Commande Optimale des Systèmes Hybrides : Théorie et Pratique

P.Riedinger, C. Iung,J.Daafouz

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
2 avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex, France

Pierre.Riedinger@ensem.inpl-nancy.fr
http://www.cran.uhp-nancy.fr

Résumé— **Aujourd'hui, un certain nombre de chercheurs ont manifesté un intérêt pour le problème de la commande optimale des systèmes dynamiques hybrides. Les travaux présentés se divisent grosso modo en deux classes, l'une théorique et l'autre pratique. La première catégorie a permis d'énoncer des conditions nécessaires mêlant programmation dynamique et principe du maximum. Les résultats obtenus, loin d'être négligeables, ne permettent pas en revanche une mise en pratique évidente et directe : il sont à ce titre non constructifs. La deuxième classe plus pragmatique, s'est efforcée sur des cas particuliers et restrictifs de trouver des méthodes pour parvenir à construire des solutions. Dans cet article, les auteurs se proposent de faire le point sur les différents résultats obtenus et chercheront à illustrer les difficultés posées par la commande optimale de ces systèmes**

Mots-clés— **Systèmes hybrides, commande optimale, programmation dynamique, principe du maximum.**

I. Introduction

Un système hybride est déterminé par le couplage d'une famille de systèmes dynamiques continus avec un automate. Il n'y a, à instant donné, qu'un seul modèle continu actif : il correspond à un mode fonctionnement du processus étudié. L'automate détermine, en fonction du temps et de l'état global du système (continu et discret), le modèle continu actif. Plus précisément, le couplage intervient sur l'automate par l'intermédiaire d'événements produits par la partie continue (franchissement de frontières délimitant des régions de l'espace d'état continu, délais d'utilisation expirés, etc.).

Ce type de systèmes dynamiques n'est pas nouveau et on peut donner en exemple tous les systèmes électromécaniques dont le dispositif de commande intègre des convertisseurs statiques. Mais la formalisation hybride ne s'arrête pas là et couvre de nombreux domaines applicatifs : trafic routier-aérien, robotique, informatique temps réels, criptage, chaîne de production, etc.

Du point de vue de l'automatique discrète se pose des problèmes de validation de modèles, de vérification de propriétés qui garantissent les spécifications d'un cahier des charges et de sûreté de fonctionnement. Du point de vue continu, les difficultés afférentes à la commande sont dues en général au fait que les commutations interviennent sur une échelle de temps plus petite que les constantes de temps des différents modèles continus si bien que le régime permanent de la partie continue est déterminé par une séquence pseudo-périodique de phases transitoires.

La commande optimale des systèmes hybrides a récemment attirée un certain nombre de chercheurs entraînant la parution de nouveaux résultats. Une première catégorie se distingue par des apports essentiellement théoriques. Citons par exemple les travaux de Sussmann qui a énoncé une version hybride et très générale du principe du maximum [1]. On pourra trouver une formulation plus abordable, en raison de l'hypothèse de différentiabilité des frontières permettant de définir les événements produits par la partie continue, dans [2]. On citera également des approches s'appuyant sur le principe de Bellman et l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman avec [3]. La seconde catégorie dans un souci pratique se focalise soit sur des systèmes moins généraux avec les systèmes commutés (switched systems) soit sur des exemples académiques "simples" permettant de mener les calculs à la main. Citons les travaux ([4],[5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]).

L'organisation de cet article est la suivante : La section II présente les résultats théoriques sur lesquels on peut s'appuyer pour résoudre un problème général de commande optimale hybride. Ces résultats fournissent des conditions nécessaires sur la commande optimale. Ils ne traitent pas de l'existence, ni de l'unicité de la solution.

La section III présente l'apport pratique avec des exemples simples et le cas particulier des systèmes commutés pour lesquels des solutions aux problèmes de commande en temps optimal et de stabilité ont été apportées.

Dans la dernière section, nous illustrerons les difficultés que l'on est en droit d'attendre dans la mise au point d'algorithmes généraux de part la dualité discret-continue.

II. L'apport théorique

Le problème posé par la discontinuité des équations différentielles régissant la dynamique du système n'est en fait pas totalement nouveau puisqu'un certain nombre de résultats plus anciens y font référence ([13], [14],[15], [16], [17]). Ces travaux bien que ne tombant pas dans une formulation à proprement parlé hybride du problème, ont néanmoins abordé le cas de discontinuités sur le champs de vecteurs. Capuzzo Dolcetta et Yong ont démontré l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation de viscosité dans la cadre des systèmes commutés [16], [17]. Les conditions optimales de passage à travers une surface où une discontinuité de champs se produit sont également déterminées par Bryson dans [14].

A. Formulation du problème de commande optimale

En toute généralité, il est possible de définir un système hybride de la manière suivante : Pour un ensemble fini d'états discrets $\underline{Q} = \{1, ..., Q\}$, on associe une famille d'équations différentielles

$$\dot{x}(t) = f_q(x(t), u(t), t) \tag{1}$$

où
- $q \in \underline{Q}$
- l'état continu $x(.)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{n_q}$ ($n_q \in \mathbb{N}$),
- la commande continue $u(.)$ prend ses valeurs dans l'ensemble U_q inclus dans $\mathbb{R}^{m_q}$ ($m_q \in \mathbb{N}$).
- le champs f_q est supposé défini sur $\mathbb{R}^{n_q} \times \mathbb{R}^{m_q} \times [a, b]$, $\forall q \in \underline{Q}$

La dynamique discrète est définie par une fonction de transition ν de la forme :

$$q(t^+) = \nu(x(t^-), q(t^-), d(t), t) \tag{2}$$

avec $q(.)$ l'état discret ($q(t) \in \underline{Q}$) et $d(.)$ la commande discrète ($d : [a, b] \to \underline{D}$ avec $\underline{D} = \{1, ..., D\}$ un ensemble fini).

ν est une application de $X \times \underline{Q} \times \underline{D} \times [a, b]$ dans $\underline{Q}$ où X est un sous ensemble de $\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_Q}$.

Plus précisément, l'ensemble X est de la forme :

$$X = \bigcup_{j=1}^{Q} \{0\}^{\sum_{k=1}^{j-1} n_k} \times \mathbb{R}^{n_j} \times \{0\}^{\sum_{k=j+1}^{Q} n_k} \subset \mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_Q}.$$

Dans l'équation (2), on a remplacé par convention et afin de ne pas alourdir les notations $\tilde{x}(t) = (0, \ldots, 0, x(t), 0, \ldots, 0) \in X$ par $x(t)$ avec $x(t) \in \mathbb{R}^{n_{q(t^-)}}$.

La variable discrète $q(.)$ est une fonction du temps constante par morceaux. Les notations t^- et t^+ dans (2) correspondent respectivement aux limites à gauche et à droite de t.

La valeur de la fonction de transition discrète ν dépend de deux sortes de phénomènes discrets qui affectent l'évolution de $q(.)$:
- une modification de la commande discrète d
- un événement issu de la partie continue correspondant à la validation d'une condition frontière sur (x, t) de la forme $C_{(q,q')}(x(t), t) = 0$ qui modifie l'ensemble des états discrets atteignables.

Il est supposé que $\forall (q, q') \in \underline{Q}^2$, $C_{(q,q')} : \mathbb{R}^{n_q} \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^{r_q}$, ($r_q < n_q$). Ces conditions aux frontières peuvent représenter des seuils, des saturations, des hystérésis, des délais entre deux commutations, ... Elles déterminent comment la dynamique continue agit sur la fonction de transition discrète.

Un ensemble de fonctions de saut associées aux transitions d'état discret est également considéré :

$$x(t^+) = \Phi_{(q,q')}(x(t^-), t) \tag{3}$$

Avec l'occurrence d'une transition de q vers q', l'état continu est alors réinitialisé de $x(t^-) \in \mathbb{R}^{n_q}$ vers $x(t^+) \in \mathbb{R}^{n'_q}$.

Les équations (1)(2) et (3) permettent de modéliser les différents phénomènes hybrides : sauts sur l'état et discontinuités sur le champs provoqués de manière volontaire ou involontaire et variation de la dimension de l'espace d'état continu.

On doit cependant supposer que la construction de la fonction de transition discrète rend le système déterministe et causal. Le système est déterministe au sens où la connaissance des conditions initiales $(x(t_0), q(t_0))$ à un instant donné t_0 est suffisante pour construire la trajectoire pour $t \geq t_0$ à partir d'une commande (u, d). La causalité correspond à l'unicité de la trajectoire pour des conditions initiales données et une commande donnée. Par conséquent, nous supposerons que la fonction de transition discrète ν ne peut produire à un instant donné t plusieurs transitions sur l'état discret q. Cette restriction n'interdit pas de considérer des variables internes à l'automate pour lesquelles plusieurs transitions discrètes pourraient être franchies au même instant, du moment que ces transitions simultanées sont transparentes vis à vis de q.

Posons $[t_0 = a, t_1, ..., t_i, ..., t_m = b]$ et $[q_0, q_1, ..., q_i, ..., q_m]$ (b peut être infini ainsi que m dans ce cas) les suites respectivement des instants de commutation et des modes associés à la commande $(u, d)(.)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

On peut alors définir un critère hybride par :

$$J(u, d) = \int_a^b L_{q(t)}(x(t), u(t), t)dt \tag{4}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{q_i}(x(t), u(t), t)dt \tag{5}$$

Une commande optimale $(u, d)(.)$ est alors une commande qui minimise J sur l'intervalle $[a, b]$.

La formulation du critère que nous venons de donner n'est pas la plus générale mais l'est suffisamment pour pouvoir illustrer les difficultés liées à la résolution d'un problème de commande optimale hybride. Nous aurions pu entre autre ajouter au critère des coûts associés aux transitions d'état discret et des coûts initial et terminal. On peut également à l'instar de l'état x inclure des sauts sur la variable t.

Dans cet esprit de simplicité, nous supposerons que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall q$, U_q est borné,
2. $\forall q$, f_q et L_q sont de classe C^1,
3. $\forall q$, q', $\Phi_{(q,q')}$ et $C_{(q,q')}$ sont de classe C^1.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter deux résultats théoriques énonçant des conditions nécessaires.

B. La programmation dynamique et les équations HJB

Les premiers travaux sur la commande optimale qui s'inscrivent dans le cadre général des systèmes hybrides sont dus à Branicky [3]. La formulation que nous donnons est une adaptation du résultat original au problème que nous venons de décrire.

Théorème 1 : Si une trajectoire admissible $(x, q)(.)$ déterminée par la donnée de la condition initiale $(x_0, q_0)(.)$, de la commande $(u, d)(.)$, est optimale alors les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) pour presque tout $t \in [a, b]$,

$$\frac{\partial V(x(t), q(t), t, b)}{\partial t} = -\inf_u \{L_{q(t)}(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial V(x(t), q(t), t, b)}{\partial x}\right]^T f_{q(t)}(x(t), u(t), t)\} \tag{6}$$

(b) pour presque tout t et pour tout $d \in \underline{D}$

$$V(x(t), q(t), t, b) \leq V(x', q', t, b) \tag{7}$$

avec

$$q' = \nu(x(t), q(t), d, t)$$
$$x' = \Phi_{(q,q')}(x(t), t)$$

Ces équations reposent sur le principe d'optimalité de Bellman : (6) est l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et (7) est une application directe du principe de programmation dynamique.

C. Le principe du maximum

Le principe du maximum (PM) [13] est un principe qui peut être appliqué sur des problèmes d'optimisation comportant des conditions spécifiques et techniques variées (frontières, temps final libre, contraintes, etc.). Ainsi et suivant les hypothèses de régularité faites sur les données, plusieurs versions du PM peuvent être énoncées. Nous avons volontairement choisi dans notre formulation ((1), (2), (3) et (4)) des hypothèses fortes sur la régularité des données afin de ne pas masquer sous une technicité mathématique trop importante les problèmes posés par une formulation hybride. Pour des hypothèses faibles, nous renvoyons aux travaux de Sussmann [1]. La clé permettant d'intégrer les transitions discrètes et de formuler une version hybride de ce principe est encore une fois le principe de Bellmann et la programmation dynamique.

Considérons pour chaque mode q la fonction Hamiltonienne :

$$H_q(p, p_0, x, u, t) = p^T f_q(x, u_q, t) - p_0 L_q(x, u_q, t) \tag{8}$$

et le système Hamiltonien associé

$$\dot{x} = \frac{\partial H_q}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H_q}{\partial x} \tag{9}$$

avec p_0 une constante positive ou nulle ($p_0 \geq 0$) et p la variable adjointe.

Théorème 2 : Si $(u^*, d^*)(.)$ et $(x^*, q^*)(.)$ sont respectivement une commande optimale admissible et la trajectoire associée pour le problème (1), (2), (3) et (4), alors il existe une fonction continue par morceaux $p^*(.)$ et une constante $p_0^* \geq 0$, $(p_0^*, p^*(t)) \neq (0, \mathbf{0})$ sur $[a, b]$, telles que :

1. le sixtuplet $(p^*, p_0^*, x^*, q^*, u^*, d^*)(.)$ satisfait le système Hamiltonien associé (9) presque partout

2. Pour tout t, $(p^*, p_0^*, x^*, q^*)(t)$ vérifie la condition de maximum :

$$H_{q^*}(p^*, p_0^*, x^*, u^*, t) = \sup_{u \in U_{q^*}} H_{q*}(p^*, p_0^*, x^*, u, t) \tag{10}$$

3. Aux instants de commutation t_i, $i = 0, \ldots, m$, les conditions de transversalité sont satisfaites :

Il existe un vecteur π_i^* tel que

$$p^*(t_i^-) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \Phi^T_{(q_{i-1},q_i)}(x(t_i^-),t_i)}{\partial x} & 0 \end{array}\right] \nabla V_{q_i}(x(t_i^+), t_i) + \frac{\partial C^T_{(q_{i-1},q_i)}(x(t_i^-), t_i)}{\partial x} \pi_i^* \tag{11}$$

$$H^*(t_i^-) = -\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \Phi^T_{(q_{i-1},q_i)}(x(t_i^-),t_i)}{\partial t} & 1 \end{array}\right] \nabla V_{q_i}(x(t_i^+), t_i) - \frac{\partial C^T_{(q_{i-1},q_i)}(x(t_i^-), t_i)}{\partial t} \pi_i^* \tag{12}$$

avec $\nabla V_{q_i}(x(t_i^+), t_i) = \left[\begin{array}{cc} p^{*T}(t_i^+) & -H^*(t_i^+) \end{array}\right]^T$.

Remarque 1: Les notations dans (11), (12) impliquent : $\pi_i^* = 0$ si t_i est un instant de commutation sans condition aux frontières.

Remarque 2: Les équations (11) et (12) doivent être adaptées si des contraintes sur l'état (x, q) à l'instant initial $t = a$ et final $t = b$ sont imposées.(voir formulation classique du PM)

Remarque 3: Comme l'état $x(.)$, la variable adjointe $p(.)$ est de différentes dimensions suivant le sous système actif. On trouvera une démonstration de ce théorème dans [2].

III. L'apport pratique

Les apports actuels se limitent pour l'essentiel aux systèmes commutés c'est à dire sans saut sur la variable d'état continue. De ce fait, l'espace d'état continu est assimilé à une partie de $\mathbb{R}^n$. Dans de rares cas, il est conservé une contrainte spatiale (de type $C_{(q,q')}$) sur les modes atteignables q' depuis un état discret q (voir ci-dessous [6], [5], [2], [11]) mais en règle général le choix de l'état discret n'est pas assujetti à l'état continu.

A. les systèmes commutés sans contrainte

La résolution d'un problème de commande optimale dans le cadre d'un système commuté sans contrainte spatiale ou temporelle, revient à déterminer à la fois une suite optimale comportant les instants de commutation et les modes empruntés et une commande optimale continue associée au mode actif. Ce problème bien que restreint peut être qualifié de difficile.

Dans un papier récent [4], les auteurs proposent une approche originale : Pour une séquence de modes imposée, le problème consistant à déterminer les instants de commutations optimaux est transformé en un problème aux conditions initiales où les instants de commutation sont fixés. L'idée consiste à normaliser la longueur de l'intervalle de temps séparant deux instants de commutation à l'aide d'un changement de variable et par l'introduction de variables supplémentaires. Les instants de commutations sont alors fixés et les degrés de liberté se reportent sur le choix des conditions initiales pour les variables supplémentaires introduites.

Cette technique suppose que le nombre de commutations ainsi que la séquence des modes sont fixés. Les auteurs de cet article proposent alors de faire varier ces paramètres pour établir la meilleure séquence. Il est évidemment souligné le risque d'une explosion des coûts de calcul entraînée par la combinatoire. L'application de ce résultat sur un critère quadratique est exposée dans la suite de cet article.

Pour la même problématique, une approche a également été développée dans [7], [8], [9] à l'aide du PM. Nous y faisons l'observation suivante : la dynamique d'un système commuté sans contrainte spatiale ou temporelle peut être décrite par un système continu unique :

$$\dot{x}(t) = \sum_{q=1}^{Q} \alpha_q(t) f_q(x(t), u(t), t) \in \mathbb{R}^n \qquad (13)$$

avec $\alpha_q(t) \in \{0,1\}$ et $\sum_{q=1}^{Q} \alpha_q(t) = 1, \forall t$. En effet, dans cette situation comme la fonction de transition discrète (2) se réduit à $q(t^+) \equiv d(t)$ avec un ensemble de commandes discrètes égal à $\underline{D} = \underline{Q}$, on peut parfaitement se ramener à la forme (13). A chaque instant, le sous système actif est donc sélectionné via la commande α_q.

L'application du PM montre alors que la stratégie de commutation doit satisfaire la condition :

A chaque instant t, le quadruplet $(p^*, p_0^*, x^*, q^*)(t)$ vérifie la condition de maximum :

$$H_{q^*}(p^*, p_0^*, x^*, u^*, t) = \max_{q \in \underline{Q}} \sup_{u \in U_q} H_q(p^*, p_0^*, x^*, u, t) \qquad (14)$$

Cette relation signifie que le sous système actif à chaque instant est celui qui possède le plus grand Hamiltonien.

La recherche des instants de commutation est alors déterminée par l'étude des différences $H_q(p^*, p_0^*, x^*, u^*, t) - H_{q'}(p^*, p_0^*, x^*, u^*, t)$ pour la donnée de l'état (x^*, q^*) et de la commande optimale u^* à un instant t. Il est alors montré que lorsque les champs f_q sont linéaires, la différence ci-dessus satisfait une équation différentielle dont on connaît la solution. La condition de maximum (14) implique qu'une condition de saut du mode q vers le mode q' est satisfaite lorsque cette différence s'annule et devient négative. L'exploitation de ce résultat nous a permis de déterminer la commande optimale pour un critère en temps optimal sur un système commuté d'ordre deux avec deux modes de fonctionnement [8]. Il a été également possible d'établir une généralisation de la commande linéaire quadratique à ces systèmes [7]. La commande stabilisante est alors déterminée par la résolution d'une séquence d'équations différentielles de Riccati avec, aux instants de commutation, l'établissement de conditions de passage à partir des conditions de transversalité. Un exemple illustratif clos ce dernier article. Une extension au problème du rejet de perturbations de type H_∞ est exposée dans [18]. La solution repose sur l'utilisation de la théorie des jeux différentielles non coopératifs où la fonction coût est C^1 par morceaux.

On peut signaler que de nombreux travaux abordent le problème de la stabilité des systèmes hybrides ([19], [20], [21], [22], [23] ...). Parmi ceux-ci la recherche de fonctions de Lyapunov particulières par la résolution d'inégalités matricielles linéaires peut, malgré un certain conservatisme des résultats, s'avèrer intéressante d'un point de vue pratique. La commande obtenue est alors sous optimale mais, lorsque ces conditions suffisantes s'appliquent, elle est facile à déterminer.

B. Des exemples plus généraux

Parmi les très rares exemples qui intègrent des contraintes spatiales sur les modes disponibles, le cas d'un système monodimensionnel avec un phénomène d'hystérésis a été résolu par les deux approches théoriques proposées dans [3] et [9].

Un exemple simple où une discontinuité de champs de vecteur intervient le long d'une droite, est également proposé pour illustrer l'article de Sussmann [1] par Piccoli [11].

Un autre exemple simple et complet (avec saut sur la variable d'état et changement de dimension) est présenté dans [2] et permet d'illustrer sur un critère en temps optimal la version hybride du PM.

Pour un problème simplifié ne comportant que des sauts commandés, S. Hedlund et A. Rantzer [6] présentent une méthode de discrétisation dans $\mathbb{R}^2$. L'approche basée sur un algorithme de programmation linéaire conduit à un problème d'optimisation convexe et l'estimation du critère est déterminée par une borne inférieure et supérieure. Deux exemples sont présentés pour illustration.

Un algorithme utilisé en mécanique des fluides et basé sur la détermination des lignes de niveaux est adapté dans [24] pour des problèmes hybrides de recherche de chemin en temps optimal.

Signalons enfin pour des systèmes continus discrétisés en temps, qu'un nouvel algorithme de programmation dynamique sous contraintes est proposé dans [25]. Les auteurs y soulignent les difficultés rencontrées pour faire converger les algorithmes continus classiques en raison des discontinuités engendrées par la dynamique discrète. La méthode consiste à limiter les commutations intempestives à l'aide de contraintes sur l'état. La commande optimale est obtenue en relâchant progressivement ces contraintes.

Toujours pour des systèmes décrit par des équations de récurrence mais dans le cas linéaire, on peut consulter les différents travaux de l'équipe de Morari [26]. Le choix de modélisation fait n'entre pas dans la problématique développée dans notre article mais les résultats obtenus dans ce contexte (systèmes linéaires en temps discret) n'en sont pas moins dignes d'intérêt.

IV. Les difficultés de la pratique

Comme nous venons de le voir, il n'existe pas parmi les résultats théoriques de méthodes constructives pour obtenir une commande optimale. Les seuls résultats se limitent soit à des exemples académiques non représentatifs de la complexité des systèmes réels, soit à la classe des systèmes commutés.

A quoi tient cette absence méthodologique ? c'est à cette question que nous allons tenter de répondre à présent.

Quel que soit l'approche privilégiée, l'examen des conditions nécessaires révèlent un certain nombres de difficultés.

Si l'on se base sur les équations d'HJB et sur la programmation dynamique, la résolution de l'équation aux dérivées partielles (6) nécessite une discrétisation spatiale et temporelle. Résoudre les équations d'HJB (6) revient donc à estimer la fonction coût V aux points d'intersection de la grille de discrétisation. Hélas, la possible discontinuité de la fonction de coût V par rapport à x et t est un obstacle à la résolution qu'il n'est pas aisé de lever. A cela, il faut bien sûr ajouter la satisfaction de la condition d'optimalité (7).

Notons que le PM revient également à résoudre (6) mais dans des directions privilégiées correspondant aux trajectoires optimales et pour lesquelles la continuité de V est assurée.

Une littérature abondante sur la résolution des équations d'HJB existe en présence de commutations et de commande impulsionnelle [16], [27]. Une adaptation de ces résultats au cas hybride a été proposée dans [5] et différents algorithmes suggérés. Mais l'examen critique de ces résultats ne laisse pas transparaître une praticabilité évidente due essentiellement à la condition (7). Seuls deux des quatres algorithmes proposés sont réellement testés sur l'exemple simple de l'hystérésis et la solution obtenue n'est que partielle comme nous l'avons souligné dans [28]. Néanmoins nous pensons qu'il existe des pistes dans cette voie [6].

Si maintenant on s'intéresse au PM, on peut avoir à résoudre dans sa forme classique un problème aux frontières c'est à dire à intégrer un système différentiel où les conditions "initiales" se partagent aux deux bouts de l'intervalle. Dans le cas hybride, on peut observer que les conditions nécessaires conduisent à un problème aux frontières multiples puisque ces conditions "initiales" se partagent non seulement aux deux bouts de l'intervalle mais également aux instants de commutations. L'usage et la mise en oeuvre d'algorithmes classiques est alors notoirement plus difficile que dans la cas continu : d'une part pour l'initialisation de l'algorithme et d'autre part pour la détection des instants de commutation. Par exemple et pour l'initialisation du problème avec hystérésis mentionné plus haut [28], il s'avère que les valeurs initiales de la variable adjointe menant à une valeur finie de la fonction coût et à une trajectoire bornée est une suite de points de la droite réelle. Quelle chance a-t-on dans ces conditions de faire converger un algorithme ?

Les conditions de transversalité nous fournissent à chaque instant de commutation une relation entre les limites à gauche et à droite de la fonction Hamiltonienne et de la variable adjointe. Mais aucune information n'est disponible sur l'instant et le lieu où se produit la commutation. La raison est naturellement liée à la dynamique discrète. La clé pour construire la solution est alors la programmation dynamique. Mais la tâche peut être particulièrement difficile en pratique puisque une bifurcation doit être envisagée dans la trajectoire à chaque instant où une transition discrète est autorisée. De plus, le degré de liberté dans le choix de π_i aux instants de commutations conduit également vers un choix multiples de trajectoires. On le voit la tâche peut vite se révéler comme infaisable.

Cependant dans la pratique, de nombreux problèmes peuvent se limiter à des solutions optimales pour un nombre fixé de commutations et/ou une séquence fixée de modes de fonctionnement. Comme les conditions nécessaires énoncées le sont dans le cas général, le nombre total de commutations et l'ordre des modes actifs apparaissent comme a priori inconnus. On peut cependant les imposer : cela dépend uniquement de la manière dont la fonction de transition discrète ν est spécifiée. Par exemple si l'on veut imposer l'ordre des modes actifs, l'automate devra être construit de telle sorte que seule la séquence recherchée existe. Pour spécifier le nombre de commutations, on écrira un arbre avec le bon degré de profondeur. Enfin notons que les contraintes $C_{q,q'}$ peuvent être utilisées pour imposer l'instant de commutation.

V. Conclusion

Ce tour d'horizon sur la commande optimale des systèmes hybrides montre que les résultats théoriques classiques sur la commande optimale des systèmes continus avec les équations Hamilton-Jacobi-Bellmann ou le principe du maximum, ont pu être étendus au cas hybride. Ces nouvelles versions font intervenir le principe de Bellmann et notamment la programmation dynamique afin de pouvoir incorporer les phénomènes discrets de discontinuité. On retrouve alors pleinement les difficultés liées à la résolution des problèmes optimaux discrets et continus mais ces difficultés sont décuplées par l'imbrication des deux problèmes.

Du point de vue numérique, des efforts importants sont faits pour parvenir à une mise en oeuvre pratique. Les résultats pour l'instant se limitent en grande partie aux systèmes commutés sans contrainte et intègrent progressivement les difficultés.

De notre point de vue, l'extrême rudesse des conditions nécessaires énoncées et leur généralité ne permettront pas d'apporter une solution numérique globale. Devant cette diversité de situations, le développement de schémas numériques et de méthodes de résolution devront très certainement se faire en fonction du contexte spécifique à la formulation du problème de commande.

Références

[1] H.J. Sussmann, A maximum principle for hybrid optimal control problems, proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control,pp 425-430, 1999.

[2] P. Riedinger, C. Iung, F. Kratz, An Optimal Control Approach for Hybrid Systems, soumis à European Journal of Control et rapport interne CRAN, 2000.

[3] M. S. Branicky, V. S. Borkar S. K. Mitter, A Unified Framework for Hybrid Control : Model and Optimal Control Theory,*IEEE Trans. on Aut. Cont.,* vol(43)(1), 1998.

[4] X. Xu, P. J. Antsaklis, An approach for solving General switched Linear Quadratic Optimal Control Problems, proc. 40th IEEE Conf. on Decision and Control, 2001.

[5] M. S. Branicky, S. K. Mitter (1998), Algorithms for Optimal Control, proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp 2661-2666, 1995.

[6] Hedlund S. et Rantzer A., Optimal Control of Hybrid Systems, Proceedings of 38th IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix, 1999.

[7] P. Riedinger, F. Kratz, C. Iung, C. Zanne, Linear Quadratic Optimization for Hybrid Systems, proc. IEEE Conf. on Decision and Control, 3059-3064, 1999.

[8] P. Riedinger, C. Zanne F. Kratz, Time Optimal Control of Hybrid Systems, proc. American Control Conference, 2466-2470, 1999.

[9] P. Riedinger, C. Iung , Optimal Control for Hybrid Systems : An Hysteresis Example, proc.IEEE System, Man and Cybernetics, I.188-I.193, 1999.

[10] Manon P., Valentin-Roubinet C., Gilles G., Optimal control of non linear hybrid systems with the maximum principle : application to a chemical process, Proceedings of the IEEE Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.

[11] B. Piccoli, Necessary conditions for Hybrid Optimization, proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control,pp 410-415, 1999.

[12] C. G. Cassandras, Q. Liu, K. Gokbayrak, Optimal Control of a two stage hybrid manufacturing system model, proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control,pp 450-455, 1999.

[13] L.S. Pontryagin,V. G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze & E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes,* Pergamon, 1964.

[14] A. E. Bryson & Y.C. Ho, *Applied Optimal Control*, Gin and Co, 1969.

[15] P. Dyer, S.R. McReynolds, On optimal control problems with discontinuities, J. of Math. Anal. and Appl.,vol(23) pp 585-603, 1968.

[16] J.Yong, Systems governed by ordinary differential equations with continuous, switching and impulse controls, Appl. Math. Optim. pp 223-235 vol 20, 1989.

[17] I. Capuzzo Dolcetta and L. C. Evans, Optimal switching for ordinary differential equations, SIAM Journal of Control and Optim., vol (22)1 pp 143-161, 1984.

[18] J. Daafouz, P. Riedinger, Disturbance Attenuation Control for a Class of Hybrid Systems, proc. ECC, 2001.

[19] A. Rantzer, Piecewise Linear Quadratic Optimal Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, April 2000.

[20] M. Johansson, Piecewise Linear Control Systems, Ph. D. Dissertation, Lund Inst. of Tech. Sweden, 1999.

[21] L. Hou, A. N. Michel, Stability Analysis of a general class of hybrid dynamical systems, proc. American Control Conference, pp. 2805-2809, 1997.

[22] B. Hu, X. Xu, A.N. Michel, P.J. Antsaklis, Robust Stabilizing Control Laws for a Class of Second-order Switching Systems, proc. American Control Conf., pp. 2960-2964, 1999.

[23] J. Daafouz, P. Riedinger, C. Iung, Static Output Feedback Control for Switched Systems, proc. Conference on Decision and Control, Orlando, 2001.

[24] M. S. Branicky, R. Hebbar, G. Zhang, A fast marching algorithm for hybrid systems, in proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control, pp4897-4902, 1999.

[25] J. Lu, L. Liao, A. Nerode and J.H. Taylor. Optimal Control of Systems with Continuous and Discrete States, proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control , pp2292-2297, San Antonio, Texas- Dec. 92.

[26] A. Bemporad, M. Morari, Control of systems integrating logic, dynamics and constraints *Automatica*, vol(35)3 pp 407-428, 1999.

[27] Bensoussan A. et Lions J. L., Impulse Control and Quasi-Variational Equalities, Gauthier Villars, Paris 1984.

[28] J. Zaytoon et al. *Systèmes Dynamiques Hybrides*, Hermes Sciences, 2001.