

# Synthèse de commandes optimales pour les systèmes commutés cycliques. Applications aux convertisseurs de puissance.

Diego PATINO, Pierre RIEDINGER, Claude IUNG

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)  
Nancy-Université, 2, avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France.

{patino.diego, pierre.riedinger, claudie.iung}@ensem.inpl-nancy.fr

*Résumé*— Cet article considère le problème de la commande optimale pour la classe des systèmes commutés affines à fonctionnement cyclique. Une méthode est proposée pour générer la commande sous la forme d'un retour d'état. Il est montré que cette synthèse passe par le calcul d'arcs singuliers. Une condition algébrique simple est énoncée pour effectuer ce calcul. Deux exemples de convertisseurs sont utilisés à titre d'illustration sur des critères quadratiques et temps optimal.

*Mots-clés*— Systèmes commutés affines, retour d'état, commande optimale, arcs singuliers.

## I. INTRODUCTION

Une classe particulièrement importante de Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) en terme d'applications est formée par ceux qui présentent un régime permanent cyclique. Les moteurs thermiques des automobiles entrent dans cette classe. On y trouve aussi les convertisseurs de puissance. Ce sont des dispositifs chargés d'assurer une alimentation convenable à un appareil électrique par conversion et adaptation de la forme d'un signal électrique (tension / courant / fréquence) issue d'une source. Cette modulation est obtenue en utilisant des technologies à base de semi-conducteurs dont les commutations de modes (ouverture et fermeture des interrupteurs) à fréquences élevées vont permettre de "découper" un courant ou une tension. Le pilotage d'un convertisseur est donc obtenu par la modification à haute fréquence de la topologie d'un circuit électrique. Ce sont sans doute les convertisseurs de puissance qui ont donné naissance au plus grand nombre d'études liées au contrôle de cette classe de système hybride.

La communauté électrotechnique connaît bien ces dispositifs et a très souvent trouvé des solutions industriellement satisfaisantes sur les problèmes qui lui étaient posés. Cependant les démarches restent souvent dédiées à une application donnée et souffrent d'un manque de généralité.

Habituellement, l'analyse de ces systèmes est réalisée grâce à l'utilisation de modèle moyen ou des approximations type "petits signaux" [1], [2]. Les techniques de moyennisation sont commodes à utiliser et sont valides si la moyenne est prise sur un intervalle qui est petit par rapport à la dynamique du système. Un inconvénient réside alors

dans le fait qu'elles gomment les hautes fréquences et en particulier l'effet des commutations. Ainsi, la forme d'onde peut présenter un contenu harmonique non désirable avec des inter-harmoniques et sous harmoniques de la fréquence de découpage.

On peut également citer les méthodes discrètes qui utilisent le modèle échantillonné tangent [3], [4], [5]. Le modèle récurrent est alors difficile à établir car très souvent implicite. De plus, les schémas de commandes utilisant cette technique ne préservent pas les signaux de fortes ondulations entre les instants de commutations [6]. Il existe de nombreux cas où ces techniques classiques sont insuffisantes voire inopérantes [7].

Notons encore que l'implémentation des lois obtenues est réalisée généralement par une Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI) qui, bien qu'ayant apportée des résultats satisfaisants concernant le contenu harmonique des signaux, se prive de degrés de liberté et gouverne les commutations d'une manière trop rigide. Une voie qui reçoit un écho très favorable de la communauté des électrotechniciens, est celle qui consiste à commander directement les différents modes avec à la clé la possibilité d'améliorer considérablement les performances dynamiques. Cette voie passe par l'application des techniques hybrides à cette classe de systèmes.

A notre connaissance, la commande optimale de cette classe de systèmes n'a pas été abordée directement. Pour une formulation en temps discret, on peut mentionner les approches type MLD (Mix Logical Dynamic) [8], [9] et à base de programmation dynamique [10] dont les limites semblent être principalement liées à la charge de calcul. Indirectement, la souplesse d'utilisation de la commande prédictive avec la prise en compte de contraintes apporte aujourd'hui des solutions satisfaisantes [11][12][13].

Cet article a pour objectif de montrer qu'il est possible d'implémenter en temps réel des lois de commandes optimales. La synthèse de ces lois que nous obtenons sous la forme d'un retour d'état et non sous la forme d'une boucle ouverte, garantit la très haute performance.

Le problème de commande que nous cherchons à résoudre est la minimisation d'un critère intégral sous la contrainte d'une dynamique donnée par un système affine

en la commande :

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^T L(z) dt \quad (1)$$

sous la contrainte  $\dot{z}(t) = r(z(t)) + s(z(t))u(t)$   
 $z(0) = z_0 \quad u(t) \in U = \{0, 1\}^m$

où  $z \in \mathbb{R}^\nu$  est l'état,  $L(z) : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de performance,  $T$  le temps final.

Une particularité du système est que la commande  $u(\cdot)$  est un vecteur booléen de dimension  $m$  et correspond aux différentes topologies ou modes du système. Nous supposons que  $u(t)$  peut être choisi librement dans l'ensemble  $U = \{0, 1\}^m$ .

Pour résoudre ce problème, on utilise les conditions nécessaires fournies par le principe du minimum. Malheureusement, la présence potentielle d'arcs "singuliers" dans la solution complique cette synthèse. L'obtention de la solution passe alors par détermination de ces arcs singuliers qui forment généralement des surfaces dans l'espace d'état. Nous montrons comment il est possible de les déterminer en résolvant une condition algébrique et des conditions d'ordre deux.

Depuis ces solutions singulières, il est alors possible de générer numériquement en temps rétrograde l'ensemble des trajectoires finissant sur le point d'équilibre choisi.

On achève alors la synthèse par une interpolation des solutions au moyen d'un réseau de neurones. L'implémentation en ligne est alors simplement réalisée sous la forme d'une commande par retour d'état  $u(x)$  en évaluant la fonction d'interpolation.

Dans la prochaine section, par soucis de clarté et de simplicité, nous reformulons le problème de commande (1) sous la forme d'un problème de Mayer et rappelons les conditions nécessaires que doit satisfaire la solution.

En section 3, nous revenons sur l'essentiel de la théorie concernant les arcs singuliers et rappelons les conditions de second ordre qui leur sont attachées. Nous montrons alors comment déterminer ces arcs par la résolution d'une simple condition algébrique.

La section 4 est dédiée à la synthèse des solutions optimales sous la forme d'un retour d'état. La méthode est illustrée sur deux exemples de convertisseurs.

## II. FORMULATION DU PROBLÈME ET CONDITIONS NÉCESSAIRES D'OPTIMALITÉ

Nous commençons par transformer le problème de Lagrange initial sous une forme de Mayer en utilisant une variable additionnelle  $x_n(t) = \int_0^t L(z(\tau))d\tau$ . Nous définissons :

$$\begin{aligned} x(t) &= [z^T(t), x_n(t)]^T \\ x_0 &= [z_0^T, 0]^T \\ f(x(t)) &= [r^T(z(t)), L(z(t))]^T \\ g(x(t)) &= [s^T(z(t)), 0]^T \end{aligned}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ , ( $n = \nu + 1$ ).

Dans ce cas, (1) prends la forme général :

$$\min_{u(\cdot)} x_n(T) \quad (2)$$

s.t.  $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$   
 $x(0) = x_0 \quad u(t) \in U = \{0, 1\}^m$

Nous supposons par la suite qu'il n'existe pas de restriction sur la loi de commutation  $u(\cdot)$  (pas de contrainte en temps ni en espace).

On observe facilement que la fonction Hamiltonienne  $H$  du problème (2) présente une dépendance affine vis à vis de la commande  $u$  :

$$H = H(\lambda(t), x(t), u(t)) \quad (3)$$

$$= \lambda^T(t)f(x(t)) + \lambda^T(t)g(x(t))u(t) \quad (4)$$

où  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$  représente la variable adjointe et  $\lambda_n \geq 0$ .

Le principe du minimum s'énonce pour le système affine commuté (2) par :

*Théorème 1:* Soit  $(x^*, u^*)$  une solution de (2). Alors il existe  $\lambda^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  non identiquement nulle, avec :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (5)$$

pour presque tout  $t \in [0, T]$ , telle que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. La commande minimise l'hamiltonien :

$$H^* = H(\lambda^*, x^*, u^*) = \min_{u \in U} H(\lambda^*, x^*, u) \quad (6)$$

2. pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$H^*(t) = C \quad (7)$$

avec  $C = 0$  si  $T$  est libre.

3.  $\lambda$  vérifient les conditions aux limites

$$\lambda^*(0) \text{ libre} \quad \lambda^*(T) = [0, \dots, 0, 1]^T \quad (8)$$

C'est une application directe du principe du minimum.

L'utilisation de ce théorème pré-suppose l'existence d'une solution. Comme nous le mentionnons dans [14], cette hypothèse est liée à l'existence d'une solution bang-bang pour le problème relaxé obtenu en considérant l'enveloppe convexe du domaine de commande [15].

$$co(U) = \{u \in [0, 1]^m\} \quad (9)$$

En effet, les théorèmes classiques d'existence de solutions optimales utilisent des hypothèses de convexité pour établir des conditions suffisantes d'existence [16]. En relâchant le domaine de commande à (9), on peut certifier l'existence d'une solution [17],[18].

Considérons une solution obtenue avec (9) et supposons qu'il existe un intervalle de temps  $[a, b]$ ,  $b > a$  tel que pour tout  $t \in [a, b]$ , cette solution  $u$  prenne ces valeurs dans l'ensemble  $co(U) \setminus U$ . Bien que cette solution  $u$  ne puisse s'appliquer au problème initial (2), on peut néanmoins l'approcher d'aussi près que l'on veut par valeur moyenne en commutant suffisamment vite (chattering control) [19].

On a donc intérêt à envisager toutes les solutions prises sur le problème relaxé (9) pour lequel l'existence d'une solution peut être garantie puis de s'en approcher par mode glissant.

Depuis la condition (6) du principe de minimum, il est clair que la loi de commutation est déterminée par le signe de  $\phi(t)$ , où :

$$\phi(t) = \lambda^T(t)g(x(t))$$

On appelle  $\phi(t)$  la fonction de commutation.

Un problème peut alors survenir lorsque  $\phi(t)$  s'annule identiquement sur un intervalle de temps  $[a, b]$ ,  $b > a$ .

Le principe du minimum ne permet pas alors de déterminer la valeur de la commande  $u$ . Cette situation fait référence à ce qui est connu sous le vocable d'arc singulier [20] et elle correspond précisément au cas où  $u \in \text{co}(U) \setminus U$ .

Une autre bonne raison plaide également pour la recherche d'arcs singuliers sur ces systèmes : le point d'équilibre en régime permanent est généralement une valeur moyenne que l'on détermine sur l'enveloppe convexe

$$X_{ref} = \{x_{ref} \in \mathbb{R}^n : f(x_{ref}) + g(x_{ref})u_{ref} = 0, u_{ref} \in \text{co}(U)\} \quad (10)$$

Comme aucun mode ne permet de maintenir le système sur cette référence  $x_{ref}$ , le système effectue un cycle autour en approchant  $u_{ref}$  par valeur moyenne.

### III. ARCS SINGULIERS

#### .1 Condition d'ordre deux

Cette section décrit un cas particulier obtenu dans la résolution de (2). Une littérature importante existe sur le sujet [20], [21], [22], [23], [24], [25].

Notre but est d'en résumer les principaux résultats et de montrer comment les utiliser pour réaliser une détermination explicite des arcs singuliers en résolvant une équation algébrique. Par simplicité, nous supposons que  $m = 1$  par la suite.

*Définition 2:* Si  $(x, \lambda, u)$  est une extrémale (solution vérifiant les conditions nécessaires du PM) pour (2) telle que

$$\phi(t) = H_u \equiv 0$$

sur un intervalle  $[a, b] \subset T$ ,  $a < b$  alors l'extrémale est dite singulière sur cet intervalle [21], [22], [23]. ( $H_u := \frac{\partial}{\partial u} H$ )

Dans cette situation, la condition de minimum ne permet pas d'établir cette commande et on peut rechercher des conditions supplémentaires par dérivation de  $\phi(t)$  i.e.  $\frac{d}{dt}\phi(t) = 0, \frac{d^2}{dt^2}\phi(t) = 0, \dots$

On définit alors les grandeurs suivantes :

*Définition 3:* L'ordre du problème est le plus petit entier  $q$  tel que  $u$  apparaît explicitement dans la dérivée  $\phi^{(2q)}$ . Le calcul s'effectue en substituant  $\dot{x}$  et  $\dot{\lambda}$  par leur expression données par (5). ( $\phi^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k}\phi(t)$ ) est la dérivée d'ordre  $k$  par rapport au temps  $t$ ) [20], [23].

Dans notre cas, comme le problème est linéaire en  $u$ , la commande entre linéairement dans l'expression et on a :

$$\phi^{(2q)} = A(x, \lambda) + B(x, \lambda)u \quad (11)$$

*Définition 4:* Si  $(x^*, \lambda^*, u^*)$  est une extrémale pour (2) définie sur  $[a, b] \subset T$ . L'ordre de l'arc  $(x^*, \lambda^*, u^*)$  est le plus

petit entier  $p$  tel que  $(\phi^{(2p)})_u = ((H_u)^{(2p)})_u(x^*, \lambda^*, u^*) \neq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$

L'ordre de l'arc dépend de l'extrémale  $(x^*, \lambda^*, u^*)$  et est différent de l'ordre du problème si  $B(x^*, \lambda^*) = 0$ .

Lorsque l'ordre de l'arc est déterminé, la commande s'exprime comme une fonction différentiable de la forme

$$u = -A(x, \lambda)/B(x, \lambda) \quad (12)$$

et les dérivées d'ordres supérieures de  $\phi$  permettent d'établir les équations différentielles non linéaires suivies par  $u$  et ces dérivées mais aucune information supplémentaire n'est obtenue pour la détermination des  $x$  et  $\lambda$  candidats.

Pour des systèmes affines en la commande, l'ensemble de ces conditions dérivées de (6) conduit aux expressions :

$$\lambda^T \text{ad}_f^k g(x) = 0, k = 0, \dots, 2q - 1 \quad (13)$$

$$\lambda^T \text{ad}_f^{2q} g(x) + \lambda^T [g, \text{ad}_f^{2q-1} g](x)u = 0$$

où  $[f, g](x) := g_x(x)f(x) - f_x(x)g(x)$  est le crochet de Lie et  $\text{ad}_f^k g(x) = [f(x), \text{ad}_f^{k-1} g(x)]$ ,  $\text{ad}_f^0 g(x) = g(x)$  le crochet itéré d'ordre  $k$  ( $g_x(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x)$ ,  $f_x(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ ).

Il est prouvé par ailleurs que :

*Proposition 5:*  $q$  est impaire,  $2q \leq n$  et les équations (13) sont linéairement indépendantes [23].

On dispose donc de  $2q + 1$  équations linéairement indépendantes et de  $2n + 1$  inconnues.

Parmi les solutions de cet ensemble (13), l'optimalité ne peut être vérifiée que si la condition d'ordre 2 suivante est validée :

*Théorème 6:* (Conditions de Legendre-Clebsch Généralisées, [20], [21]) Soit le problème (2). Si  $(x^*, \lambda^*, u^*)$  est une extrémale optimale avec un ordre d'arc  $p < +\infty$  sur  $[a, b]$ . Alors le long de  $(x^*, \lambda^*, u^*)$  le terme

$$(-1)^p ((H_u)^{(2p)})_u \geq 0 \quad (14)$$

pour tout  $t$  sur  $[a, b]$ .

#### .2 Obtention des arcs singuliers

Il n'est généralement pas simple de résoudre les équations non linéaires fournies par (13). Nous allons montrer à présent qu'il est possible de les résoudre en deux temps.

A partir du rang  $k = 2q$ , on peut observer que les dérivées de  $\phi^{(k)}$ ,  $k > 2q$  font intervenir les dérivées successives de  $u$  et les déterminent en fonction de  $(x, \lambda)$ . L'adjonction de ces dérivées n'apporte pas directement de conditions supplémentaires pour déterminer  $(x, \lambda)$ .

Remarque : les dérivées de  $u$  sont parfaitement justifiées par l'expression analytique (12).

En complétant (13) par ces dérivées  $\phi^{(k)}$  jusqu'à l'ordre  $k < n$ , le système (13) s'écrit de manière compacte :

$$\lambda^T [g(x), \text{ad}_f^1 g(x), \dots, \text{ad}_f^{2q-1} g(x), N_0, \dots, N_i, \dots, \dots, N_{n-2q-1}] = 0$$

avec pour  $i = 0, \dots, n - 2q - 1$

$$N_i(x, u) = ad_f^{2q+i} g(x) + \sum_{k=0}^i \Upsilon^{(i-k)}([g, ad_f^{2q+k-1} g](x)u(t)) \quad (15)$$

et

$$\Upsilon(*) = \left( (f(x) + ug(x)) \frac{\partial(*)}{\partial x} - f_x - u(t)g_x + \frac{\partial(*)}{\partial t} \right)$$

Comme  $\lambda$  n'est pas identiquement nul (voir le principe du minimum), on a la proposition :

*Théorème 7:* Le lieu de  $(x, u)$  est donné par l'équation algébrique

$$S(x, y_0, \dots, y_{(n-2q-1)}) = 0$$

où le vecteur  $(y_0, \dots, y_{(n-2q-1)}) = (u, \dot{u}, u^{(2)}, \dots, u^{(n-2q-1)})$  et

$$S = \det([g(x), ad_f^1 g(x), \dots, ad_f^{2q-1} g(x), N_0, N_1, \dots, \dots, N_{n-2q-1}]) \quad (16)$$

avec  $N_i(x, u)$  défini par (15)

La résolution formelle de  $S$  par un solveur est bien plus aisée que (13) et présente l'intérêt de réduire le nombre d'inconnues à  $2(n - q)$ .

*Proposition 8:* La démarche pour établir les arcs singuliers consiste à présent :

1. Résoudre (16)
2. Déterminer  $\lambda$  a posteriori via (13).
3. Éliminer les solutions qui ne vérifient pas (14).

#### IV. SYNTHÈSE DES TRAJECTOIRES OPTIMALES

Cette synthèse consiste à générer les trajectoires en temps rétrograde en utilisant les conditions aux limites ad hoc au problème. Cependant, une attention particulière doit être portée sur les éléments de surfaces singulières calculées au préalable.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le point d'équilibre  $x_{ref}$  est un point singulier. En effet, la (ou les) commande  $u_{ref}$  permettant un maintien sur le point d'équilibre  $x_{ref}$  ( $f(x_{ref}) + g(x_{ref})u_{ref} = 0$ ) n'est pas bang-bang.

On peut montrer qu'il existe une surface singulière (qui passe par  $x_{ref}$ ) dans  $\mathbb{R}^n$  formée de trajectoires singulières qui convergent vers  $x_{ref}$  (condition d'ordre deux).

Partant de cet élément de surface, on peut donc générer en temps rétrograde toutes les trajectoires aboutissant sur la surface. L'intégration se fait à partir des conditions ad hoc sur  $x$  et  $\lambda$  obtenues à la section précédente. La commande, elle, est choisie suivant la règle suivante : si la  $i$ ème composante  $u_i$  est singulière au point considéré, deux bifurcations avec  $u_i = 0$  ou  $1$  sont générés en respectant le principe du minimum.

Lors de cette intégration en temps rétrograde, il peut advenir que deux trajectoires se coupent dans l'espace d'état. Il n'y a plus unicité des extrémales candidates et dans ce cas on lève le conflit en évaluant le critère. La branche de coup le plus élevée est alors abandonnée. Pour un choix adéquat du temps  $T$  on parvient à couvrir l'ensemble du domaine de fonctionnement du système.

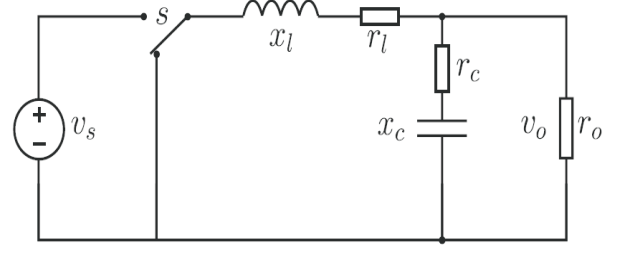


Fig. 1. Le convertisseur step down

*Remarque 9:* Pour les exemples que nous avons traités, la surface singulière déterminée par notre algorithme est unique et passe par le point d'équilibre. Néanmoins nous mettons en garde le lecteur sur la difficile gestion de situations théoriquement possibles où les trajectoires optimales alternent des portions singulière et régulières (junction times conditions [26]).

Pour un ensemble suffisamment dense de trajectoires optimales définies sur un pavé de  $\mathbb{R}^n$ , on utilise un réseau de neurones pour interpoler la solution optimale.

Le résultat est un retour d'état  $u(x)$  dont l'évaluation ne nécessite que le calcul d'un nombre limité de sommes et produits ce qui en fait une solution parfaitement implémentable en temps réel.

#### A. Exemple

##### A.1 Convertisseur Step-down

Considérons un convertisseur step down en mode de conduction continue (CCM) dont la topologie est donnée sur la figure 1 et où  $r_o$  modélise une charge résistive.

La dynamique de ce système dont les variables d'état sont le courant dans l'inductance et la tension  $v_o$  aux bornes de la charge est déterminée par l'équation :  $\dot{z} = Az + Bu$ ,  $u \in \{0, 1\}$  où  $A$  et  $B$  sont donnés par

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{r_l}{x_l} & -\frac{1}{x_l} \\ \frac{r_l r_c x_c r_o - r_o x_l}{x_c x_l (r_o + r_c)} & -\frac{r_o x_c r_c + x_l}{x_l x_c (r_o + r_c)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

et

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_l} v_s \\ -\frac{r_c r_o}{x_l (r_o + r_c)} v_s \end{bmatrix} \quad (18)$$

avec  $x_c := 100 \mu F$ ,  $x_l = 2 mH$ ,  $r_c := 0.15 \Omega$ ,  $r_l := 1 \Omega$ ,  $v_s := 50 V$  et  $r_o := 50 \Omega$ .

L'objectif de la régulation est de maintenir la tension de sortie  $v_o$  à 25 volts en présence de variations en échelon de l'entrée  $v_s$  et de la charge  $r_o$ .

Pour une référence donnée  $z_{ref} = [i_{l,ref}, v_{o,ref}]^T = [0.5, 25]^T$  (qui dépend de  $v_s$  et de  $r_o$ ) et pour un critère quadratique

$$J = \int_0^{+\infty} (z - z_{ref})^T Q (z - z_{ref}) dt$$

où  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$ ,  $f$  et  $g$  s'écrivent sous la forme :

$$f(x) = [Az, (z - z_{ref})^T Q (z - z_{ref})]^T \quad (19)$$

$$g(x) = [B, 0]^T \quad (20)$$

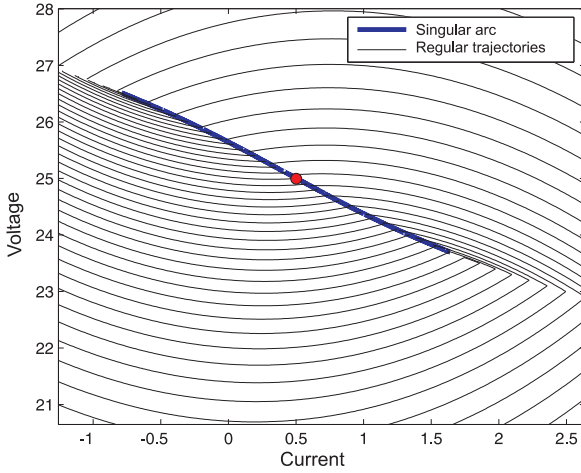


Fig. 2. Arcs singuliers et réguliers

Pour ce problème comme  $H = \lambda^T f + \lambda^T g u = 0, \forall t$ , on peut ajouter à l'équation de commutation  $\lambda^T g(x) = 0$ , l'équation  $\lambda^T f(x) = 0$  ce qui conduit à la condition (l'ordre du problème est  $q = 1$ ) sur  $x$  :

$$S = \det(f(x), g(x), [f, g](x)) = 0$$

la variable adjointe est déterminée par les solutions de

$$\lambda \perp \{f(x), g(x), [f, g](x)\}$$

et  $u$  découle de la dernière équation de (13)

$$u = -\lambda^T ad_f^2 g(x) / \lambda^T [g, ad_f^1 g](x)$$

De l'ensemble des candidates potentielles, la condition d'ordre 2 permet d'éliminer les portions d'arcs non optimaux. Par intégration en temps rétrograde, on obtient l'ensemble des trajectoires finissant au point d'équilibre (Figure 2). Notons que les portions singulières (en bleu sur la figure 2) correspondent à des valeurs de commande à l'intérieur de l'intervalle  $[0, 1]$  et dont l'évolution temporelle est déterminée par l'équation différentielle non linéaire

$$\dot{u} = \frac{d}{dt} (-\lambda^T ad_f^2 g(x) / \lambda^T [g, ad_f^1 g](x))$$

Ces arcs singuliers définissent donc des surfaces de glissements optimales.

De ces courbes que l'on utilise comme points d'interpolation, l'apprentissage par réseau de neurones conduit à la partition de l'espace d'état donnée par la figure 3. La zone de droite correspond à la prise en compte "après coup" d'une limitation du courant à 2.5 ampères avec la définition d'une zone de glissement à la frontière (Voir l'exemple d'une trajectoire dans l'espace d'état (figure 3)).

Les simulations de la réponse du système partant de C.I. nulles sont données sur la figure 4.

On effectue aussi un apprentissage de la commande en faisant varier la charge  $r_0$  ce qui modifie la référence à atteindre ( $i_{ref}$  est fonction de  $r_0$ ). Les variations seront estimées au cours de la simulation à partir de la mesure de l'état  $x$  et de l'entrée au moyen d'un simple estimateur.

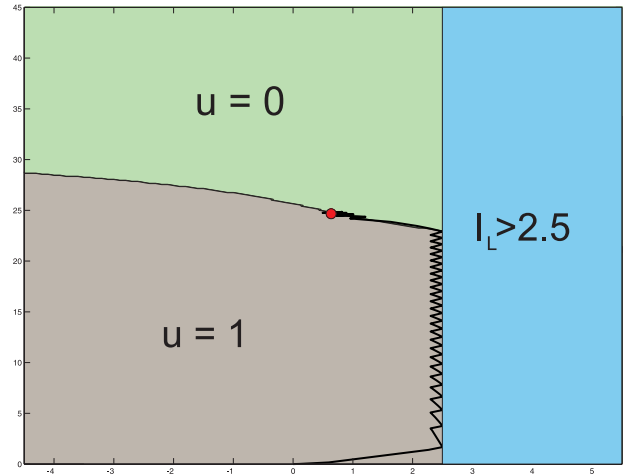


Fig. 3. Retour d'état optimal et exemple de trajectoire dans l'espace d'état

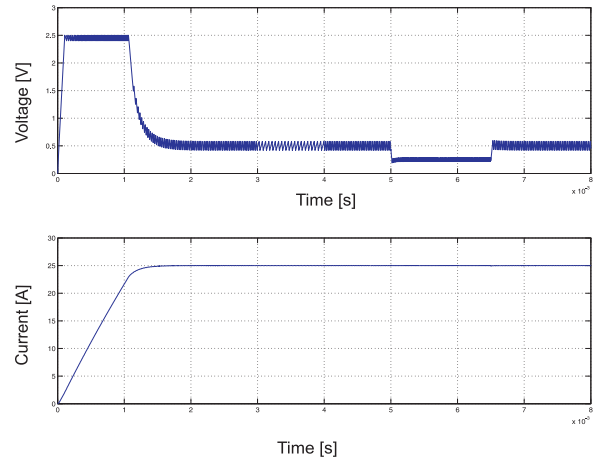


Fig. 4. Régulation de la tension de sortie à 25 volts en présence d'échelon sur l'entrée  $v_s$  et sur la charge  $r_0$

Pour tester la robustesse de la loi de commande, on effectue un changement de tension d'entrée de 50 à 35 volts à l'instant  $t = 3.e^{-3}$ , et à  $t = 4.e^{-3}$  de 35 à 50 volts. Ensuite la charge résistive varie de 50 à 100 et de 100 à 50 ohms aux instants  $t = 5.e^{-3}$  et  $t = 6.5.e^{-3}$ . On observe un maintien parfait pour la tension de sortie à 25 v. Nous avons également testé une loi en temps optimale (figure 5). On n'observe pas à cette échelle de différence notable avec la commande sur critère quadratique. La dynamique est sensiblement la même

*Remarque 10:* Pour ces exemples, le temps nécessaire de calcul hors ligne pour obtenir la commande est de quelques secondes sur un PC. Ce calcul comprend : le calcul des arcs singuliers, la génération des trajectoires l'apprentissage par réseaux de neurones.

*Remarque 11:* Le réseau de neurones utilisé comporte deux couches avec 10 neurones pour la couche cachée.

*Remarque 12:* Le mode de glissement sur les arcs singuliers est obtenu par l'utilisation d'un hystérésis comme bande de glissement ce qui conduit à un type de commande "asynchrone". Pour une implémentation numérique,

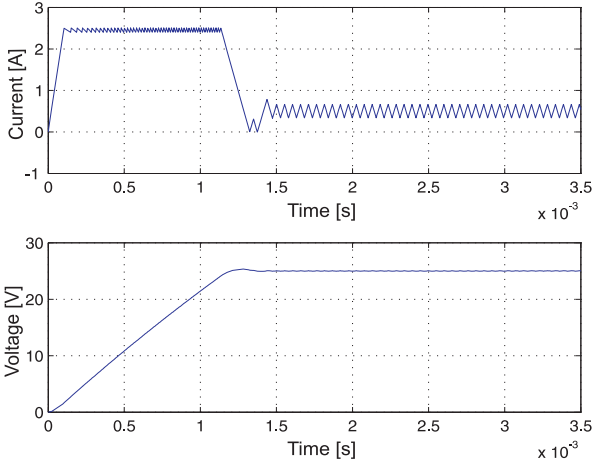


Fig. 5. Commande en temps optimal

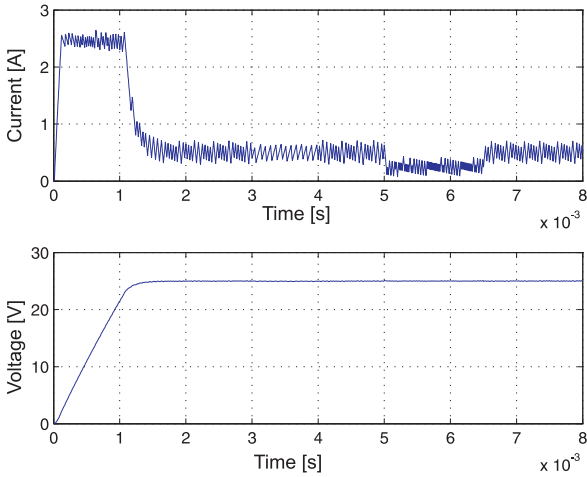


Fig. 6. Cas où la commande est synchronisée sur la période d'échantillonnage,  $f_e = 100kHz$

on peut utiliser une synchronisation sur la période d'échantillonnage  $u(kT_e)$  voir la figure 6.

## A.2 Convertisseur Multiniveaux

Nous présentons le cas d'un convertisseur multiniveaux (figure 7). Pour cet exemple la dimension du vecteur de commande est  $m = 3$ . Nous utilisons une généralisation des conditions d'ordre deux aux cas multidimensionnelle ainsi qu'une formulation adéquate de  $S$ .

Il existe une littérature abondante sur ces convertisseurs conçus pour la moyenne et la haute tension [27], [28], [29], [30]. Leur principale intérêt réside dans la répartition des tensions entre capacités permettant l'utilisation de commutateur de type mosfets qui ne supportent que de faibles tensions.

Les équations d'états du convertisseur sont :

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{c1} \\ \dot{V}_{c2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i_L}{C_1} & \frac{i_L}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{i_L}{C_2} & \frac{i_L}{C_2} \\ \frac{V_{c1}}{L} & \frac{V_{c2} - V_{c1}}{L} & \frac{E - V_{c2}}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{R}{L} i_L \end{bmatrix}$$

avec  $V_{c1}$ ,  $V_{c2}$  comme les tensions aux bornes des capa-

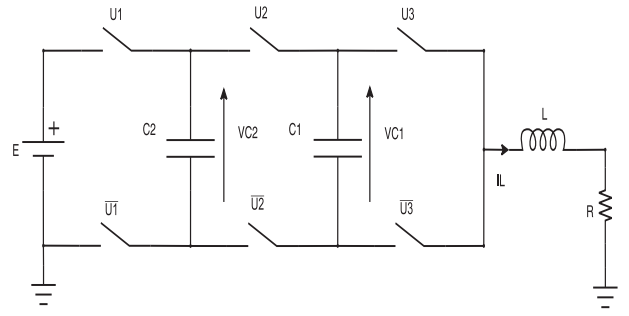


Fig. 7. Le convertisseurs 4 niveaux 3 cellules

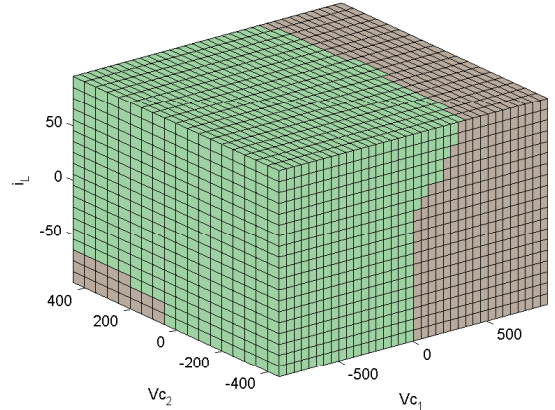


Fig. 8.  $u_1(x)$

cités et  $i_L$  le courant de charge. La commande  $u$  représente la position des interrupteurs qui fonctionnent par paire (figure 7).

L'objectif est de réguler le courant dans la charge  $RL$ , tout en maintenant respectivement les tensions moyennes dans les capacités à  $2E/3$  et  $E/3$ . La référence est donnée par  $x^{ref} = [2E/3 \ E/3 \ 100]^T$ . On applique un critère quadratique donné par la matrice  $Q = \text{diag}([1, 1, 1000])$ . Les paramètres choisis pour cette simulation sont  $C_1 = C_2 = 40\mu F$ ,  $L = 1mH$ ,  $R = 10\Omega$ .

Les figures 8, 9 et 10 représentent les lois de commandes obtenues sous la forme d'un retour d'état. Les figures 11 et 12 représentent la phase de démarrage pour le courant et les tensions depuis des conditions initiales nulles et le cycle obtenu autour de l'équilibre en régime permanent.

## V. CONCLUSIONS

Dans cet article, à partir de l'analyse d'un problème de commande optimale générique pour la classe des systèmes commutés affines, une méthode a été proposée pour déterminer une loi de commande sous la forme d'un retour d'état optimal.

Il a été montré que le bon cadre de travail consiste à étendre le domaine de commande discret à son enveloppe convexe. La solution obtenue pour cette formulation peut comporter des parties singulières qui définissent des surfaces de glissement optimal pour le système commuté original.

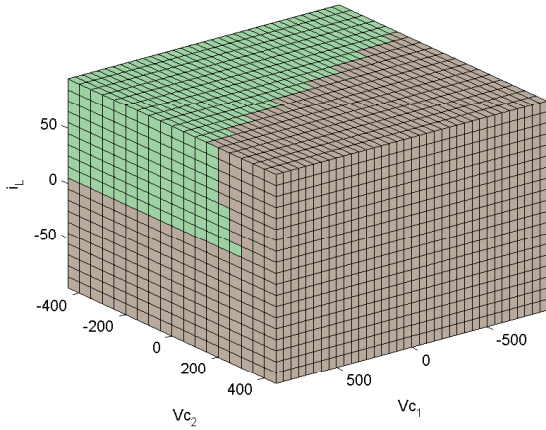


Fig. 9.  $u_2(x)$

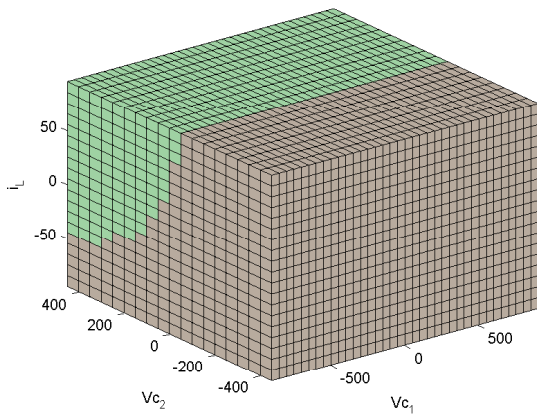


Fig. 10.  $u_3(x)$

Ce travail montre qu'il est possible de déterminer de façon relativement simple les surfaces singulières par le calcul des zéros d'un déterminant. La synthèse de toutes les trajectoires est alors obtenue numériquement en intégrant en temps rétrograde depuis la surface singulière passant par le point d'équilibre et avec les conditions initiales ad hoc. L'interpolation des solutions par réseau de neurones conduit à une formulation facile à évaluer de la loi de commande et valable pour un pavé de l'espace d'état. Notons que cette synthèse peut s'étendre pour prendre en compte des variations de paramètres ou d'entrées.

L'application sur deux exemples de convertisseur montre l'applicabilité de la méthode. Des tests en temps réel sur maquette sont programmés.

## VI. REMERCIEMENTS

Cette recherche a été supportée par HYCON (European Framework of Excellence "HYbrid CONTROL : Taming Heterogeneity and Complexity of Networked Embedded Systems").

## RÉFÉRENCES

[1] R. Middlebrook and G.W. Wester, *Low-Frequency Characterization of Switched DC DC Converters*, IEEE Power Processing and Electronics Specialists Conference, 1972 Record, (IEEE Pu-

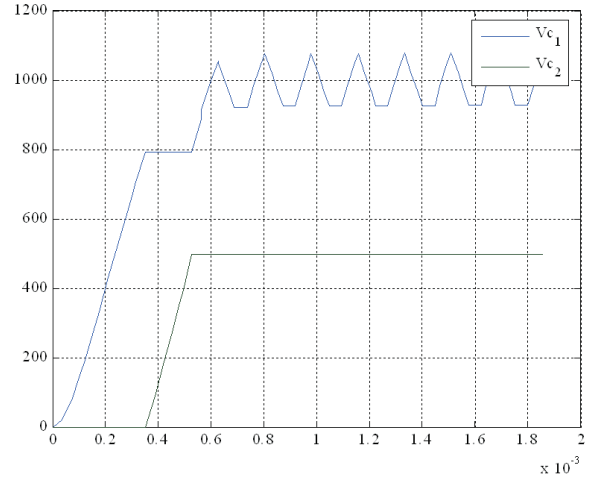


Fig. 11.  $V_{C1}$  et  $V_{C2}$

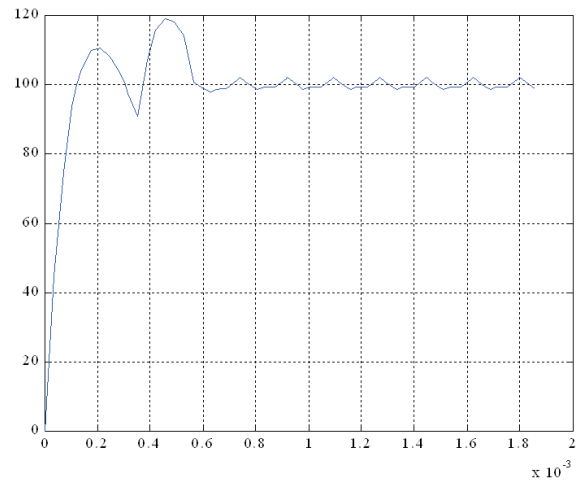


Fig. 12.  $I_L$

blication 72CH06528 AES); also, IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, AES9, May 1973.

- [2] S. Sanders, J.M. Noworolski, X. Z. Liu and G. C. Verghese Sender, J. M. Noworolski, *Generalized averaging method for power conversion circuits*, IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 6, No. 2, pp. 251-159, April 1991.
- [3] C. Iung, J.P. Louis, V. Gelezevicius Analysis of the validity of linear approximations for the regulation of DC motor fed by AC/DC converters. International Conference on Electrical Machines, Brussels, September 1978, Proc. tome 2, E1/2.
- [4] K. Mahabir, G. Verghese, et. al., *Linear Averaged and Sampled Data Models for Large signal control of high power factor converter*, IEEE Power Electronics Specialists Conference, 1990. Sampled-Data Modeling. In Proc. IEEE American Control Conf. (ACC), pages 4549-4554, 2004.
- [5] F. Huliehel and S. Ben-Yaakov, *Low frequency sampled data models of switched mode DC-DC converters*, IEEE Trans. on Power Electronics, 6, 55-61, 1991.
- [6] S. Almér, U. Jönsson, C-Y Kao, and J. Mari. Global Stability Analysis of DC-DC Converters Using Sampled-Data Modeling. In Proc. IEEE American Control Conf. (ACC), pages 4549-4554, 2004.
- [7] E. Möllerstedt and B. Bernhardsson. Out of Control Because of Harmonics - An Analysis of the Harmonic Response of an Inverter Locomotive. IEEE Control Syst. Mag., 20(4) :70-81, 2000.
- [8] F. Borelli, M. Baotic and M. Morari *An efficient algorithm for computing the state feedback optimal control problem*, In IFAC

- Conf. on Analysis and Design of Hybrid Systems, Saint Malo, France, June, 2003.
- [9] Stefan Almer, Hisaya Fujioka, Ulf Jonsson, Chung-Yao Kao, Diego Patino, Pierre Riedinger, Tobias Geyer, Giovanni Becuti, Georgios Papafotiou, Manfred Morari, Andreas Wernrud, Anders Rantzer. Hybrid Control Techniques for Synchronous DC-DC Converters Part I : The Step-Down Topology 26th American Control Conference, ACC'2007, New York City : États-Unis d'Amérique (2007).
- [10] C. Seatzu, D. Corona, A. Giua and A. Bemporad *Optimal control of continuous-time switched affine systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 51, No. 5, 2006.
- [11] T. Geyer, G. Papafotiou, M. Morari, *Model Predictive Control in Power Electronics : A Hybrid Systems Approach*, 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005.
- [12] L. Lazar and R. De Keyser, *Non-linear predictive control of a DC-to-DC converter*, In Proc. of the Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, Capri, Italy, 2004.
- [13] M. Baja, D. Patino, H. Cormerais, P. Riedinger, J. Buisson, "Hybrid control of a four-level three-cell dc-dc converter", American Control Conference 2007.
- [14] P. Riedinger, J. Daafouz and C. Iung *Suboptimal switched control in context of singular arcs*, Proceedings of the 42nd IEEE Conference in Decision and Control, 2003.
- [15] P. Riedinger, J. Daafouz and C. Iung *About Solving hybrid optimal control problems*, Proceedings of the 17th IMACS World Congress, July 11-15, 2005.
- [16] L.D. Berkovitz *Optimal control theory*, Springer Verlag, 1974.
- [17] L. C. Young, *Lectures on Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Saunders, 1969.
- [18] T. Roubicek, *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus*, De Gruyter, 1997.
- [19] V.I. Utkin, *Sliding modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, 1992.
- [20] Robbins, H. (1967). A generalised legendre-clebsch-conditions for the singular cases of optimal control. IBM Journal Res. Develop., 11.
- [21] Krener, A. (1982). The higher order maximal principle and its application to singular extremals. SIAM Journal of Control and Optimization, CAS-29.
- [22] Powers, W. (1980). On the order of singular optimal control problems. Journal of Optimization Theory and Applications, 32.
- [23] Volker, M. (1996). Singular optimal control - the state of the art., CAS-29 .
- [24] Bonnard, Bernard, Chyba, Monique, *Singular Trajectories and their Role in Control Theory*, Series : Mathématiques et Applications, Vol. 40, Springer SMAI, 2003
- [25] Y. Chitour, F. Jean and E. Trélat *Genericity results for singular trajectories*, Journal of differential Geometry, Vol. 73, No. 1, 2006.
- [26] D. J Ruxton, D. J. Bell, *Junction times in singular control*, Applied Mathematics and computation, (70) pp 143-154, elsevier 1995.
- [27] Meynard, T.A.; Foch, H.; Thomas, P.; Courault, J.; Jakob, R.; Nahrstaedt, M., *Multicell converters : basic concepts and industry applications*, Industrial Electronics, IEEE Transactions on Volume 49, Issue 5, Oct 2002 Page(s) : 955 - 964
- [28] J.-S. Lai and F. Z. Peng, "Multilevel converters-a new breed of power converters," IEEE Trans. Ind. Applicat., vol. 32, no. 3, 1996.
- [29] Chiasson, J.N., et., *Control of a Multilevel Converter Using Resultant Theory*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 11, No. 3, 2003.
- [30] O. Bethoux, J.P. Barbot, "Commande permettant le contrôle du convertisseur multicellulaire série à nombre non premier de cellules", Proceedings of the Conférence Internationale Franco-phonie d'Automatique, Nantes, France, 2002.