

# Observabilité d'un convertisseur multi-niveaux via le principe d'invariance de Lasalle

P. Riedinger<sup>1</sup>, M. Sigalotti<sup>2</sup>, J. Daafouz<sup>1</sup>

**Résumé**—Cet article traite de l'observation de systèmes commutés linéaires pour lesquels chaque sous système est non ou partiellement observable. A partir d'un principe d'invariance de Lasalle établi pour cette classe de systèmes, une caractérisation de l'ensemble invariant et des lois de commutation associées est donnée. Ce résultat est appliqué à l'observation d'un convertisseur multi-niveaux et démontre la convergence de l'erreur d'estimation pour une classe très large de lois de commutation.

**Mots-clés**— Observabilité, principe d'invariance de Lasalle, système commuté, convertisseur de puissance

## I. INTRODUCTION

Pour des applications industrielles de moyenne et forte puissance, les tensions appliquées aux bornes des éléments en commutation deviennent très élevées. Pour des raisons liées à la technologie employée, la fréquence de commutation doit être maintenue à une valeur faible et l'utilisation de filtres est nécessaire pour l'obtention d'une puissance appropriée en sortie [1]. Pour pallier à cet inconvénient, une nouvelle classe de convertisseurs de puissance est apparue, appelée convertisseurs multi-cellulaires ou multi-niveaux. Ces structures sont obtenues en montant en série des dispositifs de commutations comportant des éléments de stockage passifs et qui sont utilisés pour générer des tensions de niveaux intermédiaires [2]. Les lois de commande pour ces dispositifs ont besoin de maintenir les niveaux de tension intermédiaires tout en régulant la puissance fournie à la charge.

Un des principaux avantages du convertisseur multi-niveaux est que la qualité spectrale du signal de sortie est améliorée par une haute fréquence de commutation entre les niveaux de tension intermédiaire [3]. L'inconvénient réside dans le fait que le contrôle de convertisseurs multi-niveaux est plus complexe [4], [5].

Les algorithmes de commandes employés (commande stabilisante [6], commande optimale [7], prédictive[8], [9], [10] conduisent à de bons résultats mais nécessitent la mesure complète de l'état. L'utilisation d'observateurs et d'estimateurs paramétriques pour améliorer la robustesse des algorithmes et réduire le nombre de capteurs est donc vivement souhaitée. Les filtres récurrents de type Kalman étendu sont efficaces et fréquemment utilisés [11], [12]. Cependant la preuve de convergence est généralement omise ou impossible à établir en raison de la non linéarité du système de contrôle et de la dépendance de la propriété d'observabilité vis à vis de l'entrée [13]. On peut également citer des approches plus récentes par modes glissants [14] et les approches algébriques dédiées à l'observation des systèmes hybrides [15].

<sup>1</sup> CRAN, Nancy-Université, CNRS, 2, avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France.

<sup>2</sup> INRIA, Institut Élie Cartan, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France.

Dans ce papier, la synthèse d'observateurs commutés pour la classe des systèmes affines commutés est proposée comme estimateur d'état et appliquée sur un convertisseur multi-niveaux. L'originalité de l'approche est de fournir une caractérisation complète de l'ensemble invariant et des lois de commandes associées pour lesquelles le système n'est pas observable. Cette caractérisation ne dépend pas du choix de l'observateur commuté et est intrinsèquement liée à la structure du système.

Dans la prochaine section, le problème d'observation est formulé et une structure de type Luenberger commuté est proposée. L'estimation de l'état du convertisseur est alors reliée à l'étude de stabilité d'un système linéaire commuté possédant des dynamiques nulles. La section III énonce une version du principe d'invariance de Lasalle adaptée à la classe des systèmes linéaires commutés. Ce principe permet de caractériser les éléments de l'invariant  $\Omega$  en terme de solutions d'une inclusion différentielle. Il est montré à la section IV qu'il est nécessaire que les éléments de cet ensemble invariant  $\Omega$  appartiennent au support des solutions d'un problème de commande sous contraintes. La section V propose un algorithme qui permet de déterminer algébriquement l'ensemble des solutions du problème de commande associé. Enfin, la synthèse d'un observateur commuté par placement de pôles pour le convertisseur est déterminé dans la section VI. La caractérisation algébrique proposée est pour cette exemple exacte et égale à l'ensemble  $\Omega$  et permet de déterminer les lois de commandes rendant le système inobservable. Elle permet également d'analyser pourquoi la vitesse de convergence de l'observateur diminue avec la fréquence de commutation.

## II. FORMULATION DU PROBLÈME

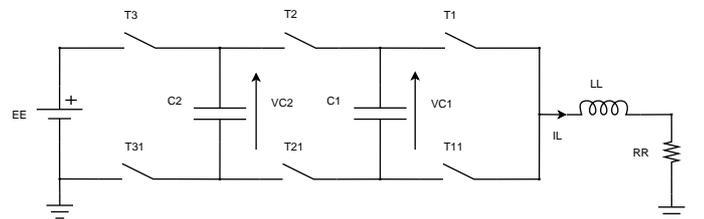


Fig. 1. Convertisseur multi-niveaux. Les variables d'état sont les tensions dans les capacités et le courant dans la charge. La commande correspond à la position des interrupteurs  $u_1$ ,  $u_2$  and  $u_3$ .

Les équations d'état du convertisseur multi-niveaux sont affines et données par

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^3 u_i(t)(A_i x(t) + B_i) \quad (1)$$

où  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  et  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \{0, 1\}^3$ . Les

matrices  $A_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , sont définies par les expressions :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix},$$

et les vecteurs  $B_1 = B_2 = 0$ ,  $B_3 = (0, 0, E/L)^T$ . Les états  $x_1$ ,  $x_2$  représentent les tensions aux bornes des capacités et  $x_3$  est le courant de charge. La commande  $u$  correspond aux différentes configurations des interrupteurs. A chacune des  $2^3$  valeurs possibles de  $u$  correspond un mode de (1).

L'objectif est de parvenir à l'estimation des tensions aux bornes des capacités à partir de la mesure du courant,

$$y = Cx = [0 \ 0 \ 1]x.$$

La particularité de ce système est qu'aucun des sous systèmes n'est observable au sens où la matrice d'observabilité associée n'est pas de rang plein. L'observabilité de ce système dépend comme pour tout système non linéaire de la loi de commutation utilisée. Par exemple, si la commande est  $u = [1 \ 0 \ 0]$ , alors la tension dans la capacité  $C_1$  ne peut être estimée puisque celle ci est déconnectée ou encore, si la commande est  $u = [1 \ 0 \ 1]$  alors seule la somme des tensions dans les capacités  $C_1$  et  $C_2$  peuvent être estimées. Par conséquent, il n'est pas possible de considérer un observateur pour une loi de commutation arbitraire. Comment peut on caractériser les lois de commande permettant l'observation du système ?

Avec l'hypothèse d'une connaissance de la loi de commutation, le choix d'un observateur commuté de type Luenberger est envisageable pour déterminer les lois rendant possible l'observation de l'état :

$$\dot{\hat{x}} = A_0 \hat{x} + L_0(y - \hat{y}) + \sum_{i=1}^3 u_i (A_i \hat{x} + B_i + L_i(y - \hat{y})).$$

La dynamique de l'erreur  $e = x - \hat{x}$  est déterminée par

$$\dot{e} = \tilde{A}_0 e + \sum_{i=1}^3 u_i \tilde{A}_i e, \quad (2)$$

avec  $\tilde{A}_i = A_i - L_i C$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

### III. LE PRINCIPE D'INVARIANCE POUR LA CLASSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES COMMUTÉS À TEMPS CONTINU

L'équation (2) montre qu'il s'agit d'étudier la stabilité d'un système linéaire commuté

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x, \quad (3)$$

où l'état  $x(\cdot)$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , les matrices  $A_1, \dots, A_I$  sont carrées, stables (non asymptotiquement) et la loi de commutation  $\sigma$  appartient à la classe des fonctions  $L^\infty([0, +\infty), \{1, \dots, I\})$ .

Une condition suffisante de stabilité garantissant la stabilité asymptotique globale des systèmes commutés en temps continu (3) est reliée à l'existence d'une fonction de Lyapunov commune [16]. Pour le système commuté (3), la stabilité non asymptotique des sous systèmes conduit à l'impossibilité d'envisager une telle fonction.

En revanche, on peut envisager le cas d'une fonction de Lyapunov commune au sens *faible*, qui diffère de la notion standard de fonction de Lyapunov par la négativité non stricte des dérivées le long des trajectoires du système.

Dans cette configuration, des propriétés de convergence asymptotique globale peuvent néanmoins être garanties en utilisant des hypothèses supplémentaires telles que, par exemple, des hypothèses de "temps d'activation" entre commutations [17], [18], [19], [20], [21].

Notre approche emprunte une autre voie. Sans ces hypothèses supplémentaires sur les lois de commutation, nous avons recherché à caractériser les ensembles invariants associés à ce type de systèmes dynamiques. La seule hypothèse formulée sur la loi de commande  $\sigma$  est la mesurabilité au sens de Lebesgue.

Rappelons les notions suivantes utiles par la suite :

*Définition 1* : On dit que la fonction  $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  approche l'ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  si  $\inf_{s \in S} \|x(t) - s\| \rightarrow 0$  quant  $t \rightarrow \infty$ .

*Définition 2* : Un point  $l \in \mathbb{R}^n$  est un point  $\omega$ -limite de  $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , si il existe une suite d'instant  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $t_n \rightarrow \infty$  et  $x(t_n) \rightarrow l$  quant  $n \rightarrow \infty$ . L'ensemble  $\Omega(x)$  des points  $\omega$ -limites associés à une trajectoire  $x$  est l'ensemble  $\omega$ -limite de  $x$ .

*Propriété 3* : L'ensemble  $\omega$ -limite  $\Omega(x)$  est toujours fermé. Si la trajectoire  $x$  est bornée alors  $\Omega(x)$  est non vide, compact et  $\Omega(x)$  est le plus petit ensemble fermé approché par  $x$ . De plus, si  $x$  est continue alors  $\Omega(x)$  est connexe.

L'objectif est donc de trouver le moyen de caractériser les ensembles  $\omega$ -limite ainsi que leurs commandes associées lorsque seule une fonction de Lyapunov commune *faible* est considérée. On considère l'hypothèse d'existence d'une matrice symétrique définie positive  $P$  ( $P > 0, P^T = P$ ) telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,

$$x^T P x > 0$$

$$x^T (A_i^T P + P A_i) x \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, I\}. \quad (4)$$

La fonction  $V(x) = x^T P x$  est utilisée comme fonction de Lyapunov commune *faible*.

On peut caractériser le comportement asymptotique par le théorème suivant :

*Théorème 4* : Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $\sigma(\cdot)$  une loi de commutation définie sur  $[0, +\infty)$ . Soit  $x$  la solution du système commuté (3) correspondant à la loi  $\sigma(\cdot)$  et à la condition initiale  $x_0$ . Alors l'ensemble  $\omega$ -limite  $\Omega(x)$  est contenu dans une ligne de niveau de  $V$  et, pour tout  $y_0 \in \Omega(x)$ , il existe une fonction absolument continue  $y$  qui satisfait le système différentiel suivant

$$\dot{y} = A_{\alpha} y \quad \text{pour p.t. } t \geq 0 \quad (5)$$

$$y(0) = y_0$$

$$y(t) \in \Omega(x) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (6)$$

où la matrice dépendante du temps  $A_{\alpha} = \sum_{i=1}^I \alpha_i A_i$  correspond à une loi de commande  $\alpha(\cdot)$  prenant ses valeurs dans l'ensemble

$$\Delta = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_I) \in [0, 1]^I \mid \sum_{i=1}^I \alpha_i = 1 \right\}.$$

En particulier,  $\overline{V(y(t))} = 0$  pour tout  $t \geq 0$  le long de la trajectoire.

Ce théorème 4 montre que :

- les éléments de  $\Omega(x)$  sont tous situés sur une ligne de niveau.
- les ensembles  $\omega$ -limites associés à la classe des systèmes linéaires commutés correspondent aux ensembles  $\omega$ -limites construits sur l'enveloppe convexe du domaine de commande et réciproquement en vertu du théorème de densité [22, theorem 1].
- les éléments de  $\Omega(x)$  appartiennent à une ou des solutions au sens de Fillipov stables et incluses dans  $\Omega(x)$ .

Le théorème est une conséquence directe de résultats connus. En effet, l'existence d'une solution  $y$  de

$$\dot{y} \in \left\{ \sum_{i=1}^I \alpha_i A_i y \mid \alpha \in \Delta \right\} =: F(y)$$

sur  $\Omega(x)$  provient de [23]. Alors  $\alpha(\cdot)$  peut être choisi mesurable grâce aux résultats classiques concernant le choix d'une sélection (voir [24], [25]).

#### IV. PROBLÈME DE COMMANDE ASSOCIÉ

Si on définit, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $\dot{V}_i(x) = x^T(A_i^T P + P A_i)x \leq 0$  alors pour tout  $v = \sum_{i=1}^I \alpha_i A_i x \in F(x)$ , la dérivé directionnelle de  $V$  dans la direction  $v$  est déterminée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(x; v) &= x^T(A_\alpha^T P + P A_\alpha)x \\ &= \sum_{i=1}^I \alpha_i x^T(A_i^T P + P A_i)x \\ &= \sum_{i=1}^I \alpha_i \dot{V}_i(x) \leq 0 \end{aligned}$$

et est négative puisque les  $\alpha_i$ 's sont positifs.

On voit donc que les solutions de (5) qui évoluent sur une ligne de niveau de  $V$  satisfont le problème de commande suivant :

*Problème 5* : Trouver les commandes  $\alpha^* \in L^\infty([0, +\infty), \Delta)$  et les trajectoires associées  $x$  vérifiant

$$\dot{x} = A_{\alpha^*} x \quad p.p \quad (7)$$

sous la contrainte  $\sum_{i=1}^I \alpha_i^* \dot{V}_i(x) = 0$ .

On peut noter que si  $\alpha^*$  et  $x$  sont une solution du problème 5, alors

$$\alpha^* \in \arg \max_{\alpha \in \Delta} \alpha_i \dot{V}_i(x).$$

Résoudre le problème 5 est alors équivalent à résoudre un problème de commande optimale pour lequel la valeur finale est maximisée asymptotiquement au sens de la norme associée à la matrice  $P$ .

L'ensemble des solutions du problème 5 définissent donc des conditions nécessaires mais non suffisantes pour la détermination des invariants associés à (3). En notant par  $\text{Inv}$  l'union de tous les supports des trajectoires  $x$  correspondant aux solutions du problème 5, par  $\Omega_{\text{Inv}}$  l'union de leur ensemble  $\omega$ -limite associé et par  $\Omega$  l'union de tous les ensembles  $\omega$ -limites des trajectoires de (3), nous avons classifié ces ensembles par la proposition suivante

*Proposition 6* : Les inclusions suivantes ont lieu :

$$\Omega_{\text{Inv}} \subset \Omega \subset \text{Inv}. \quad (8)$$

Chaque inclusion peut être stricte [26].

La Proposition 6 montre que s'il est possible de caractériser complètement l'ensemble des solutions du Problème 5 alors il est possible de borner inférieurement et supérieurement l'ensemble  $\Omega$  contenant tous les ensembles  $\omega$ -limites du système linéaire commuté original.

Un autre résultat issu du Problème 5 et de la convergence à l'origine des trajectoires de (3) est le suivant :

*Proposition 7* : Soit  $x$  une solution de (3) et  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \Delta$  la fonction continue par morceaux prenant ses valeurs sur les sommets de  $\Delta$  et telle que  $\dot{x} = A_\alpha x$ . S'il existe une suite d'instant  $t_n \rightarrow +\infty$  telle que la suite  $(\alpha(t_n + \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens faible dans  $L^\infty([0, +\infty), \Delta)$  vers un  $\alpha_*$  qui ne correspond à aucune solution non nulle du Problème 5, alors  $x(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

La Proposition 7 peut être utile pour garantir la convergence à l'origine des solutions de (3) et correspondant à une classe très large de lois de commutation, une fois que les commandes correspondant aux solutions du Problème 5 sont caractérisées.

#### V. UNE CARACTÉRISATION ALGÈBRE DES SOLUTIONS DU PROBLÈME 5

Nous proposons dans cette section une procédure pour obtenir les solutions algébriques du Problème 5.

Pour tout  $i = 1, \dots, I$ , posons  $C_i$  les matrices définies par

$$C_i^T C_i = -(A_i^T P + P A_i).$$

Alors le long d'une solution  $x$  du Problème 5,

$$\begin{aligned} 0 = \dot{V}(x) &= x^T(A_\alpha^T P + P A_\alpha)x \\ &= -x^T C_\alpha^T C_\alpha x = 0 \quad p.p. \end{aligned}$$

avec  $C_\alpha = \sum_{i=1}^I \sqrt{\alpha_i} C_i$ .

Ainsi pour presque tout  $t$ ,  $C_\alpha x = 0$ . Supposons qu'il existe un sous ensemble d'indices  $I_0 \subseteq \{1, \dots, I\}$  de cardinal  $|I_0| \geq 1$  sur l'intervalle de temps  $(a, b)$ ,  $a < b$ , tels que pour tout  $i_0 \in I_0$ ,

$$C_{i_0} x \equiv 0 \quad (9)$$

et  $C_j x(t) \neq 0$  si  $j \notin I_0$ . En particulier  $x$ , restreint à l'intervalle  $(a, b)$ , évolue dans  $\bigcap_{i_0 \in I_0} \text{Ker}(C_{i_0})$  et les lois de commandes associées prennent leurs valeurs dans l'ensemble

$$\Delta_{I_0} = \left\{ \alpha \in \Delta \mid \sum_{i_0 \in I_0} \alpha_{i_0} = 1 \right\}. \quad (10)$$

En différenciant (9) et substituant  $\dot{x}$  par  $\sum_{i \in I_0} \alpha_i A_i x$ , nous obtenons pour tout  $i_0 \in I_0$ ,  $\sum_{i \in I_0} \alpha_i C_{i_0} A_i x = 0$ . On définit alors, pour tout  $i_0 \in I_0$ ,

$$p_{i_0}(x) = \min \left\{ k \mid \exists i \in I_0, \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{d^k}{dt^k} C_{i_0} x \neq 0 \text{ on } (a, b) \right\},$$

i.e.  $p_{i_0}(x) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  est le nombre minimal de dérivations de  $C_{i_0} x$  nécessaires pour qu'au moins une composante de la commande apparaisse avec un coefficient non nul. Posons

$p_{i_0}$  la valeur minimale de  $p_{i_0}(x(t))$  quant  $t$  varie dans  $(a, b)$  et supposons que  $p_{i_0}$  est fini. Pour tout  $i_0 \in I_0$  la condition suivante doit être validée sur  $(a, b)$ ,

$$\begin{cases} C_{i_0} x & = 0 \\ C_{i_0} A_{i_1} x & = 0, i_1 \in I_0 \\ \vdots & \\ C_{i_0} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{p_{i_0}-1}} x & = 0, (i_1, \dots, i_{p_{i_0}-1}) \in I_0^{p_{i_0}-1} \end{cases} \quad (11)$$

et

$$\sum_{i_k \in I_0} \alpha_{i_k} C_{i_0} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{p_{i_0}}} x = 0, (i_1, \dots, i_{p_{i_0}}) \in I_0^{p_{i_0}}. \quad (12)$$

Le système d'équations (10), (11), (12) détermine un ensemble de conditions algébriques entre la commande  $\alpha$  et le point  $x$  à chaque instant.

Réécrivons le système (11) sous une forme matricielle  $M_{i_0, I_0, p_{i_0}} x = 0$  et notons par  $S_{i_0, I_0, p_{i_0}}$  le noyau de  $M_{i_0, I_0, p_{i_0}}$ .

*Lemma 8 :* Pour tout ensemble  $I_0$  et tout  $i_0 \in I_0$ , il existe un nombre fini  $p_{i_0, I_0}^{\max}$  au delà duquel (i.e. pour tout  $p > p_{i_0, I_0}^{\max}$ )  $S_{i_0, I_0, p}$  est constant. De plus,  $p_{i_0, I_0}^{\max}$  est le plus petit  $p$  tel que  $S_{i_0, I_0, p} = S_{i_0, I_0, p+1}$ .

*Preuve.* Il est clair que  $S_{i_0, I_0, p}$  est monotone non croissante par rapport à  $p$ . Par récurrence sur  $k$ , on montre que si  $S_{i_0, I_0, p} = S_{i_0, I_0, p+1}$  alors  $S_{i_0, I_0, p} = S_{i_0, I_0, p+k}$  pour tout  $k \geq 1$ . Si  $x \in S_{i_0, I_0, p+1}$  alors pour tout  $i \in I_0$ ,

$$y_i = A_i x \in S_{i_0, I_0, p} = S_{i_0, I_0, p+1},$$

i.e.  $M_{i_0, I_0, p+1} y_i = 0$ . En remplaçant  $y_i$  by  $A_i x$  pour tout  $i \in I_0$ , on obtient que  $x \in S_{i_0, I_0, p+2}$ .  $\square$

Notons que si  $p_{i_0} \geq p_{i_0, I_0}^{\max}$  alors (12) est vérifié. Pour éviter des cas pathologiques, nous introduisons la définition suivante :

*Définition 9 :* Une commande  $\alpha$  résolvant le Problème 5 est dite régulière si il existe une suite constituée de la concaténation d'intervalles de temps  $[a_k, b_k]$  dont l'union est  $[0, +\infty)$  et une séquence associée  $I_0^k$  de sous ensembles de  $\{1, \dots, I\}$  telle que pour presque tout  $t \in (a_k, b_k)$ ,  $\alpha(t) \in \Delta_{I_0^k}$ .

Nous pouvons alors poser la proposition suivante :

*Proposition 10 :* Si  $(x, \alpha)$  est une solution du Problème 5 avec  $\alpha$  régulière alors son support dans  $\mathbb{R}^n \times \Delta$  est inclus dans l'union de tous les sous ensembles obtenus par l'algorithme suivant :

Prendre un sous ensemble  $I_0 = \{s_1, s_2, \dots, s_{|I_0|}\}$  de  $\{1, \dots, I\}$ ,

Prendre  $p = (p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_{|I_0|}})$  avec  $1 \leq p_{s_k} \leq p_{s_k, I_0}^{\max}$ ,  $k = 1, 2, \dots, |I_0|$ ,

et résoudre le système algébrique d'équations (10), (11), (12) associé à  $I_0$  et  $p$ .

La projection sur  $\mathbb{R}^n$  de l'ensemble obtenu par l'algorithme proposé dans la Proposition 10 contient, le plus souvent, strictement l'ensemble Inv. La proposition suivante donne un critère garantissant que les sorties de l'algorithme sont contenues dans Inv.

*Proposition 11 :* Fixer  $I_0$  et  $p$  comme dans l'énoncé de la Proposition 10 et supposons que la projection sur  $\mathbb{R}^n$  des solutions de (10), (11), (12) est la même que les projections des solutions de (11), (12). Alors une telle projection est contenue dans Inv.

La proposition vient du fait que la projection des solutions de (11),(12) est un espace linéaire  $L$  et l'égalité des projections garantit qu'il existe un vecteur vitesse tangent à  $L$  qui est admissible pour le Problème 5.

## VI. SYNTHÈSE D'UN OBSERVATEUR COMMUTÉ

Revenons au cas du convertisseur multi-niveaux.

### A. Calcul de $P$ et des gains $L_i$

Pour ce convertisseur, il est facile de montrer que si une matrice  $P > 0$  satisfait  $\tilde{A}_i^T P + P \tilde{A}_i \leq 0$ , pour  $i = 0, 1, 2, 3$ , alors  $P$  et les matrices de gain  $L_i$  (cf. équation 2) doivent être de la forme

$$P = \begin{bmatrix} \wp_1 & \wp_4 & 0 \\ \wp_4 & \wp_2 & 0 \\ 0 & 0 & \wp_3 \end{bmatrix},$$

$$\wp_1 \left( \frac{u_2 - u_1}{C_1} - L_1(u) \right) + \wp_4 \left( \frac{u_3 - u_2}{C_1} - L_2(u) \right) + \wp_3 \frac{u_1 - u_2}{L} = 0,$$

$$\wp_4 \left( \frac{u_2 - u_1}{C_1} - L_1(u) \right) + \wp_2 \left( \frac{u_3 - u_2}{C_1} - L_2(u) \right) + \wp_3 \frac{u_2 - u_3}{L} = 0,$$

où  $L_1(u)$  et  $L_2(u)$  sont respectivement la première et la seconde composantes de  $L(u) = L_0 + \sum_{i=1}^3 u_i L_i$ . Par un placement de pôles, nous fixons  $L_0 = 10^4(0, 0, 5.7)$ ,  $L_1 = 10^6(8.975, 4.5, 0)$ ,  $L_2 = 10^6(-4.475, 4.475, 0)$ ,  $L_3 = 10^6(-4.5, -8.975, 0)$  et  $\wp_1 = \wp_2 = 90$ ,  $\wp_3 = 6.075 \times 10^6$ ,  $\wp_4 = -45$ .

### B. Caractérisation de l'ensemble invariant et des commandes

Pour toute matrice  $P > 0$  permettant de définir une fonction de Lyapunov faible pour le système (2), on montre via la Proposition 10 que les solutions du Problème 5 sont contenues dans

$$\text{Inv} = \Omega_{\text{Inv}} = \{e \mid e_3 = 0\}.$$

Et la proposition 6 permet de conclure que

$$\Omega = \{e \mid e_3 = 0\}.$$

De plus, les lois de commande  $u = u(t) \in [0, 1]^3$  correspondant aux trajectoires du Problème 5 doivent vérifier la relation p.p.

$$(u_3 - u_2)e_2 + (u_2 - u_1)e_1 = 0. \quad (13)$$

Cette caractérisation algébrique par les équations (13) et la Proposition 7 garantie la convergence à l'origine pour une vaste classe de lois de commande. Sur les figures 2 et 5, nous avons appliqué une loi vérifiant (13). Il peut être observé que lorsque l'erreur  $e_3$  approche 0 (c'est à dire,  $e$  approche Inv) les erreurs d'estimation des tensions restent constantes. Bien que la commande utilisée soit singulière et prenne ses valeurs dans l'ensemble  $\Delta$ , il est possible d'approcher, d'aussi près que l'on veut, cette trajectoire par une loi de commutation admissible pour le système original suivant le résultat de densité [22, theorem 1].

### C. Observabilité aux points de fonctionnement

Généralement, l'objectif de commande est de réguler le courant fourni à la charge et de maintenir en moyenne les niveaux intermédiaires de tension aux bornes des capacités  $C_2$  et  $C_1$  respectivement aux valeurs  $2E/3$  et  $E/3$ . Les points de fonctionnement du convertisseur sont alors donnés en valeur moyenne par  $x_{\text{ref}} = (2E/3, E/3, i_{\text{ref}})$ . On peut alors noter que les lois de commande qui maintiennent le courant à une valeur moyenne non nulle sont des lois singulières. En effet, les points de fonctionnement sont définis comme les points d'équilibre du modèle moyen, c'est à dire, les éléments de l'ensemble

$$\left\{ x_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^3 \mid A_0 x_{\text{ref}} + \sum_{i=1}^3 u_{i,\text{ref}} (A_i x_{\text{ref}} + B_i) = 0 \right. \\ \left. \text{avec } u_{\text{ref}} \in [0, 1]^3 \right\}.$$

L'équation  $A_0 x + \sum_{i=1}^3 u_i (A_i x + B_i) = 0$  a une unique solution  $u_1 = u_2 = u_3$  conduisant à l'équilibre  $i = \frac{E}{R} u_3 \neq 0$ . Cette loi correspond à une loi singulière (voir (13)) rendant le système inobservable.

En conséquence, plus la loi de commutation approche finement (i.e. en moyenne sur des fenêtres glissantes de plus en plus étroites) la loi singulière  $u_1 = u_2 = u_3$ , plus la vitesse de convergence de l'observateur se réduit.

Par exemple, si on considère trois lois de commutation périodiques identiques déduites l'une de l'autre par un changement d'échelle, réalisant  $u_1 = u_2 = u_3$  en moyenne glissante, on peut voir sur la figure 4 que la convergence du système (2) se dégrade avec l'augmentation de la fréquence de commutation (les fréquences de commutation choisies sont  $f_s = 5, 15, 25\text{kHz}$ ). Un simple calcul du grammien sur un horizon fini  $T$  montre que l'excitation obtenue est effectivement toujours plus importante pour les bases fréquences.

L'encadrement du grammien par sa plus petite valeur singulière  $\alpha_{f_s}(T)$  et sa plus grande valeur singulière  $\beta_{f_s}(T)$  suivant la relation

$$\alpha_{f_s}(T) Id \leq \int_0^T \phi^T C^T C \phi dt \leq \beta_{f_s}(T) Id$$

où  $\phi$  représente la matrice de transition d'état du système, est représentée sur la figure 5 en fonction de  $T$ . On constate que  $\alpha_{f_s}(T)$  décroît avec la fréquence de commutation. La borne supérieure  $\beta_{f_s}(T)$  est en revanche identique et est relative à l'observation du courant.

## VII. CONCLUSION

Dans cet article, une caractérisation de l'ensemble invariant et des lois de commutation pour la classe des systèmes commutés linéaires en temps continu est proposée. Cette étude souligne le lien existant entre d'une part, l'ensemble  $\omega$ -limite d'un système commuté ayant une fonction de Lyapunov commune au sens faible et d'autre part, les trajectoires du système convexifié évoluant sur une ligne de niveau de la fonction de Lyapunov.

Ce résultat est utilisé pour analyser l'observabilité d'un convertisseur multi-niveaux.

## VIII. REMERCIEMENT

ANR project ArHyCo, Programme "Systèmes Embarqués et Grandes Infrastructures" - ARPEGE, contract

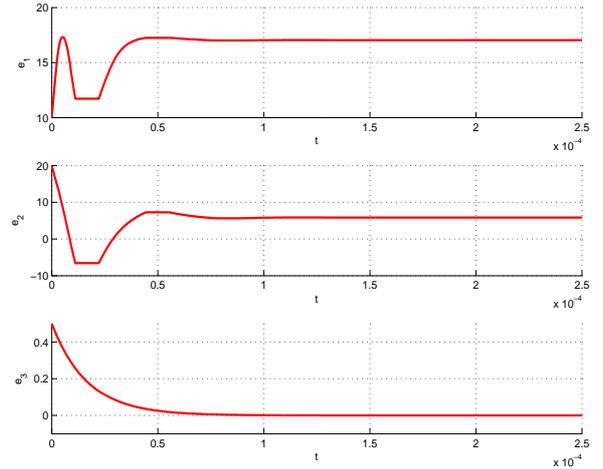


Fig. 2. Erreurs d'observation  $e$

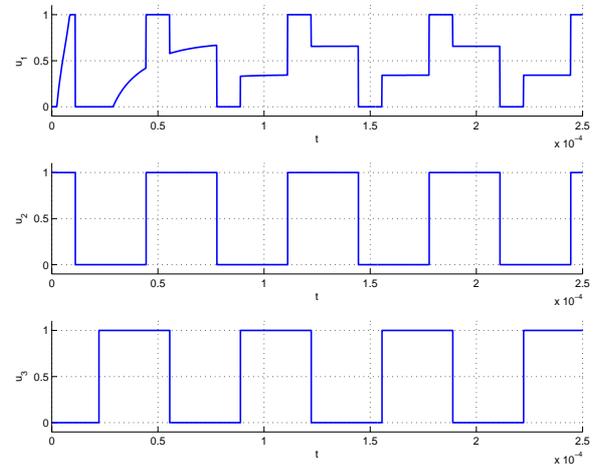


Fig. 3. Une commande rendant le convertisseur inobservable

number ANR-2008 SEGI 004 01-30011459

## RÉFÉRENCES

- [1] L. Delmas, T. A. Meynard, and G. Gateau. Computed pwm for flying capacitors multicell converters. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, volume 2, pages 953–956, Ajaccio, France, 2004.
- [2] T. A. Meynard, M. Fadel, and N. Aouda. Modeling of multi-level converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 44(3):356–364, june 1997.
- [3] B. P. McGrath and D. G. Holmes. Analytical modelling of voltage balance dynamics for a flying capacitor multilevel converter. In *Proceedings of 2007 IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pages 1810–1816, Orlando, 2007.
- [4] T. A. Meynard, H. Foch, P. Thomas, J. Courault, R. Jakob, and M. Nahrstaedt. Multicell converters : basic concepts and industry applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(5):955–964, october 2002.
- [5] J. S. Lai and F. Z. Peng. Multilevel converters—a new breed of power converters. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, 32(3):2348–2356, 1996.
- [6] S. Almer, H. Fujioka, U. Jonsson, C.-Y. Kao, D. Patino, P. Riedinger, T. Geyer, G. Beccuti, G. Papafotiou, M. Morari, A. Wernrud, and A. Rantzer. Hybrid control techniques for switched mode dc-dc converters part i : The step-down topology. In

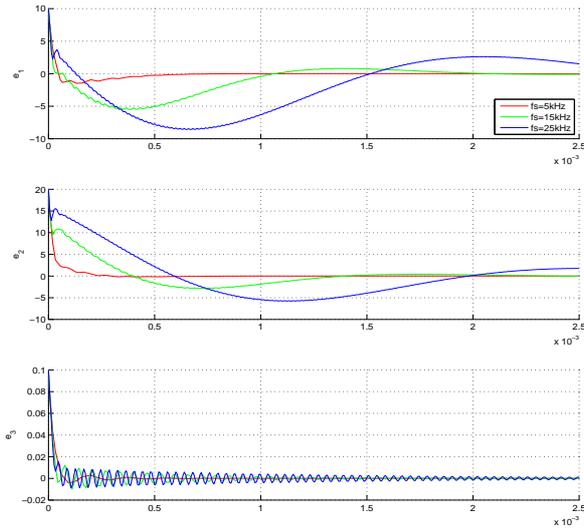


Fig. 4. Erreurs d'observation en fonction de la fréquence de commutations

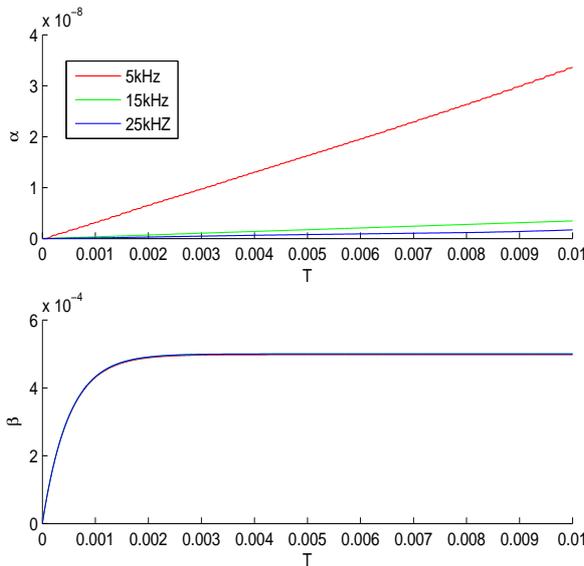


Fig. 5. Encadrement (SVD) du grammien d'observabilité sur horizon fini

*Proceedings of IEEE 26th American Control Conference*, volume 1, pages 5450–5457. New York City, USA, 2007.

[7] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. Synthèse de commandes optimales pour les systèmes commutés cycliques. applications aux convertisseurs de puissance. In *5ième Conférence Internationale Francophone d'Automatique*. Bucarest, Roumanie, 2008.

[8] E.I. Silva, B. McGrath, D. Quevedo, and G. Goodwin. Predictive control of a flying capacitor converter. In *Proceeding of IEEE American Control Conference*, volume 1, pages 3763–3768, New York, USA, 2007.

[9] A. Donzel and G. Bornard. New control law for capacitor voltage balance in multilevel inverter with switching rate control (cvc). In *Proceedings of the IEEE Annual Meeting of Industry Applications Society*, volume 3, pages 2037–2044. Rome, Italy, 2000.

[10] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. Predictive control approach for multicellular converters. In *Proceedings of 34th IEEE Industrial Electronics Society*. Orlando, USA, 2008.

[11] G. Gateau, G. Fades, P. Maussion, R. Bensaid, and T. A. Mey-

nard. Multicell converters : Active control and observation of flying capacitor voltages. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(5) :998 – 1008, 2002.

[12] G. Besancon, J. De Léon-Morales, and O. Huerta-Guevara. On adaptive observers for state affine systems. *International Journal of Control*, 79(6) :581–591, 2006.

[13] R. Hermann and A. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 22(5) :728–740, 1977.

[14] Malek Ghanes and Jean Pierre Barbot. On sliding mode and adaptive observers design for multicell converter. In *American Conference on Control (ACC'99)*, 2009.

[15] J.P. Barbot, M. Fliess, and T. Floquet. An algebraic framework for the design of nonlinear observers with unknown inputs. In *Proceedings of 46th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 384 – 389. New Orleans, USA, 2007.

[16] Raymond A. Decarlo, Michael S. Branicky, Stefan Pettersson, and Bengt Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7) :1069–1082, 2000.

[17] João P. Hespanha. Uniform stability of switched linear systems : extensions of LaSalle's invariance principle. *IEEE Trans. Automat. Control*, 49(4) :470–482, 2004.

[18] A. Bacciotti and L. Mazzi. An invariance principle for nonlinear switched systems. *Systems Control Lett.*, 54(11) :1109–1119, 2005.

[19] J. L. Mancilla-Aguilar and R. A. García. An extension of LaSalle's invariance principle for switched systems. *Systems Control Lett.*, 55(5) :376–384, 2006.

[20] Ricardo G. Sanfelice, Rafal Goebel, and Andrew R. Teel. Invariance principles for hybrid systems with connections to detectability and asymptotic stability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 52(12) :2282–2297, 2007.

[21] Rafal Goebel, Ricardo G. Sanfelice, and Andrew R. Teel. Invariance principles for switching systems via hybrid systems techniques. *Systems Control Lett.*, 57(12) :980–986, 2008.

[22] B. Ingalls, E. D. Sontag, and Y. Wang. An infinite-time relaxation theorem for differential inclusions. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 131, pages 487–499. Providence, USA, 2003.

[23] H. Logemann and E. P. Ryan. Non-autonomous systems : asymptotic behaviour and weak invariance principles. *J. Differential Equations*, 189(2) :440–460, 2003.

[24] Jean-Pierre Aubin and Arrigo Cellina. *Differential inclusions*, volume 264 of *Fundamental Principles of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[25] Robert J. Aumann. Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 12 :1–12, 1965.

[26] P. Riedinger, M. Sigalotti, and J. Daafouz. On the characterization of invariants sets of switched linear systems. *en révision à Automatica*, 2009.