(\tau), \tau) \right) + \mathbb{I}_{\{\alpha=0\}} \left(\hat{f}(x(\tau), \tau) - f^-(x(\tau), \tau) \right) d\tau \right\| \end{aligned}$$

¹¹cf. Chapitre 2.2.1

Comme $\hat{f} - f^+ = (\hat{\alpha}(\tau) - 1)(f^+ - f^-)$ et $\hat{f} - f^- = \hat{\alpha}(\tau)(f^+ - f^-)$, il vient en utilisant iii. :

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t) - x(t)\| &\leq \|\hat{x}(t_1) - x(t_1)\| + \int_{t_1}^t B(\tau) \|\hat{x}(\tau) - x(\tau)\| d\tau + \\ &\quad \left\| \int_{t_1}^t (\mathbb{I}_{\{\alpha=1\}} (\hat{\alpha}(\tau) - 1) + \mathbb{I}_{\{\alpha=0\}} \hat{\alpha}(\tau)) (f^+(x(\tau), \tau) - f^-(x(\tau), \tau)) d\tau \right\| \end{aligned}$$

Soit au final,

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq C_3 \varepsilon + \int_{t_1}^t B(\tau) \|\hat{x}(\tau) - x(\tau)\| d\tau \quad (4.91)$$

avec $C_3 = C_1 + C_2$

Le lemme de Bellman-Gronwall, nous conduit alors à

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq C \varepsilon \quad (4.92)$$

avec $C = C_3 e^{B(t_2 - t_1)}$.

Notons que la dernière hypothèse peut être affaiblie par : il existe une fonction du temps $B(\cdot)$ positive et intégrable telle que

$$\forall x, \forall y, \left\| \hat{f}(x) - \hat{f}(y) \right\| \leq B(t) \|x - y\| \quad (4.93)$$

Corollaire 4.4 : *Sous les hypothèses précédentes, si le problème de commande optimale admet une solution singulière non bang-bang en α alors il existe une solution sous-optimale pour le problème hybride.*

Preuve :

Il suffit d'augmenter la dimension de x par un terme supplémentaire en définissant le vecteur de dimension $(n + 1)$ $\tilde{x} = [x_0, x^T]^T$ avec $\dot{x}_0 = L(x, u)$. Alors, la moyenne ii. possède le terme supplémentaire

$$\int_{t_1}^t (\mathbb{I}_{\{\alpha=1\}} (\hat{\alpha} - 1)(L^+ - L^-)(x) + \mathbb{I}_{\{\alpha=0\}} \hat{\alpha}(L^+ - L^-)(x)) d\tau \quad (4.94)$$

et la conclusion du théorème implique que le critère diffère d'un nombre aussi petit que l'on veut, du coût associé à la trajectoire singulière.

Remarques :

- La condition ii. stipule que pour tout instant $t \in [t_1, t_2]$, la norme de l'intégrale le long de la trajectoire hybride de la différence entre les deux champs hybride et "singulier", reste contenu dans une boule de centre zéro. On comprendra aisément que ce type de condition puisse s'obtenir par mode glissant ([Utk92]).
- Nous n'avons considéré dans cette partie que des systèmes hybrides définis par deux modes pour conserver à l'exposé sa clarté. Il va de soi que le même type de résultats peut être attendu pour plus de modes discrets.

4.8 Conclusion du chapitre 4

Le problème de la commande optimale en temps pour la classe des systèmes hybrides linéaires a été considéré dans ce chapitre. Les phénomènes hybrides étudiés sont des sauts commandés sur le champ de vecteurs sans contrainte spatiale ni temporelle (c'est-à-dire des sauts dont l'occurrence peut intervenir à tout instant et en tout point de l'espace d'état). Les domaines de commandes continues sont des polyèdres convexes.

Lorsqu'une solution au problème existe, l'application du principe du maximum montre que la commande optimale est constante par morceaux et bang-bang. Les instants de commutation entre sommets des polyèdres et indices de modèles sont alors déterminés par la recherche des zéros de fonctions analytiques. Ces fonctions sont les solutions d'une succession d'équations différentielles linéaires à coefficients constants dont on connaît les racines (et donc la forme analytique) (section 4.2).

L'existence d'une solution est directement liée à l'absence de trajectoires singulières (très souvent principales candidates à l'optimalité) pour le problème étendu obtenu en considérant l'enveloppe convexe du domaine de commande.

Une condition de normalité énoncée à la section 4.3 permet d'écarter une catégorie particulière de trajectoires singulières : les trajectoires singulières constantes par morceaux. Ce n'est pas une condition suffisante pour garantir l'existence d'une solution sauf dans le cas particulier de la dimension deux pour des systèmes en évolution libre (voir l'étude de l'exemple critique). Au mieux, la non vérification de la condition de normalité infirmera l'existence d'une solution. Le calcul relativement aisé de cette condition est alors un avantage.

Mais dans tous les cas, la synthèse de la commande optimale au problème hybride passe par la recherche de toutes les trajectoires singulières et est absolument nécessaire pour garantir l'optimalité de la solution (voir l'exemple de la section 4.6).

Lorsque la solution optimale du problème étendu est une trajectoire singulière, la recherche d'une commande sous-optimale par mode glissant reste une solution de secours pour le système hybride (section 4.7).

Ce travail montre par transposition (égalité entre deux fonctions hamiltoniennes associées à deux modes différents pour des critères quelconques) que le problème des trajectoires singulières se posera pour toutes les classes de systèmes hybrides comprenant des zones de sauts commandés quelle que soit la taille de ces régions et quel que soit le critère envisagé.

Chapitre 5

La Commande par Critère Linéaire Quadratique

L'objet de ce chapitre est d'aborder la commande optimale des systèmes hybrides linéaires par un critère de type linéaire quadratique (**LQ**). Ce type de critère permet d'obtenir pour un système linéaire, une commande en boucle fermée qui assure la stabilité (éventuellement asymptotique) du système tout en modérant la dépense d'énergie nécessaire.

En toute généralité, la classe des systèmes hybrides que nous considérons dans ce chapitre, est définie par des systèmes dynamiques de la forme :

$$\dot{x}(t) = A_k x(t) + B_k u_k(t) \quad x(0) = x_0 \quad (5.1a)$$

$$k(t) = \nu(x(t), k(t^-), d(t), t) \quad k(0) = k_0 \quad (5.1b)$$

où les matrices A_k , B_k sont respectivement de dimension $n \times n$ et $n \times m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $k(t) \in \underline{K} = \{1, 2, \dots, K\}$, $d(t) \in \underline{D} = \{1, 2, \dots, D\}$ avec K et D des entiers naturels.

Pour concilier la dynamique discrète et continue, le temps est défini comme une variable continue et les variables discrètes, $k(\cdot)$ et $d(\cdot)$, sont considérées comme des fonctions constantes par morceaux. Par conséquent, la fonction de transition $\nu : \mathbb{R}^n \times \underline{K} \times \underline{D} \times [t_0, t_f] \rightarrow \underline{K}$ est continue par morceaux à droite. Cette fonction de transition peut être modélisée par un automate (cf. chapitre 1).

Cette classe de système représente l'ensemble des systèmes hybrides linéaires avec sauts autonomes et commandés.

Le problème de commande optimale que l'on se propose de résoudre est alors le suivant :

On considère un critère défini par une forme quadratique, $L_k = x^T Q_k x + u_k^T R_k u_k$ pour chaque mode $k \in \underline{K}$, où

- R_k est une matrice symétrique définie positive de dimension $m \times m$.
- Q_k est une matrice symétrique semi-définie positive de dimension $n \times n$.

On recherche alors la commande et la trajectoire associée pour le système hybride (5.1) qui partant d'une position initiale (x_0, k_0) , permettent de minimiser sur un intervalle de temps $[t_0, t_f]$, le critère intégral :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} L_{k(t)}(x(t), u(t)) dt \quad (5.2)$$

Soit encore :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t) Q_{k(t)} x(t) + u_{k(t)}^T(t) R_{k(t)} u_{k(t)}(t)) dt \quad (5.3)$$

5.1 Loi de commande

Par application directe du PM étendu aux SDH (Chap. 3.3), on est amené à définir pour chaque mode une fonction Hamiltonienne :

$$H_k(\lambda, x, u) = \lambda^T (A_k x + B_k u_k) - \frac{1}{2} (x^T Q_k x + u_k^T R_k u_k) \quad (5.4)$$

et le système Hamiltonien associé comme :

$$\dot{x} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda} = A_k x + B_k u_k \quad (5.5a)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H_k}{\partial x} = -A_k^T \lambda + Q_k x. \quad (5.5b)$$

Remarque : Nous avons délibérément choisi $\lambda_0 = 1$ (cf. remarque Chap. 2.2.1 énoncé du PM). En toute rigueur, le cas $\lambda_0 = 0$ doit être envisagé si le PM n'est pas vérifié avec $\lambda_0 = 1$.

La condition de maximum de chaque Hamiltonien H_k par rapport à la commande continue u_k s'exprime alors par :

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k} = 0 \Leftrightarrow u_k = R_k^{-1} B_k^T \lambda \quad (5.6)$$

Si k_i est le mode optimal sur un intervalle de temps $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ donné, alors

$$H_{k_i}(\lambda, x, u_{k_i}) > H_{k_{i+1}}(\lambda, x, u_{k_{i+1}}), \forall k_{i+1} \in \underline{S}(t), k_{i+1} \neq k_i, \quad (5.7)$$

où $\underline{S}(t) = \nu(x(t), k_i(t^-), \underline{D}, t)$ représente l'ensemble constant sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ des modes accessibles depuis k_i .

Une commutation est possible lorsque (cf. Chap. 3.3) :

- l'ensemble $\underline{S}(t)$ est modifié suite au changement de région de la variable continue x (saut autonome et commandé contraint),
- la condition (5.7) n'est plus satisfaite (saut commandé non contraint).

Supposons que sur l'intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ le mode actif soit effectivement le mode k_i et considérons la fonction de Bellman $J(x(t), k_i, t)$. Les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman (Chap. 3.1) obtenues par dérivation le long de la trajectoire optimale conduisent à :

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} f_{k_i}(x, u_{k_i}) = -L_{k_i}(x, u_{k_i}) \quad (5.8)$$

Soit

$$\frac{\partial J}{\partial t} = H_{k_i}\left(-\frac{\partial J}{\partial x}, x, u_{k_i}\right) \text{ sur } [\tau_i, \tau_{i+1}[\quad (5.9)$$

avec $\lambda = -\frac{\partial J}{\partial x}$ et $f_{k_i}(x, u_{k_i}) = A_{k_i}x + B_{k_i}u_{k_i}$.

Notons alors J_i la fonction de Bellman J sur l'intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Ainsi, si l'on choisit J_i de la forme

$$J_i(x(t), t) = \frac{1}{2} (x^T(t) P_i(t) x(t) + c_i) \quad (5.10)$$

avec $P_i(t)$ une matrice symétrique sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ et c_i une constante, de (5.9) on parvient à une Equation de Riccati Différentielle (ERD) :

$$\dot{P}_i(t) = -P_i(t)A_{k_i} - A_{k_i}^T P_i(t) + P_i(t)B_{k_i}R_{k_i}^{-1}B_{k_i}^T P_i(t) - Q_{k_i} \quad (5.11)$$

où la variable adjointe est identifiée à $\lambda(t) = -P_i(t)x(t)$.

Les conditions aux limites de (5.11) sont alors déterminées par l'examen du type de saut produit aux bornes de l'intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Une commutation de type saut *sans contrainte* intervient lorsqu'il existe un indice k_{i+1} ($k_{i+1} \in \underline{S}(\tau_{i+1}^-)$ et $k_i \in \underline{S}(\tau_{i+1})$) tel que :

$$\begin{aligned} H_{k_{i+1}}(\lambda(\tau_{i+1}^-), x(\tau_{i+1}^-), u_{k_{i+1}}) &= H_{k_i}(\lambda(\tau_{i+1}^-), x(\tau_{i+1}^-), u_{k_i}) \\ H_{k_{i+1}}(\lambda(\tau_{i+1}^+), x(\tau_{i+1}^+), u_{k_{i+1}}) &> H_{k_i}(\lambda(\tau_{i+1}^+), x(\tau_{i+1}^+), u_{k_i}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

A cet instant τ_{i+1} , les conditions de transversalité (cf. Chap. 3.3) sont alors :

$$H_{k_{i+1}}(-P_{i+1}x, x, u_{k_{i+1}}) = H_{k_i}(-P_i x, x, u_{k_i}) \quad (5.13a)$$

$$P_{i+1}x = P_i x. \quad (5.13b)$$

Si le saut est de type *contraint* ($k_{i+1} \notin \underline{S}(\tau_{i+1}^-)$ ou $k_i \notin \underline{S}(\tau_{i+1})$) alors une modification de l'ensemble $\underline{S}(t)$ intervient entraînant une commutation vers un autre mode. Par exemple, le mode k_i n'est plus disponible ou un mode plus intéressant est apparu. Rappelons que ce type de saut est obtenu lorsque la variable d'état appartient à une sous-variété continûment différentiable de l'espace d'état. Les équations de cette sous-variété sont représentées par un ensemble de p contraintes égalités ($p < n$),

$$C_{k_i}(x(\tau_{i+1}), \tau_{i+1}) = 0. \quad (5.14)$$

Les conditions de transversalité suivantes doivent alors être satisfaites puisque $\lambda = -P_i x$:

$$P_{i+1}x = P_i x + \left. \frac{\partial C_{k_i}^T}{\partial x} \right|_{t=\tau} \pi \quad (5.15a)$$

$$H_{k_{i+1}}(-P_{i+1}x, x, u_{k_{i+1}}) = H_{k_i}(-P_i x, x, u_{k_i}) + \left. \frac{\partial C_{k_i}^T}{\partial t} \right|_{t=\tau} \pi \quad (5.15b)$$

avec π un vecteur de dimension p tel que

$$\pi^T \left. \frac{\partial C_{k_i}}{\partial x} \right|_{t=\tau} f_{k_i}(x, u_{k_i}) + \left. \frac{\partial C_{k_i}^T}{\partial t} \right|_{t=\tau} \pi \geq 0. \quad (5.16)$$

Remarque : (5.16) traduit le fait que le vecteur $\left[\pi^T \left. \frac{\partial C_{k_i}}{\partial x} \right|_{t=\tau}, \left. \frac{\partial C_{k_i}^T}{\partial t} \right|_{t=\tau} \pi \right]^T$, normal à la surface C_{k_i} doit être orienté dans le même demi-espace que le vecteur $[f^T, 1]^T$ (le terme 1 compte pour le temps).

De plus et dans les deux cas de sauts, une condition de continuité doit être imposée sur la fonction de Bellman d'où le raccordement :

$$J_{i+1}(x(\tau), \tau) = J_i(x(\tau), \tau) \quad (5.17)$$

$$\text{Soit } x^T P_{i+1} x + c_{i+1} = x^T P_i x + c_i. \quad (5.18)$$

Remarque : Le choix d'une constante c_i dans l'expression de

$$J_i(x(t), t) = \frac{1}{2} (x^T(t)P_i(t)x(t) + c_i)$$

est pleinement justifié par les changements de variables définis au chapitre 2.2.1 permettant d'intégrer un critère terminal au PM. En effet, après un changement de variable, on définit un problème équivalent produisant la même solution mais dont le coût diffère d'une constante (cf. équation 2.13). La continuité de $J_i(x(t), t)$ le long de la trajectoire optimale impose alors le choix de c_i .

Enfin, à l'instant final, comme x est libre, $\lambda(t_f)$ doit être nul, soit $P_{k_f}(t_f) = 0$.

La résolution du problème (5.1) et (5.2) consiste maintenant à déterminer une séquence d'instants de commutation $[t_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots, t_f]$ et une séquence de modes associés $[k_0, k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_f]$ telles que :

- a) Les relations (5.6)(5.7) et (5.11) sont vérifiées pour tous les indices k_i sur les intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1}[$,
- b) les conditions de transversalité (5.13) ou (5.15) et (5.16) suivant la nature du saut et de continuité (5.17) sont satisfaites aux instants τ_i .

Remarques :

- La résolution de ce problème produit une commande en boucle fermée $u = u(x, k)$, $d = d(x, k)$.
- Dans (5.13) la matrice symétrique P_{i+1} doit être choisie de telle façon que $x \in \text{Ker}(P_{i+1} - P_i)$. Par conséquent, P_{i+1} n'est pas uniquement définie à cet instant. Si deux candidates sont exhibées P_{i+1}^2 et P_{i+1}^1 alors pour les instants suivants, on a toujours $x(t) \in \text{Ker}(P_{i+1}^1(t) - P_{i+1}^2(t))$ puisque la solution de (5.5) est unique. Les trajectoires sont alors les mêmes et on peut choisir $P_{i+1} = P_i$ dans (5.13). Un raisonnement du même type est également valable pour (5.15). Toutefois, pour cette dernière situation, d'éventuels degrés de liberté sur π peuvent induire des bifurcations sur la trajectoire.
- Ces résultats ne sont pas modifiés si les systèmes (5.5a) sont à temps variant et/ou si le problème est supposé en temps infini, $t_f = +\infty$.

Ce problème est un problème aux frontières externes et internes : les données sur (x, λ) du système Hamiltonien se partagent aux instants t_0 (x_0 donné) et t_f ($\lambda(t_f) = 0$) mais également aux instants de sauts contraints sur des variétés par les conditions de transversalité.

L'introduction des sauts induit une difficulté qui ne se rencontre pas dans le cas continu. En effet, lorsque le problème est continu, on obtient directement la commande optimale en résolvant l'équation de Riccati en temps rétrograde à partir de

la condition finale $P(t_f) = 0$. La donnée $P(t_0)$ permet alors de générer la trajectoire optimale. Ici, on doit résoudre une succession d'équations de Riccati sur des intervalles de temps a priori inconnus puisque la détermination des instants de saut nécessite la connaissance de l'état x . Dans ces conditions, il est clair que la synthèse de la commande optimale ne peut se faire de manière analytique et doit être recherchée par un algorithme numérique, seul susceptible de nous fournir un résultat. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Un résultat de stabilité découle directement de ce problème de commande. Les deux prochaines sections sont donc consacrées à cette question.

5.2 Stabilité des systèmes hybrides linéaires

La principale difficulté pour établir un résultat de stabilité vient du fait que la dérivée de x subit des discontinuités avec les occurrences des sauts. En effet, les approches basées sur les fonctions de Lyapunov pour les systèmes continus classiques imposent une régularité sur ces fonctions qu'il est impossible de satisfaire en présence de discontinuités sur le champ de vecteurs. Néanmoins, on peut s'affranchir de cette difficulté avec ce qui suit.

Notre démarche s'inspire du lemme suivant [Slo91] :

Lemme 5.1 *Si une fonction scalaire $V(x, t)$ satisfait les conditions :*

- $V(x, t)$ est bornée inférieurement,
 - $\dot{V}(x, t)$ est semi définie négative,
 - $\dot{V}(x, t)$ est uniformément continue,
- alors $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Avec ce lemme, on peut établir la stabilité si la condition $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ implique $x \rightarrow 0$.

Il va de soi que si $V(x, t) = \frac{1}{2} (x^T(t)P_i(t)x(t) + c_i)$, la condition d'uniforme continuité n'est pas satisfaite. En fait, elle ne l'est pas aux instants de commutation mais l'est en dehors. Par conséquent, si l'on peut garantir que les instants de commutation ne deviennent pas arbitrairement proches les uns des autres, alors on a le théorème suivant :

Théorème 5.1 *On suppose que les matrices Q_k sont définies positives et que l'origine de l'espace d'état peut être atteint en un temps fini à l'aide d'une commande admissible. Si une séquence d'instant $[0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots]$ et de modes associés $[k_0, k_1, k_2, \dots, k_i, \dots]$ sont exhibées telles que :*

1. le temps entre deux commutations est borné inférieurement

$$\exists \epsilon > 0, \tau_{i+1} - \tau_i \geq \epsilon \quad (5.19)$$

2. les relations (5.1), (5.2), (5.6), (5.11), (5.13), (5.15) et (5.17) sont satisfaites,

3. la suite des matrices $P_i(t)$ est uniformément bornée, c'est-à-dire,

$$\exists \alpha > 0, \beta > 0, \quad \alpha \|x\| \leq x^T P_i(t) x \leq \beta \|x\| \quad \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \forall i \quad (5.20)$$

alors la trajectoire est asymptotiquement stable.

Preuve :

L'hypothèse de commandabilité implique que le critère pour parvenir à l'origine est borné par une constante B , c'est-à-dire

$$B \geq \sum_{i \geq 0} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} x^T(t) (Q_{k_i} + P_i(t) B_{k_i} R_{k_i}^{-1} B_{k_i}^T P_i(t)) x(t) dt \quad (5.21)$$

Une condition nécessaire pour que (5.21) soit vraie est que

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \text{mes} \left\{ t \in \mathbb{R}, t \geq t_0 : -\dot{J}(x(t), t) > \varepsilon \right\} = 0 \quad (5.22)$$

où $\text{mes}(\cdot)$ désigne la mesure de Lebesgue.

Or, la dérivée de $J(x(t), t)$ le long d'une trajectoire et à un instant $t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[$ est définie par l'expression :

$$-\dot{J}(x(t), t) = x(t)^T (Q_{k_i} + P_i(t) B_{k_i} R_{k_i}^{-1} B_{k_i}^T P_i(t)) x(t) \quad (5.23)$$

Comme

$$\begin{aligned} x(t)^T (Q_{k_i} + P_i(t) B_{k_i} R_{k_i}^{-1} B_{k_i}^T P_i(t)) x(t) &\leq \left(\|Q_{k_i}\| + \|P_i(t)\|^2 \|B_{k_i}\|^2 \|R_{k_i}^{-1}\| \right) \|x(t)\|^2 \\ &\leq \max_k \left(\|Q_k\| + \|P_i(t)\|^2 \|B_k\|^2 \|R_k^{-1}\| \right) \|x(t)\|^2 \end{aligned}$$

et puisque $\|P_i(t)\| < \beta, \forall t, \forall i$ il vient :

$$\begin{aligned} x(t)^T (Q_{k_i} + P_i(t) B_{k_i} R_{k_i}^{-1} B_{k_i}^T P_i(t)) x(t) &\leq C \|x(t)\|^2 \\ \text{où } C &= \max_k (\|Q_k\| + \beta^2 \|B_k\|^2 \|R_k^{-1}\|) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Par conséquent, si $-\dot{J}(x(t), t) > \varepsilon$ alors il existe un nombre positif $\varepsilon_0 > 0$ tel que : $\|x(t)\| > \varepsilon_0, (\varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon/C})$.

Notre condition nécessaire (5.22) implique alors que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \text{mes} \{ t \in \mathbb{R}, t \geq t_0 : \|x(t)\| > \varepsilon \} = 0 \quad (5.25)$$

Montrons par l'absurde que $\|x(t)\| \rightarrow 0$.

Supposons que la limite supérieure soit différente de zéro i.e.

$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| \neq 0$. Comme $x(\cdot)$ est continu, il existe une suite infinie d'instants t_j tels que $\|x(t_j)\| = \varepsilon_0$ pour un certain ε_0 . Par hypothèse, on sait que la durée entre deux instants de commutation est minorée par un réel $\epsilon > 0$. Aussi pour $\eta = \epsilon/3$, au moins un des intervalles suivant est sans commutation : $[t_j, t_j + \eta]$ et $[t_j - \eta, t_j]$, $\forall t_j$. Notons cet intervalle I_j et k le mode utilisé sur I_j .

Le système Hamiltonien sur I_j s'écrit :

$$\dot{X} = M_k X \quad (5.26)$$

avec $X = [x^T, \lambda^T]^T$ et $M_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k R_k^{-1} B_k^T \\ Q_k & -A_k^T \end{pmatrix}$.

On a alors la majoration par l'inégalité de Gronwall :

$$\|X(t) - X_0\| \leq \|M_k\| \|X_0\| t e^{\|M_k\| t} \quad (5.27)$$

$$\leq M \|X_0\| t e^{Mt} \text{ avec } M = \max_k \|M_k\| \quad (5.28)$$

Notons alors par η_1 le plus petit instant tel que $\|x(t) - x(t_j)\| > \varepsilon_0/2$. D'après (5.28), η_1 est borné inférieurement par un nombre strictement positif indépendant du mode utilisé.

Pour $\eta_2 = \min(\eta, \eta_1)$, on obtient pour tout $t \in \hat{I}_j = \{t \in I_j : |t - t_j| < \eta_2\}$,

$$\varepsilon_0/2 \leq \|x(t)\| \leq 3/2 \varepsilon_0 \quad (5.29)$$

Par ailleurs, comme $Q_k > 0$, il existe une constante C_1 telle que

$$x^T (Q_{k_i} + P_i B_{k_i} R_{k_i}^{-1} B_{k_i}^T P_i) x \geq x^T Q_{k_i} x \geq C_1 \|x(t)\|^2. \quad (5.30)$$

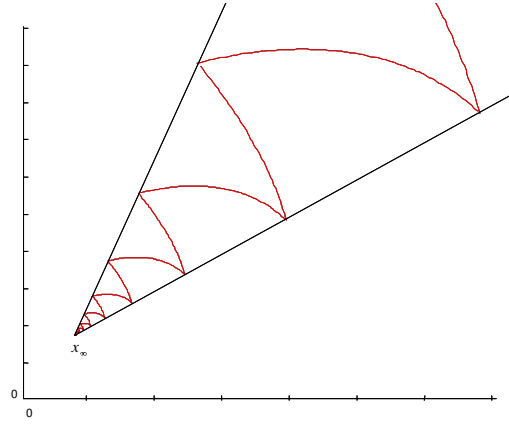
(5.29) et (5.30) induisent la majoration :

$$B \geq \sum_{i \geq 0} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} x^T (Q_{k_i} + P_i B_{k_i} R_{k_i}^{-1} B_{k_i}^T P_i) x dt \geq C_1 \varepsilon_0^2 / 4 \sum_{j \geq 0} \text{mes}(\hat{I}_j) = +\infty. \quad (5.31)$$

La contradiction est établie et $x(t)$ converge vers zéro.

Notons que $J_i(x, t) = \frac{1}{2}(x^T P_i x + c_i)$ n'est pas une fonction de Lyapunov puisque $J_i(0, t) = c_i \neq 0$.

Remarque : La condition $\exists \epsilon > 0, \tau_{i+1} - \tau_i \geq \epsilon$ évite les situation où la trajectoire serait susceptible de se "bloquer" par une séquence infinie de commutation en un temps fini. Un exemple simple est illustré sur la figure 5.1, où des commutations successives mènent à un point de blocage.

FIG. 5.1: Cas de commutations à vitesse infinie en temps fini au point x_∞

5.3 Stabilité des systèmes commutés

Les systèmes linéaires commutés représentent un cas dégénéré du problème de commande précédent puisque seules des commutations autonomes entre des systèmes linéaires en évolution libre sont considérées. Ils peuvent être vus comme un problème de commande optimale avec une commande unique (donc optimale). Nous allons donc appliquer le PM étendu aux SDH (Chap. 3.3), au cas particulier des systèmes commutés.

Posons

$$\dot{x}(t) = A_k(t)x(t), k \in \underline{K} = \{1, \dots, K\} \quad (5.32)$$

avec une règle de commutation définie par des relations de type contrainte égalité (5.14).

Depuis un état initial (x_0, k_0) , $x(t)$ évolue en respectant la règle des commutations (fonction de transition) qui produit une séquence d'instants de commutation $\{0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots\}$ et une séquence de modes $\{k_0, k_1, k_2, \dots, k_i, \dots\}$ avec $k_i \in \underline{K}$.

La stabilité de ces systèmes peut alors être garantie par le théorème suivant :

Théorème 5.2 *Partant d'une position (x_0, k_0) , si il existe deux suites de matrices définies positives $((P_i(t)))$ et $((Q_{k_i}))$ ($k_i \in \underline{K}$) et une suite bornée de nombre réels $((c_i))$ telles que :*

1. *Le temps entre deux commutations est bornée inférieurement,*

$$\exists \epsilon > 0, \tau_{i+1} - \tau_i \geq \epsilon \quad (5.33)$$

2. *La suite $((P_i(t)))$ est uniformément bornée,*

$$\exists \alpha > 0, \beta > 0, \quad \forall i, \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \quad \alpha \leq \|P_i(t)\| \leq \beta, \quad (5.34)$$

3. P_i vérifie :

$$\dot{P}_i = -P_i A_{k_i} - A_{k_i}^T P_i - Q_{k_i} \text{ sur } [\tau_i, \tau_{i+1}[\quad (5.35)$$

4. Aux l'instants de commutation τ_{i+1} ,

$$P_{i+1}x = P_i x + \frac{\partial C_{k_i}^T}{\partial x} \Big|_{t=\tau_{i+1}} \pi_{i+1} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} x^T P_{i+1} A_{k_{i+1}} x + x^T A_{k_{i+1}}^T P_{i+1} x + x^T Q_{k_{i+1}} x &= x^T P_i A_{k_i} x + x^T A_{k_i}^T P_i x \\ &\quad + x^T Q_{k_i} x - 2 \frac{\partial C_{k_i}^T}{\partial t} \Big|_{t=\tau_{i+1}} \pi_{i+1} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$x^T P_{i+1} x + c_{i+1} = x^T P_i x + c_i \quad (5.38)$$

où π_{i+1} est un vecteur de dimension p et c_i une constante,

alors la trajectoire débutant de la position (x_0, k_0) est asymptotiquement stable.

Remarque : La trajectoire est seulement stable si les matrices Q_i sont semi-définies positives.

Preuve :

En l'absence d'une hypothèse de commandabilité, on peut tout de même montrer que la fonction critère $J(x(t), t)$, définie sur chaque intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ par $J(x(t), t) = x^T P_i x + c_i$, est bornée. En effet, à l'instant t_0 ,

$$J(x_0, t_0) = x_0^T P_0 x_0 + c_0 \leq \beta \|x_0\|^2 + c_0 \quad (5.39)$$

et comme il existe un nombre positif γ tel que $|c_k| < \gamma$, on a la majoration :

$$J(x_0, t_0) \leq \beta \|x_0\|^2 + \gamma = C. \quad (5.40)$$

Comme $\dot{J}(x(t), t) = -x^T Q_{k_i} x < 0$, $J(x(t), t)$ est bornée par C . Montrons que x l'est aussi.

On a :

$$\alpha \|x(t)\| \leq x^T(t) P_i(t) x(t) \leq \beta \|x(t)\| \quad (5.41)$$

$$\alpha \|x(t)\| + c_i \leq x^T(t) P_i(t) x(t) + c_i \leq C \quad (5.42)$$

$$\|x(t)\| \leq (C + \gamma) / \alpha \quad (5.43)$$

Comme la suite des k_i prend ses valeurs dans un ensemble fini, il existe une partition de $\mathbb{R}^+ = \cup_{k=1}^K I_k$, $I_k = \cup_j [\tau_j, \tau_{j+1}[$ tel que $k_j = k$. Autrement dit I_k représente l'ensemble des intervalles de temps où le mode k est utilisé. Alors

$\dot{J}(x(t), t) = -x^T(t)Q_k x(t)$ est uniformément continue sur chaque ensemble I_k car $x(\cdot)$ est borné.

Enfin comme il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que $\tau_{j+1} - \tau_j \geq \epsilon$, on obtient $\dot{J}(x(t), t) \rightarrow 0$ sur I_k (si $\forall t_0, [t_0, \infty[\cap I_k \neq \emptyset$). Pour tous les $k \in \underline{K}$ tels que $\forall t_0, [t_0, \infty[\cap I_k \neq \emptyset$, on en déduit que : $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ puisque $Q_k > 0$.

De nombreux travaux concernant la stabilité des systèmes commutés ont été développés ces dernières années. Ces travaux établissent des conditions suffisantes pour la stabilité de ces systèmes à l'aide de plusieurs fonctions de Lyapunov. Le lecteur trouvera une synthèse de ces travaux dans [Hou96], [Hou97], [Lem97], [Bra98], [Bis99].

Considérons un ensemble de fonctions, $\{V_i, i = 1, \dots, K\}$. Les éléments de cet ensemble sont appelés fonctions de Lyapunov candidates si ils sont définis positifs au voisinage de l'origine et ont des dérivées partielles continues. Considérons également un système commuté dont le $k^{ième}$ système est représenté par l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t)) \quad (5.44)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour tout $k = 1, \dots, K$.

On définit alors une séquence de commutation Π pour une condition initiale donnée x_0 , comme une suite (k_i, τ_i) , avec $k_i \in \underline{K}$ et τ_i l'instant où le $k_i^{ième}$ mode devient actif. Enfin, on note $I_k = \cup_j [\tau_j, \tau_{j+1}[$ tel que $k_j = k$ et $E_k = \{\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_n}, \dots\} = \cup_n \{\tau_{j_n}\}$ tel que $k_{j_n} = k$.

Dans [Bra98], il est alors démontré que :

Si les conditions suivantes sont vérifiées pour toutes les séquences Π :

$$\forall k, \dot{V}_k(x(t)) \leq 0, \forall t \in I_k, \quad (5.45)$$

$$\forall k, V_k(\tau_{j_{n+1}}) \leq V_k(\tau_{j_n}) \text{ sur } E_k \quad (5.46)$$

alors l'origine est stable au sens de Lyapunov.

Ce travail généralise au système commuté la théorie de Lyapunov.

Un résultat étendu de stabilité est proposé par [Hou96] :

Si la condition (5.46) est vérifiée pour toutes les séquences Π et si $\tau_{j+1} - \tau_j < \infty$ alors le point d'équilibre $x = 0$ est stable au sens de Lyapunov.

Hou exprime en substance que si les fonctions de Lyapunov candidates V_k évaluées aux instants où le $k^{ième}$ mode devient actif, forment des suites décroissantes alors le système est stable pour toutes les séquences de commutations infinies.

Des travaux plus récents [Pet96] et [Joh99] concernent la construction de fonctions de Lyapunov satisfaisant les conditions de stabilité formulées par Branicky. La

classe des systèmes considérée est la classe des systèmes commutés linéaires à temps invariant :

$$\dot{x}(t) = A_k x(t), k \in \underline{K} = \{1, \dots, K\} \quad (5.47)$$

Le $k^{\text{ième}}$ système est utilisé lorsque l'état du système appartient à un cône caractérisé par une matrice symétrique Q_k c'est-à-dire lorsque $x \in \{x : x^T Q_k x \leq 0\}$. Une commutation du mode k vers un mode j intervient lorsque la condition $x^T Q_{kj} x \leq 0$, avec Q_{kj} une matrice symétrique est vérifiée. En d'autres termes, la surface $C_{kj}(x(t)) = x^T Q_{kj} x = 0$ définit la surface de commutation du mode k vers le mode j .

Un des résultats parmi les plus intéressants, est exprimé dans [Pet96]. Il est montré qu'un ensemble de fonction de Lyapunov de la forme :

$$V_k = x^T P_k x, k \in \underline{K} \quad (5.48)$$

où les matrices P_k sont symétriques définies positives, peut être généré en résolvant le problème d'inégalités matricielles linéaires (**LMI**) suivant :

$$A_k^T P_k + P_k A_k + \alpha_k Q_k \leq 0, (k = 1, \dots, K) \quad (5.49)$$

$$(P_j - P_k) - \alpha_{kj} Q_{kj} \leq 0, (j, k = 1, \dots, K) \quad (5.50)$$

Ce résultat lorsqu'il peut être appliqué, est attractif pour la simplicité de sa mise en oeuvre (résolution d'une LMI). Il n'impose pas de continuité sur les P_i aux instants de saut mais simplement une décroissance. Il produit une fonction de Lyapunov globale pour toutes les trajectoires possibles.

En revanche, il nous semble que notre approche plus systématique (basée sur la commande optimale), offre l'avantage de présenter un résultat moins conservatif (au sens où les résultats obtenus peuvent toucher une plus grande classe de systèmes commutés). D'une part, cette approche s'applique sur des systèmes linéaires à temps variants et n'impose pas une forme particulière aux surfaces de commutations mais surtout elle conduit à la prise en compte de fonctions de Lyapunov à temps variant (plus générales) et n'impose pas de conditions globales entre les différentes fonctions de Lyapunov au contraire de la condition (5.50).

On notera que pour ce cas particulier où les surfaces sont de la forme $C_{kj}(x(t)) = x^T Q_{kj} x = 0$, (5.36) et (5.38) imposent à la suite des c_i d'être identiquement nulle d'où l'égalité aux instants de commutation, $x^T P_{i+1} x = x^T P_i x, \forall i$.

5.4 Vers la recherche d'algorithmes de synthèse de la commande

Comme nous l'avons déjà mentionné, en raison du partage des données aux instants initial (x_0) et final ($\lambda(t_f)$) et de l'indétermination des instants de commutations, la résolution d'un problème de commande optimale nécessite une approche

numérique qui elle même implique une simulation du SDH. La recherche d'algorithmes appropriés et efficaces ne paraît pas évidente et nous pensons que seule une recherche approfondie peut être à même d'apporter une solution. Nous voulons souligner ici quelques difficultés inhérentes aux systèmes hybrides.

Un premier problème est la détection des instants de commutation. C'est en fait un problème lié à la simulation des systèmes hybrides. Comment déterminer de manière précise ces instants avec un pas de simulation qui ne soit pas trop petit ? La prochaine section montre que dans le cas des sauts commandés *non constraints*, on peut déterminer ou calculer les instants de saut sans avoir à simuler le système. En revanche, le cas des sauts *constraints* est beaucoup plus problématique. Il nécessite la mise en place de simulations à pas variable en fonction de la distance aux surfaces de commutation. Sinon, la détection risque de ne pas être faite et conduira à des résultats erronés (figure 5.2). De plus, lorsqu'une commutation est détectée (a posteriori) la recherche de l'instant où intervient ce saut avec une précision donnée, est alors nécessaire.

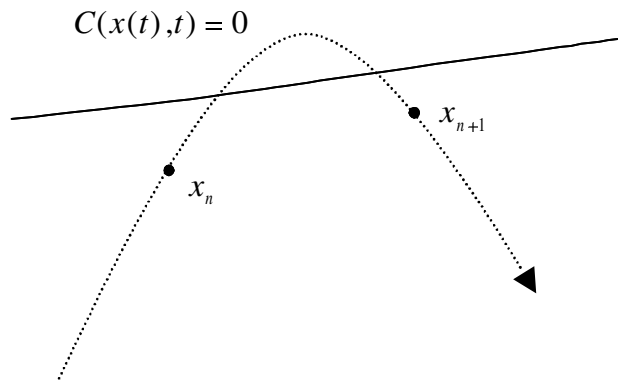


FIG. 5.2: Cas d'un échec de détection d'une commutation

L'usage d'algorithmes dits de descente (gradient, Newton, ...) peut être justifié si le problème est bien posé. Nous dirons qu'un problème est bien posé si une faible perturbation des conditions initiales optimales (x_0, λ_0) implique une faible perturbation de la trajectoire.

Plus précisément, un problème de commande optimale est bien posé si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \varepsilon_0$ tel que si X_0 est perturbé de $\delta X_0 \in B(X_0, \varepsilon_0)$ alors $\forall t \in [t_0, t_f], X(t)$ est perturbé de $\delta X(t) \in B(X(t), \varepsilon)$ où $X(t)$ représente la trajectoire optimale et $X(t) + \delta X(t)$ une trajectoire *extrémale*.

Il est clair que si cette condition n'est pas satisfaite au voisinage de la trajectoire optimale, un algorithme de descente (gradient, Newton, ...) a peu de chance de converger.

Sur la figure 5.3 est représenté une situation où un saut sur une surface ne mène pas à un problème bien posé.

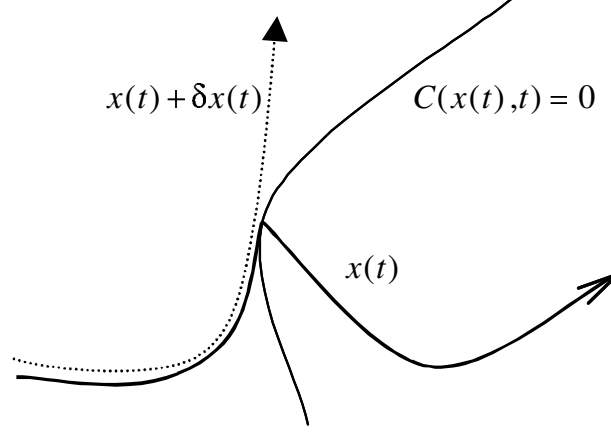


FIG. 5.3: Problème mal posé

Nous allons à présent considérer une classe de systèmes hybrides pour laquelle la synthèse de la commande peut s'envisager aux moyens d'algorithmes de descente. En effet, il est facile de prévoir les instants de sauts commandés et par conséquent de mener de manière efficace une recherche de trajectoire optimale en l'absence de saut autonome.

5.5 Instants de commutation pour des sauts commandés

Les systèmes hybrides que nous considérons dans cette partie, peuvent commuter à tout instant et en tout point d'un modèle à un autre (comme au Chap. 4). On peut donc les représenter par le système d'équations suivant :

$$\dot{x}(t) = A_k x(t) + B_k u_k(t) \quad (5.51)$$

$$k(t) = \nu(x(t), k(t^-), d(t), t) \equiv d(t) \quad (5.52)$$

L'automate est ici réduit à l'entrée discrète $d(t) \in \underline{K} = \{1, \dots, K\}$

Considérons une trajectoire *extrémale* $x(\cdot)$ à un instant donné t qui ne soit pas un instant de commutation, avec la commande en boucle fermée $u_k = -R_k^{-1} B_k^T P_k x$ et le mode actif k .

Posons $\psi_{k,\ell}(t) = H_k(\lambda, x, u_k) - H_\ell(\lambda, x, u_\ell)$ avec $\lambda = -P_k x$.

Une commutation intervient au premier instant où il existe un indice ℓ tel que $\psi_{k,\ell}(t)$ s'annule en changeant de signe. On peut déterminer cet instant de commutation grâce au théorème suivant :

Théorème 5.3 *La fonction $\psi_{k,\ell}(t) = H_k(\lambda, x, u_k) - H_\ell(\lambda, x, u_\ell)$ vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants définie par le polynôme caractéristique S_k où S_k est le polynôme minimal de $M_k \oplus M_k$, avec $\oplus$ le symbole définissant la somme de Kronecker [Gra81] et*

$$M_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k R_k^{-1} B_k^T \\ Q_k & -A_k^T \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

Preuve :

Le système Hamiltonien est défini par les équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & B_k R_k^{-1} B_k^T \\ Q_k & -A_k^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

et la fonction du temps $\psi_{k,\ell}(t)$ peut s'écrire

$$\psi_{k,\ell}(t) = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, D \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \right\rangle \quad (5.55)$$

où

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(Q_\ell - Q_k) & 0 \\ A_k - A_\ell & \frac{1}{2}(B_k R_k^{-1} B_k^T - B_\ell R_\ell^{-1} B_\ell^T) \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

La dérivée de $\psi_{k,\ell}(t)$ conduit à l'expression :

$$\dot{\psi}_{k,\ell}(t) = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, M_k^T D + D M_k \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \right\rangle \quad (5.57)$$

Cette dérivée apparaît comme une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ qui associe à une matrice D , la matrice $M_k^T D + D M_k$.

Si nous formons $\text{col}(D)$ et $\text{col}(M_k^T D + D M_k)$ (cf. Chap. 4.2), (5.57) peut être réécrite sous la forme :

$$\dot{\psi}(t) = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, M_k^T \oplus M_k^T \text{col}(D) \right\rangle \quad (5.58)$$

Les dérivées d'ordre supérieur de $\psi_{k,\ell}(t)$ s'obtiennent alors aisément par les puissances successives de $M_k^T \oplus M_k^T$:

$$\frac{d^n \psi_{k,\ell}}{dt^n}(t) = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, (M^T \oplus M^T)^n \text{col}(D) \right\rangle \quad (5.59)$$

Le théorème de Cayley-Hamilton permet de conclure.

Avec ce théorème et à partir de la donnée de conditions initiales, (x_0, λ_0) , on obtient la suite (x_i, λ_i) des états évalués aux instants de commutation en intégrant le système Hamiltonien.

Pour un problème en temps fini, on peut utiliser l'algorithme de Newton pour déterminer le vecteur λ_0 conduisant à $\lambda(t_f) = 0$. Cet algorithme nécessite le calcul de la matrice Jacobienne $\frac{d\lambda(t_f)}{d\lambda_0}$. Le lecteur est invité à consulter la thèse de [Fli95] où le calcul de cette matrice Jacobienne est très clairement présenté. Cette thèse traite de la détection du régime périodique pour une machine électrique dont le fonctionnement est hybride. La méthode proposée est tout à fait applicable à notre situation.

Pour un problème en temps infini, on peut faire les observations suivantes :

- Ou bien la séquence des modes empruntés est finie. Alors dans ce cas, la dernière équation de Riccati est l'équation algébrique associée au dernier mode. On peut alors parfaitement déterminer le lieu de la dernière commutation en évaluant $\psi_{k,\ell}(x) = 0$ avec $\lambda = P_\ell x$ où P_ℓ est la solution de l'équation algébrique de Riccati, pour tous les k si ℓ désigne le dernier mode, et remonter ensuite la séquence des modes. On pourra noter que si $\psi_{k,\ell}(x) = 0$ alors $\psi_{k,\ell}(\alpha x) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Autrement dit, les surfaces de commutation sont générées par des droites passant par l'origine de l'espace d'état.
- Ou bien la séquence des modes empruntés est infinie. Auquel cas, si la séquence des instants de commutation est périodique, on peut chercher à résoudre le problème sur un cycle par la recherche d'un point fixe ($P_k(t+T) = P_k(t)$). Nous renvoyons à nouveau le lecteur aux travaux de [Fli95].

5.6 Exemple

Afin d'illustrer notre propos, voici un exemple où la synthèse de la commande optimale s'obtient aisément. Nous considérons un problème LQ hybride en temps infini ($t_f = \infty$) défini par deux champs :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^2 d_k(t) (A_k x(t) + B_k u_k(t)) \quad x(0) = x_0. \quad (5.60)$$

où $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_1 = B_2 = I_2$.

Le critère à minimiser possède deux termes fonction du mode utilisé :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \int_0^{+\infty} d_k(t) (x(t)^T Q_k x(t) + u(t)^T R_k u(t)) dt \quad (5.61)$$

où $Q_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

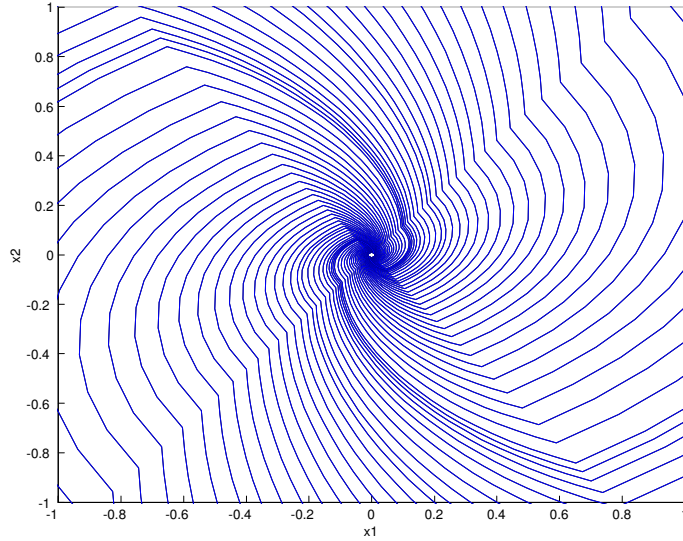


FIG. 5.4: Trajectories optimales dans le plan de phase

Pour une position initiale P_0 et x_0 , on génère la suite des instants de commutation $[0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots]$ et des modes associés $[k_0, k_1, k_2, \dots, k_i, \dots]$.

Il s'avère que cette suite ($P_0 = (\tilde{P} + \check{P})/2$ où $\tilde{P}$ et $\check{P}$ sont les solutions algébriques des équations de Riccati associées à chaque mode) converge très rapidement vers un cycle et ne nécessite pas une recherche numérique plus poussée (algorithme de descente pour la détection d'un point fixe) du régime asymptotique.

Ce cycle se caractérise par :

1. Une commutation du mode 1 vers le mode 2 pour une durée de temps d'environ¹ 1.3694 secondes quand la trajectoire rencontre la droite

$$D_{12} = \{x : x_2 = -1.2784 x_1\}$$

A cet instant de commutation, P_2 vaut :

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.7106 & 0.2412 \\ 0.2412 & 0.5610 \end{pmatrix}$$

2. Une commutation du mode 2 vers le mode 1 pour une durée de temps d'environ 0.5454 secondes quand la trajectoire rencontre la droite

$$D_{21} = \{x : x_2 = 1.1862 x_1\}$$

¹Les valeurs numériques sont données avec une précision en 10^{-4} alors que la précision des calculs est de 10^{-15} .

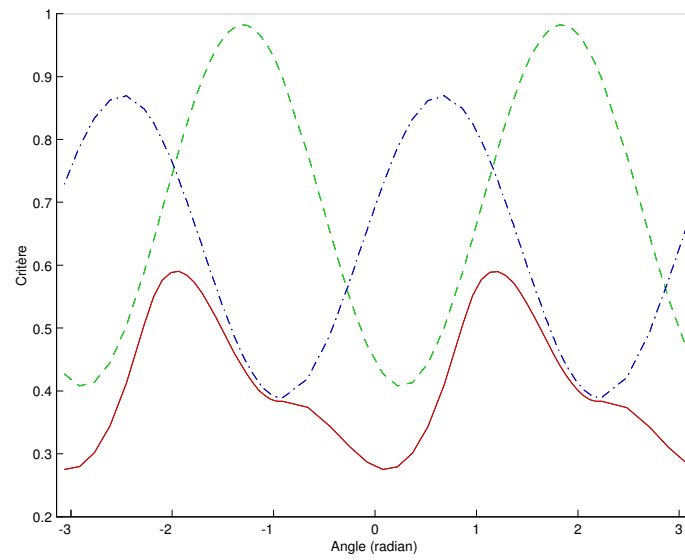


FIG. 5.5: Comparaison du critère optimal associé à chaque mode (traits en pointillés) avec le critère optimal du système hybride (trait plein), pour plusieurs conditions initiales prises sur le cercle unité

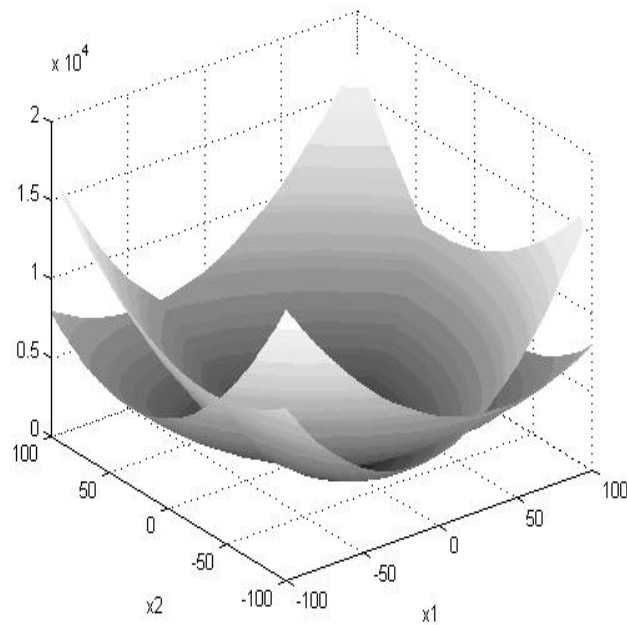


FIG. 5.6: Fonction de Lyapunov associée à chaque mode séparément

A cet instant de commutation, P_1 vaut :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.8865 & 0.05916 \\ 0.05916 & 1.4342 \end{pmatrix}$$

3. $P_k(t)$, $k = 1, 2$ est périodique de période $T = 1.9149$.

Comme cette solution est la seule qui produit parmi les trajectoires *extrémales* une séquence périodique et une solution symétrique par rapport à x , on peut conclure qu'elle est optimale (dans l'hypothèse où il existe une trajectoire optimale). La figure 5.4 représente ces trajectoires dans le plan de phase. Une comparaison du critère optimal pour le SDH, évalué pour plusieurs conditions initiales prises sur le cercle unité, avec le critère optimal (solution algébrique de l'équation de Riccati) associé à chaque mode séparément (figure 5.5) montre bien que notre solution améliore les performances du système en tout point. Les deux fonctions de Lyapunov (associées à la solution algébrique de l'équation de Riccati de chaque sous-système) sont présentées sur la figure 5.6. On peut remarquer qu'une solution qui consisterait à emprunter au point x , le mode pour lequel la fonction Lyapunov associée est la plus petite et à commuter là où elles sont égales, mène à un résultat plus faible (figure 5.5).

5.7 Conclusion du chapitre 5

Ce dernier chapitre consacré à la stabilité et à la commande stabilisante pour des systèmes hybrides linéaires, nous a permis par une application directe d'une version hybride du principe du maximum (Chap. 3.3) de dériver l'équivalent hybride de la commande par critère quadratique des systèmes linéaires. Ce travail établit que la commande optimale en boucle fermée est déterminée par la résolution d'une succession d'équations différentielles de Riccati. Les conditions de transversalité aux instants de discontinuités (sauts) permettent alors de raccorder entre elles ces équations différentielles.

Ce résultat conduit également à l'énoncé de conditions suffisantes pour la stabilité de ces systèmes (section 5.2) par commande stabilisante en dégageant de pseudo-fonctions de Lyapunov. En particulier, les conditions très générales sur la stabilité des systèmes commutés (section 5.3) constituent un apport non négligeable quant à leur analyse.

Mais ce travail souligne également la nécessité de développer une algorithmique pour la résolution de ces problèmes de commande optimale, capable de gérer les nombreux cas de figures plus ou moins pathologiques induits par les discontinuités de modèles (section 5.4) et pose le problème de leur simulation.

La prévision des sauts commandés *non constraints* est rendue possible comme dans le cas de la commande optimale en temps par la recherche des zéros de fonctions

analytiques (complètement déterminées par une équations différentielles). Cette situation procure un avantage pour la synthèse de la commande optimale notamment par la rapidité et la précision avec lesquelles les instants de saut sont déterminés.

Un exemple formé de deux systèmes linéaires est alors entièrement résolu. Les trajectoires optimales obtenues se caractérisent par une périodicité des instants de commutation.

Conclusion générale et perspectives

L'étude des systèmes dynamiques hybrides forme un pôle de recherche émergeant et de taille croissante en science de l'automatique. L'évolution de ces systèmes qui résulte du couplage d'une suite de décisions logiques et purement continues, permet de modéliser des changements de comportement dynamique continu cohérents avec une logique discrète spécifiée par un automate. Leur intérêt pratique n'est plus à démontrer. L'engouement pour ces systèmes s'explique aussi par le défi conceptuel et méthodologique que constitue leur analyse, et par la richesse des comportements dynamiques que l'on espère pouvoir représenter et maîtriser.

La modélisation des SDH, qu'elle reprenne le modèle dynamique de Branicky, qu'elle soit à base d'automates hybrides, ou encore à base d'autres modèles proposés dans la littérature, est aujourd'hui la partie la plus avancée de ce domaine. Mais l'ensemble des problèmes à résoudre que l'on recense, est encore extrêmement vaste et varié. On y trouve les thématiques des systèmes continus et discrets et d'autres, propres aux SDH et résultant du couplage des dynamiques.

Le problème plus spécifique de la commande optimale des SDH est le sujet d'étude abordé par ce mémoire. Les travaux existants basés sur l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et sur la programmation dynamique, soulignent dans leur ensemble les difficultés rencontrées pour résoudre ces équations aux dérivées partielles, en raison des discontinuités de la fonction de Bellman. L'approche que nous avons proposée, basée sur le principe de maximum de Pontryaguine évite ce problème par l'introduction d'un système adjoint.

Dans sa version initiale, le principe du maximum ne s'applique pas à l'ensemble des phénomènes hybrides. L'extension que nous avons proposée étend aux SDH ce principe. Cette version hybride montre alors que des conditions de transversalité doivent être respectées aux instants de saut et établit les conditions nécessaires pour leur occurrence. Compte tenu des hypothèses moyennes faites sur les données du problème, cette version apparaît comme peu restrictive sur la classe des systèmes modélisés. La définition des frontières des régions de saut par des variétés continûment différentiables peut être néanmoins gênante pour certaines applications (points anguleux). Dans ces situations, la notion de dérivée généralisée développée par Clarke [Cla90] doit pouvoir lever cette limitation.

Plusieurs exemples d'ordres faibles nous ont permis d'illustrer la méthode. La solution analytique de l'exemple repris des travaux de Branicky montre que les conditions de transversalité induisent des trajectoires diverses (bifurcation) qu'il est

a priori difficile de prévoir.

La commande optimale en temps pour une classe spéciale de SDH linéaires, met en exergue un certain nombre de problèmes liés à la recherche d'une commande optimale. La question de l'existence d'une solution y occupe une place centrale. La solution apportée passe par l'étude d'un problème plus général obtenu en relaxant les contraintes sur le domaine de commande. L'absence de trajectoire singulière mesurable pour ce problème garantit alors l'existence d'une solution bang bang pour le système hybride. Il est également démontré que les instants de commutation de modèles et/ou de commandes peuvent être déterminés efficacement par la recherche des zéros de fonctions analytiques.

Lorsque l'existence d'une solution est mise en défaut, la recherche d'une solution sous-optimale par mode glissant est une porte de sortie.

L'équivalent de la commande par critère quadratique des systèmes linéaires est formulé pour son homologue hybride. Des conditions suffisantes de stabilité pour les SDH linéaires et les systèmes commutés sont alors déduites des conditions nécessaires du principe du maximum.

Perspectives :

Il reste maintenant un grand nombre de travaux à développer dans le prolongement de ceux présentés dans cette thèse. En voici quelques uns que nous comptons développer dans un proche avenir :

– *Calcul des états atteignables*

Le critère en temps optimal possède un avantage que nous n'avons pas mentionné : il permet de déterminer l'ensemble des points atteignables depuis une position donnée. En effet, pour un système linéaire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point se situe sur la frontière de l'ensemble des points atteignables à l'instant t est qu'une trajectoire extrémale passe par ce point. Pour un système quelconque c'est une condition nécessaire (moyennant certaines hypothèses de convexité). Des résultats sur cet aspect sont en passe d'aboutir.

– *Applications aux processus électromécaniques*

La voie ouverte par l'énoncé d'une version hybride du Principe du Maximum forme, nous l'espérons bien, un domaine d'investigation qui sera suivi par d'autres. L'étude de systèmes plus réalistes (non linéaires, d'ordres plus élevés, avec contraintes, ...), ou d'applications réelles est indispensable pour qualifier la méthode.

La synthèse d'une commande optimale sur une machine électrique est donc la première suite applicative que nous comptons développer.

– *Ajout de contraintes sur l'état*

D'un point de vue théorique, ce type d'applications nécessite de prendre en compte des contraintes sur l'état. Une formulation adaptée aux SDH avec contraintes, est donc envisagée par l'adjonction de multiplicateurs de Lagrange.

– *Algorithmes de recherche de solutions et simulation*

La synthèse de commandes optimales passe par la mise en place d'algorithmes généraux capables de gérer les différents modes de fonctionnements et les diverses situations induites aux instants de saut. Un travail approfondi sur ce sujet est important pour la recherche de solutions numériques. Cette partie pose également le problème de la simulation des systèmes hybrides et de la détection des instants de saut.

– *La robustesse pour les systèmes dynamiques hybrides*

Une façon d'aborder ce problème consiste à utiliser une formulation de type "rejet de perturbation" et de voir si les résultats développés dans cette thèse peuvent être exploités.

Annexes

Annexe A

Comme les matrices A_0 et A_1 ont des valeurs propres complexes conjuguées, la forme analytique de $P(t)$ est donnée par (cf Théorème du Chap. 4.2) :

$$P_0(t) = C_0 + \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ lorsque } \alpha(t) = 0 \quad (6.62)$$

$$P_1(t) = C_1 + \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ lorsque } \alpha(t) = 1 \quad (6.63)$$

Considérons la suite des instants de commutation $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ et supposons que l'on suive le mode 0, à partir de l'instant τ_0 .

On a alors les conditions suivantes aux instants de commutation :

$$P_0(\tau_0) = 0 \quad (6.64a)$$

$$P_0(\tau_1) = P_1(\tau_1) = 0 \quad (6.64b)$$

$$P_1(\tau_2) = P_0(\tau_2) = 0 \quad (6.64c)$$

Et comme $P_0(t) = \lambda(t)(A_1 A_0 - A_0 A_1)x(t) = -P_1(t)$ pour tout $t = \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$, on peut écrire :

$$P'_0(\tau_1) = -P'_1(\tau_1) \quad (6.65a)$$

$$P'_1(\tau_2) = -P'_0(\tau_2) \quad (6.65b)$$

Par ailleurs, comme $P_0(t)$ est une fonction périodique formée de la somme d'une sinusoïde et d'une constante, la valeur de sa dérivée $P'_0(t)$ aux instants où $P_0(t)$ s'annule, garde une valeur absolue constante en alternant de signe.

Par conséquent, on obtient les équations supplémentaires :

$$P'_0(\tau_0) = -P'_0(\tau_1) \quad (6.66a)$$

$$P'_1(\tau_1) = -P'_1(\tau_2) \quad (6.66b)$$

De même, les dérivées d'ordre 2 vérifient :

$$P''_0(\tau_0) = P''_0(\tau_1) \quad (6.67a)$$

$$P''_1(\tau_1) = P''_1(\tau_2) \quad (6.67b)$$

D'où l'on déduit d'après (6.64), (6.65), (6.66) et (6.67),

$$P_0(\tau_0) = P_0(\tau_2) = 0 \quad (6.68)$$

$$P'_0(\tau_0) = P'_0(\tau_2) \quad (6.69)$$

$$P''_0(\tau_0) = P''_0(\tau_2) \quad (6.70)$$

Comme P_0 est solution d'une EDO d'ordre 3, les conditions initiales étant identiques aux instants τ_0 et τ_2 , la solution l'est aussi.

Par conséquent, la fonction $P(t) = \begin{cases} P_0(t) & \text{lorsque } \alpha(t) = 0 \\ P_1(t) & \text{lorsque } \alpha(t) = 1 \end{cases}$ est périodique de période $T = \tau_1 + \tau_2$

Annexe B

Dans l'hypothèse d'un nombre infini de commutations, le but de cette partie est d'établir une condition sur la valeur de la commande u_k aux instants de commutation $\tau_k, k = 0, 1, 2, \dots$ qui garantisse un coût fini.

Une discussion suivant la valeur de $\frac{1}{q}$ est nécessaire.

Cas où $\frac{1}{q} > \Delta$:

On établit le tableau de variation ci-dessous permettant d'étudier les variations de u_{k+1} en fonction de u_k .

La condition initiale sur $x(\tau_k)$ est $-\Delta$.

De l'étude du signe des différentes constantes $A_k, B_k, r_1 A_k, r_2 B_k$ suivant les valeurs de u_k , on déduit le sens de variation de $x(t)$ et $u(t)$, pour $t > \tau_k$ pour certains intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant (signalé par un $\searrow \forall t$ et $\nearrow \forall t$ dans le tableau). Par exemple, si $u_k < \frac{r_2 + q\Delta}{r_1}$ alors $x(t)$ est monotone décroissante. Il subsiste des intervalles où une inversion du sens de variation intervient. Par exemple pour $u_k \in \left[\frac{r_2 + q\Delta}{r_1}, \frac{r_1 + q\Delta}{r_2} \right]$, le signe de $\dot{x}(t)$ peut s'inverser. Notons que cette inversion ne peut se produire qu'une et une seule fois puisque les fonctions étudiées sont formées d'une somme de deux exponentielles.

$u(\tau_k)$	$-\infty$	$\frac{r_2 + q\Delta}{r_1}$	$u_{\min}$	$\frac{r_1 + q\Delta}{r_2}$	u_p	$1 + q\Delta$	$+\infty$
A_k	+	0	-	·	-	·	-
B_k	-	·	-	·	0	+	·
$x(t)$	$\searrow \forall t$	·	$\dot{x}_{k+1} = 0$	·	$\nearrow \forall t$	·	$\nearrow \forall t$
$r_1 A_k$	-	0	+	·	+	·	+
$r_2 B_k$	-	·	-	·	0	+	·
$\dot{u}(t)$	-	·	-	·	-	·	+
u_{k+1}	$\searrow \forall t$	·	$\searrow \forall t$	·	$\searrow \forall t$	$u_{k+1} < u_k$ $u_{k+1} = u_k$ $u_{k+1} > u_k$	$\nearrow \forall t$

Lorsque $\frac{1}{q} > \Delta$, ce tableau montre qu'en deçà d'une valeur limite $u_{\min}$ de u_k , obtenue avec la condition $\dot{x}(\tau_{k+1}) = 0$, la trajectoire ne peut plus atteindre Δ . Une séquence infinie de commutation nécessite donc des valeurs de u_k toujours supérieures à cette limite.

Cette condition ne peut être assurée que si $u_{k+1} \geq u_k$ sinon la suite $u_k, (k = 0, 1, 2, \dots)$ décroît strictement avec une vitesse $\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1} - \tau_k}$ croissante et finit par atteindre cette limite.

Maintenant, si l'on évalue le cas où u_k est choisie telle que $u_{k+1} > u_k$, la suite $u_k, k = 1, 2, \dots$ croît avec une vitesse $\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1} - \tau_k}$ également croissante. Il existe alors un indice k pour lequel $u_k > 1 + q\Delta$. Pour cette valeur limite, on a $\dot{u}(t) > 0, \forall t > \tau_k$.

Il est alors possible de minorer le coût sur les intervalles (τ_k, τ_{k+1}) par :

$$I_k = \frac{(1 + q\Delta)^2 e^{-(\tau_{k+1} - \tau_k)}}{\tau_{k+1} - \tau_k} < \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u^2(t) e^{-t} dt < \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (qx^2(t) + u^2(t)) e^{-t} dt \quad (6.71)$$

Et puisque la suite $(\tau_{k+1} - \tau_k)$ converge de manière évidente vers zéro ($\dot{x} = 1 + u$, $u \nearrow$) la suite des I_k diverge. Par conséquent, ce choix entraîne un coût infini. Il apparaît donc que seul le choix $u_{k+1} = u_k$ est possible.

Cas où $\frac{1}{q} \leq \Delta$.

Dans ce cas, la valeur limite $u_{\min}$ de u_k , est obtenue pour $u_k > \frac{r_1 + q\Delta}{r_2}$ sinon $B_k \leq 0$ et $x(t)$ n'atteint jamais Δ (au mieux $\frac{1}{q}$).

Avec cette modification, le raisonnement tenu précédemment reste valide et l'on obtient les mêmes conclusions.

Annexe C

Soit le système d'équations d'inconnues τ_{k+1} et u_k défini par :

$$u_{k+1} = u_k \quad (6.72a)$$

$$x(\tau_{k+1}) = \Delta \quad (6.72b)$$

Soit encore en remplaçant u_{k+1} et $x(\tau_{k+1})$ par leur expression analytique :

$$A_k e^{r_1(\tau_{k+1}-\tau_k)} + B_k e^{r_2(\tau_{k+1}-\tau_k)} = \Delta - \frac{1}{q} \quad (6.73a)$$

$$r_1 A_k e^{r_1(\tau_{k+1}-\tau_k)} + r_2 B_k e^{r_2(\tau_{k+1}-\tau_k)} = 1 + u_k \quad (6.73b)$$

Posons $X = e^{r_1(\tau_{k+1}-\tau_k)}$, $Y = e^{r_2(\tau_{k+1}-\tau_k)}$. (6.73) se traduit par la recherche de u tel que :

$$A_k X + B_k Y = \Delta - \frac{1}{q} \quad (6.74a)$$

$$r_1 A_k X + r_2 B_k Y = 1 + u_k \quad (6.74b)$$

$$X^{r_2} = Y^{r_1} \quad (6.74c)$$

$$X > 0 \quad (6.74d)$$

$$Y > 0 \quad (6.74e)$$

Une résolution de (6.74a)(6.74b) conduit aux expressions :

$$X = \frac{A_k + 2r_2 \Delta}{A_k} \quad (6.75a)$$

$$Y = \frac{B_k - 2r_1 \Delta}{B_k} \quad (6.75b)$$

En traçant, X et $Y^{\frac{r_1}{r_2}}$ en fonction de u_k , la solution du système (6.74a)(6.74b) et (6.74c) est obtenue à l'intersection de ces deux courbes. Or pour une valeur de q supérieure $\frac{2+\sqrt{4+\Delta^2}}{\Delta^2}$ (correspondant à la valeur de q pour laquelle $A_k = B_k - 2r_1 \Delta$ est nulle) ce point d'intersection devient négatif et est en contradiction avec la condition (6.74d). Cette limite correspond à la solution $\tau_{k+1} \rightarrow +\infty$ et $u_k \rightarrow \frac{r_1+q\Delta}{r_2}$ pour le système (6.72).

Annexe D :Eléments de géométrie différentielle

Algèbre de Lie et Crochet de Lie

Définition 6.1 Un espace vectoriel V (sur $\mathbb{R}$) est une algèbre de Lie si en plus de la structure linéaire il existe une opération bilinéaire de $V \times V \rightarrow V$, notée $[,]$ satisfaisant :

- $[\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w] = \alpha_1 [v_1, w] + \alpha_2 [v_2, w], \forall v_1, v_2, w \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (*bilinéarité*)
- $[v, w] = -[w, v], \quad \forall v, w \in V$ (*anti – symétrie*)
- $[v, [w, z]] + [w, [z, v]] + [z, [v, w]] = 0, \quad \forall v, w, z \in V$ (*identité de Jacobi*)

Définition 6.2 Une sous algèbre d'une algèbre de Lie est un espace linéaire $V' \subset V$ tel que $[v', w'] \in V'$ pour tout $v', w' \in V'$.

Soit V^∞ l'espace vectoriel formé des champs de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 6.1 V^∞ est une algèbre de Lie, munie de l'opérateur différentiel noté $[,]$ et appelé **crochets de Lie**, défini par :

$$[f(x), g(x)] = \frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x) g(x)$$

pour tout $f, g \in V^\infty$.

Définition 6.3 On appelle également **crochet de Lie itéré d'ordre k d'un champ g par un champ f** , l'opérateur différentiel d'ordre k noté $ad_f^k g$ et défini par la relation de récurrence :

$$ad_f^k g(x) = [f(x), ad_f^{k-1} g(x)]$$

de terme initial

$$ad_f^0 g(x) = g(x)$$

Commandabilité : La notion d'accessibilité

Considérons le système non linéaire affine en la commande,

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x) u_j$$

où les champs de vecteurs $f, g_1, g_2, \dots, g_m \in V^\infty$

Les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. La classe des commandes admissibles est l'ensemble des commandes constantes par morceaux continues à droite.
2. L'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\left\{ f + \sum_{j=1}^m g_j u_j \mid (u_1, u_2, \dots, u_m) \in U \right\}$ contient les champs $f, g_1, g_2, \dots, g_m$

Pour un point x_0 donné, on s'intéresse à l'ensemble des points x que l'on peut atteindre depuis x_0 en un temps fini avec l'ensemble des commandes admissibles. C'est le problème général de la commandabilité

Définition 6.1 L'algèbre d'accessibilité (forte) Ψ est la plus petite sous algèbre de V^∞ qui contient $g_1, g_2, \dots, g_m$ et qui satisfasse $[f, X] \in \Psi$ pour tout $X \in \Psi$.

Proposition 6.2 Tout élément de Ψ est une combinaison linéaire de crochets de Lie de la forme $[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, g_j] \dots]]$, $j \in \underline{m}, k = 0, 1, \dots$ où les $X_i, i = 1, \dots, k$ sont pris dans l'ensemble $\{f, g_1, g_2, \dots, g_m\}$.

Définition 6.2 $K^V(T, x_0)$ est l'ensemble des états x atteignables à l'instant $T > 0$ depuis x_0 tels que les trajectoires correspondantes restent dans un voisinage V de x_0 pour $t < T$.

On note alors

$$K_T^V(x_0) = \bigcup_{\tau \leq T} K^V(\tau, x_0)$$

Définition 6.4 Le système est dit localement fortement accessible depuis x_0 si pour tout voisinage V de x_0 l'ensemble $K_T^V(x_0)$ contient un ensemble ouvert non vide pour tout $T > 0$ suffisamment petit.

On définit la distribution $\Delta(\cdot)$ de vecteur de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\Delta(x) = \text{Gen} \{X(x) : X \text{ champ de vecteurs} \in \Psi\}$$

Théorème 6.4 Si $\dim \Delta(x) = n$ pour tout x alors le système est localement (fortement) accessible.

– **Remarque :** Pour un système linéaire, on retrouve la condition de rang de Kalman :

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n \quad (6.76)$$

Annexe E : Produit et Somme de Kronecker

Le produit de Kronecker de deux matrices A et B de dimension respective $m \times n$ et $r \times s$ est défini par la matrice de dimension $mr \times ns$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{pmatrix}$$

Le produit est distributif et associatif :

$$\begin{aligned} A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C \\ A \otimes (B \otimes C) &= (A \otimes B) \otimes C \end{aligned}$$

Posons $C = A \otimes B$.

Les valeurs et vecteurs propres de C sont respectivement obtenus en multipliant les valeurs propres de A et B entre elles et en effectuant les produits de Kronecker des vecteurs propres associés :

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \lambda_a \lambda_b \\ v_c &= v_a \otimes v_b \end{aligned}$$

avec λ_a, λ_b deux valeurs propres de A et B et v_a, v_b les vecteurs propres associés.

La somme de Kronecker est définie par :

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B$$

avec $\dim A = n \times n, \dim B = m \times m, \dim(A \oplus B) = nm \times nm$.

Les valeurs et vecteurs propres de C sont respectivement obtenus en effectuant la somme des valeurs propres de A et B entre elles et les produits de Kronecker des vecteurs propres associés :

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \lambda_a + \lambda_b \\ v_c &= v_a \otimes v_b \end{aligned}$$

avec λ_a, λ_b deux valeurs propres de A et B et v_a, v_b les vecteurs propres associés.

Références bibliographiques

- [Aka99] M. Akar, U. Ozguner, Decentralized sliding mode control design for hybrid systems, proc. American Control Conf., pp. 525-529, 1999.
- [All98] H. Alla, R. David, Continuous and Hybrid Petri Nets, *Journal of Circuits, Systems and Computers*, vol 8(1), 1998.
- [Alu94] R. Alur, D. Dill, A theory of timed automata, *Theoretical Computer Science*, 126, pp. 183-235, 1994.
- [Alu95] R. Alur, C. Coucoubetis, N. Halbwachs, T.A. Henzinger, P.H. Ho, X. Nicolin, A. Olivero, J. Sifakis, S. Yovine, The algorithmic analysis of hybrid systems, *Theoretical Computer Science*, 138, pp. 3-34, 1995.
- [Ant93] P. J. Antsaklis, J. A. Stiver, M. D. Lemmon, Hybrid system modeling and autonomous control systems, proc. *Lecture Notes in Computer Science* 736, pp. 366-392, Springer Verlag, 1993.
- [Asa99] E. Asarin, O. Maler, As soon as possible : Time optimal control for timed automata, proc. *Lecture Notes in Computer Science* 1569, pp. 19-31, Springer Verlag, 1999.
- [Aub80] J. F. Aubry, G. Pfitscher, A.El Lhefnawy, J.P. Louis, Commande directe par microprocesseur d'un moteur à courant continu alimenté par un pont de thyristors, Congrès CONUMEL, Lyon, avril 1980.
- [Aub87] J. F. Aubry, *Conception des systèmes de commande numérique des convertisseurs électromécaniques*, Thèse de Doctorat d'Etat INPL, Nancy, Mai 1987.
- [Aub91] J. F. Aubry, C. Zanne, Intégration de la sureté de fonctionnement dans la conception des systèmes de commande des processus électromécaniques, *revue APII*, pp. 297-324, -0296-1598/1991/04.
- [Aub+91] J. F. Aubry, C. Zanne, A method of conception of fault tolerant control system for electric drives, 4th workshop MEDC 91, Marseille, 1-2 juillet 1991.
- [Aut99] A Special Issue on Hybrid Systems, *Automatica*, 35(3), 1999.
- [Bac92] A. Back, J. Guckenheimer, M. Myers, A dynamical simulation facility for hybrid systems, proc. *Lecture Notes in Computer Science* 736, Springer Verlag, pp. 255-267, 1993.

- [Bem99] A. Bemporad, M. Morari, Verification of hybrid systems via mathematical programming, proc. *Lecture Notes in Computer Science* 1569, Springer Verlag, pp. 31-45, 1999.
- [Bem99+] A. Bemporad, M. Morari, Control of systems integrating logic, dynamics and constraints, *Automatica*, 35(3), pp. 407-428, 1999.
- [Ben84] A. Bensoussan, J.L. Lions, *Impulse Control and Quasi-Variational Equalities*, Gauthier Villars, Paris 84.
- [Ben90] A. Benveniste, P. Le Guernic, Hybrid Dynamical Systems : Theory and the SIGNAL Language, *IEEE Trans. on Aut. Cont.* 35(5), pp. 535-546, 1990.
- [Ber1696] J. Bernoulli, "*Problema novum ad cujus solutorem mathematici invitantur*", Acta Eruditantur, Leipzig, juin 1696
- [Ber74] L. D. Berkovitz, *Optimal Control Theory*, Springer Verlag, 1974.
- [Blo97] V.D.Blondel, J.N.Tsitsiklis, Complexity of elementary hybrid systems, proc. European Control Conf. 97.
- [Blo99] V.D.Blondel, J.N.Tsitsiklis, Complexity of stability and controllability of elementary hybrid systems, *Automatica* 35(3), pp. 479-489, 1999.
- [Bis99] B. E. Bishop, Lyapunov Function Normalization for Controlled Switching of Hybrid Systems, proc. of American Control Conference 1999, pp. 2461-2465, 1999.
- [Bon98] B. Bonnard, Singular Trajectories, Feedback Equivalence and the Time Optimal Control Problem, B. Jakubczyk, W. Respondek, *Geometry of feedback and optimal control*, Marcel DEKKER, 1998.
- [Bog61] N. N. Bogoliubov, Y. A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, N.Y. Gordon and Breach, 1961.
- [Bra94] M.S. Branicky, Stability of Switched and Hybrid Systems, proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 3498-3503, 1994.
- [Bra94+] M.S. Branicky, V. S. Borkar, S.K. Mitter, A Unified Framework for Hybrid Control, proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 4228-4234, 1994.
- [Bra95] M. S. Branicky, *Studies in Hybrid Systems*, Ph.D. dissertation, Dept. Elec. Eng. and Computer Sci., Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, June 1995.
- [Bra95+] M.S. Branicky and S.K. Mitter, Algorithms for Optimal Hybrid Control, proc. of the 34rd IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 2661-2666, New Orleans, LA- Dec. 95.
- [Bra98] M.S. Branicky, Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems, *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 43(4), pp. 475-482, 1998.

- [Bra98+] M. S. Branicky, V. S. Borkar, S. K. Mitter, A Unified Framework for Hybrid Control : Model and Optimal Control Theory, *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, vol(43)(1), 1998.
- [Bro93] R. Brockett, Hybrid Models for motion control systems, H.L. Trentelman, J.C. Willems, eds, *Essays in Control*, pp29-53, Birkhauser, Boston, 1993.
- [Bro94] R. Brockett, Language Driven Hybrid Systems, proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 4210-4214, 1994.
- [Bry69] A. E. Bryson, Y.C. Ho, *Applied Optimal Control*, Gin and Co, 1969.
- [Cas97] C. G. Cassandras, D. L. Pepyne, Optimal control of a class of hybrid systems, proc. of the 36th IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 133-138, 1997.
- [Ceb99] B. Cébron, M. Sechilariu, J. Burger, Optimal control of hybrid dynamical systems with hystérésis, proc. European Control Conference, sept.1999.
- [Chu62] A. Church, Logic, Arithmetic and automata, proc. of the International Congress of Mathematicians, pp. 23-35, 1962.
- [Cla90] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, SIAM, 1990.
- [Coh95] G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat, *Algebraic System Analysis of Timed Petri Nets*, J. Gunawardena, editor, Idempotency, Publications of the Newton Institute, Cambridge University Press, 1995.
- [Cor98] H. Cormerais, J. Buisson, Toward a unified modeling of the continuous part of hybrid dynamical systems, ADPM'98, pp. 241-248, 1998.
- [Dav97] R. David, Modelling of Hybrid Systems Using Continuous and Hybrid Petri Nets, Petri Nets and Performance Models, PNPM97, pp. 47-58, Saint Malo(F), 1997.
- [Des94] A. Deshpande, *Control of hybrid systems*, Ph. D. dissertation, Dept. Electrical Engineering and Computer Sciences, Univ. California, Berkeley, 1994.
- [Del95] B. Délémontey, *Contribution à la commande des entraînements asynchrones de forte puissance : Application au problème de traction*, Thèse de Doctorat, INPL Nancy, 1995.
- [Dra94] C. Draws, A. Olivero, S. Yovine, Verifying ET-LOTOS programs with Kronos, proc. 7th IFIP International Conference of Formal Description Techniques, FORTE'94, pp. 227-242, oct. 94.
- [Fli95] D. Flieller, *Etude de systèmes électrotechniques non linéaires échantillonnés : Application à la modélisation et à la commande de machine à réluctance variable à double saillance*, thèse de doctorat de l'université de Paris 6, 1995.

- [Gho92] M. K. Ghost, A. Arapostathis, S. I. Marcus, Optimal Control of hybrid system with pathwise average cost, 31st IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 1061-1066, 1992.
- [Gol89] A. Gollu, P.P. Varaiya, Hybrid dynamical Systems, proc. of the 28rd IEEE Conf. on Decision and Control , Tampa, 1989.
- [Gra81] A. Graham, *Kronecker products and matrix calculus : with application*, Ellis Harwood Limited, Great Britain, 1981.
- [Gue86] M. Y. Guessous, *Commande numérique de machine électrique : exemple de conception méthodologique*, Thèse INPL Nancy 1986.
- [Has99] A. Hassibi, S. P. Boyd, A class of Lyapunov Functionals for analyzing Dynamical systems, proc. of American Control Conf., pp. 2455-2460, 1999.
- [Hed99] S. Hedlund, A. Rantzer Optimal Control of Hybris Systems, to appears in IEEE Conf. on Decision and Control 99.
- [Hen95] T. Henzinger, P.H. Ho, H.W. Toi, A user guide to HYTECH, proc. *Lecture Notes in Computer Science* 1019, pp. 41-71, Springer Verlag, 1995.
- [Hen95+] T. Henzinger, P. Kopke, A. Puri, P. Varaiya, What is decidable about hybrid automata, 27th Annual Symposium on the theory of computing, STOC'95, pp. 373-382, ACM Press, 1995.
- [Hen95] T. Henzinger, Hybrid automata with finite bisimulation, proc. 22nd ICALP : automata, Languages and Programming, proc. *Lecture Notes in Computer Science* 944, pp. 324-335, Springer Verlag, 1995.
- [Hey97] M. Heymann, F. Lin, G. Meyer, Control synthesis for a class of hybrid systems subject to configuration based safety constraints in *Hybrid and Real Time Systems*, proc. *Lecture Notes in Computer Science* 1201, pp. 376-391, Springer Verlag, 1997.
- [Hoh97] S. Hohmann, C. Zanne, A switching strategy for an inductive machine modeled as a hybrid system, Conférence Internationale : IAR, Duisburg, Allemagne, 20-21 Novembre 1997
- [Hoh98] S. Hohmann, C. Zanne, Simulation tools for an inductive machine modeled as a hybrid system, 3ième Conférence Internationale ADPM'98, Reims, 19-20 mars 1998.
- [Hou96] L. Hou, A. N. Michel, H. Ye, Stability Analysis of switched Systems, proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 1208-1212, 1996.
- [Hou97] L. Hou, A. N. Michel, Stability Analysis of a general class of hybrid dynamical systems, proc. American Control Conference, pp. 2805-2809, 1997.
- [HS93] R. L. Grossman, A. Nerode, A. P. Ravn and H. Rischel, Eds., *Hybrid Systems*, vol 736 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 1993.

- [HS95] P. Antsaklis, W. Kohn, A. Nerode, S. Sastry, Eds., *Hybrid systems II*, vol 999 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 1995.
- [HS96] R. Alur, T. Henzinger, E. Sontag, Eds., *Hybrid systems III-Verification and Control*, vol 1066 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 1996.
- [HS97] P. Antsaklis, W. Kohn, A. Nerode, S. Sastry, Eds. *Hybrid systems IV*, vol 1201 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 1997.
- [HS98] P. Antsaklis, W. Kohn, M. Lemmon, A. Nerode, S. Sastry, Eds. *Hybrid systems V*, vol 1273 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 1998.
- [HSCC98] T. Henzinger, S. Sastry, Hybrid Systems : *Computation and Control*, HSCC'98 proc. *Lecture Notes in Computer Science* 1386, 1998.
- [HSCC99] F. W. Vaandrager, J. H. van Suhuppen, Hybrid Systems : *Computation and Control*, HSCC'99 proc. *Lecture Notes in Computer Science* 1569, 1999.
- [Hu99] B. Hu, X. Xu, A.N. Michel, P.J. Antsaklis, Robust Stabilizing Control Laws for a Class of Second-order Switching Systems, proc. American Control Conf., pp. 2960-2964, 1999.
- [Ibr93] F. Ibrahim, *Vers un outil de simulation d'un processus dynamique hybride et de sa commande*, thèse de Doctorat de l'INPL Nancy, Septembre 1993.
- [Iqb97] N. Iqbal, *Invariance sous contraintes et commande sous-optimale de grands procédés implicites par l'approche système dynamique hybride*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, décembre 1997.
- [Iun76] C. Iung - JP. Louis A digital simulation for some processes fed by AC-DC converters, proc. 8th AICA Congress, Delf 1976, Simulation of Systems, North Holland Public. Company, pp. 805-813, 1976.
- [Iun77] C. Iung - JP. Louis Le système PYTHIE, Rapport R C P 448, 1977.
- [Iun78] C. Iung, R. Le Doeuff, J. P. Louis, J. P. Thomesse, Une modélisation des convertisseurs à thyristors adaptée à la simulation numérique, CRAS Parist. 286, série B. pp. 321-324, juin 1978.
- [Jak98] B. Jakubczyk, W. Respondek, *Geometry of feedback and optimal control*, Marcel DEKKER, 1998.
- [JES98] *Automation of mixed Processes Hybrid Dynamical Systems*, ADPM98, editor Janan Zaytoon, *European Journal of Automation* vol 32(9-10), décembre 1998.
- [Joh99] M. Johansson, A. Rantzer, Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems, to appear in *IEEE Trans. on Aut. Cont.*

- [Joh+99] K. H. Johansson, J. Lygeros, S. Sastry, M. Egerstedt, Simulation of zeno hybrid automata (I), à paraître dans IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix, 1999.
- [Laf99] G. Lafferiere, G. Pappas, S. Yovine, A new class of decidable hybrid systems, proc. *Lecture Notes in Computer Science* 1569, pp. 137-150, Springer Verlag, 1999.
- [Lem93] M. Lemmon, J.A. Stiver, P.J. Antsaklis, Event identification and intelligent hybrid control, proc. *Lecture Notes in Computer Science* 736 *Hybrid Systems*, pp. 268-296, 1993.
- [Lem95] M. Lemmon and C. Bett. Hybrid Control System Design using Robust Linear Control Agents, proc. of the 34rd IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 2688-2693, New Orleans, LA- Dec. 95.
- [Lem97] M. D. Lemmon, P. J. Antsaklis Timed Automata and Robust Control : Can We Now Control Complex Dynamical Systems ?, 36IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 108-113, 1997.
- [Len96] B. Lennartson, M. Titus, B. Egardt and S. Pettersson, Hybrid Systems in Process Control, *IEEE Control System*, pp. 45-56. 1996.
- [Lev87] A. Levis, S. Marcus, W. Perkins, P. Kokotovic, M. Athans, R. Brockett, A. Willsky, Challenge to control, a collective view, *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 32(12), pp. 274-285, 1987.
- [Lew86] F. Lewis, *Optimal Control*, Wiley N.Y., 1986.
- [Lio82] P.L. Lions, *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*. London : Pittman, 1982
- [Lou81] J.P. Louis, *Modélisation d'une classe de systèmes de commande comprenant des convertisseurs statiques en commutation naturelle*, Thèse de Doctorat, INPL Nancy, 1981.
- [Lu93] J. Lu, L. Liao, A. Nerode and J.H. Taylor. Optimal Control of Systems with Continuous and Discrete States, proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control , pp2292-2297, San Antonio, Texas- Dec. 92.
- [Lyg96] J. Lygeros, D.N. Godbole, S. Sastry, Multiagent hybrid systems design using game theory and optimal control, proc. IEEE Conf. on Decision and Control 96, pp. 1190-1195, 1996.
- [Lyg98] J. Lygeros, C. Tomlin, S. Sastry, On Controller Synthesis for Nonlinear Hybrid Systems, proc. IEEE Conf. on Decision and Control 98, pp. 2101-2106, 1998.
- [Lyg99] J. Lygeros, C. Tomlin, S. Sastry, Controllers for Reachability Specifications for Hybrid Systems, *Automatica*, 35(3), pp. 349-370, 1999.
- [Mac82] J. Macki, A. Strauss, *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer-Verlag, 1982.

- [Mal95] O. Maler, A. Pnueli, J. Sifakis, On the synthesis of discrete controllers for timed systems, *Theoretical aspects of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science* 900, pp. 229-242, Springer Verlag, 1995.
- [Mall95] P. Malleus, C. Zanne, J. F. Aubry, C. Iung, Adigital control of the current mean value in a thyristor converter, International Symp. on Electr. Power Engineering, Stockholm, 18-22 juin 1995.
- [Mall+95] P. Malleus, C. Zanne, J. F. Aubry, Design of the control of a cycloconverter with improved transient performances, International Symp. on Electr. Power Engineering, Stockholm, 18-22 juin 1995.
- [Man95] Z. Manna, A. Pnueli, *Temporal verification of reactive systems : Safety*, N.Y. Springer Verlag, 1995.
- [Mic99] A. N. Michel, Bo Hu, Towards a stability theory of general hybrid dynamical systems, *Automatica*, 35(3), pp. 371-385, 1999.
- [Mig99] D. Mignone, A. Bemporad, M. Morari A framework for control, fault detection, state estimation and verification of hybrid systems, proc. IEEE American Control Conf., pp. 134-138, 1999.
- [Men85] B. R. Menezes, *Contribution à la commande numérique d'une machine synchrone autopilotée*, Thèse INPL, Nancy septembre 1985.
- [MSR'99] J.J. Lesage coordinateur, *Modélisation des systèmes réactifs*, edition Hermes, Sciences publications, Paris, 1999.
- [Ner93] A. Nerode, W. Kohn, Multiple agent hybrid control architecture, proc. *Lecture Notes in Computer Science 736 Hybrid Systems*, pp. 297-316, Springer Verlag, 1993.
- [Ner93+] A. Nerode, W. Kohn, Models for hybrid systems : automata, topology, controllability, observability, proc. *Lecture Notes in Computer Science 736 Hybrid Systems*, pp. 317-356, Springer Verlag, 1993.
- [Ngu97] M. Nguyen, V. Gaitsgory, Asymptotic Optimization for a Class of Nonlinear Stochastic Hybrid Systems on Infinite Time Horizon, American Control Conference, 1997.
- [Nic93] X. Nicollin, A. Olivero, J. Sifakis, S. Yovine, An approach to the description and analysis of hybrid systems, *Hybrid Systems Lecture Notes in Computer Science 736*, pp. 209-229, Springer Verlag, 1993.
- [Nij90] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [Pel91] P. Peleties, R. De Carlo, Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-Like functions, proc. American Control Conference, 1679-1684, 1991.
- [Pet96] S. Pettersson, B. Lennartson, Stability and Robustness for Hybrid Systems, 35th IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 1202-1207, 1996.

- [Pon64] L.S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Pergamon, 1964.
- [Pra99] B.Pradin-Chezalviel, L.A.Kunzle, F.Girault, R.Valette, Evaluation temporelle de scénario de réseau de Petri incluant du parallélisme, *Modélisation des Systèmes Réactifs*, Hermes, 1999, ISBN N°2-7462-0017-1, pp. 131-140 , 1999.
- [Pur95] A. Puri, *Theory of Hybrid Systems and Discrete Events Systems*, Ph. D. thesis, Dept. of Electrical Engineering, University of California, Berkeley, 1995.
- [Ram89] P. J. G. Ramadge, W.M. Wohham The control of discrete event systems, *proc. IEEE 77(1)*, pp. 81-98, 1989.
- [Ran2000] Piecewise Linear Quadratic Optimal Control, to appear in *IEEE Transactions on Automatic Control*, April 2000
- [Rie97] P. Riedinger, C. Zanne, F. Kratz et C. Iung, Modélisation et Commande des Systèmes Dynamiques Hybrides : Deux exemples, Colloques AGIS'97, pp 93-99, Angers, décembre 1997.
- [Rie98] P. Riedinger, C. Zanne, Modélisation Formelle des Systèmes Dynamiques Hybrides : Application à la Machine Synchrone Autopilotée, *proc. ADPM'98*, pp 398-402, Reims, 19-20 mars 1998.
- [Rie99(1)] P. Riedinger, F. Kratz, C. Iung, C. Zanne, Linear Quadratic Optimization for Hybrid Systems, *proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 3059-3064, Phoenix, Déc. 7-10, 1999.
- [Rie99(2)] P. Riedinger, C. Zanne, F. Kratz, Time Optimal Control of Hybrid Systems, *proc. American Control Conference*, pp. 2466-2470, San Diego, June 2-4, 1999.
- [Rie99(3)] P. Riedinger, F. Kratz, C. Zanne, Commmande Optimale des Systèmes Dynamiques Hybrides : Synthèse d'une loi de commande, *proc. 3rd International Conference Industrial Automation*, pp. 16.9-16.12, Montreal 7-9 juin 1999.
- [Rie99(4)] P. Riedinger, C. Iung, Optimal Control for Hybrid Systems : An Hysteresis Example, *proc.IEEE System, Man and Cybernetics*, pp. I.188-I.193, Tokyo, oct. 1999.
- [Rie99(5)] P. Riedinger, F. Kratz, C. Iung, C. Zanne, Hybrid Systems and Optimal Control, soumis à *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, en février 1999.
- [Rob95] F. Robert, *Les Systèmes Dynamiques Discrets*, Mathématiques et Applications 19, Springer Verlag, 1995.
- [San85] J. A. Sanders, F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, N.Y. Springer 1985.
- [Saw94] J.P. Sawicki, C. Zanne, J. F. Aubry, Sûreté d'un processus hybride par reconfiguration de sa commande. Exemple d'un convertisseur statique en défaut onduleur, Congrès ADPM Bruxelles Nov. 1994.

- [Saw95] J.P. Sawicki, J. F. Aubry, C. Zanne, Recovery of an inverting mode commutation failure in the case of a three phase DC thyristor bridge, 6th European Conf. on Power Electronics and Applications, Seville 19-21 sept. 1995.
- [Sho99] R.N. Shorten, K.S. Narendra, Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order time invariant systems, proc. American Control Conf., pp. 1410-1414, 1999.
- [Slo91] J.J. E. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall International Editions, 1991.
- [Son90] E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory*, Texts in Applied Mathematics 6, Springer Verlag, 1990.
- [Sus94] H.J. Sussmann, A strong version of the Maximum Principle under weak hypothesis, proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 1950-1956, 1994.
- [Sus97] H.J. Sussmann, J.C. Willems, 300 Years of Optimal Control : From The Brachystochrone to the Maximum Principle, *IEEE Control Systems*, juin 1997.
- [Sti94] J.A. Stiver, P.J. Antsaklis, and M.D. Lemmon, Digital Control from a Hybrid Perspective, proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 4241-4246, 1994.
- [Sti95] J.A. Stiver, P.J. Antsaklis, and M.D. Lemmon, Hybrid Control System Design Based on Naturel Invariants, proc. of the 34rd IEEE Conf. on Decision and Control , pp1455-1460, New Orleans, LA- Dec. 95.
- [Tac98] Special Issue on Hybrid Control Systems, *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 43(4), 1998.
- [Tan88] J. Tankoano, M2C : Une approche méthodologique pour la conception certifiée des systèmes de commande des automatismes industriels répartis, Thèse de Doctorat, INPL Nancy, 1988.
- [Tav87] L. Tavernini, Differential automata and their discrete simulator, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 11(6), pp. 665-683, 1987.
- [Tit94] M.Titus and B. Egardt, Control Law Synthesis for Linear Hybrid Systems, proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control , pp. 961-966, 1994.
- [Tom98] C. Tomlin, G.J. Pappas, S. Sastry, Conflict Résolution for Air Traffic Management : A study in Multiagent Hybrid Systems *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 43(4) april 1998.
- [Tri86] B. Tribout, *GASPE : Générateur Automatique de programme de Simulation de Procédés électromécanique*, Thèse de Doctorat de INPL, Nancy 7 juillet 1986.

- [Utk92] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, 1992.
- [Var97] P. Varaiya, Reach set computation using optimal control, internal report, 1997.
- [Vid93] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, second edition, Prentice-Hall International Editions, 1993.
- [Wan90] P. Wang, J.F. Aubry, C. Zanne, C. Iung, Fault tolerance of a multiprocessor-structured control system by reconfiguration, application to the control of electrical power converters, IEEE/IECOM ASILOMAR27-30 nov. 1990.
- [Wan91] P. Wang, J.F. Aubry, C. Zanne, Reconfiguration dans un système de commande après diagnostic de panne. Réalisation sur un processus électromécanique, European Control Conf. 91, grenoble 1991.
- [Wan92] P. Wang, M.K. Fellah, J.F. Aubry, C. Zanne, Description of a digital firing circuit of a HVDC for its realization, IEEE International Symposium on Industrial Electronics, XIAN(Chine) 25-29 mai 1992.
- [Wei91] A. Weinmann, *Uncertain Models and Robust Control*, Springer Verlag, N.Y., 1991.
- [Won97] H. Wong-Toi, The synthesis of controllers for linear hybrid automata, IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 4607-4613, 1997.
- [Xu99] X. Xu, P.J. Antsaklis, On the Reachability of a Class of Second-order Switched Systems, proc. American Control Conf., pp. 2955-2959, 1999.
- [Ye95] H. Ye, A.N. Michel et P.J. Antsaklis, A general model for the qualitative analysis of hybrid dynamical systems, proc. of the 34rd IEEE Conf. on Decision and Control , pp2679-2684, New Orleans, LA- Dec. 1995.
- [Ye95+] H. Ye, A.N. Michel and L. Hou, Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems, proc. of the 34rd IEEE Conf. on Decision and Control , pp2679-2684, New Orleans, LA- Dec, 1995.
- [You80] L. Young, *Optimal Control Theory*, Cambridge University Press, 2nde edition, 1980.
- [Zan83] C. Zanne, J. F. Aubry, J.P. Thomesse, C. Iung, Conception d'une chaîne complexe de commande numérique d'une machine électrique, Congrès CONUMEL pp. 47-53 Toulouse, 9-11 mai 1983.
- [Zan90] C. Zanne, J. F. Aubry, P. Wang, MAREL ou l'utilisation des réseaux de Pétri dans la description de la commande de processus électromécaniques, *Revue d'Automatique et de Productique Appliquée* pp. 26-41, vol 3 (1), 1990.
- [Zan93] C. Zanne, F. Ibrahim, C. Iung, Toward a simulation tool for the control of hybrid dynamic process, IEEE Systems, Man and Cybernetics Conference, Le Touquet 18-20 octobre 1993.

-
- [Zan95] C. Zanne, *Contribution à la conception des dispositifs de commande pour les systèmes dynamiques hybrides*, Habilitation à Diriger des Recherches : Nancy INPL, 31 mars 1995.
- [Zan+95] C. Zanne, J.F. Aubry, C. Iung, Electromechanical processes : An example of hybrid systems, 2nd European Workshop on Real Time and Hybrid Systems, Grenoble 31 mai-2juin 1995.