



N° ENSC -



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité : Automatique

Présentée par
Monsieur JUNGERS Marc

**pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

**Sujet de la thèse :
COMMANDE ROBUSTE MULTICRITÈRE :
UNE APPROCHE PAR LA THÉORIE DES JEUX.**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 13 septembre 2006 devant le jury composé de :

ABOU-KANDIL Hisham,	Professeur des Universités, ENS Cachan,	Directeur de thèse
ARZELIER Denis,	Chargé de Recherche CNRS (HDR), LAAS, Toulouse,	Rapporteur
BERNHARD Pierre,	Professeur des Universités, Univ. Nice,	Rapporteur
LOZANO Rogelio,	Directeur de Recherche CNRS, HEUDIASYC, Compiègne,	Examineur
RICHARD Jean-Pierre,	Professeur des Universités, Ecole Centrale Lille,	Examineur
TRÉLAT Emmanuel,	Professeur des Universités, Univ. Orléans,	Examineur

Laboratoire SATIE
ENS CACHAN / CNRS / UMR 8029
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN Cedex, France

A mes parents

"Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée."

John Von Neumann.

Remerciements

Même si les « quelques » pages suivantes de ce mémoire constituent une part importante de ces trois années de thèse, elles ne sont néanmoins que la partie visible de l'iceberg. Ces quelques lignes de remerciements sont bien plus importantes pour moi en révélant l'immense qualité des liens que j'ai pu établir ou renforcer pendant cette période.

Je tiens tout d'abord à remercier pleinement mon directeur de thèse Hisham Abou-Kandil, pour la qualité de ses intuitions, pour la justesse de nos nombreuses discussions de tous ordres, malgré ses responsabilités administratives prenantes. Un grand merci pour avoir cru en moi et pour m'avoir offert la possibilité de travailler sur ce sujet motivant qui lui tient tant à coeur. Il ne fait aucun doute que j'ai beaucoup évolué durant cette période et qu'Hisham n'est pas étranger à ce façonnement. J'espère être digne des espoirs qu'il a nourris pour moi.

Un immense merci à Emmanuel Trélat, pour m'avoir encouragé durant ces années et pour m'avoir poussé toujours en avant. J'ai été impressionné par sa rigueur et sa capacité de travail, dont j'essaie tant bien que mal de m'inspirer. Je lui suis sincèrement reconnaissant pour la plus-value qu'il m'a permis d'apporter à ma thèse, pour son soutien constant de bourguignon à bourguignon et surtout pour son amitié sincère.

Merci à Denis Arzelier et à Pierre Bernhard pour l'honneur qu'ils m'ont fait en voulant bien être mes deux rapporteurs. Soyez remerciés pour le temps que vous avez consacré à mon travail, nos discussions enrichissantes et pour toutes les modifications mélioratives. Merci à Rogelio Lozano de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, ainsi qu'à Jean-Pierre Richard celui d'avoir accepté d'examiner mon travail.

La dimension internationale de ma thèse s'est principalement développée grâce aux intenses relations avec le Brésil. Comment ne pas remercier Edson De Pieri, Eugênio Bona De Castelan Neto, Ana Lúcia Franco Driemeyer et Pedro Luis Dias Peres pour leur amitié et leur accueil chaleureux, quasi familial. Il a été très agréable et productif de travailler avec eux que ce soit en France ou au Brésil. Aussi, à ma grande surprise, la Caipirinha a été plus qu'un catalyseur de publications...

Je voudrais exprimer ma profonde et chaleureuse reconnaissance à Cécile Durieu. Non seulement sa rigueur et ses qualités d'enseignante m'ont fait aimer le traitement du signal et l'automatique, mais surtout ses qualités humaines m'ont beaucoup touché pendant les trois ans de monitorat. J'en profite pour remercier les enseignants du département EEA pour la formation que j'y ai reçue, comme élève mais aussi comme enseignant. Je pense tout particulièrement à Gilles Feld et à Thierry Maurin, qui pour moi resteront des références de pédagogie. Merci à Evelyne Reynaud pour sa bonne humeur constante.

Je tiens à remercier Nicolas Schlosser et Anne-Emmanuelle Badel, professeurs au Lycée Louis-Le-Grand, pour leur confiance renouvelée pendant quatre ans où j'ai pu khôller en physique dans leurs classes. En plus de m'apporter une bouffée d'oxygène chaque semaine, cela m'a permis de retrouver

cette institution et ce quartier auxquels je suis si attaché... depuis dix ans déjà.

Pendant mes quatre années au laboratoire (DEA et Doctorat), j'ai eu le grand plaisir de côtoyer au quotidien, Pascal Larzabal et les chercheurs de l'équipe TIM, véritable « dream team ». Pascal est pour moi un chef d'équipe qui sort de l'ordinaire. Il a réussi à insuffler un esprit de bonne humeur dans l'équipe. Je le remercie aussi pour avoir été là pour m'écouter et pour la qualité de ses conseils et avis divers. Un grand merci à Henri Bourlès, à Jean-Pierre Barbot, pour les discussions sur tous les sujets, à Benoît Geller pour les polémiques politiques et historiques ainsi que pour nos discussions du soir sur l'avenir... Merci à Giliane, Martine, Gwenael et Dominique.

La vie dans un laboratoire n'est possible que grâce au ciment d'amitié entre les thésards et les post-docs. A ce titre je remercie chaleureusement mes amis et compagnons de galères et de fous rires : Alexandre Renaux, Ana Lúcia Franco Driemeyer, Fanny Bay, Christophe Vanstraceele, Cédric Bernéz, François Rambeau, Leila Atalla, Angela Quinlan, Cédric Herzet et Lynda Cherfi. Au passage, merci à Sergio pour ses pizzas !

Une reconnaissance toute particulière pour Julien Dumont, Jean-Christophe Imbert, Olivier Frantz et Mathieu Guillaume pour les preuves d'amitié et de soutien qu'ils m'ont témoignées durant toute cette période. Merci pour tous ces moments que je n'oublierai pas.

Merci à tous ceux qui ont pu se libérer et venir assister à ma thèse, surtout ceux qui sont venus de loin, voire de l'autre bout du monde.

Comme chaque doctorant le sait bien, la thèse n'est pas une période toujours facile. Les personnes que j'aimerais remercier maintenant sont celles qui m'ont permis de conserver un havre de sérénité qui m'a fait tenir. En premier lieu viennent mes parents à qui je dédie cette thèse. Ils ont véritablement vécu (je veux dire stressé...) chaque instant de ma thèse à mes côtés. Qu'ils soient infiniment remerciés pour leur douce patience, leur compréhension sans limite et leur soutien indéfectible. Un petit clin d'œil fraternel à Evelyne, Corinne et Eric pour leur perpétuelle bonne humeur et pour les soirées de fou rire. Merci à mes grands-parents de m'avoir récompensé par une fierté sans bornes dans leurs yeux. Un très amical merci à Benjamin pour les longues promenades dans Paris, et surtout son écoute compréhensive pendant nos discussions (mes monologues?). Courage ce sera bientôt fini pour toi aussi. Merci à P. pour les conversations téléphoniques et d'avoir été pendant tant d'années le cobaye de mes essais culinaires...

Cette thèse est aussi un peu la leur.

Marc Jungers

Table des matières

Remerciements	vii
Résumé	xiii
Notations	xv
Introduction générale	1
1 Préambule	1
2 Présentation du document	3
1 Introduction à l'optimisation multicritère	5
1.1 Un peu d'Histoire	5
1.2 Définitions et concepts fondamentaux	6
1.2.1 Diverses structures d'information	9
1.2.1.1 Structure d'information en boucle ouverte	9
1.2.1.2 Structure d'information en boucle fermée	10
1.2.1.3 Structure d'information échantillonnée	10
1.3 Définitions des principales stratégies	10
1.3.1 Stratégie Min-Max	11
1.3.2 Stratégie de Pareto	11
1.3.3 Stratégie de Nash	12
1.3.4 Stratégie de Stackelberg	14
1.4 Jeux différentiels linéaires-quadratiques	16
1.5 Conclusion	18
2 Stratégie de Nash avec structure d'information en boucle ouverte	19
2.1 Mise en équations	19
2.2 Equations couplées (ou équation) de Riccati	21
2.3 Remarques générales sur l'équilibre de Nash	23
2.3.1 Cohérence intertemporelle des stratégies de Nash	23
2.3.2 Différence entre équilibre et solution des équations de Riccati	23
2.3.3 Conditions d'existence et d'unicité d'un équilibre de Nash	23
2.4 Résolution des équations différentielles de Riccati couplées rectangulaires	24
2.4.1 Linéarisation d'une équation de Riccati rectangulaire	24
2.4.2 Cas de critères à horizon infini	26
2.5 Résolution des équations algébriques de Riccati rectangulaires	27
2.5.1 Passage à la limite de la représentation des solutions de l'équation différentielle	27
2.5.2 Méthode de résolution par les espaces invariants de $\mathcal{M}$	28
2.5.2.1 Propriétés des valeurs propres de la matrice du système asservi	28
2.5.2.2 Correspondance entre les solutions des équations algébriques de Riccati couplées et certains espaces invariants de $\mathcal{M}_{N,BO}$	28

2.5.2.3	Choix des valeurs propres	29
2.5.2.4	Une éventuelle solution particulière	30
2.6	Limites de la boucle ouverte pour l'étude de la robustesse	31
2.6.1	Des solutions pas toujours stabilisantes	31
2.6.2	Choix des solutions guidé par la robustesse	34
2.7	Exemple d'une suspension magnétique non-linéaire	37
2.7.1	Modèle du système magnétique	38
2.7.2	Modèle linéarisé tangent	40
2.7.3	Approche par la théorie des jeux	42
2.7.4	Comparaison numérique	43
2.8	Conclusion	47
3	Stratégie de Stackelberg en boucle ouverte	49
3.1	Conditions nécessaires pour le suiveur	50
3.2	Conditions nécessaires pour le leader	50
3.2.1	Cas d'un jeu linéaire-quadratique	52
3.2.2	Remarques sur la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte	53
3.2.2.1	Incohérence intertemporelle des stratégies de Stackelberg	53
3.2.2.2	Conditions d'existence d'un équilibre de Stackelberg	53
3.3	Résolution sous forme d'équations couplées de Riccati	54
3.4	Résultats sur la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte	55
3.4.1	Des solutions pas toujours admissibles	55
3.4.2	Choix des solutions guidé par la robustesse	57
3.4.3	Exemple d'une suspension magnétique non-linéaire	59
3.4.3.1	Modèle du système	59
3.4.3.2	Application de la Stratégie de Stackelberg	62
3.4.3.3	Simulations	65
3.5	Stratégie de Stackelberg pour les jeux incluant des critères quadratiques à pondération temporelle	68
3.5.1	Mise en équations	69
3.5.2	Détermination de la stratégie de Stackelberg	70
3.5.2.1	Critères sur un horizon fini	70
3.5.2.2	Critères à horizon infini	71
3.5.3	Symétrie Hamiltonienne non apparente	73
3.5.4	Conditions suffisantes pour obtenir une stricte α_2 -stabilité	73
3.6	Conclusion	75
4	Stratégie de Nash en boucle fermée	77
4.1	Intérêt et mise en équations	77
4.2	Equations couplées de type Riccati d'un autre genre	80
4.3	Propriétés des solutions des équations de type Riccati	81
4.4	Différence entre les stratégies de Nash en boucle ouverte et en boucle fermée	82
4.5	Algorithmes de résolution numérique des équations de Riccati de Nash en boucle fermée	82
4.5.1	Algorithmes "classiques"	83
4.5.1.1	Algorithme de Gajic <i>et al.</i>	83
4.5.1.2	Algorithme de Abou-Kandil <i>et al.</i>	84
4.5.1.3	Algorithme de Cherfi <i>et al.</i>	85
4.5.2	Nouvelle notion : le manque de confiance	86
4.5.2.1	Algorithme issu de la notion de manque de confiance en théorie des jeux	88
4.5.2.2	Comparaison des algorithmes	89
4.6	Conclusion	92

5	Stratégie de Stackelberg en boucle fermée	95
5.1	Introduction	95
5.2	Préliminaires : la stratégie de Stackelberg en boucle fermée	96
5.3	Conditions nécessaires	97
5.3.1	Pour le suiveur	97
5.3.2	Pour le leader	98
5.3.2.1	Première preuve de la proposition 5.4	100
5.3.2.2	Deuxième preuve de la proposition 5.4	101
5.3.3	Conditions de transversalité	104
5.3.4	Propriété de dégénérescence	105
5.3.5	Le cas linéaire-quadratique pur	106
5.3.5.1	Conditions nécessaires pour le suiveur	106
5.3.5.2	Conditions nécessaires pour le leader	106
5.3.5.3	Cas $p_1 B_2 + u_2^T R_{12} = 0$	108
5.3.5.4	Cas $p_1 B_2 + u_2^T R_{12} \neq 0$	110
5.4	Conditions suffisantes	112
5.4.1	Conditions suffisantes pour le leader	112
5.4.2	Conditions suffisantes pour le suiveur	114
5.4.3	Conditions suffisantes pour la stratégie de Stackelberg	114
5.4.4	Extension : pondération de $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ dans les critères	115
5.5	Conclusion	117
6	La commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ par la stratégie de Stackelberg	119
6.1	Introduction	119
6.2	Formulation du problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$	120
6.3	Application de la stratégie de Stackelberg	121
6.3.1	Définition	121
6.3.2	Conditions nécessaires pour le suiveur	122
6.3.3	Principe du Minimum de Pontryagin pour une classe particulière	123
6.3.4	Conditions nécessaire pour le leader	125
6.3.5	Conditions de transversalité	126
6.3.6	Dégénérescence de la stratégie de Stackelberg	126
6.3.7	Calcul des commandes optimales	126
6.3.8	Résolution par une équation de Riccati	128
6.4	Conditions suffisantes	128
6.5	Exemple	129
6.6	Conclusion	133
7	Stratégie de Nash pour les systèmes avec incertitudes paramétrées	135
7.1	Introduction	135
7.2	Rappel : équilibre de Nash pour les systèmes certains	136
7.3	Formulation d'un équilibre de Nash grâce à des problèmes couplés d'optimisation non convexes	137
7.4	Bornes supérieures des critères pour un système incertain	138
7.5	Algorithme itératif	139
7.6	Propriétés des solutions	141
7.7	Illustration	142
7.8	Conclusion	143

Conclusion générale	145
1 Bilan des contributions	145
2 Perspectives	146
3 Publications et communications présentées dans cette thèse	147
Portraits	149
Bibliographie	151

Résumé

Cette thèse propose d'étudier la robustesse des commandes issues de la théorie des jeux adaptée aux systèmes multientrées, multiobjectifs. De façon générale les stratégies avec une structure d'information en boucle ouverte présentent des propriétés faibles de robustesse et ne peuvent être déterminées qu'*a posteriori*. Des exemples exhibent certaines limites. Les stratégies avec une structure d'information en boucle fermée sont beaucoup plus ardues à déterminer. Dans le cas d'une stratégie de Nash, un nouvel algorithme utilisant le manque de confiance est présenté pour résoudre les équations couplées algébriques de type Riccati. Pour une stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle fermée les conditions nécessaires et suffisantes sont déterminées et appliquées au problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$. Enfin une extension à des systèmes comportant des incertitudes paramétrées mène à la résolution itérative d'une association non convexe de problèmes d'optimisation.

Notations

$\mathbb{R}$	: ensemble des réels.
$\mathbb{R}^n$	: ensemble des vecteurs réels de dimension n .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	: ensemble des matrices réelles de taille $n \times m$.
$\mathbb{N}$	: ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{C}$	: ensemble des complexes.
$\text{Re}(z)$	: partie réelle du complexe z .
$\text{Im}(z)$	: partie imaginaire du complexe z .
$\mathbb{C}^{\square}$	: $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) \square 0\}$.
$0_{n \times m}$	: matrice nulle de taille $n \times m$.
0_n ou 0	: matrice carrée nulle.
I_n ou I	: matrice identité de taille n .
M^T	: transposée de la matrice M .
M^{-1}	: inverse de la matrice M .
$\lambda(M)$	: spectre de la matrice M .
$\text{Tr}(M)$	: trace de la matrice M .
$\rho(M)$	: rang de la matrice M .
$\text{Ker} M$	: noyau de l'application associée à la matrice M .
$\bar{\sigma}(M)$	: plus grande valeur singulière de la matrice M .
$\ \cdot\ _2$	: norme $\mathcal{H}_2$ d'un signal ou d'un système.
$\ \cdot\ _{\infty}$	: norme $\mathcal{H}_{\infty}$ d'un signal ou d'un système.
$\dot{y}$ ou $\frac{\partial y}{\partial t}$	: dérivée partielle du vecteur y par rapport au temps.
$\frac{\partial y}{\partial x}$	: dérivée partielle du vecteur y par rapport au vecteur x .

Acronymes

SDP	: Problème Semi-Défini (<i>Semi-Definite Problem</i>).
LMI	: Inégalité Matricielle Linéaire (<i>Linear Matrix Inequality</i>).
Co	: ensemble Convexe.
$\text{diag}(x)$	: matrice diagonale, générée à partir des composantes du vecteur x .

Introduction générale

1 Préambule

Le défi de l'Automatique porte désormais sur la maîtrise de systèmes de plus en plus complexes. En particulier, cette complexité réside dans le fait que les systèmes actuels sont soumis à l'action de multiples commandes décentralisées, au lieu d'une seule globale. Les systèmes interconnectés sont un exemple caractéristique. Cette évolution des systèmes à traiter traduit une volonté de rendre plus souple la mise en place des commandes et surtout un impératif de vérifier un cahier des charges de plus en plus contraignant, rassemblant de nombreuses performances, de natures diverses. De nouvelles solutions technologiques introduisant les réseaux informatiques dans les systèmes sont mises en place. De nouveaux sujets de recherche apparaissent alors autour de la commande collaborative en réseaux.

Théorie de la commande et optimisation sont souvent associées pour résoudre des problèmes de décision dans les systèmes complexes. Cependant, il peut être difficile, voire impossible de formuler le problème de détermination de telles commandes comme un problème d'optimisation. La théorie des jeux est le cadre naturel pour gérer ce type de problème d'optimisation multientrée et multiobjectif. La notion d'équilibre permet de réaliser un compromis entre les niveaux de performances imposés.

La richesse de la théorie des jeux est de présenter de nombreux avantages ou souplesses, comme les différentes stratégies, les différentes structures d'informations et la conservation du caractère multiobjectif du problème d'optimisation, contrairement à la plupart des commandes classiques.

La difficulté est pourtant de ne pas considérer uniquement l'aspect performance de la synthèse des lois de commande. Effectivement une loi de commande idéale en performance, déterminée à partir d'un modèle peut ne pas présenter les mêmes performances sur le système réel, qui présente toujours des différences -au moins légères- par rapport à ce modèle. Pour éviter cela, une certaine robustesse doit être assurée, afin de rendre ces lois applicables en pratique.

Par ailleurs, le domaine de la commande robuste est très largement développé, mais pour les problèmes monocritères, voire faux multicritères (se reformulant en problèmes monocritères). Ce cadre d'étude traite cependant rigoureusement des incertitudes, par une bonne introduction des incertitudes dans les modèles.

L'idée, ici, est de rapprocher les deux domaines de la commande robuste et de la théorie des jeux, afin de combiner leurs points forts.

Un certain nombre de questions générales se posent alors et constituent le fil conducteur de cette thèse. La théorie des jeux permet de synthétiser des commandes issues de compromis en performance. Est-il alors possible de concevoir des commandes robustes à partir des techniques de la théorie des jeux ? Dans l'affirmative, comment spécifier les degrés de robustesse, lors de la formulation du problème d'optimisation dans ce cadre ?

Aussi la théorie des jeux semblant être souple, en termes de performance, dans la gestion décentralisée des systèmes, la question de l'éventuelle robustesse naturelle des stratégies telles que la stratégie de Nash ou la stratégie de Stackelberg par exemple se pose. Est-il possible, *a priori* de garantir un certain degré de robustesse de ces commandes ?

La théorie des jeux est-elle un cadre adapté à la gestion du compromis entre robustesse et performance ? En particulier, doit-on nécessairement affecter à un objectif un rôle de robustesse et à un autre un rôle de performance ? Ou bien est-il possible de combiner dans chacun des objectifs un aspect de robustesse et un aspect de performance ?

La théorie des jeux et la commande robuste sont déjà associées pour les problèmes de rejet de perturbation. Cependant, le modèle du système est supposé connu et si des incertitudes sont introduites, elles le sont à travers des joueurs supplémentaires agissant sur un système certain. Malgré quelques tentatives, la théorie des jeux reste liée à la théorie de la commande optimale qui s'adapte mal avec les modèles incertains introduits en commande robuste. La finalité affichée de ce travail est de voir comment étendre le champ applicatif de cette théorie aux systèmes présentant des incertitudes paramétrées.

L'objectif de cette thèse est d'approfondir ce questionnement, d'essayer d'y apporter des réponses, et surtout d'offrir à l'automaticien des méthodologies et outils directement applicables, afin de gérer de façon souple le compromis robustesse-performance.

2 Présentation du document

Outre cette introduction générale, ce document est constitué de 7 chapitres et d'une conclusion générale. L'organisation du travail de thèse s'appuie sur le questionnement donné précédemment.

Chapitre 1 : après un bref historique, la théorie des jeux, la définition d'un jeu, de la structure d'information et les principales stratégies sont précisées. Ces notions seront amplement utilisées dans le reste du mémoire.

Chapitre 2 : la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle ouverte est étudiée. Après un rappel sur les équations de Riccati associées et leur résolution, une étude de la robustesse de cette stratégie est proposée. Une application à la commande d'une suspension magnétique à 4 pôles est présentée.

Chapitre 3 : la stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle ouverte est traitée dans ce chapitre. La mise en équation pour le leader et le suiveur mène à la résolution d'équations couplées de Riccati. La robustesse des solutions obtenues est examinée. Un exemple d'application à la commande d'une suspension magnétique à 3 pôles est proposée. Le choix de cette application a pour objectif de mieux faire ressortir les similitudes et les différences avec l'exemple du chapitre 2. Une extension à des jeux linéaires quadratiques, comportant des pondérations temporelles exponentielles est exploitée pour obtenir des résultats sur la possibilité d'assurer une marge de stabilité au système commandé.

Chapitre 4 : l'objet de ce chapitre porte sur la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle fermée. La mise en équation mène à des équations couplées de type Riccati, d'un autre genre comparées à celles rencontrées dans les deux chapitres précédents. Plusieurs propriétés intéressantes des solutions de ces équations sont mises en avant. La principale difficulté étant la résolution de ces équations, ce chapitre rassemble divers algorithmes de résolution numérique.

Chapitre 5 : la stratégie de Stackelberg en boucle fermée est un problème d'optimisation beaucoup plus compliqué. Ce chapitre approfondit les conditions nécessaires pour le leader et le suiveur, à l'aide des commandes singulières. Grâce à la théorie des temps focaux, les conditions suffisantes d'optimalité d'un tel problème sont proposées. L'ensemble de ces conditions mène à un résultat d'existence de solution de la stratégie de Stackelberg en boucle fermée.

Chapitre 6 : de façon détaillée, le problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ est abordé dans le cadre d'une stratégie de Stackelberg en boucle fermée. Le raisonnement du chapitre 5 est appliqué.

Chapitre 7 : une généralisation du cadre de la théorie des jeux aux systèmes comportant des incertitudes paramétrées est amorcée. Un lien entre les équations couplées de type Riccati pour les systèmes certains et l'association de problèmes d'optimisation non convexes sous contraintes de type inégalités linéaires matricielles pour les systèmes incertains est établi. Un algorithme itératif permettant une résolution numérique est proposé, dans le cadre de systèmes incertains de représentation polytopique.

Une conclusion générale présente un bilan de ces trois années de recherche ainsi qu'une ouverture des possibilités de recherche après cette thèse.

Chapitre 1

Introduction à l'optimisation multicritère

1 × 142857
= 142857

La théorie des jeux est l'étude formelle des problèmes de décision liés aux conflits et/ou à la coopération entre deux ou plusieurs agents. Elle offre un cadre naturel pour traiter les problèmes de décision multicritère. Il s'agit d'un problème d'optimisation dont le cahier des charges est composé de divers objectifs, qui peuvent être de natures différentes, traduits sous forme de critères à minimiser. Ce chapitre présente les principaux outils, définitions et notations de la théorie des jeux qui sont utilisés dans ce mémoire. Ce chapitre reprend des éléments du chapitre 5 "Commande optimale multicritère : introduction à la théorie des jeux" de l'ouvrage en français [AKJ04].

1.1 Un peu d'Histoire

L'un des premiers exemples, parmi d'autres, de l'analyse formelle par la théorie des jeux est l'étude du duopôle par Antoine Cournot en 1838. Sans développer l'idée en profondeur, Emile Borel propose en 1921 de formaliser le *bluff* dans le jeu de poker, dans le cadre d'un système d'information imparfait. L'un des premiers articles véritablement théoriques "theory of parlor games" (Théorie des jeux de société) est dû à John Von Neumann en 1928, qui est fortement influencé par Borel, dont il cite un article de 1927. Von Neumann établit dans cet article le théorème du minimax, qui s'énonce de la façon suivante : tout jeu à somme nulle et à deux joueurs, qui ont fait leurs choix dans des ensembles finis de stratégies pures, comporte au moins un équilibre en stratégie mixte. Une stratégie mixte étant une distribution de probabilités affectée par un joueur à l'ensemble des stratégies pures, sachant que les stratégies pures sont des variables certaines. La théorie des jeux acquiert ses lettres de noblesse à la parution du livre de John Von Neumann et Oskar Morgenstern "Theory of Games and Economic Behavior" [NM44]. Ils proposent de rationaliser le choix des individus en univers incertain par la maximisation de l'espérance d'une fonction de la richesse nette, appelée fonction d'utilité de Von Neumann et Morgenstern. Cela permet de comprendre le phénomène de coalition entre les individus. Selon les auteurs, cette théorie de l'utilité est appropriée pour l'étude des choix individuels et collectifs. En plus des jeux proprement dits, les problèmes de comportement économique et ceux de l'organisation sociale sont considérés. L'objectif étant de critiquer le concept de concurrence pure et parfaite. Les applications portant aussi bien sur l'économie, que sur le domaine militaire. Par exemple, l'armée américaine a demandé à John Von Neumann de réaliser une étude sur l'attitude à adopter lors de la Guerre Froide : fallait-il attaquer en premier ou attendre d'être attaqué pour minimiser les pertes américaines ?

John F. Nash, en 1950, défend le postulat d'un total individualisme des joueurs en définissant un équilibre qui porte son nom [Nas50]. Il démontre dans [Nas51] qu'un jeu fini possède toujours au

moins un équilibre (en stratégies mixtes, ou sinon avec la convexité des critères) où tous les joueurs choisissent une action qui est la meilleure pour eux, à la condition que les autres joueurs choisissent aussi cet équilibre. Les applications de la théorie des jeux non-coopératifs sont très nombreuses et variées, qu'elles soient économiques, en politique de guerre, en télécommunications, en automatique bien évidemment. L'importance des applications en économie de cette branche de la théorie des jeux a été couronnée par l'attribution du Prix Nobel d'économie en 1994 à John Nash, John Harsanyi et Reinhard Selten. Un deuxième Prix Nobel d'économie vient de récompenser en 2005 Thomas Schelling et Robert Aumann. Schelling pour son explication des conflits économiques tels que les guerres des prix et les guerres commerciales et Aumann pour son oeuvre plus mathématique des jeux répétés.

Les jeux dynamiques et en particulier les jeux différentiels ont été étudiés en premier par Rufus Isaacs en 1965 [Isa75]. Cette étude a été développée initialement pour résoudre les problèmes de poursuite-évasion. Diverses contributions de Wendell Helms Fleming [Fle61, Fle64], Pravin Varaiya [VL69] ainsi que de Robert J. Elliott and Nigel Kalton [EK72] peuvent être citées, ainsi que celle d'Avner Friedman [Fri71]. Les équilibres de Nash [Nas50] et des équilibres de Stackelberg, définis par l'économiste von Stackelberg [vS34] (traduction en anglais [vS52]), engendrent au début des années 1970 une littérature importante pour la conception de nouvelles commandes en automatique. On peut citer par exemple [Cas69, CC72, SC73b, SC73a, SH69b, SH69a, Ho70].

Pour plus de précisions sur les applications en économie, il est possible de se référer à [Bag84], ou bien [DJLS00, AH94]. Il est possible aussi de citer des articles sur les applications militaires [SC75, ST94, SL95]. Parmi les applications en télécommunications, voir [LSC05, SNM⁺05, MW01]

1.2 Définitions et concepts fondamentaux

Lorsque plusieurs contrôleurs agissent sur un même système, il est naturel qu'un critère spécifique soit associé à chaque contrôleur afin de mesurer l'efficacité de la commande locale. C'est le cas par exemple dans les systèmes complexes composés de plusieurs sous-systèmes interconnectés. On obtient ainsi un problème de commande optimale multicritère. Pour résoudre ce nouveau problème, une première approche consiste à se ramener à une formulation classique avec un seul critère : il est alors nécessaire de définir une fonction dite d'utilité globale traduisant le bon fonctionnement du système complet. On se limite souvent à construire le nouveau critère global par une somme pondérée des critères locaux J_i , soit

$$J = \sum_{i=1}^N \mu_i J_i, \quad (1.1)$$

où N est le nombre de contrôleurs (ou de critères) locaux et les coefficients de pondération μ_i traduisent l'importance accordée à telle ou telle action.

Lorsque les différents contrôleurs agissant sur un même système possèdent des objectifs de nature différente, voire antagonistes, il devient difficile de définir une fonction d'utilité globale comme critère unique. Chaque contrôleur essaie alors d'optimiser son propre critère en fonction des informations dont il dispose sur le système et sur la réaction des autres contrôleurs. Un tel problème d'optimisation multicritère est appelé un jeu. En temps continu, on parle d'un jeu différentiel (l'équation dynamique traduisant l'évolution du système est une équation différentielle). Lors de cette thèse, il a été choisi de n'étudier que la formulation en temps continu. Le temps discret n'a pas été abordé. Dans le cas des jeux différentiels, la terminologie utilisée pour désigner les contrôleurs devient un peu différente : on emploie indifféremment les termes décideurs, joueurs ou agents. La théorie des jeux qui s'intéresse à l'étude des problèmes de décision liés aux conflits et/ou à la coopération entre deux ou plusieurs agents offre un cadre naturel pour traiter les problèmes de décision multicritère.

Deux grandes classes de jeux peuvent être distinguées :

- Les jeux coopératifs : dans ce cas, les joueurs coopèrent en formant des coalitions. La commande optimale monocritère peut être considérée comme un cas particulier des jeux coopératifs où tous les joueurs optimisent un seul critère.
- Les jeux non-coopératifs : les objectifs des décideurs sont différents, voire contradictoires. Chaque joueur cherche à optimiser son critère en fonction des informations dont il dispose. Cette classe de jeux s'inspire directement des travaux de John F. Nash [Nas50] et des jeux à somme nulle, dont le principal théorème sur le minmax est dû à John Von Neumann en 1928.

Dans la classe des jeux non-coopératifs, le jeu à somme nulle représente un cas extrême où l'objectif d'un joueur est diamétralement opposé à celui de son concurrent. Ainsi, si les critères associés aux deux joueurs sont respectivement J_1 et J_2 , on a $J_1 = -J_2$. C'est le cas typique d'un jeu de poursuite-évasion où le critère est la distance qui sépare les deux joueurs, ou le temps de capture (voir [HBB65, Isa75] pour plus de détails sur les jeux de poursuite-évasion). Le jeu dynamique à somme nulle est intimement lié à un problème de rejet de perturbation comme défini dans le cadre $\mathcal{H}_\infty$. L'équivalence entre les deux problèmes a été démontrée dans [BB95]. Il est supposé que la commande doit pouvoir contrer la perturbation dans le cas le plus défavorable. Le problème peut être formulé comme un jeu à somme nulle.

Le cas général est celui d'un jeu à somme non-nulle, où chaque joueur " i ", ($i = 1, 2, \dots, N$) cherche à minimiser son critère J_i . Les objectifs sont ainsi variés mais pas entièrement antagonistes. La quasi-totalité du travail de thèse a porté sur les jeux à somme non-nulle non-coopératifs.

La présence de plusieurs critères modifie totalement le mode d'approche pour résoudre le problème d'optimisation dynamique et déjà la définition d'une solution optimale n'est pas aisée. En effet, chaque joueur doit choisir une commande pour minimiser son critère en fonction des informations disponibles et en tenant compte de la réaction supposée rationnelle des autres joueurs ou décideurs. Ainsi, la ligne de conduite d'un joueur est déterminée par une stratégie qui définit son action. L'optimisation de chaque critère se fait alors au sens de la stratégie retenue par le joueur. Plusieurs solutions peuvent être définies en fonction des informations disponibles et/ou utilisées pour la détermination des commandes. Aussi, même en définissant rigoureusement le cadre de la classe de solution (stratégie, informations disponibles...), plusieurs solutions peuvent encore être admises. Le passage d'un problème d'optimisation monocritère à un joueur à un problème d'optimisation multicritère à plusieurs joueurs permet de se placer dans un cadre d'étude beaucoup plus large. Le fil conducteur est d'utiliser cette richesse pour l'étude et/ou l'analyse de la robustesse de ces systèmes.

Nous définissons désormais un jeu différentiel.

Définition 1.1 (Jeu différentiel). *Soit N un entier positif. L'objet suivant*

$$\Gamma_N : (\mathcal{T}, \mathcal{X}, U_i, \mathcal{U}_i, \Phi_i, f, x_0, \eta_i, J_i)_{i=1, \dots, N} \quad (1.2)$$

est appelé un jeu différentiel, si pour tout $i = 1, \dots, N$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\mathcal{T}$ est un intervalle réel,
- $\mathcal{X}$ et U_i sont des espaces euclidiens de dimensions finies,
- f est une application définie sur $\mathcal{X} \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_N \times \mathcal{T}$ à valeur dans $\mathcal{X}$ définissant l'équation différentielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{X}, \quad (1.3)$$

- Φ_i est un sous-ensemble de l'ensemble des applications $\{\varphi_i | \varphi_i : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow U_i\}$,

- η_i est une application $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}$, avec la propriété

$$\eta_i(t) \subset \{x(s) | s \in \mathcal{T}, s \leq t\}, \quad (1.4)$$

- $\mathcal{U}_i = \{\varphi_i(\cdot, \eta_i(\cdot)) | \varphi_i \in \Phi_i\}$,
- J_i est une fonction à valeur réelle $\mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_N \rightarrow \mathbb{R}$.

$\mathcal{X}$, $\mathcal{T}$, U_i , $\mathcal{U}_i$, Φ_i , η_i et J_i sont respectivement désignés comme l'espace d'état ou horizon temporel, l'espace des temps, l'espace des valeurs de commande, l'espace de commande, l'ensemble des stratégies de commandes possibles, la structure d'information et le critère. Nous appellerons action du joueur i la commande $u_i(t) = \varphi_i(t, \eta_i(t))$.

Définition 1.2 (Commande admissible). Une commande $u_i \in \mathcal{U}_i$ est dite admissible, si u_i est une commande mesurable de $[t_0, t_f] \rightarrow U_i$.

Remarque 1.3. Cette définition est considérée afin de ne pas définir un N -uplet de commandes admissibles, ce qui rendrait plus difficile la définition d'un équilibre de Nash par exemple.

Théorème 1.4. Soit Γ_N un jeu différentiel à N joueurs. Si la fonction f vérifie les hypothèses suivantes

- $f(x, u_1, \dots, u_N, t)$ est continue sur $\mathcal{X} \times U_1 \times \cdots \times U_N \times \mathcal{T}$.
- Il existe $k > 0$, tel que

$$|f(x, u_1, \dots, u_N, t)| \leq k(1 + |x|), \quad (1.5)$$

pour tout $(x, u_1, \dots, u_N, t) \in \mathcal{X} \times U_1 \times \cdots \times U_N \times \mathcal{T}$,

- La fonction f est Lipschitz continue par rapport aux variables $x, u_1, \dots, u_N$.
- $\varphi_i(t, x)$ est continue par rapport à t et uniformément Lipschitzienne par rapport à x .

Alors il existe un horizon temporel non vide $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ tel que toute commande continue par morceaux $u_i(\cdot), i = 1, \dots, N$ soit admissible et génère une trajectoire unique.

Remarque 1.5. Cette condition de Lipschitz peut être trop restrictive dans les jeux à N joueurs [Bag84]. Dans un jeu à deux joueurs, si un joueur souhaite restreindre sa stratégie à être lipschitzienne, l'autre joueur peut être capable de l'exploiter. Cela apparaît clairement dans les jeux de poursuite-évasion. Cependant les stratégies non-lipschitziennes sont difficiles à formaliser mathématiquement. Voir par exemple [CL55] pour plus de détails.

Le critère associé au joueur " i " est de la forme

$$J_i = K_{if}(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) dt, \quad (1.6)$$

où $x_f = x(t_f)$. Le critère représente l'intérêt du joueur. La fonction L_i correspond au critère instantané, alors que la fonction K_{if} correspond au critère terminal. De façon à pouvoir déterminer simplement des commandes $u_i = \varphi_i(t, \eta_i(t))$, nous faisons des hypothèses supplémentaires sur les fonctions K_{if} et L_i .

Hypothèse 1.6.

- $L_i(x, u_1, \dots, u_N, t)$ a la même régularité que f .
- $K_{if}(x, t)$ est continûment dérivable par rapport à toutes ses variables.

Le comportement rationnel du joueur i consiste donc à minimiser J_i . L'optimisation du critère J_i dépend des informations disponibles au joueur " i ". Ce point est expliqué dans la section suivante.

1.2.1 Diverses structures d'information

La stratégie adoptée par le joueur " i " ($i = 1, 2, \dots, N$) dépend de l'ensemble des informations disponibles. L'ensemble des informations disponibles pour le joueur i se décompose en deux catégories : les informations publiques ou de base et l'information η_i . L'information publique est l'ensemble $\mathcal{I}_i$ défini par

$$\mathcal{I}_i = \{\{J_j\}_{j=1, \dots, N}, f(\cdot), x_0\}. \quad (1.7)$$

Il s'agit de la connaissance de tous les critères J_j , la fonction $f(\cdot)$ caractéristique du système et de son état initial x_0 . Aussi le joueur i dispose d'un certain nombre de mesures, notées $\eta_i(t)$ de l'état du système.

L'information complète disponible à chaque joueur est donc

$$\mathcal{I}_i \cup \eta_i(t). \quad (1.8)$$

A partir de cet ensemble d'informations le joueur i est capable de déterminer sa stratégie φ_i . Le critère J_i étant déterminé par l'ensemble des φ_i , nous le noterons $J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$.

Ainsi, le joueur connaît le modèle du système, l'état initial, son critère et certaines valeurs de l'état $\eta_i(t)$. Selon la nature des informations disponibles, on distingue principalement trois types de stratégies : avec une structure d'information en boucle ouverte, en boucle fermée, et en échantillonnée. D'autres stratégies peuvent être définies en considérant des structures d'informations assez sophistiquées [BO95].

1.2.1.1 Structure d'information en boucle ouverte

Pour ce type de stratégie, l'ensemble des informations se réduit à $\mathcal{I}_i$ (1.7).

Définition 1.7 (Information en boucle ouverte). *Dans un jeu différentiel à N joueurs, Γ_N sur un horizon temporel $\mathcal{T}$, la structure d'information du joueur i est dite en boucle ouverte si*

$$\eta_i(t) = \{x_0\}, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (1.9)$$

Aucune mesure de l'état du système n'est disponible pendant l'intervalle d'optimisation $\mathcal{T}$. N'ayant pas accès à des mesures de l'état pour juger de la qualité de la stratégie adoptée, les joueurs s'engagent ainsi "en aveugle" à partir de leur connaissance du modèle du système et de l'état initial. Il s'agit plutôt d'un engagement de la part des joueurs de maintenir leur stratégie pendant la durée du jeu. Comme il sera explicité plus tard, les commandes associées ici ne peuvent être que fonction du temps, et indépendantes de l'état mesuré. En pratique, l'état prédéterminé, exprimé à partir de l'état initial connu et de la matrice de transition du système permettra de faciliter l'écriture de la commande. La différence est cruciale, dès que le système est modélisé de façon peu précise, ou que celui-ci comporte des incertitudes ou qu'il est soumis à divers bruits.

Comme nous le verrons dans la suite, la détermination numérique d'une commande en boucle ouverte pourra se mettre sous forme d'un schéma de simulation sous forme de retour d'état. Néanmoins l'état intervenant dans ce schéma de simulation est un état prédéterminé par le calcul et n'est en aucun cas l'état instantané réel du système. Il ne s'agit donc pas d'une commande par retour d'état, au sens classique de l'automatique. Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté, dans la suite de ce mémoire, il sera utilisé l'expression "stratégie de Nash en boucle ouverte", pour alléger les notations. Il faudra alors comprendre boucle ouverte en terme de structure d'information.

1.2.1.2 Structure d'information en boucle fermée

Dans ce cas, en plus des informations définies dans l'information de base (1.7), la valeur de l'état $x(t)$ à l'instant t est incluse dans l'information disponible.

Définition 1.8 (Information en boucle fermée (sans mémoire)). *Dans un jeu différentiel à N joueurs, Γ_N sur un horizon temporel $\mathcal{T}$, la structure d'information du joueur i est dite en boucle fermée si*

$$\eta_i(t) = \{x_0, x(t)\}, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (1.10)$$

Ainsi, la mesure de l'état instantané du système est disponible pour le joueur. Ceci permet de concevoir une commande fonction de l'état $x(t)$ mesuré et de mieux apprécier l'effet de sa stratégie sur l'évolution du système et sur la valeur du critère associé à chaque décideur.

Dans la littérature [BO95], cette structure d'information en boucle fermée est généralement qualifiée de "sans mémoire". Effectivement seule la valeur de l'état à l'instant considéré est connue. On lui oppose la structure d'information en boucle fermée avec mémoire. Alors η_i comprend aussi l'ensemble des valeurs de l'état avant l'instant t

Définition 1.9 (Information en boucle fermée (avec mémoire)). *Dans un jeu différentiel à N joueurs, Γ_N sur un horizon temporel $\mathcal{T}$, la structure d'information du joueur i est dite en boucle fermée avec mémoire si*

$$\eta_i(t) = \{x(s) | s \in \mathcal{T}, s \leq t\}, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (1.11)$$

Dans ce manuscrit seule la structure d'information en boucle fermée sans mémoire est considérée.

Notons que dans un problème de commande optimale déterministe monocritère, les trajectoires de l'état et de la commande sont identiques pour des solutions en boucle ouverte ou en boucle fermée (système non perturbé). Il n'en est plus de même pour un problème multicritère.

1.2.1.3 Structure d'information échantillonnée

Cette stratégie représente une situation intermédiaire entre les deux cas précédents car l'état $x(t)$ est supposé mesurable à M instants discrets t_m entre t_0 et t_f . Ces mesures sont utilisées pour réactualiser l'action du joueur ; il s'agit d'appliquer une stratégie en boucle ouverte dont le point de départ ou l'état initial est donné par une mesure.

Définition 1.10 (Information échantillonnée). *Dans un jeu différentiel à N joueurs, Γ_N sur un horizon temporel $\mathcal{T}$, la structure d'information du joueur i est dite en échantillonnée si*

$$\eta_i(t) = \{x(t_k) | t_k \leq t \leq t_{k+1}\}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \text{ et } t_0 < t_1 < \dots < t_K, \text{ une subdivision finie de } \mathcal{T}. \quad (1.12)$$

1.3 Définitions des principales stratégies

Pour optimiser son critère un joueur doit tenir compte de la réaction des autres joueurs à sa propre stratégie. En fonction du degré de coopération ou de compétition, de méfiance, voire d'animosité, plusieurs types de stratégies peuvent être définis. Nous donnons ici les définitions des principales stratégies utilisées pour la commande des systèmes.

1.3.1 Stratégie Min-Max

Lorsqu'un joueur ne connaît pas la réaction de ses adversaires, ni la façon dont ils choisissent leurs stratégies, il peut minimiser son critère en supposant qu'ils jouent tous contre lui. En d'autres termes, le joueur " i " choisit une stratégie pour contrer la réaction la plus défavorable des autres joueurs. Le joueur " i " applique alors une stratégie dite du Min-Max.

Définition 1.11 (Min-Max). *En notant $\varphi_{(-i)} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_N)$, une stratégie $\hat{\varphi}_i \in \Phi_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$), est définie comme la stratégie Min-Max, si pour tout $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_N$,*

$$\begin{aligned} & \max_{\varphi_{(-i)} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_{i-1} \times \Phi_{i+1} \times \dots \times \Phi_N} J_i(\varphi_1, \dots, \hat{\varphi}_i, \dots, \varphi_N) \\ & \leq \max_{\varphi_{(-i)} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_{i-1} \times \Phi_{i+1} \times \dots \times \Phi_N} J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N). \end{aligned} \quad (1.13)$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \max_{\varphi_{(-i)} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_{i-1} \times \Phi_{i+1} \times \dots \times \Phi_N} J_i(\varphi_1, \dots, \hat{\varphi}_i, \dots, \varphi_N) \\ & = \min_{\varphi_i \in \Phi_i} \max_{\varphi_{(-i)} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_{i-1} \times \Phi_{i+1} \times \dots \times \Phi_N} J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Notons que seul le critère du joueur " i " est nécessaire pour déterminer la stratégie Min-Max. Ceci est équivalent à un jeu à somme nulle avec deux joueurs où l'adversaire du joueur " i " choisit toutes les commandes u_j ($j \neq i$) et essaie de maximiser J_j . La stratégie Min-Max traduit une absence totale de confiance entre les décideurs et la commande obtenue tente de contrer la pire des situations. Elle mène souvent à des solutions peu satisfaisantes dans le cas d'un jeu à somme non-nulle car elle ne tient pas compte des stratégies réelles des autres joueurs.

Cette stratégie du Min-Max est l'une des premières à avoir été formalisée. Un théorème d'existence a été obtenu par John Von Neumann. Pour plus de détails, on peut se référer à [NM44]. Comme nous le verrons dans la suite, cette stratégie est restreignante par rapport à la stratégie de Nash. Nous ne nous attacherons plus dans ce mémoire à cette stratégie.

1.3.2 Stratégie de Pareto

L'optimum de Pareto que nous allons définir correspond à une situation où la valeur du critère d'un joueur ne peut pas être diminuée sans augmenter la valeur du critère d'un autre joueur. Cette stratégie a été formalisée par le sociologue et économiste italien Vilfredo Pareto [Par96] en 1896.

Définition 1.12 (Stratégie optimale de Pareto). *Une stratégie $\varphi^p = \{\varphi_1^p, \varphi_2^p, \dots, \varphi_N^p\} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_N$ est dite optimale de Pareto ou bien non-inférieure si pour toute stratégie $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_N$*

$$\{J_i(\theta) \leq J_i(\varphi^p), \forall i = 1, \dots, N\} \Rightarrow \{J_i(\theta) = J_i(\varphi^p), \forall i = 1, \dots, N\}. \quad (1.15)$$

Une solution qui n'est pas optimale de Pareto est dite dominée. Effectivement il existe alors une solution que les joueurs préféreront s'ils agissent de façon rationnelle.

La solution φ^p ainsi obtenue est dite non-inférieure car il n'existe pas de solution améliorant simultanément tous les critères. L'ensemble des solutions non-inférieures est appelé ensemble optimal de Pareto.

Théorème 1.13. *Pour tout N uplet $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ tel que,*

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \quad (1.16)$$

définissons le critère

$$J_\beta(\varphi) = \sum_{i=1}^N \beta_i J_i(\varphi). \quad (1.17)$$

Toute solution optimale du problème d'optimisation monocritère de critère J_β est optimale de Pareto pour le jeu différentiel Γ_N .

Démonstration. Soit une stratégie $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_N$ minimisant le critère J_β . Effectuons un raisonnement par l'absurde. Supposons que φ soit dominée. Alors il existe une stratégie $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_N$, telle que

$$J_i(\theta) \leq J_i(\varphi), \forall i = 1, \dots, N, \quad (1.18)$$

avec

$$\exists i \in \{1, \dots, N\}, \quad J_i(\theta) < J_i(\varphi). \quad (1.19)$$

En sommant ces critères (avec les pondérations vérifiant (1.16), on obtient alors la contradiction :

$$J_\beta(\theta) < \min_{\varphi \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_N} J_\beta(\varphi). \quad (1.20)$$

De ce fait, une solution du problème d'optimisation monocritère de critère J_β est optimale de Pareto. $\square$

Dans le cadre général, toute solution optimale de Pareto n'est pas obtenue par l'optimisation d'un critère de la forme J_β . Il faut ajouter pour cela une condition de convexité globale de chacun des critères.

Théorème 1.14. *Soit Γ_N un jeu différentiel à N joueurs. Si tous les critères $J_i(u_1, \dots, u_N)$ sont globalement convexes, alors toutes les stratégies optimales de Pareto peuvent être obtenues par la résolution d'un problème d'optimisation monocritère de critère J_β pour un certain N -uplet $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ vérifiant (1.16).*

Démonstration. Des illustrations pour les jeux à deux joueurs sont données dans [Ho70]. Une démonstration dans le cas général est donnée dans [PC67, Zad63]. On peut aussi la trouver dans [Tak06] $\square$

Le choix des coefficients de pondération indique l'importance accordée à l'action de tel ou tel joueur. Cela suppose que les joueurs ont pu négocier et s'entendre sur les coefficients de pondération attribués. Cela constitue aussi une richesse par le degré de liberté supplémentaire amené par le choix de ces coefficients.

1.3.3 Stratégie de Nash

Lorsque la coopération entre les joueurs est difficile, une stratégie de Nash, dite non coopérative, devient une solution intéressante car elle procure une certaine sécurité aux joueurs.

Définition 1.15 (Réaction rationnelle). *Soit un jeu différentiel Γ_N à N joueurs. On note $\varphi_{(-i)} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_N) \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_{i-1} \times \Phi_{i+1} \times \dots \times \Phi_N$. La stratégie $\tilde{\varphi}_i \in \Phi_i$ du joueur i est dite une réponse rationnelle contre les stratégies $\varphi_{(-i)}$ si*

$$J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \tilde{\varphi}_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_N) = J_i(\varphi_{(-i)}, \tilde{\varphi}_i) \leq J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = J_i(\varphi_{(-i)}, \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \Phi_i. \quad (1.21)$$

On note $\mathcal{R}_i(\varphi_{(-i)})$ l'ensemble des réponses rationnelles du joueur i contre les stratégies $\varphi_{(-i)}$.

Définition 1.16 (Equilibre de Nash). Soit Γ_N un jeu différentiel à N joueurs. Un ensemble de stratégies $\{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_N^*\} \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_N$ est dit de Nash, si

$$\varphi_i^* \in \mathcal{R}_i(\varphi_{(-i)}^*), \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.22)$$

En d'autres termes,

$$J_i(\varphi_{(-i)}^*, \varphi_i^*) \leq J_i(\varphi_{(-i)}^*, \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \Phi_i. \quad (1.23)$$

Le mot équilibre est utilisé pour indiquer que les joueurs en choisissant $\{\varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*\}$ n'ont plus intérêt à modifier leur stratégie.

D'après cette définition, il est clair que dans un équilibre de Nash un joueur ne peut pas améliorer son propre critère s'il dévie unilatéralement de cette stratégie. Un joueur a donc intérêt à maintenir cet équilibre. De plus, il faut noter la symétrie dans les rôles des décideurs; ces rôles sont interchangeables, tous les joueurs sont égaux et décident simultanément de la stratégie à suivre. Une solution de Nash pénalise toute déviation d'un seul joueur. Cependant, si une coalition apparaît entre deux ou plusieurs joueurs, il est possible que cette alliance mène à une amélioration des critères des joueurs concernés.

Pour les jeux statiques, il est possible d'énoncer le théorème d'existence d'équilibres de Nash, dû à Nash [Nas50], qui utilise le théorème du point fixe de Kakutani [Kak41].

Théorème 1.17 (Théorème d'existence de Nash). Soit un jeu différentiel Γ_N à N joueurs. Si les espaces euclidiens Φ_i ($i = 1, \dots, N$) sont fermés, bornés et convexes et les critères $J_i : \Phi_1 \times \dots \times \Phi_N \rightarrow \mathbb{R}$ sont continus par rapport à tous leurs arguments et convexes en u_i (localement convexes) pour tout $u_j \in \Phi_j$, $j = 1, \dots, N$, $j \neq i$. Alors Γ_N admet un équilibre de Nash (en stratégies pures).

Remarque 1.18. Il est à noter qu'un tel théorème ne s'applique pas pour les jeux différentiels.

La notion d'équilibre de Nash, ainsi que ses raffinements [Ben74] (destinés à sélectionner une stratégie de Nash, parmi celles possibles) et extensions ont eu un impact important sur l'étude des problèmes économiques. C'est dans ce domaine qu'on trouve les principales applications de cette théorie [Pet90, AH94].

En reprenant les schémas de [Ho70], il est possible de visualiser dans le cas d'un jeu à deux joueurs à somme non nulle, l'équilibre de Nash statique (φ_1 et φ_2 ne sont pas des fonctions mais uniquement des scalaires). Sur la figure 1.1, sont représentés en traits pleins les lignes isocritères des critères J_1 et J_2 . On peut noter que dans le cas général, les minima globaux de J_1 et J_2 ne sont pas obtenus pour le même couple de stratégie (φ_1, φ_2). La notion de minimum global ne tient plus dans le cas multicritère. Pour définir les équilibres de Nash, il faut commencer par tracer les graphes des ensembles des réactions rationnelles des deux joueurs $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ (en pointillés sur la figure 1.1). Toute intersection de ces deux tracés est un équilibre de Nash. Ici il n'y a qu'une seule intersection.

Pour des critères plus atypiques, on comprend facilement que les ensembles $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ peuvent être disjoints (et il n'y a pas d'équilibre de Nash pour le système) ou peuvent admettre plusieurs intersections (et il existe alors plusieurs équilibres de Nash liés à ce système). Ces observations restent valables (mais sont plus difficiles à mettre en évidence) dans le cas des jeux différentiels.

Sur la figure 1.2, quatre contre-exemples sont indiqués. Sur les figures 1.2.a et 1.2.d, il n'y a aucune intersection entre les ensembles de réactions rationnelles. Sur la figure 1.2.b, il y a une infinité d'intersections, un nombre fini sur la figure 1.2.c.

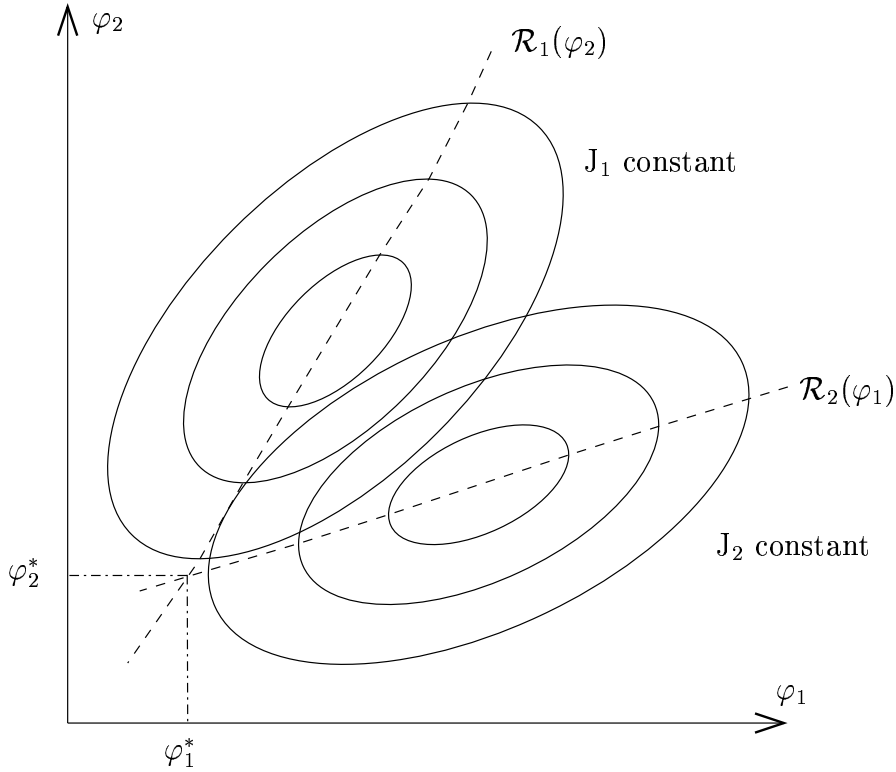


FIGURE 1.1 – Construction géométrique pour les équilibres de Nash statiques

Malgré le théorème 1.17 d'existence d'une stratégie de Nash pour un jeu différentiel à critères convexes, rien n'assure l'unicité de cette stratégie, comme le montre la figure 1.2. Il s'agit d'un point délicat. Effectivement dans un jeu si tous les joueurs souhaitent utiliser une stratégie de Nash, ils doivent *au préalable* se mettre d'accord sur quelle stratégie de Nash ils souhaitent se fixer. Si les joueurs ne se mettent pas d'accord sur l'équilibre qu'ils souhaitent réaliser, ils risquent d'utiliser chacun des stratégies associées à différents équilibres de Nash. Cela a un effet désastreux car il ne s'agit plus d'une stratégie de Nash.

En comparant les stratégies de Nash et du min-max, il est mis en évidence qu'il est plus avantageux pour un joueur d'utiliser sa stratégie de Nash que sa stratégie min-max, sous la condition que les autres joueurs utilisent également leur stratégie de Nash.

$$\begin{aligned}
 J_i(\varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*) &= \min_{\varphi_i} J_i(\varphi_1^*, \dots, \varphi_{i-1}^*, \varphi_i, \varphi_{i+1}^*, \dots, \varphi_N^*) \\
 &\leq J_i(\varphi_1^*, \dots, \varphi_{i-1}^*, \hat{\varphi}_i, \varphi_{i+1}^*, \dots, \varphi_N^*).
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

1.3.4 Stratégie de Stackelberg

Le concept de base de l'équilibre de Stackelberg [vS34] est présenté ici pour un jeu à deux joueurs. Contrairement à une stratégie de Nash, un des joueurs possède une situation privilégiée : c'est le "leader", tandis que l'autre joueur est le "suiveur". On considère ici, et dans tout le reste de ce mémoire, que le joueur 2 est le leader. Dans une stratégie de Stackelberg, le leader déclare sa stratégie φ_2 le premier. Le suiveur (joueur 1) doit choisir une stratégie φ_1 qui tient compte de la stratégie φ_2 annoncée par le leader. Dans un premier temps nous donnons la définition générale de l'équilibre de Stackelberg, puis dans un second temps, une écriture simplifiée.

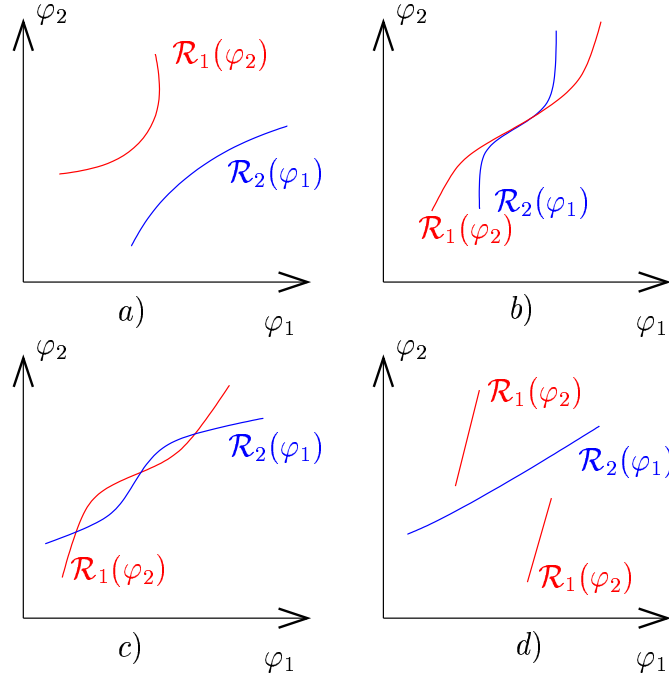


FIGURE 1.2 – Exemples particuliers d'équilibres de Nash statiques

Définition 1.19. Soit un jeu différentiel Γ_2 , à 2 joueurs. En reprenant la définition 1.15 de l'ensemble des réactions rationnelles du suiveur $\mathcal{R}_1$. Un équilibre de Stackelberg noté $(\varphi_1^{**}, \varphi_2^{**})$ est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1^{**} \in \mathcal{R}_1(\varphi_2^{**}) \\ \text{et} \\ \max_{\varphi_1 \in \mathcal{R}_1(\varphi_2^{**})} J_2(\varphi_1, \varphi_2^{**}) \leq \max_{\varphi_1 \in \mathcal{R}_1(\varphi_2)} J_2(\varphi_1, \varphi_2), \quad \forall \varphi_2 \in \Phi_2. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

L'idée est donc simple; le leader connaît la réaction rationnelle du suiveur et profite de cette information pour optimiser son critère tandis que le suiveur essaie de minimiser son propre critère pour une stratégie φ_2 donnée. Le leader a donc un rôle prépondérant dans le jeu, on peut considérer qu'il occupe le niveau supérieur de la décision. Compte tenu du biais dans la structure d'information qui favorise le leader, les rôles des deux joueurs ne sont pas symétriques et ne décident pas simultanément de leur stratégie contrairement à l'équilibre de Nash.

Théorème 1.20. Soit Γ_2 un jeu différentiel. Si Φ_1 et Φ_2 sont deux espaces compacts et si les critères J_1 et J_2 sont continus sur $\Phi_1 \times \Phi_2$, et si de plus il existe une famille finie d'applications continues $T^{(k)} : \Phi_2 \rightarrow \Phi_1$ ($k = 1, \dots, K$), telles que

$$\mathcal{R}_1(\varphi_2) = \left\{ \phi_1 \in \Phi_1 \mid \phi_1 = T^{(k)}(\varphi_2), k = 1, \dots, K \right\}, \quad (1.26)$$

alors Γ_2 admet un équilibre de Stackelberg avec le joueur 2 comme leader.

Démonstration. On se reporte à [BO95, Theorem 4.8]. □

Si de plus il est supposé que l'ensemble des réactions rationnelles est composé d'une seule stratégie, il existe une application

$$\begin{aligned} T : \Phi_2 &\longrightarrow \Phi_1 \\ \varphi_2 &\longmapsto \varphi_1 = T(\varphi_2) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Une stratégie de Stackelberg avec le joueur 2 comme leader doit satisfaire alors

$$J_2(T(\varphi_2^{**}), \varphi_2^{**}) \leq J_2(T(\varphi_2), \varphi_2), \quad \forall \varphi_2 \in \Phi_2, \quad (1.28)$$

$$\varphi_1^{**} = T(\varphi_2^{**}), \quad (1.29)$$

et pour le suiveur (par définition de l'application T), on a

$$J_1(T(\varphi_2), \varphi_2) \leq J_1(\varphi_1, \varphi_2), \quad \forall \varphi_1 \in \Phi_1 \text{ et } \varphi_2 \in \Phi_2 \text{ fixé.} \quad (1.30)$$

Pour montrer que la stratégie de Stackelberg favorise le leader, il est possible de la comparer à celle de Nash. Si $\{\varphi_1^*, \varphi_2^*\}$ représente une stratégie de Nash, on peut écrire pour le suiveur (joueur 1) dans le cas de l'existence de l'application T définie par (1.27)

$$J_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*) \leq J_1(\varphi_1, \varphi_2^*), \quad \forall \varphi_1 \in \Phi_1. \quad (1.31)$$

L'application T vérifie donc

$$J_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*) = J_1(T(\varphi_2^*), \varphi_2^*). \quad (1.32)$$

En utilisant la définition de la stratégie de Stackelberg, il vient

$$J_2(T(\varphi_2^{**}), \varphi_2^{**}) \leq J_2(\varphi_1^*, \varphi_2^*). \quad (1.33)$$

Ainsi, pour le leader, une stratégie de Stackelberg est équivalente, sinon meilleure, qu'une stratégie de Nash quelconque. Pour le suiveur, une stratégie de Stackelberg peut être meilleure, dans certains cas uniquement que celle de Nash.

Afin de mieux visualiser la notion d'équilibre de Stackelberg, le cas statique (φ_1 et φ_2 sont scalaires) est utilisé. On reprend certains schémas de [BO95], inspirés du cas de la stratégie de Nash [Ho70]. A partir des lignes d'isoniveau pour le critère J_1 (figure 1.3), il est possible de tracer le lieu de l'ensemble des réponses rationnelles $\mathcal{R}_1$. Un équilibre de Stackelberg avec le joueur 2 comme leader correspond à l'ensemble des couples $(\varphi_1^{**}, \varphi_2^{**})$, pour lesquels l'ensemble des réponses rationnelles est tangent à une ligne d'isocritère du critère J_2 . Notons que le lieu des réponses rationnelles du leader n'est pas nécessaire.

La hiérarchie naturelle qui apparaît dans la stratégie de Stackelberg permet de la rapprocher d'une structure de commande à deux niveaux. Quand plus de deux joueurs sont engagés, on peut considérer plusieurs cas : un seul leader et plusieurs suiveurs, plusieurs leaders et plusieurs suiveurs, une structure de décision multi-niveaux avec un ou plusieurs joueurs par niveau, etc. Le degré de difficulté du problème posé croît très rapidement en fonction du nombre de joueurs.

Plusieurs cas d'étude et des applications de la stratégie de Stackelberg en sciences économiques sont décrits dans [Bag84, DJLS00].

1.4 Jeux différentiels linéaires-quadratiques

Les jeux différentiels linéaires-quadratiques (système linéaire et critères quadratiques) sont souvent étudiés dans la littérature à cause de leur simplicité relative. Dans cette thèse, seul ce type de jeux

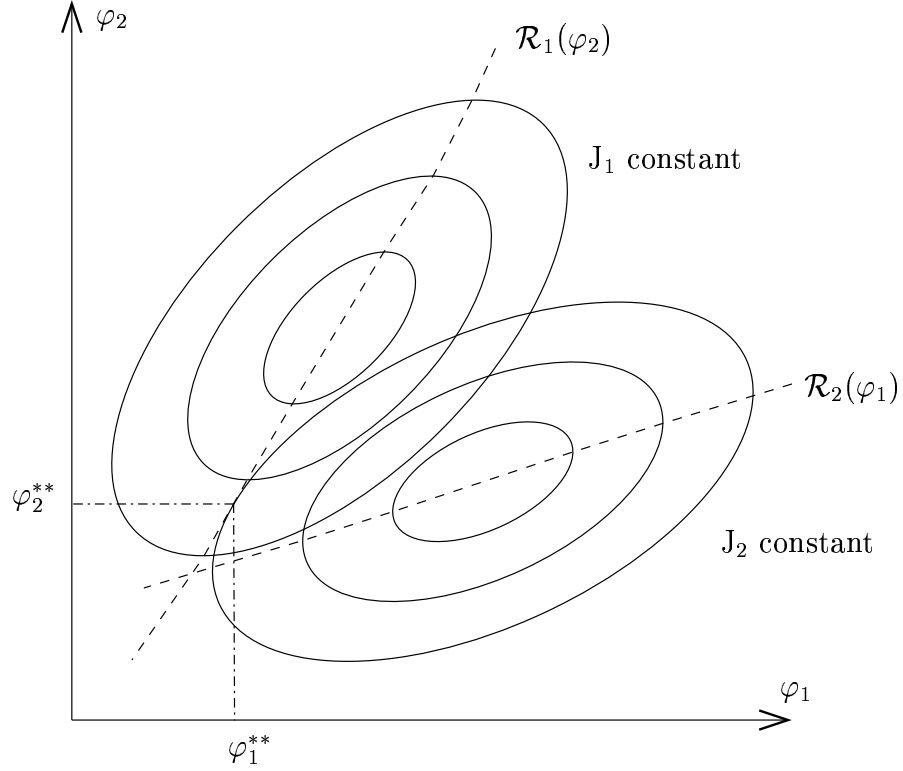


FIGURE 1.3 – Construction géométrique d'un équilibre de Stackelberg statique.

différentiels est étudié, afin de permettre une comparaison avec le problème linéaire - quadratique monocritère classique [AM89, KS72]. Pour N joueurs, le jeu différentiel Γ_N est défini dans ce cas par

$$\mathcal{T} = [t_0, t_f], \quad \mathcal{X} = \mathbb{R}^n, \quad U_i = \mathbb{R}^{r_i}. \quad (1.34)$$

L'entier n est la dimension de l'espace d'état, et les r_i les dimensions des espaces d'entrée. Les temps t_0 et t_f sont respectivement les instants initial et final du jeu.

La dynamique est linéaire et vaut :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^N B_i u_i(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.35)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u_i(t) \in \mathbb{R}^{r_i}$, ($i = 1, 2, \dots, N$).

La fonction coût associée au joueur " i " est donnée par

$$J_i = \frac{1}{2} x_f^T K_{if} x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T(t) Q_i x(t) + \sum_{j=1}^N u_j^T(t) R_{ij} u_j(t) \right) dt, \quad (1.36)$$

en notant $x_f = x(t_f)$.

Toutes les matrices de pondérations sont symétriques et les matrices R_{ii} sont inversibles pour $i = 1, 2, \dots, N$.

L'évolution de l'état $x(t)$ du système est donc influencée par N agents par l'intermédiaire des commandes u_i . Les jeux linéaires-quadratiques sont assez largement utilisés car ils représentent un

intérêt particulier dans des problèmes macroéconomiques comme la recherche de politiques stabilisantes à court terme ou la coordination de politiques entre pays [Pin77] et [DJLS00]. On trouve aussi des applications dans les problèmes de poursuite [HBB65]. Il faut avouer aussi que considérer une classe plus large de jeux différentiels mène à des problèmes qui sont extrêmement difficiles à résoudre.

Le choix de traiter principalement des jeux différentiels linéaires-quadratiques a été fait compte tenu de leur importance et de leur simplicité. En effet, beaucoup de systèmes physiques ou économiques ont une dynamique linéaire, ou bien qui peut être correctement approchée par son modèle linéarisé tangent. Aussi la classe des critères quadratiques regroupe les problèmes où l'on cherche à minimiser l'énergie des diverses commandes, l'énergie de l'état, mais aussi les problèmes de poursuite de trajectoire en minimisant l'intégrale d'un terme de la forme $[x(t) - x_d(t)]^T [x(t) - x_d(t)]$, où $x_d(t)$ est la trajectoire désirée. De plus, la simplicité (relative) des jeux linéaires quadratiques permet d'appliquer les résultats théoriques obtenus, en exploitant pleinement les propriétés et les interprétations pratiques. Ce choix permet aussi d'intégrer assez commodément des modèles de systèmes présentant des incertitudes structurées.

1.5 Conclusion

Ce chapitre présente les notions fondamentales de la théorie des jeux, notions qui sont utilisées dans l'ensemble de ce manuscrit de thèse. Après un rapide historique, les principales structures d'information sont détaillées. Les définitions des principales stratégies sont présentées, en particulier les stratégies de Nash et de Stackelberg. Le cadre des jeux linéaires-quadratiques est défini. L'essentiel des concepts de la théorie des jeux qui sont utiles pour la suite étant posé, il devient possible d'examiner la robustesse des commandes issues de la théorie des jeux.

Chapitre 2

Stratégie de Nash avec structure d'information en boucle ouverte

2 × 142857
= 285714

Parmi les différentes structures d'information, la structure d'information en boucle ouverte est la plus simple. Lors du travail de cette thèse, la première stratégie étudiée a donc été la stratégie de Nash en boucle ouverte. La stratégie de Nash est une solution sécurisante quand un décideur ne peut pas, ou ne souhaite pas collaborer avec ses concurrents. Comme cela a été expliqué précédemment, la caractéristique principale de la stratégie de Nash est qu'un joueur ne peut pas améliorer unilatéralement son critère en modifiant sa commande tant que les autres joueurs appliquent leurs stratégies de Nash.

Dans ce chapitre, la mise en équations de la stratégie de Nash en boucle ouverte est présentée, tout d'abord dans le cas général, puis rapidement dans le cas linéaire-quadratique. Le reste du chapitre se limite au cadre linéaire-quadratique. La mise en équation mène alors à des équations couplées de Riccati. Il est rappelé comment il est possible de résoudre ce type d'équations (différentielles et algébriques). Dans le cas d'équations algébriques couplées de Riccati, il est mis en évidence que plusieurs solutions peuvent être admissibles. Afin de sélectionner une solution, une étude de la robustesse des commandes issues de la stratégie de Nash est proposée. Cette étude montrera en quoi cette robustesse est limitée. Enfin un exemple d'utilisation pour des systèmes pratiques de la stratégie de Nash en boucle ouverte est présenté. Ici le système est une suspension magnétique à 4 électroaimants.

2.1 Mise en équations

Considérons un jeu différentiel à N joueurs, où le joueur " i " ($i = 1, 2, \dots, N$) doit déterminer une commande $u_i(t)$ pour minimiser le critère J_i donné par

$$J_i = K_{if}(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) dt, \quad (2.1)$$

où $x_f = x(t_f)$ et sous la contrainte

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)). \quad (2.2)$$

On suppose ici que la structure d'information dans le jeu est du type boucle ouverte. Les conditions nécessaires du premier ordre que doit satisfaire une stratégie de Nash dans un jeu différentiel ont été

déduites par Case [Cas69]. Starr et Ho [SH69b] ont présenté des résultats identiques en utilisant une autre approche qui permet d'englober aussi les conditions nécessaires pour la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle fermée. De façon à pouvoir conserver le caractère synthétique de ce manuscrit sur ses différentes parties, nous présentons ici l'approche de Starr et Ho.

Le Hamiltonien associé au joueur " i " ($i = 1, 2, \dots, N$) s'écrit

$$H_i(x, u_1, \dots, u_N, \psi_i, \psi_i^\circ, t) = \psi_i^\circ L_i(x, u_1, \dots, u_N, t) + \psi_i^T f(x, u_1, \dots, u_N, t), \quad (2.3)$$

où $\psi_i(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état adjoint du problème d'optimisation du joueur " i ", associé à la contrainte dynamique (2.2) et $\psi_i^\circ \geq 0$ un scalaire positif, associé au critère instantané L_i . Les conditions nécessaires d'un équilibre de Nash sont données dans [SH69b], et proviennent du Principe du Minimum de Pontryagin [PBGM62]

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial x}, \quad (2.4)$$

avec comme condition de transversalité

$$\psi_i(t_f) = \psi_i^\circ \frac{\partial K_{if}(x_f, t_f)}{\partial x_f}. \quad (2.5)$$

Le vecteur $(\psi_i(t_f), \psi_i^\circ) = \left(\psi_i^\circ \frac{\partial K_{if}(x_f, t_f)}{\partial x_f}, \psi_i^\circ \right)$ étant non nul car l'état final est libre, le scalaire ψ_i° est non nul. Le problème d'optimisation est de type normal et comme il est déterminé à la constante multiplicative près ψ_i° , il est possible de normaliser le vecteur d'état adjoint ψ_i avec $\psi_i^\circ = 1$.

La commande $u_i(t) = u_i^*(t, \eta_i(t)) = u_i^*(t, x_0)$ minimise

$$H_i(x, u_1^*(t), \dots, u_{i-1}^*(t), u_i(t), u_{i+1}^*(t), \dots, u_N^*(t), \psi_i(t), t). \quad (2.6)$$

Ces conditions nécessaires générales sont appliquées au cas des systèmes linéaires-quadratiques multicritères. La dynamique est donc de la forme

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^N B_i u_i(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.7)$$

et les critères purement quadratiques

$$J_i = \frac{1}{2} x_f^T K_{if} x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T(t) Q_i x(t) + \sum_{j=1}^N u_j^T(t) R_{ij} u_j(t) \right) dt. \quad (2.8)$$

Pour une structure d'information en boucle ouverte, l'application directe des conditions nécessaires mène donc à

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -Q_i x(t) - A^T \psi_i(t). \quad (2.9)$$

Pour la condition de minimisation de l'Hamiltonien H_i par u_i , on recherche u_i^* parmi les solutions de la condition du premier ordre :

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = 0. \quad (2.10)$$

Comme R_{ii} est inversible, la seule solution (minimisant donc l'Hamiltonien H_i) est

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T \psi_i(t). \quad (2.11)$$

L'état final étant libre, les vecteurs d'état adjoints vérifient la condition de transversalité

$$\psi_i(t_f) = K_{if}x_f. \quad (2.12)$$

En injectant les commandes $u_i^*(t)$ de la forme (2.11) dans les équations (2.9) et (2.7), il est possible de représenter le problème de la façon linéaire suivante

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S_1 & \cdots & -S_N \\ -Q_1 & -A^T & & 0_n \\ \vdots & & \ddots & \\ -Q_N & 0_n & & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{N,BO} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

avec

$$S_i = B_i R_i^{-1} B_i^T, \quad (2.14)$$

et 0_n la matrice carrée nulle de taille n . Les conditions aux limites se résument de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ \psi_1(t_f) \\ \vdots \\ \psi_N(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ K_{1f}x_f \\ \vdots \\ K_{Nf}x_f \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Il s'agit donc d'un problème dit "aux deux bouts" comme les conditions aux limites portent en même temps sur les conditions initiales et sur les conditions finales.

Il est à noter que pour le cas $N = 1$, on retrouve la matrice Hamiltonienne caractéristique des problèmes linéaires-quadratiques monocritères.

La section suivante indique comment résoudre ce type de problème grâce à des équations couplées de type Riccati.

2.2 Equations couplées (ou équation) de Riccati

Comme pour le cas monocritère linéaire-quadratique, les équations nécessaires (2.13) étant regroupées sous forme d'un système linéaire, et les conditions aux limites étant linéaires en $x(t_0)$ ou $x(t_f)$, il est clair que la solution $(x(t), \psi_1(t), \dots, \psi_N(t))$ continûment dérivable est linéaire en $x(t_0) = x_0$. Il est toujours possible de poser les matrices carrées $X(t)$, $\Pi_1(t)$, $\dots$, $\Pi_N(t)$ de taille $n \times n$ et continûment dérivables telles que

$$x(t) = X(t)x_0, \quad \psi_i(t) = \Pi_i(t)x_0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

Dans le cas où $X(t)$ n'est pas inversible sur $[t_0, t_f]$, il n'existe pas de solution à ce problème d'optimisation. Dans ce cas, il est possible de se reporter aux explications du cas monocritère linéaire-quadratique [Ber83].

Dans le cas où $X(t)$ est inversible sur l'intervalle $[t_0, t_f]$, il est alors possible de poser

$$\psi_i(t) = K_i(t)x(t), \quad (2.17)$$

en prenant $K_i(t) = \Pi_i(t)X^{-1}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall i = 1, \dots, N$.

En utilisant les équations (2.9) et (2.7), on montre aisément que les matrices $K_i(t)$ doivent satisfaire ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$\frac{dK_i(t)}{dt} = -A^T K_i(t) - K_i(t)A - Q_i + K_i(t) \sum_{j=1}^N S_j K_j(t), \quad (2.18)$$

avec

$$K_i(t_f) = K_{if}. \quad (2.19)$$

Il est à noter dès maintenant que le problème aux deux bouts, par cette linéarité entre l'état $x(t)$ et les vecteurs d'état adjoints $\psi_i(t)$ mène à un problème de résolution à un seul bout. Effectivement il est possible d'intégrer numériquement à partir de $t = t_f$ les N équations différentielles (2.18) en temps rétrograde jusqu'à $t = t_0$, l'instant initial. Dans le cas où l'intégration de ces équations non-linéaires explose, il est possible de montrer que la matrice $X(t)$ est non inversible et qu'il n'existe pas de solution au problème d'optimisation. Ces équations différentielles couplées faisant intervenir des termes quadratiques sont appelées *équations différentielles couplées de Riccati*.

Il est possible de remarquer qu'avec un tel couplage ces équations sont asymétriques (si une solution existe, elle n'est pas de façon générale symétrique).

Les couplages quadratiques présents dans les N équations (2.18) sont très particuliers et permettent de regrouper ces équations sous la forme d'une seule équation différentielle de Riccati rectangulaire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} -A^T & & 0_n \\ & \ddots & \\ 0_n & & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} A \\ &\quad - \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} [S_1 \ \cdots \ S_N] \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{pmatrix} K_1(t_f) \\ \vdots \\ K_N(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1f} \\ \vdots \\ K_{Nf} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Cette réécriture met encore mieux en évidence le fait que cette équation est dissymétrique et rectangulaire comme les termes linéaires à droite et à gauche du vecteur étendu ne sont pas de même dimension. On peut noter aussi que les coefficients matriciels de l'équation (2.20) sont des sous-matrices blocs de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$, définie par (2.13)

$$\mathcal{M}_{N,BO} = \begin{bmatrix} A & -S_1 & \cdots & -S_N \\ -Q_1 & -A^T & & 0_n \\ \vdots & & \ddots & \\ -Q_N & 0_n & & -A^T \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

La stratégie de Nash en boucle ouverte est donc obtenue en appliquant les commandes

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t) \phi(t, t_0) x_0, \quad (2.23)$$

où $\phi(t, t_0)$ est la matrice de transition du système. Elle vérifie

$$\frac{d\phi(t, t_0)}{dt} = \left(A - \sum_{j=1}^N S_j K_j(t) \right) \phi(t, t_0), \quad \phi(t, t) = I_n, \quad (2.24)$$

où I_n est la matrice identité de taille n . Notons que $\phi(t, t_0)$ est introduite pour éviter l'apparition de l'état courant $x(t)$ dans l'expression de la commande $u_i^*(t)$. Ainsi la structure d'information en boucle ouverte est respectée. D'ailleurs, les conditions nécessaires à satisfaire auraient changé si les joueurs pouvaient utiliser l'état dans leur commande. Nous le verrons plus avant dans ce mémoire, avec la structure d'information en boucle fermée.

2.3 Remarques générales sur l'équilibre de Nash

Un certain nombre de commentaires sont faits ici sur l'équilibre de Nash.

2.3.1 Cohérence intertemporelle des stratégies de Nash

Pour obtenir les commandes issues d'une stratégie de Nash, nous avons utilisé un calcul variationnel. Ici on fait l'hypothèse que $x(t)$ est solution unique de la contrainte dynamique (2.2) pour des commandes fixées $u_i(t)$. Si l'on considère une commande issue d'une stratégie de Nash s'appliquant à un jeu d'instant initial t_0 et de valeur initiale $x(t_0) = x_0$, la question est de savoir si la restriction de cette commande sur l'intervalle $[t_1, t_f]$, avec l'instant t_1 vérifiant $t_1 > t_0$, est optimale pour le même problème d'optimisation mais sur l'horizon $[t_1, t_f]$. Les solutions étant obtenues par une intégration rétrograde des équations (2.18), la commande restreinte est bien optimale sur $[t_1, t_f]$. On dit alors que la commande est *cohérente intertemporellement* ou en anglais "*time consistent*", voir [DJLS00] pour plus de détails. De manière plus générale, toutes les stratégies de Nash sont cohérentes intertemporellement.

2.3.2 Différence entre équilibre et solution des équations de Riccati

La recherche d'un équilibre de Nash pour un jeu linéaire-quadratique passe par la résolution de conditions nécessaires (2.13). Les conditions nécessaires linéaires sont reformulées en équations couplées différentielles de Riccati. Néanmoins une solution de ces équations ne mène pas toujours à un équilibre de Nash, en particulier quand on passe à un horizon infini ($t_f \rightarrow +\infty$). Eisele dans [Eis82] reprend le formalisme de Lukes et Russel [LR71] et indique en terme d'opérateur des conditions d'existence et des conditions d'unicité des solutions de (2.13).

2.3.3 Conditions d'existence et d'unicité d'un équilibre de Nash

En revanche, il est possible sous une condition de convexité des critères d'obtenir un résultat sur l'existence d'un équilibre. Le théorème 2.1 reprend le théorème [Kre03, Theorem 2.13]

Théorème 2.1. *Soit un jeu différentiel Γ_N à N joueurs, vérifiant les conditions de convexité*

$$\begin{cases} R_{ii} > 0_{r_i}, \\ Q_i \geq 0_n, \\ K_{if} \geq 0_n \end{cases}, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (2.25)$$

Supposons aussi que les équations (2.18) avec les conditions aux limites (2.19) admettent une solution sur $[t_0, t_f]$, alors le jeu Γ_N admet un unique équilibre de Nash donné par

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t) x^*(t), \quad (2.26)$$

où $x^(t)$ est solution de l'équation*

$$\dot{x}(t) = \left(A - \sum_{j=1}^N S_j K_j(t) \right) x(t), \quad (2.27)$$

et ce pour toute condition initiale $x(t_0)$.

Eisele présente dans [Eis82] une approche par la fonction valeur pour déterminer un équilibre de Nash, qui utilise aussi les conditions de convexité.

La condition de convexité (2.25) n'est pourtant pas une condition nécessaire de l'existence et de l'unicité d'un équilibre de Nash. En particulier pour les jeux à deux joueurs à somme nulle, la

condition de convexité (2.25) ne peut pas être vérifiée pour les deux critères comme $J_1 = -J_2$ et il peut exister un équilibre de Nash. Kremer dans [Kre03] propose des conditions moins fortes que la convexité stricte.

Théorème 2.2. *Soit un jeu différentiel Γ_N à N joueurs, vérifiant*

$$R_{ii} > 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.28)$$

Supposons que les équations différentielles de Riccati standards

$$\dot{E}_i = -A^T E_i - E_i A - Q_i + E_i S_i E_i, \quad \text{avec } E_i(t_f) = K_{if} \quad (2.29)$$

admettent une solution sur l'horizon $[t_0, t_f]$ pour $i = 1, \dots, N$ et supposons que les équations différentielles de Riccati couplées (2.18) admettent une solution sur $[t_0, t_f]$, alors le jeu Γ_N admet un unique équilibre de Nash donné par

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t) x^*(t), \quad (2.30)$$

où $x^(t)$ est solution de l'équation*

$$\dot{x}(t) = \left(A - \sum_{j=1}^N S_j K_j(t) \right) x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.31)$$

La démonstration de ce théorème 2.2 s'inspire de [Kre03, theorem 1.29] et est détaillée dans [Feu94].

Lukes et Russel dans [LR71] proposent une condition d'existence et d'unicité des équilibres de Nash sous la forme de l'inversibilité d'une matrice d'opérateurs. Cette condition est néanmoins très délicate à utiliser en pratique.

2.4 Résolution des équations différentielles de Riccati couplées rectangulaires

Les conditions nécessaires pour un équilibre de Nash en boucle ouverte peuvent s'exprimer sous la forme d'une équation de type Riccati rectangulaire. Cette section présente divers résultats pour résoudre les équations de type Riccati couplées rectangulaires. Il est possible de retrouver ces résultats dans [AKFIJ03].

On appelle une équation de Riccati généralisée, une équation différentielle de la forme

$$\dot{W} = \mathcal{M}_{21}(t) + \mathcal{M}_{22}(t)W - W\mathcal{M}_{11}(t) - W\mathcal{M}_{12}(t)W, \quad (2.32)$$

où les matrices $\mathcal{M}_{11}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{M}_{12}(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathcal{M}_{21}(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathcal{M}_{22}(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont continues par morceaux. A cette équation différentielle de Riccati rectangulaire, on associe la matrice

$$\mathcal{M}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11}(t) & \mathcal{M}_{12}(t) \\ \mathcal{M}_{21}(t) & \mathcal{M}_{22}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}. \quad (2.33)$$

2.4.1 Linéarisation d'une équation de Riccati rectangulaire

Une équation de Riccati rectangulaire est une équation différentielle non linéaire que l'on peut linéariser, sous certaines conditions, par un changement de variables non linéaire, soit $Y(t) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times n}$ vérifiant

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{M}(t)Y(t). \quad (2.34)$$

Pour cela on utilise le lemme de Radon, dont nous donnons deux versions.

Lemme 2.3 (de Radon, version 1).

1. Soit I_n la matrice identité de dimension n et $W(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une solution de (2.32) sur un intervalle $\Delta \subset \mathbb{R}$, avec $W(t_0) = W_0$. Si $Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la solution unique pour tout $t \in \Delta$ du problème différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = (\mathcal{M}_{11}(t) + \mathcal{M}_{12}(t)W(t)) Q(t), \\ Q(t_0) = I_n, \end{cases} \quad (2.35)$$

et $P(t) = W(t)Q(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors $Y(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$ définit pour tout $t \in \Delta$ une solution de (2.32) avec $Y(t_0) = \begin{pmatrix} I_n \\ W_0 \end{pmatrix}$.

2. Si $Y(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$ est une solution de (2.34) sur un intervalle $\Delta \subset \mathbb{R}$ tel que $\det Q(t) \neq 0$ pour tout $t \in \Delta$ alors

$$\begin{aligned} W : \Delta &\longrightarrow \mathbb{C}^{m \times n} \\ t &\longmapsto P(t)Q^{-1}(t) = W(t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

est solution de (2.34) avec $W(t_0) = P(t_0)Q^{-1}(t_0)$.

En théorie des jeux ou en théorie du contrôle, le calcul variationnel mène souvent à un problème différentiel dont les conditions aux limites portent sur les conditions initiales et sur les conditions finales sous la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \mathcal{M}(t) \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11}(t) & \mathcal{M}_{12}(t) \\ \mathcal{M}_{21}(t) & \mathcal{M}_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

avec

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ p(t_f) = K_f x(t_f) \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.38)$$

La deuxième version du lemme de Radon donne une condition pour passer d'un problème aux deux bouts de la forme (2.32) à un problème à un seul bout.

Lemme 2.4 (de Radon, version 2). Si le problème à un bout

$$\begin{cases} \dot{W} = \mathcal{M}_{21}(t) + \mathcal{M}_{22}(t)W - W\mathcal{M}_{11}(t) - W\mathcal{M}_{12}(t)W, \\ W(t_0) = 0_{m \times n}, \end{cases} \quad (2.39)$$

admet une solution W sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ et si

$$\det(K_f W(t_f) - I_n) \neq 0, \quad (2.40)$$

alors le problème aux deux bouts (2.37) et (2.38) admet une unique solution.

On peut noter qu'Engwerda dans [Eng98b] ne fait que proposer une autre écriture de la condition (2.40).

Dans le cas d'horizon fini pour les critères, une solution analytique d'une équation différentielle de Riccati rectangulaire est possible. Nous ne la détaillons pas ici étant donné que nous ne l'utilisons pas. Son expression, sa démonstration ainsi que des propriétés sont présentées dans [AKFIJ03, Chapitre 6].

2.4.2 Cas de critères à horizon infini

Dans certaines applications, l'instant terminal t_f de l'horizon des critères peut être très grand par rapport à l'instant initial t_0 ou bien par rapport aux temps caractéristiques de la dynamique du système, ou mal connu. Travailler sur un horizon infini ($t_f \rightarrow +\infty$, à t_0 fixé) constitue alors la meilleure approximation pour ce problème. La présence du terme coût final n'a plus de sens, car il n'y a plus d'instant final. Pour ce qui concerne les critères quadratiques, une autre raison permet de supprimer ce terme de coût final : si le système est stabilisé par l'application des commandes,

$$\lim_{t_f \rightarrow +\infty} x(t_f) = 0, \quad (2.41)$$

ce qui annule ces termes de coût final. Les critères deviennent donc

$$J_i = \int_{t_0}^{+\infty} L_i(x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t), t) dt, \quad (2.42)$$

ou bien plus particulièrement pour les critères quadratiques

$$J_i = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} \left(x^T(t) Q_i x(t) + \sum_{j=1}^N u_j^T(t) R_{ij} u_j(t) \right) dt. \quad (2.43)$$

Il est alors intéressant de regarder comment les résultats obtenus précédemment sont modifiés en tenant compte de l'horizon infini des critères. La formalisation du problème reste toujours valable, en revanche quelle que soit la stratégie utilisée, on peut chercher des solutions aux équations différentielles de Riccati rectangulaires (2.32) qui soient constantes. Dans ce cas particulier ces équations différentielles de Riccati rectangulaires deviennent des équations algébriques (les termes dérivés sont remplacés par des matrices nulles de taille adaptée).

Ce passage à la limite est très délicat. Effectivement même s'il est possible d'associer un équilibre de Nash à un ensemble d'équations couplées différentielles de Riccati, aucun théorème pour l'instant ne permet de savoir s'il est possible d'associer un équilibre à des équations couplées algébriques de Riccati. Dans la suite, nous nous limitons aux jeux différentiels à deux joueurs. Les équations couplées algébriques de Riccati sont alors

$$0_n = -A^T K_i - K_i A - Q_i + K_i \sum_{j=1}^N S_j K_j, \quad \forall i = 1, 2. \quad (2.44)$$

La fin de ce paragraphe reprend un résultat présenté dans [Eng05b]. Il nécessite la définition d'une solution fortement stabilisante.

Définition 2.5 (solution fortement stabilisante). Soit (K_1, K_2) une solution des équations de Riccati couplées algébriques (2.44) pour $N = 2$. Cette solution est appelée

- stabilisante, si $\lambda(A - S_1 K_1 - S_2 K_2) \subset \mathbb{C}^<$,
- fortement stabilisante, si elle est stabilisante et si

$$\lambda \left(\begin{array}{cc} K_1 S_1 - A^T & K_1 S_2 \\ K_2 S_1 & K_2 S_2 - A^T \end{array} \right) \subset \mathbb{C}^\geq \quad (2.45)$$

Nous verrons plus en détail dans un paragraphe suivant (paragraphe 2.5.2.1) d'où provient cette matrice. Les deux théorèmes suivants sont proposés dans [Eng05b].

Théorème 2.6. Si les équations (2.44) pour $N = 2$, admettent une solution fortement stabilisante, alors cette solution est unique.

Théorème 2.7. *Un jeu différentiel linéaire-quadratique à 2 joueurs a un unique équilibre de Nash en boucle ouverte pour toute condition initiale x_0 si et seulement si*

- les équations (2.44) admettent une solution fortement stabilisante,
- les équations de Riccati standards

$$0_n = A^T E_i + E_i A - E_i S_i E_i + Q_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.46)$$

admettent une solution E_i stabilisante.

De plus, l'unique équilibre est donné par les commandes :

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i K_i \xi(t, t_0) x_0, \quad i = 1, 2, \quad (2.47)$$

où $\xi(t, t_0)$ est la matrice de transition vérifiant

$$\dot{\xi}(t, t_0) = (A - S_1 K_1 - S_2 K_2) \xi(t, t_0), \quad \xi(t_0, t_0) = I_n. \quad (2.48)$$

Les conditions de ce dernier théorème sont extrêmement contraignantes (la condition "fortement stabilisante" est assez rarement vérifiée). L'objectif ici est d'étudier, même dans le cas général (sans condition "fortement stabilisante"), quelles propriétés conservent ces équations couplées algébriques de Riccati. Dans ce sens, la section suivante propose de résoudre les équations algébriques de Riccati rectangulaires en détail, afin de résoudre les équations algébriques couplées de type Riccati issues des stratégies de Nash ou de Stackelberg avec une structure d'information en boucle ouverte.

2.5 Résolution des équations algébriques de Riccati rectangulaires

On s'intéresse ici à la résolution des équations algébriques de Riccati rectangulaires correspondant à (2.32)

$$0_{m \times n} = \mathcal{M}_{21} + \mathcal{M}_{22} W - W \mathcal{M}_{11} - W \mathcal{M}_{12} W, \quad (2.49)$$

où les matrices $\mathcal{M}_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{M}_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathcal{M}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathcal{M}_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont constantes. A cette équation algébrique de Riccati rectangulaire est associée la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

On propose plusieurs approches possibles pour représenter les différentes solutions de (2.49) : d'abord par la limite $t_f \rightarrow +\infty$ de la solution de (2.32) et ensuite par les espaces invariants de la matrice $\mathcal{M}$ (2.50).

2.5.1 Passage à la limite de la représentation des solutions de l'équation différentielle

Si l'on reprend le contexte de la théorie des jeux, les équations algébriques de Riccati rectangulaires sont obtenues par le passage à la limite de l'horizon des critères. Une méthode pour obtenir les solutions algébriques à ces équations est donc de déterminer d'abord les solutions différentielles et d'en prendre la limite pour $t_f \rightarrow +\infty$.

Malheureusement les solutions ainsi obtenues dépendront des conditions aux limites de façon sensible. Nous verrons en particulier dans la suite que sous certaines conditions il sera très difficile par ce passage à la limite de décrire l'ensemble des solutions algébriques de façon numérique. Nous privilégierons par la suite la méthode algébrique utilisant les espaces invariants de $\mathcal{M}$ sans passer par une approche différentielle.

Autre difficulté, les équations couplées différentielles de Riccati sont non-linéaires à cause de leurs termes quadratiques. Ces équations sont connues comme pouvant exploser. Même s'il est possible de définir une solution *après* un temps fini d'explosion [AKFIJ03], il est extrêmement difficile alors numériquement de l'obtenir.

2.5.2 Méthode de résolution par les espaces invariants de $\mathcal{M}$

Dans cette section, pour simplifier la lecture, nous allons travailler sur la résolution des équations algébriques de Riccati couplées dues à la stratégie de Nash en boucle ouverte en se limitant aux jeux différentiels à deux joueurs ($N = 2$).

$$0_{2n \times n} = \begin{bmatrix} -A^T & 0_n \\ 0_n & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} A - \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

La méthode reste tout à fait valable pour la résolution des équations algébriques de Riccati couplées (que nous définirons dans le prochain chapitre) dues à la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte

$$0_{3n \times n} = \begin{bmatrix} -A^T & 0_n & 0_n \\ 0_n & -A^T & Q_1 \\ -S_{21} & S_1 & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} A - \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ 0_n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & 0_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

où $S_{21} = B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T$.

Pour plus de détails, on pourra se référer à [AKFIJ03, chapitre 6].

2.5.2.1 Propriétés des valeurs propres de la matrice du système asservi

En appliquant les commandes (2.23) au système, on obtient la contrainte dynamique (2.24). Les valeurs propres de la matrice $(A - S_1 K_1 - S_2 K_2)$ ne sont pas arbitraires quand K_1 et K_2 sont solutions des équations algébriques de Riccati associées à $\mathcal{M}_{N,BO}$. Effectivement en utilisant un changement de base, on obtient

$$\begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n \\ -K_1 & I_n & 0_n \\ -K_2 & 0_n & I_n \end{bmatrix} \mathcal{M}_{N,BO} \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n \\ K_1 & I_n & 0_n \\ K_2 & 0_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - S_1 K_1 - S_2 K_2 & -S_1 & -S_2 \\ 0_n & K_1 S_1 - A^T & K_1 S_2 \\ 0_n & K_2 S_1 & K_1 S_2 - A^T \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Les deux matrices nulles dans la première colonne proviennent du fait que K_1 et K_2 sont solutions des équations algébriques couplées de type Riccati issues de la stratégie de Nash en boucle ouverte.

Les valeurs propres de $(A - S_1 K_1 - S_2 K_2)$ appartiennent donc à l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$.

Remarque 2.8. La matrice triangulaire par blocs (2.53) fait apparaître la matrice intervenant dans la définition d'une solution fortement stabilisante. Il est alors possible de voir que les équations couplées algébriques de Riccati associées à $\mathcal{M}_{N,BO}$ admettent une solution fortement stabilisante, si $\mathcal{M}_{N,BO}$ admet exactement n valeurs propres dans $\mathbb{C}^<$ et $2n$ dans $\mathbb{C}^\geq$. A notre connaissance, la structure de $\mathcal{M}_{N,BO}$ n'est pas suffisamment forte pour obtenir des conditions a priori pour garantir une telle distribution des valeurs propres.

2.5.2.2 Correspondance entre les solutions des équations algébriques de Riccati couplées et certains espaces invariants de $\mathcal{M}_{N,BO}$

Théorème 2.9 (page 306 de [AKFIJ03]).

1. Soit $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$ une solution des équations de Riccati couplées issues de la stratégie de Nash en boucle ouverte. $\mathcal{S}(K_1, K_2) = \text{Im} \begin{pmatrix} I_n \\ K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$ est alors un sous-espace invariant de $\mathcal{M}_{N,BO}$ et

$(A - S_1 K_1 - S_2 K_2)$ est la matrice de restriction de $\mathcal{M}_{N,BO}$ à $\mathcal{S}(K_1, K_2)$ par rapport à la base définie par les colonnes de $\begin{pmatrix} I_n \\ K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$.

2. Soit $\mathcal{S}(K_1, K_2)$ un sous-espace invariant de $\mathcal{M}_{N,BO}$ alors $\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$ est solution des équations algébriques de Riccati issues de la stratégie de Nash en boucle ouverte.

Il y a donc correspondance entre l'ensemble des solutions des équations de Riccati issues de la stratégie de Nash en boucle ouverte et l'ensemble des sous-espaces invariants de $\mathcal{M}_{N,BO}$ de la forme $\mathcal{S}(K_1, K_2)$.

L'équation (2.49) issue de la stratégie de Nash en boucle ouverte possède un nombre fini de solutions $n_0 \leq \binom{3n}{n}$, ou bien si $\mathcal{M}_{N,BO}$ admet des valeurs propres multiples, une infinité indénombrable.

Si $\mathcal{M}_{N,BO}$ a un espace invariant de dimension n de la forme $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} X \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ avec $\det X = 0$, alors $\mathcal{S}$ ne correspond pas à une solution finie de (2.49), mais à une équation particulière appelée équation de Riccati étendue [AKFIJ03, chapitre 3]. On dit alors que $\mathcal{S}$ correspond à une solution infinie de (2.49).

A partir de tous les espaces invariants $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} X \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = (\nu_{v_1}, \dots, \nu_{v_n})$ où $\det X \neq 0$, on peut construire une solution finie à (2.49) de la forme

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} X^{-1}. \quad (2.54)$$

Cette solution (2.54) est dite la solution de (2.49) associée aux valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$ $\lambda_{v_1}, \dots, \lambda_{v_n}$ liées aux vecteurs propres $\nu_{v_1}, \dots, \nu_{v_n}$. La difficulté n'est pas de trouver les espaces invariants de $\mathcal{M}_{N,BO}$, mais de savoir si X est inversible. Le théorème suivant donne des conditions nécessaires pour l'inversibilité de la matrice X .

Théorème 2.10 (Inversibilité de X). *Une condition nécessaire pour l'inversibilité de la matrice X est que chaque valeur propre $\lambda_{v_1}, \dots, \lambda_{v_n}$ soit un mode commandable des paires (A, B_1) et (A, B_2) .*

Malheureusement, contrairement au cas monocritère, où il est possible de donner des conditions *a priori* sur le choix des valeurs propres pour assurer que la matrice X soit inversible [Kuč72], à notre connaissance aucune condition suffisante n'existe pour les jeux à au moins 2 joueurs.

On peut trouver une démonstration et plus de détails dans [AKFIJ03, AKFJ93] ou [AKJ04].

2.5.2.3 Choix des valeurs propres

Pour déterminer les solutions de (2.49), il faut déterminer les vecteurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$ associées à toutes ses valeurs propres et en choisir n tels que X soit inversible. Il faut donc choisir n valeurs propres parmi les $3n$ de $\mathcal{M}_{N,BO}$. Il peut donc exister plusieurs solutions finies possibles au nombre de $n_0 \leq \binom{3n}{n}$. Ces solutions peuvent être réelles ou complexes, stabilisantes ou non pour le système (2.24).

L'objectif de la détermination de commande étant de stabiliser le système (2.24) et de conserver une commande réelle, nous fixons des règles supplémentaires pour le choix des n valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$.

1. Si l'on choisit une valeur propre complexe non réelle, il faut choisir aussi son complexe conjugué, afin d'obtenir une solution de (2.24) qui soit réelle.
2. Si l'on souhaite obtenir une commande stabilisante pour (2.24), il est nécessaire de choisir des valeurs propres à partie réelle négative.

Si l'on désigne par r le nombre de valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$ à partie réelle négative, le nombre de solutions réelles et stabilisantes est inférieur ou égal à $\binom{r}{n}$. Ce nombre r est fixé par les matrices qui composent la matrice $\mathcal{M}_{N,BO}$. Néanmoins la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ n'étant ni Hamiltonienne ni symplectique, il ne semble pas possible de déterminer une loi générale pour la valeur de r pour la stratégie de Nash en boucle ouverte. La valeur r dépendra du cas numérique étudié. Une étude plus approfondie pour la valeur de r est effectuée dans la partie 2.6.1. Malgré ces contraintes, il peut être possible d'obtenir plusieurs solutions stabilisantes et réelles à l'équation (2.24). Ceci laisse donc un degré de liberté supplémentaire au concepteur de la commande. Un critère de choix entre les diverses solutions stabilisantes réelles peut être l'étude de la robustesse du système (2.24). Cette question est étudiée dans la partie 2.6.2.

2.5.2.4 Une éventuelle solution particulière

Parmi toutes les solutions possibles (réelles, complexes, stabilisantes, non-stabilisantes, etc) il peut, sous une certaine condition exister une solution particulière à (2.49). A une permutation près, les valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$ sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_{3n}$ telles que

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) \leq \operatorname{Re}(\lambda_2) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda_{3n}). \quad (2.55)$$

Définition 2.11. La matrice $\mathcal{M}_{N,BO}$ est dite *dichotomiquement séparable* si

$$\operatorname{Re}(\lambda_n) < \operatorname{Re}(\lambda_{n+1}). \quad (2.56)$$

Si dans ce cas, $(\nu_1, \dots, \nu_n) = \begin{pmatrix} X^* \\ Y_1^* \\ Y_2^* \end{pmatrix}$ et que $\det X^* \neq 0$, alors la solution $W^* = \begin{pmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \end{pmatrix} (X^*)^{-1}$ est appelée solution dichotomique de (2.49).

Notons que si la solution dichotomiquement séparable existe, c'est la seule que l'on peut définir comme correspondant aux n valeurs propres les plus à gauche dans le plan complexe des valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$.

Ici nous écartons le problème d'explosion dans l'intégration des équations couplées différentielles de Riccati. Ces temps finis d'explosions sont en nombre fini [AKFIJ03, p. 310]. Il est possible de définir une solution sur l'horizon temporel sauf en ces temps d'explosion. Numériquement il sera cependant difficile d'obtenir ces solutions.

Dans la stratégie de Nash en boucle ouverte, sur un horizon fini, on intègre les équations (2.32) à partir de l'instant t_f avec les conditions finales associées, en remontant le temps jusqu'à l'instant t_0 . En reprenant le raisonnement de la commande monocritère de [AM89, section 3.1], on peut montrer que la limite pour $t_f \rightarrow +\infty$ obtenue est indépendante de l'origine des temps t_0 , parce que le système et les commandes obtenues pour un horizon infini sont stationnaires. La même limite peut donc être obtenue à t_f fixé pour $t_0 \rightarrow -\infty$. La limite cherchée peut être obtenue en utilisant le temps inverse

$\tau = t_f - t$, et de déterminer la limite pour $\tau \rightarrow +\infty$. Contrairement au cas monocritère, la limite obtenue dépendra des conditions "initiales", fonctions de K_{1f} et K_{2f} . Ces deux matrices ne sont plus définies pour le problème à horizon infini.

Remarque 2.12. *D'après [AKFIJ03], si $\mathcal{M}_{N,BO}$ est dichotomiquement séparable, le bassin d'attraction de la solution dichotomique W^* (définition 2.11) de l'équation (2.49) est ouvert et dense dans $\mathbb{C}^{2n \times n}$.*

Cette remarque montre qu'il sera très difficile d'obtenir par intégration d'autres solutions que la solution dichotomiquement séparable W^* , pour les matrices $\mathcal{M}_{N,BO}$ dichotomiquement séparables.

2.6 Limites de la boucle ouverte pour l'étude de la robustesse

Dans les sections précédentes, il a été montré que la stratégie de Nash en boucle ouverte mène à des équations couplées de type Riccati, dont on connaît une méthode de résolution, à la condition numérique que la matrice X soit inversible. Néanmoins ces stratégies en boucle ouverte sont assez limitées en terme de robustesse. Cette section s'attache à discuter de ces limites.

2.6.1 Des solutions pas toujours stabilisantes

Dans la section précédente, il a été mis en évidence le fait que l'équation de Riccati rectangulaire (2.49) issue de la stratégie de Nash en boucle ouverte peut admettre plusieurs solutions, dont certaines réelles et stabilisantes.

Un premier travail de la thèse a été de déterminer s'il n'était pas possible de trouver des conditions suffisantes sur les matrices du problème (A , B_i , Q_i et R_{ij} , ($i, j = 1, 2$)) qui garantissent l'existence d'au moins une solution stabilisante et réelle.

Le cas particulier d'une quasi-coopération entre N joueurs, en dimension n a été étudié dans [AK86, AKB86]. La quasi-coopération correspond à des systèmes où les matrices de pondération Q_i sont multiples les unes des autres par un scalaire. Il existe alors pour chaque joueur i un scalaire $\alpha_i \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\alpha_1 Q_1 = \alpha_2 Q_2 = \dots = \alpha_N Q_N. \quad (2.57)$$

Dans le cas d'un système à 2 joueurs, il est possible de simplifier la quasi-coopération en (pour inclure le cas $\alpha = 0$) :

$$\alpha Q_1 = Q_2, \quad \text{ou bien} \quad Q_1 = \alpha Q_2. \quad (2.58)$$

Pour un système quasi-coopératif, il existe au moins une solution réelle et stabilisante. Une résolution analytique existe alors dans ce cas.

Le cas particulier

$$\alpha_1 S_1 = \alpha_2 S_2, \quad (2.59)$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, mène à un résultat similaire.

Il est à noter que les jeux à objectif identique et les jeux à somme nulle sont des cas particulier des jeux quasi-coopératifs. Les résultats des jeux quasi-coopératifs s'appliquent donc à ces classes particulières. Les jeux scalaires ($n = 1$) sont aussi des jeux quasi-coopératifs. Les résultats de [AK86, AKB86] englobent donc le cas scalaire étudié dans [Eng98b, Eng98a].

A notre connaissance, aucun résultat n'existe dans le cas général de dimension $n > 1$, excluant les jeux quasi-coopératifs. Nous proposons des contre-exemples en dimension $n = 2, 3, 4$ possédant des propriétés fortes, mais ne menant pas à l'existence d'une solution admissible.

$$A = \begin{bmatrix} -0.3997 & -0.0323 \\ -0.4706 & -0.4124 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.6097 \\ -1.7334 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.4350 \\ 0.5334 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 3.5775 & -0.3547 \\ -0.3547 & 0.7385 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1.0661 & 1.6755 \\ 1.6755 & 4.1314 \end{bmatrix}, \quad R_{11} = R_{22} = 1 > 0.$$

Les valeurs propres de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ sont alors

$$\begin{aligned} & -2.3422; \\ & 2.3558; \\ & 0.1643 \quad +0.3802i; \\ & 0.1643 \quad -0.3802i; \\ & 0.0393; \\ & 0.4306. \end{aligned}$$

Il n'existe donc pas de solution réelle et stabilisante pour ce système. Pourtant des conditions classiques fortes en automatique sont réalisées sur ce système. Effectivement les paires (A, B_1) et (A, B_2) sont commandables, les paires (Q_1, A) et (Q_2, A) sont observables. Les matrices Q_1 et Q_2 sont définies positives.

On donne aussi un contre-exemple de dimension $n = 3$ et un de dimension $n = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5671 & 0.6801 & 0.0456 \\ 0.0176 & 0.3378 & 0.5623 \\ 0.8067 & 0.2563 & 0.1548 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.5744 \\ 0.6910 \\ 0.3457 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.9160 \\ 0.7953 \\ 0.9344 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1.4947 & 1.4408 & 0.7010 \\ 1.4408 & 1.4576 & 0.7549 \\ 0.7010 & 0.7549 & 0.4246 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1.4652 & 0.7210 & 1.5044 \\ 0.7210 & 0.7156 & 0.8900 \\ 1.5044 & 0.8900 & 2.2905 \end{bmatrix}, \quad R_{11} = R_{22} = 1 > 0.$$

Les valeurs propres de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ sont alors

$$\begin{aligned} & -3,5274; \\ & -1,3854; \\ & 0,0950 \quad +0,4318i; \\ & 0,0950 \quad -0,4318i; \\ & 0,0064 \quad +0,4412i; \\ & 0,0064 \quad -0,4412i; \\ & 0,0434 \quad +0,4875i; \\ & 0,0434 \quad -0,4875i; \\ & 3,5633. \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1184 & 0.8623 & 0.1883 & 0.9285 \\ 0.0077 & 0.3947 & 0.1157 & 0.7610 \\ 0.9492 & 0.4904 & 0.1087 & 0.9721 \\ 0.0087 & 0.5697 & 0.5682 & 0.5046 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.8488 \\ 0.3991 \\ 0.8057 \\ 0.8394 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.1507 \\ 0.9923 \\ 0.6821 \\ 0.4623 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 2.8267 & 0.9268 & 2.4642 & 0.6269 \\ 0.9268 & 0.5294 & 0.8324 & 0.0770 \\ 2.4642 & 0.8324 & 2.3028 & 0.4838 \\ 0.6269 & 0.0770 & 0.4838 & 0.3019 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 2.1328 & 0.7981 & 1.6010 & 2.3652 \\ 0.7981 & 1.3794 & 1.5203 & 1.2217 \\ 1.6010 & 1.5203 & 2.0018 & 2.0486 \\ 2.3652 & 1.2217 & 2.0486 & 2.7530 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ sont alors

$$\begin{aligned} &4.5258; \\ &-4.4974; \\ &-1.6368; \\ &-1.4224; \\ &0.6774 + 0.1617i; \\ &0.6774 - 0.1617i; \\ &0.0766 + 0.6002i; \\ &0.0766 - 0.6002i; \\ &0.0071 + 0.3497i; \\ &0.0071 - 0.3497i; \\ &0.1912 + 0.2827i; \\ &0.1912 - 0.2827i. \end{aligned}$$

Il serait possible de penser que les contre-exemples indiqués ici sont des cas particuliers, étant donné que les matrices B_1 et B_2 sont des matrices composées d'une seule colonne et que les matrices S_1 et S_2 sont donc de rang 1. Pour éliminer ce doute, le contre-exemple suivant, en plus des conditions fortes précédentes (paires (A, B_1) et (A, B_2) commandables, paires (Q_1, A) et (Q_2, A) observables et matrices Q_1 et Q_2 définies positives), a des matrices B_1 et B_2 carrées de taille n et inversibles. On vérifie bien que les matrices S_1 et S_2 sont définies positives.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1.0586 & 0.2546 \\ 0.4889 & -1.1950 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.2491 & -0.8201 \\ 0.6806 & 1.0524 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2.3649 & 1.4024 \\ -1.0659 & -0.3651 \end{bmatrix}, \\ Q_1 &= \begin{bmatrix} 5.5038 & 0.9885 \\ 0.9885 & 0.5659 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 4.4395 & -5.4761 \\ -5.4761 & 10.3393 \end{bmatrix}, \\ R_{11} &= R_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ sont alors

$$\begin{aligned} &-9.3448; \\ &9.3695; \\ &0.4858 + 1.1142i; \\ &0.4858 - 1.1142i; \\ &0.8282; \\ &0.4291. \end{aligned}$$

Pourtant il n'existe pas de solution stabilisante pour ce système. Malgré une résolution relativement aisée, les équations couplées de type Riccati issues de la stratégie de Nash en boucle ouverte n'admettent donc pas toujours de solution stabilisante.

Remarque 2.13. *Etant en structure d'information en boucle ouverte, seules les matrices S_1 et S_2 interviennent. Il n'est donc pas réducteur de considérer $R_{11} = R_{22} = I_2 > 0$. Il est effectivement possible de prendre la racine carrée d'une matrice $R_{ii} > 0$ et de l'injecter dans les valeurs des matrices B_i .*

Il faut cependant atténuer cette conclusion négative. Ces contre-exemples ont été difficiles à trouver. Ils ont été trouvés grâce à un programme de test systématique sur des matrices engendrées aléatoirement. Ce programme a effectué un nombre important de boucles avant d'obtenir ces contre-exemples. Parmi les contre-exemples trouvés, aucun indice de forme générale n'a été trouvé. La grande majorité des systèmes admettent une (voire un très grand nombre) de solution(s) stabilisante(s).

2.6.2 Choix des solutions guidé par la robustesse

Dans l'une des parties précédentes, il a été mis en évidence que plusieurs solutions stabilisantes de l'équation algébrique (2.51), issue de la stratégie de Nash en boucle ouverte peuvent exister. Dans le cas où la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ est dichotomiquement séparable, la solution dichotomique est une solution particulière. Comme il a été vu, pendant longtemps les solutions constantes étaient obtenues par intégration. Hors la solution dichotomique (placement de pôle menant à la dynamique stable la plus rapide) ayant un bassin d'attraction dense dans $\mathbb{C}^{2n \times n}$, c'est quasiment la seule solution que l'on puisse obtenir par cette méthode. A tort, la solution dichotomique est souvent considérée comme "LA" solution d'une équation de Riccati rectangulaire. De ce fait, généralement cette solution dichotomique est utilisée pour obtenir les commandes du système étudié. Même si les solutions des équations couplées algébriques de Riccati ne sont pas nécessairement associées à un équilibre de Nash, la question de savoir si elles conservent certaines propriétés en terme de robustesse se pose. En particulier une question fondamentale s'est posée en début de thèse : est-ce que choisir systématiquement la solution dichotomique est le meilleur choix en terme de robustesse ?

La suite de ce paragraphe s'attache à examiner si la solution dichotomique est le meilleur choix en terme de robustesse. Cette question a été abordée comme le premier rapprochement entre théorie des jeux et robustesse dans le cadre de la thèse.

De façon à départager les différentes solutions admissibles (commandes réelles et stabilisantes), il est possible de calculer les valeurs des critères J_1 et J_2 pour chacun des choix des valeurs propres. Cependant il n'est pas toujours possible de classer les solutions en comparant les valeurs des critères pour chaque équilibre. Effectivement il n'est pas possible de façon générale de déterminer une relation d'ordre pour les différents couples de valeurs (J_1, J_2) , sans rompre la symétrie des rôles hiérarchiques. En privilégiant la valeur du critère J_1 par rapport à la valeur du critère J_2 , il est possible d'obtenir une relation d'ordre pour classer les couples (J_1, J_2)

$$(J_1, J_2) \geq (J'_1, J'_2) \text{ si } \begin{cases} J_1 > J'_1, \\ \text{ou} \\ J_1 = J'_1, \text{ et } J_2 \geq J'_2. \end{cases} \quad (2.60)$$

Néanmoins cette relation d'ordre ne conserve pas l'interchangeabilité des joueurs 1 et 2. Elle ne convient pas pour la stratégie de Nash, si l'on souhaite conserver son esprit.

En outre les valeurs scalaires des critères ne rendent pas compte du comportement dynamique du système bouclé. Nous proposons de départager les différentes solutions en analysant la robustesse de chacune. L'argument de sélection est la marge de module M_m , c'est-à-dire que l'on cherche la solution ayant la plus faible norme $\mathcal{H}_\infty$ [DF99, DS81] de la fonction de sensibilité $\mathcal{S}$ du schéma de simulation permettant de déterminer la commande représenté sur la figure 2.1.

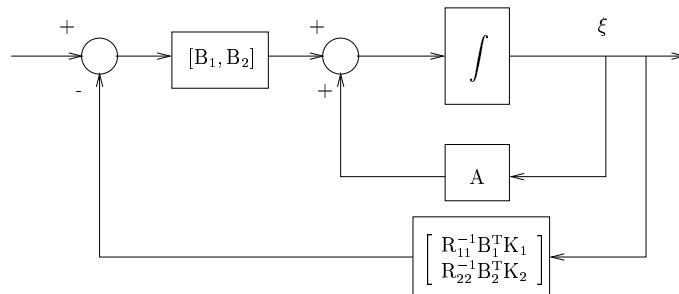


FIGURE 2.1 – Schéma de simulation permettant la définition de la fonction de sensibilité

Il est à noter que sur la figure 2.1, ce n'est pas l'asservissement du système réel, d'état $x(t)$ qui est représenté, mais bien un schéma de simulation portant sur l'état prédéterminé $\xi(t)$, qui permet de déterminer numériquement les commandes $u_i^*(t)$ en boucle ouverte. Ce schéma de simulation ne fait que représenter l'équation différentielle

$$\dot{\xi}(t) = (A - S_1 K_1 - S_2 K_2) \xi(t), \quad \xi(t_0) = x_0. \quad (2.61)$$

$$M_m = \frac{1}{\|\mathcal{S}\|_\infty} = \frac{1}{\sup \{\bar{\sigma}(\mathcal{S}(s)) \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}}. \quad (2.62)$$

où $\bar{\sigma}(\cdot)$ désigne la plus grande valeur singulière d'une matrice. Comme il n'existe pas de relation directe entre les valeurs propres de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ et les valeurs singulières de la fonction de sensibilité $\bar{\sigma}(\mathcal{S}(s))$, la comparaison est faite numériquement.

Le contre-exemple suivant pour $n = 4$ a été présenté dans [JAK04b]

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix};$$

et

$$\begin{aligned} C_1 &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 2]; \quad C_2 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad 2]; \\ Q_1 &= C_1^T * C_1; \quad Q_2 = C_2^T * C_2; \\ R_{11} &= 2; \quad R_{21} = R_{12} = 0; \quad R_{22} = 1. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice $\mathcal{M}_{N,BO}$ sont alors

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= +12,4904; \\ \lambda_{11} &= +4,8446 \quad +4,8728i; \\ \lambda_{10} &= +4,8446 \quad -4,8728i; \\ \lambda_9 &= +4,5469 \quad +2,1794i; \\ \lambda_8 &= +4,5469 \quad -2,1794i; \\ \lambda_7 &= +4,4416; \\ \lambda_6 &= +2,6350; \\ \lambda_5 &= -5,2176; \\ \lambda_4 &= -6,0062 \quad +4,6247i; \\ \lambda_3 &= -6,0062 \quad -4,6247i; \\ \lambda_2 &= -10,1190; \\ \lambda_1 &= -12,0011. \end{aligned}$$

On peut tout d'abord remarquer que $\mathcal{M}_{N,BO}$ pour cet exemple est bien dichotomiquement séparable, car $\lambda_4 < \lambda_5$. D'après les règles de sélection des valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$, si l'on sélectionne une valeur propre complexe, il faut sélectionner aussi son complexe conjugué. Comme il faut choisir $n = 4$ valeurs propres parmi les $r = 5$ valeurs propres à partie réelle négative (λ_1 à λ_5), il est obligatoire de prendre le couple de valeurs propres complexes (λ_3 et λ_4). Il reste alors à prendre deux valeurs propres parmi $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5\}$. Il y a donc 3 solutions admissibles aux équations de Riccati algébriques dans ce cas-là, qui permettent d'avoir $(A - S_1 K_1 - S_2 K_2)$ stable et réelle. Pour ces trois solutions possibles, nous donnons la distribution des valeurs propres et nous calculons la norme $\|\mathcal{S}\|_\infty$. Dans la suite nous nommerons les trois solutions de la façon suivante

$$\begin{cases} \text{cas a) : } \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \\ \text{cas b) : } \{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} \\ \text{cas c) : } \{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} \end{cases}$$

Il est à noter que le cas a) est la solution dichotomique du système. Les distributions correspondant aux cas a), b) et c) sont respectivement représentées sur les figures 2.2, 2.3 et 2.4.

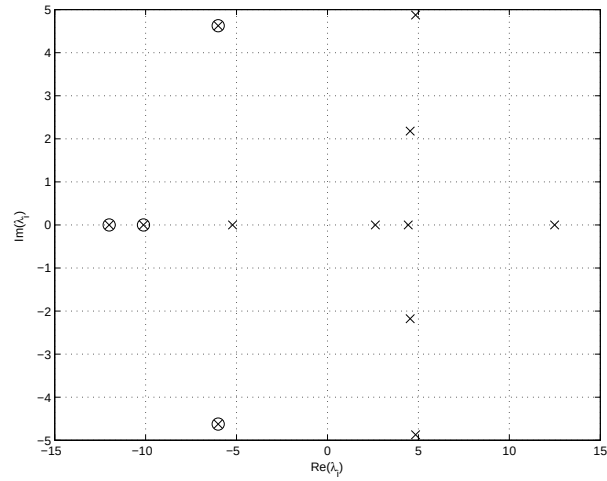


FIGURE 2.2 – Distribution des valeurs propres pour le cas a). (x : valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$ et o : valeurs propres sélectionnées)

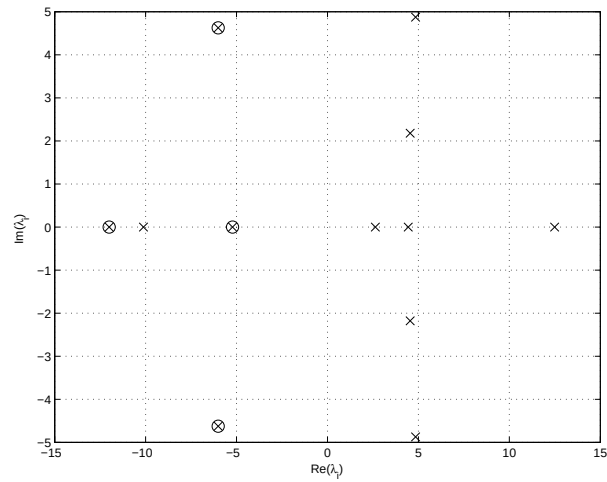


FIGURE 2.3 – Distribution des valeurs propres pour le cas b). (x : valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$ et o : valeurs propres sélectionnées)

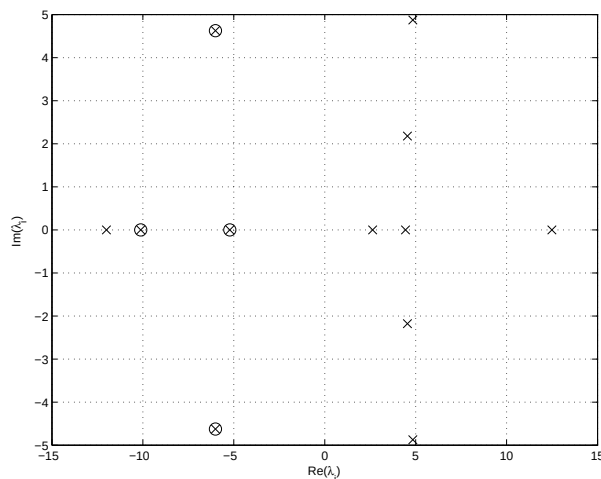


FIGURE 2.4 – Distribution des valeurs propres pour le cas c). (x : valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$ et o : valeurs propres sélectionnées)

Numériquement on obtient alors

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}_a\|_\infty &= 32; \\ \|\mathcal{S}_b\|_\infty &= 190, 9; \\ \|\mathcal{S}_c\|_\infty &= 3, 8.\end{aligned}$$

L'analyse de cet exemple nous montre que $\|S_c\|_\infty$ est la plus faible des normes, donc qui maximise la marge de module.

La solution dichotomique n'est donc pas, au sens de la marge de module, la solution stabilisante et réelle la plus robuste issue de la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle ouverte.

Même si ce contre-exemple permet de répondre à la question du choix systématique de la solution dichotomique, il ne permet pas de dégager une intuition sur la méthodologie à employer pour sélectionner *a priori* la meilleure solution des équations de Riccati rectangulaires en terme de marge de module. Le lien entre les valeurs propres de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ et les valeurs singulières de la fonction de sensibilité $\bar{\sigma}(\mathcal{S}(s))$ semble trop complexe pour conclure. Un autre choix que la marge de module comme argument de sélection vis-à-vis de la robustesse peut être fait. Cet autre choix permettrait peut-être de conclure sur une méthodologie *a priori*. C'est encore un champ d'investigation ouvert à notre connaissance. L'important ici était de trouver un contre-exemple et de réfuter le choix systématique de la solution dichotomiquement séparable.

La section suivante propose une application de la commande issue de la stratégie de Nash en boucle ouverte pour une suspension magnétique active. La solution dichotomique est sélectionnée si elle existe. Elle est comparée à la commande LQ classique.

2.7 Exemple d'une suspension magnétique non-linéaire

Ici les résultats publiés dans [JFPAK05] sont présentés sur l'application d'une suspension magnétique active présentant des symétries simples dans la disposition des électroaimants, en forme de croix.

Les suspensions magnétiques sont des solutions élégantes pour éviter les frottements mécaniques et l'utilisation de lubrifiants pour les rotors tournant à grande vitesse. Il existe deux types de suspensions magnétiques : les passives, faisant intervenir des aimants magnétiques permanents et les actives, faisant intervenir des électroaimants. L'impossibilité de commander des aimants permanents conduit à l'utilisation d'un système de suspension magnétique active pour stabiliser la position du rotor. Aussi le théorème de Earnshaw montre qu'il n'existe pas de lévitation stable avec une réalisation comprenant uniquement des aimants permanents [MY86].

Le grand nombre d'applications des suspensions magnétiques actives explique la diversité des modélisations (linéaires et non-linéaires) et des approches de commandes, il est possible de citer l'approche par *backstepping* [dQD96], par platitude [LLP96a, Pon96], par modulation de largeur d'impulsions [Hal90], par bifurcation non-linéaire [ME93], par modes glissants [RDD96, CKS93a] et par commande LQ [Zhu00]. Certaines de ces approches nécessitent des calculs en temps réels, ou n'utilisent qu'un seul critère global. Ici une approche par la théorie des jeux avec la stratégie de Nash en boucle ouverte permet de conserver une approche multicritère et une détermination hors ligne des lois de commande. Cette détermination de lois de commande se fait sur un modèle linéarisé tangent. Les commandes obtenues sont appliquées sur le modèle non-linéaire, autour d'un point d'équilibre.

2.7.1 Modèle du système magnétique

Ici le problème de stabilisation d'une suspension magnétique active représentée sur la figure 2.5 est considéré. Ce système magnétique est composé d'un rotor plan représenté par un disque en coupe et de deux couples d'électroaimants statoriques (le premier couple pour la direction y et le second pour la direction x).

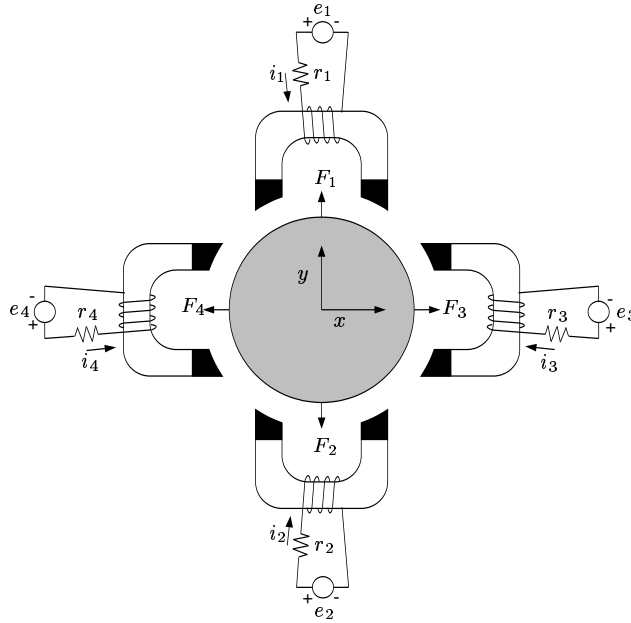


FIGURE 2.5 – Vue d'ensemble du système de suspension magnétique active

Pour chaque direction, on ne peut pas considérer un seul électroaimant, car celui-ci ne peut qu'attirer et pas repousser un rotor métallique (sans aimantation). Le rotor est soumis à quatre forces attractives F_1 , F_2 , F_3 et F_4 générées par les quatre électroaimants statoriques, parcourus respectivement par les courants i_1 , i_2 , i_3 et i_4 . Ces courants sont imposés par les circuits électriques de tension

e_1, e_2, e_3 et e_4 . Les circuits magnétiques présentent des inductances L_1, L_2, L_3 et L_4 non-linéaires à cause de l'entrefer de longueur variable ainsi que des forces contre-électromotrices notées B_1, B_2, B_3 et B_4 .

Les commandes du système sont les tensions e_1, e_2, e_3 et e_4 . On suppose qu'il existe un ensemble de capteurs permettant de mesurer les positions x et y , les vitesses $\dot{x}$ et $\dot{y}$ et les courants i_1, i_2, i_3 et i_4 . Le système peut se séparer en sous-système mécanique et sous-système électrique.

Suivant la direction y ; le sous-système mécanique est donné par

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_1(y, i_1) + F_2(y, i_2), \quad (2.63)$$

où m représente la masse du rotor, alors que le sous-système électrique est donné par

$$L_1(y, i_1) \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 + B_1(y, i_1) \frac{dy}{dt} = e_1, \quad (2.64)$$

$$L_2(y, i_2) \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + B_2(y, i_2) \frac{dy}{dt} = e_2, \quad (2.65)$$

où r_1 et r_2 sont les résistances sur ce couple d'électroaimants statoriques.

En supposant que le circuit magnétique est linéaire (il n'y a pas de saturation magnétique) et négligeant les effets de bord et les fuites, les flux magnétiques Φ_1 et Φ_2 dans les entrefers sont donnés par

$$\Phi_1(y, i_1) = \frac{L_0 i_1}{k - 2y}, \quad (2.66)$$

$$\Phi_2(y, i_2) = \frac{L_0 i_2}{k + 2y}, \quad (2.67)$$

avec L_0 et k des constantes positives dépendant de la construction du système. Ce modèle n'est valable que pour les configurations où le rotor ne touche pas les bords de la partie métallique statorique, soit

$$-k < -g_0 < y < g_0 < k, \quad (2.68)$$

avec g_0 la valeur de l'entrefer quand le rotor est à la position $y = 0$. A noter que $k > g_0$ car nous supposons que la perméabilité magnétique des électro-aimants est finie.

Les forces F_1 et F_2 sont données par un calcul des travaux virtuels

$$F_1(y, i_1) = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{i_1} \Phi_1(y, I) dI = L_0 \left(\frac{i_1}{k - 2y} \right)^2, \quad (2.69)$$

$$F_2(y, i_2) = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{i_2} \Phi_2(y, I) dI = -L_0 \left(\frac{i_2}{k + 2y} \right)^2. \quad (2.70)$$

Les inductances sont définies par

$$L_1(y, i_1) = \frac{\partial \Phi_1(y, i_1)}{\partial i_1} = \frac{L_0}{k - 2y}, \quad (2.71)$$

$$L_2(y, i_2) = \frac{\partial \Phi_2(y, i_2)}{\partial i_2} = \frac{L_0}{k + 2y}, \quad (2.72)$$

et les forces contre-électromotrices par

$$B_1(y, i_1) = \frac{\partial \Phi_1(y, i_1)}{\partial y} = \frac{2L_0 i_1}{(k - 2y)^2}, \quad (2.73)$$

$$B_2(y, i_2) = \frac{\partial \Phi_2(y, i_2)}{\partial y} = \frac{-2L_0 i_2}{(k + 2y)^2}. \quad (2.74)$$

En combinant ces équations, le système complet dans la direction y vérifie

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{L_0}{m} \left(\frac{i_1}{k - 2y} \right)^2 - \frac{L_0}{m} \left(\frac{i_2}{k + 2y} \right)^2, \\ \frac{di_1}{dt} &= \left(\frac{k - 2y}{L_0} \right) (e_1 - r_1 i_1) - 2 \left(\frac{i_1}{k - 2y} \right) \frac{dy}{dt}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \left(\frac{k + 2y}{L_0} \right) (e_2 - r_2 i_2) + 2 \left(\frac{i_2}{k + 2y} \right) \frac{dy}{dt}. \end{cases} \quad (2.75)$$

De la même façon, dans la direction x , le sous-système mécanique est donné par

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_3(x, i_3) + F_4(x, i_4), \quad (2.76)$$

alors que le sous-système électrique est donné par

$$L_3(x, i_3) \frac{di_3}{dt} + r_3 i_3 + B_3(x, i_3) \frac{dx}{dt} = e_3, \quad (2.77)$$

$$L_4(x, i_4) \frac{di_4}{dt} + r_4 i_4 + B_4(x, i_4) \frac{dx}{dt} = e_4, \quad (2.78)$$

où r_3 et r_4 sont les résistances pour le couple d'électroaimants selon la direction x .

Faisant les mêmes hypothèses que pour la direction y , le système dans la direction x est représenté par

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{L_0}{m} \left(\frac{i_3}{k - 2x} \right)^2 - \frac{L_0}{m} \left(\frac{i_4}{k + 2x} \right)^2, \\ \frac{di_3}{dt} &= \left(\frac{k - 2x}{L_0} \right) (e_3 - r_3 i_3) - 2 \left(\frac{i_3}{k - 2x} \right) \frac{dx}{dt}, \\ \frac{di_4}{dt} &= \left(\frac{k + 2x}{L_0} \right) (e_4 - r_4 i_4) + 2 \left(\frac{i_4}{k + 2x} \right) \frac{dx}{dt}. \end{cases} \quad (2.79)$$

Les valeurs nominales des paramètres du système sont données dans le tableau 2.1.

Paramètre	Valeur nominale
m	2 kg
k	0.0020125 m
L_0	0.0003 H.m
r_1	1 Ω
r_2	1 Ω
r_3	1 Ω
r_4	1 Ω

TABLEAU 2.1 – Paramètres du système.

2.7.2 Modèle linéarisé tangent

Les deux ensembles d'équations physiques (2.75) et (2.79) sont indépendants, mais de même structure. Les vecteurs d'état associés sont respectivement

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

pour la direction y et la direction x . Les commandes sont les tensions e_1 , e_2 , e_3 et e_4 . Dans la suite seul le système selon la direction y est étudié. Le modèle non-linéaire (affine en les entrées) devient à partir de (2.75)

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \left(\frac{k-2z_1}{L_0}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{k+2z_1}{L_0}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{L_0}{m} \left(\frac{z_3}{k-2z_1}\right)^2 - \frac{L_0}{m} \left(\frac{z_4}{k+2z_1}\right)^2 \\ -\left(\frac{k-2z_1}{L_0}\right) r_1 z_3 - 2 \left(\frac{z_3}{k-2z_1}\right) z_2 \\ -\left(\frac{k-2z_1}{L_0}\right) r_2 z_4 - 2 \left(\frac{z_4}{k-2z_1}\right) z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Il a été montré dans [Pon96] que le système est commandable. Ici on ne considère que le modèle linéarisé tangent autour d'un point d'équilibre, afin de déterminer plus simplement les commandes. Elles seront par la suite utilisées sur le modèle non-linéaire.

Les points d'équilibre du système (2.81) sont ¹

$$\begin{cases} z_{10} = \frac{k r_1 e_{20} - r_2 e_{10}}{2 r_1 e_{20} + r_2 e_{10}}, \\ z_{20} = 0, \\ z_{30} = \frac{e_{10}}{r_1}, \\ z_{40} = \frac{e_{20}}{r_1}. \end{cases} \quad (2.82)$$

Stabiliser le rotor autour de la position $y = 0$ impose le point d'équilibre

$$\begin{cases} z_{10} = z_{20} = 0, \\ z_{30} = z_{40} = I_0. \end{cases} \quad (2.83)$$

En utilisant les notations $z_i = z_{i0} + \tilde{z}_i$ et $e_j = e_{j0} + \tilde{e}_j$ ($1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 2$), la linéarisation tangente de (2.81) est

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = A\tilde{z} + B_1\tilde{e}_1 + B_2\tilde{e}_2, \quad (2.84)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{8I_0^2 L_0}{mk^3} & 0 & \frac{2I_0^2 L_0}{mk^2} & -\frac{2I_0^2 L_0}{mk^2} \\ 0 & -\frac{2I_0}{k} & -\frac{kr_1}{L_0} & 0 \\ 0 & \frac{2I_0}{k} & 0 & -\frac{kr_2}{L_0} \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

et

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{L_0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{L_0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Le système (2.84) est commandable (les paires (A, B_1) et (A, B_2) sont commandables) si et seulement si le courant I_0 vérifie $I_0 \neq 0$. Il s'agit du courant de prémagnétisation.

¹ Il existe deux autres solutions mathématiquement pour z_{10} , mais les solutions ne sont pas physiques.

2.7.3 Approche par la théorie des jeux

Chaque entrée $\tilde{e}_1$ et $\tilde{e}_2$ doit minimiser son propre objectif, qui s'écrivent sous la forme de critères (respectivement J_1 et J_2). Ici les critères J_1 et J_2 peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} J_1(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} \left(\tilde{z}^T Q_1 \tilde{z} + \frac{\tilde{e}_1^2}{r_1} \right) dt, \\ J_2(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} \left(\tilde{z}^T Q_2 \tilde{z} + \frac{\tilde{e}_2^2}{r_2} \right) dt, \end{cases} \quad (2.87)$$

où

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1(z_{10}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2(z_{10}) \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Les critères (2.87) incluent l'énergie cinétique $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, l'énergie électromagnétique dans l'entrefer $\frac{1}{2}L_j(z_{10})\tilde{i}_j^2$ et l'énergie correspond à l'effet Joules $\tilde{e}_j^2/r_j$, autour du point d'équilibre ($1 \leq j \leq 2$). Pour $z_{10} = 0$, la relation suivante est vérifiée

$$L_1(z_{10}) = L_2(z_{10}) = \frac{L_0}{k}. \quad (2.89)$$

Il est à remarquer que les paires (Q_1, A) et (Q_2, A) sont observables.

Le problème présentant une hiérarchie identique pour les deux entrées, la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle ouverte est choisie, afin de trouver un compromis entre ces critères (2.87). La paire $(\tilde{e}_1^*, \tilde{e}_2^*)$ correspond à un équilibre de Nash si les relations suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} J_1(\tilde{e}_1^*, \tilde{e}_2^*) \leq J_1(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2^*), \\ J_2(\tilde{e}_1^*, \tilde{e}_2^*) \leq J_2(\tilde{e}_1^*, \tilde{e}_2), \end{cases} \quad (2.90)$$

Les conditions nécessaires pour un équilibre de Nash en boucle ouverte sont

$$\begin{cases} \frac{\partial H_j}{\partial \tilde{e}_j} = 0 \\ \dot{\psi}_j = -\frac{\partial H_j}{\partial \tilde{z}} \end{cases}, \quad 1 \leq j \leq 2, \quad (2.91)$$

où ψ_j est le vecteur d'état adjoint associé à la contrainte dynamique (2.84), et H_j le Hamiltonien

$$H_j = \frac{1}{2} \left(\tilde{z}^T Q_j \tilde{z} + \frac{\tilde{e}_j^2}{r_j} \right) + \psi_j^T (A\tilde{z} + B_1\tilde{e}_1 + B_2\tilde{e}_2). \quad (2.92)$$

Ainsi, on obtient comme commande optimale

$$\begin{cases} \tilde{e}_1^* = -R_1 B_1^T \psi_1, \\ \tilde{e}_2^* = -R_2 B_2^T \psi_2, \end{cases} \quad (2.93)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}} = A\tilde{z} - S_1\psi_1 - S_2\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = -Q_1\tilde{z} - A^T\psi_1, \\ \dot{\psi}_2 = -Q_2\tilde{z} - A^T\psi_2, \end{cases}, \quad (2.94)$$

ou bien

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

avec

$$\mathcal{M}_{N,BO} = \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 \\ -Q_1 & -A^T & 0 \\ -Q_2 & 0 & -A^T \end{bmatrix}, \quad (2.96)$$

où $S_j = r_j B_j B_j^T$ ($1 \leq j \leq 2$).

En faisant l'hypothèse de l'existence de K_1 et K_2 tel que $\psi_1 = K_1 \tilde{z}$ et $\psi_2 = K_2 \tilde{z}$, les matrices K_1 et K_2 sont solutions des équations de type Riccati couplées

$$\begin{aligned} A^T K_1 + K_1 A + Q_1 - K_1 S_1 K_1 - K_1 S_2 K_2 &= 0, \\ A^T K_2 + K_2 A + Q_2 - K_2 S_1 K_1 - K_2 S_2 K_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Le système asservi a donc une dynamique de la forme

$$\frac{d\tilde{z}_c}{dt} = (A - S_1 K_1 - S_2 K_2) \tilde{z}_c. \quad (2.98)$$

Quand la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ est dichotomiquement séparable, la solution dichotomiquement séparable (menant à la dynamique $A - S_1 K_1 - S_2 K_2$ la plus rapide) est sélectionnée. Les commandes sont alors de la forme

$$\begin{cases} \tilde{e}_1^* = -R_1 B_1^T K_1 \tilde{z}_c, \\ \tilde{e}_2^* = -R_2 B_2^T K_2 \tilde{z}_c, \end{cases} \quad (2.99)$$

où $\tilde{z}_c$ est donné par (2.98). Les commandes ainsi obtenues sont appliquées sur le système non-linéaire (2.81), comme le montrent les simulations numériques dans le paragraphe suivant.

2.7.4 Comparaison numérique

En premier lieu, afin d'évaluer l'efficacité des commandes issues de la stratégie de Nash en boucle ouverte, une comparaison avec la commande LQ est présentée sur le modèle linéaire

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = A\tilde{z} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

avec le critère, dont les matrices de pondérations sont

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

La matrice H correspond à la matrice Hamiltonienne associée à la commande LQ

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Ici la matrice $\mathcal{M}_{N,BO}$ étant dichotomiquement séparable, on choisit la solution menant à la dynamique la plus rapide. Pour la commande LQ, la solution stable est naturellement sélectionnée (figure 2.6).

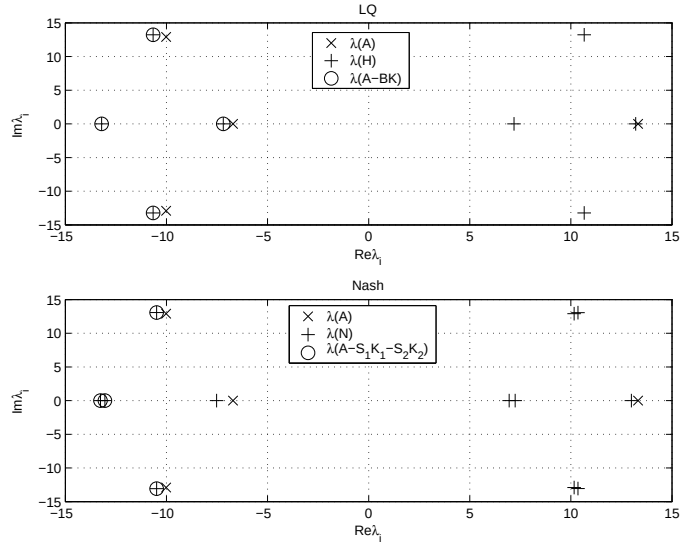
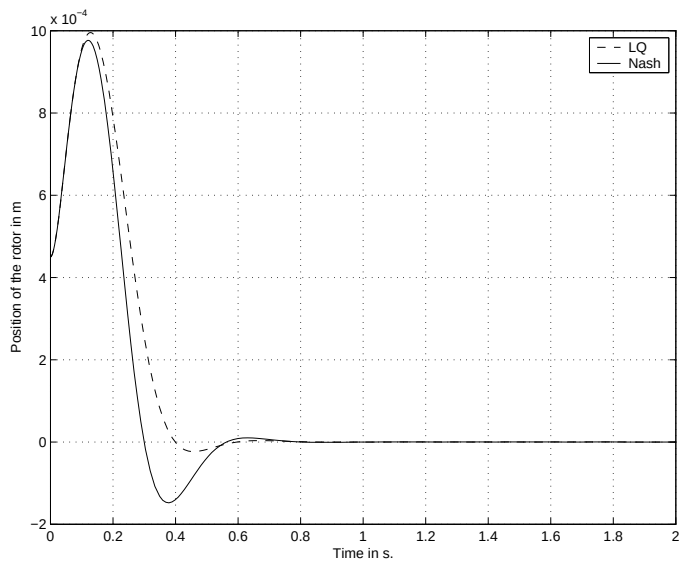


FIGURE 2.6 – Distribution des valeurs propres sélectionnées pour les commandes de Nash et LQ

La simulation met en évidence la stabilisation de la position du centre du rotor autour de sa position d'équilibre, avec une position initiale $y(0) = 0.45g_0$ au repos. En premier lieu, la simulation considère une connaissance exacte des paramètres du système (2.1).

FIGURE 2.7 – Position du rotor pour les commandes LQ et de Nash, avec une connaissance exacte des paramètres et une position initiale au repos $y(0) = 0.45g_0$.

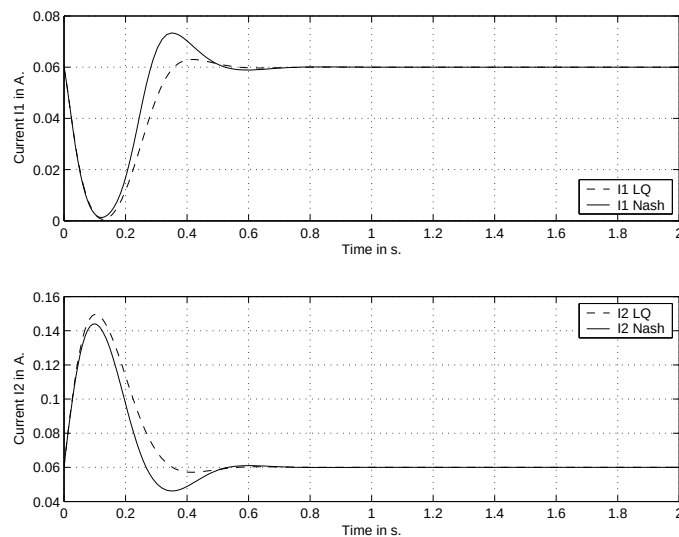


FIGURE 2.8 – Courants I_1 et I_2 pour les commandes LQ et de Nash, avec une connaissance exacte des paramètres et une position initiale au repos $y(0) = 0.45g_0$.

Il faut noter que sur la figure 2.7, les commandes LQ et de Nash mènent quasiment à la même réponse. De plus la position du centre du rotor reste dans l'entrefer ($-g_0 \leq y(t) \leq g_0$). Ces deux solutions sont donc acceptables pour cette position initiale. Les commandes LQ et de Nash semblent mener à des solutions équivalentes. Le reste du paragraphe s'attache à comparer le comportement des commandes LQ et de Nash sur des systèmes, dont les paramètres ne sont pas correctement connus. La simulation suivante tient compte d'une erreur de +20% sur tous les paramètres de (2.1), à l'exception de g_0 .

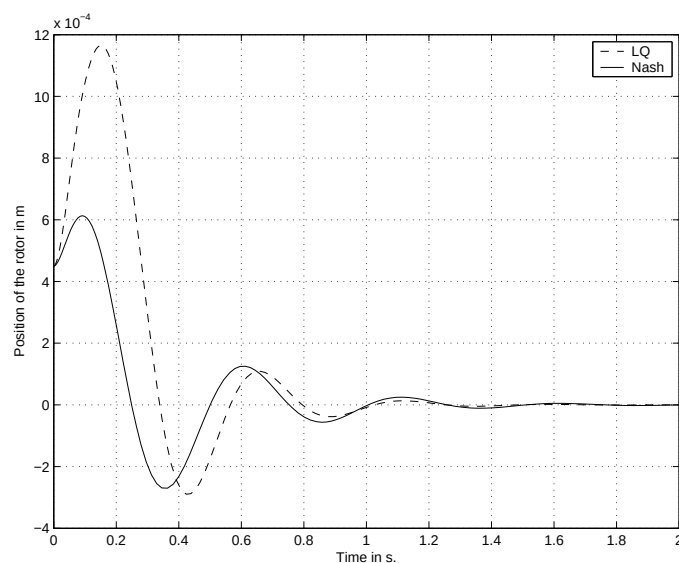


FIGURE 2.9 – Position du rotor pour les commandes LQ et de Nash, avec 20% d'erreur sur les paramètres et une position initiale au repos $y(0) = 0.45g_0$.

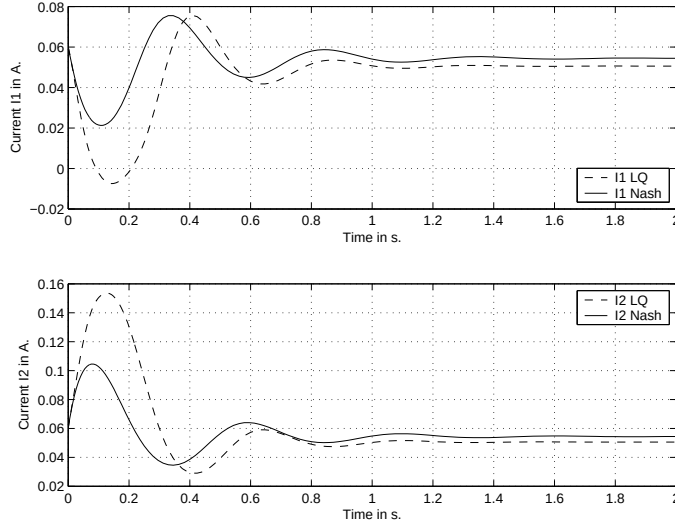


FIGURE 2.10 – Courants I_1 et I_2 pour les commandes LQ et de Nash, avec 20% d'erreur sur les paramètres et une position initiale au repos $y(0) = 0.45g_0$.

Notons que sur la figure 2.9, la commande LQ n'est pas admissible, du fait que la position y du centre du rotor n'est pas tout le temps dans l'entrefer $[-g_0; g_0]$. Au contraire, la commande de Nash est physiquement admissible et fait intervenir de plus faibles courants que la commande LQ. Dans ce cas, il est mis en évidence que la commande issue de la stratégie de Nash en boucle ouverte peut être plus robuste à une incertitude sur les paramètres que la commande classique LQ.

Enfin une carte des positions initiales et vitesses initiales correspondant à des trajectoires admissibles pour les commandes issues de la stratégie de Nash en boucle ouverte est présentée (Figure 2.11).

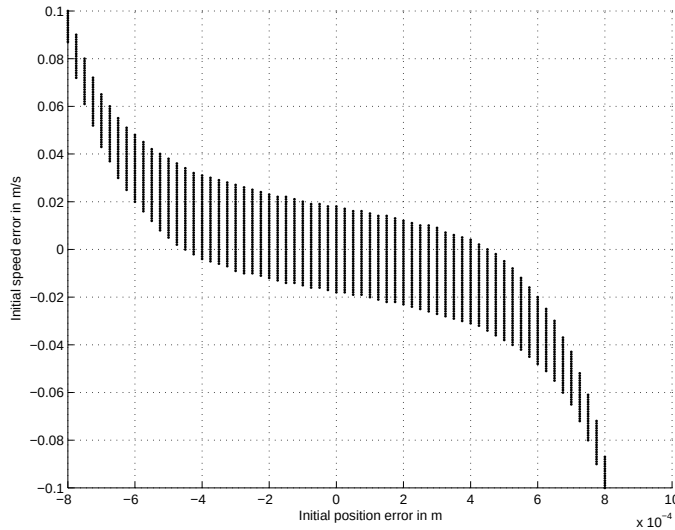


FIGURE 2.11 – Carte des positions et vitesses initiales pour des trajectoires admissibles pour les commandes issues de la stratégie de Nash en boucle ouverte.

Selon cette figure, plus la position initiale est importante, plus la vitesse initiale doit être grande et de sens opposé pour que la trajectoire soit physiquement admissible, en restant dans l'entrefer.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle ouverte, stratégie la plus simple, a été étudiée. Sa mise en équations mène à la résolution d'équations couplées de Riccati, différentielles dans le cas de critères d'horizon fini, ou algébriques dans le cas de critères d'horizon infini. Il est rappelé comment résoudre ce type d'équations. Dans le cas de critères d'horizon infini, plusieurs solutions peuvent être admissibles. Un argument de robustesse est utilisé pour sélectionner parmi ces éventuelles solutions la meilleure d'entre elles. Ici l'argument de robustesse sélectionné est la marge de module. Il est montré que cette sélection n'est pas triviale, même si la solution particulière, dite dichotomique, existe. Ce point est mis en valeur grâce à des contre-exemples. Parmi les autres limites de cette stratégie, il est montré que, malgré des hypothèses fortes, rien ne semble garantir l'existence d'une solution admissible (c'est-à-dire menant à un système stable avec une commande réelle). Enfin un exemple d'application de la stratégie de Nash en boucle ouverte à la commande de suspension magnétique active (4 électroaimants) illustre ce chapitre.

Chapitre 3

Stratégie de Stackelberg en boucle ouverte

3 × 142857
= 428571

Une fois la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle ouverte étudiée, la stratégie de Stackelberg avec les mêmes conditions est somme toute assez simple. Effectivement elles présentent beaucoup de similitudes. Ce chapitre est consacré à la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte. D'abord la mise en équation et les conditions nécessaires pour le suiveur, puis pour le leader sont établies. Cette mise en équation aboutit à des équations couplées de Riccati, dont la résolution est connue. Comme pour la stratégie de Nash, certaines limites en terme de robustesse sont mises en avant. La stratégie de Stackelberg génère des commandes de bonne qualité, comme le montre l'exemple de la commande d'une suspension magnétique active à trois électroaimants. La fin de ce chapitre étudie les propriétés de la stratégie de Stackelberg dans le cadre plus large des jeux linéaires-quadratiques incluant une pondération temporelle exponentielle.

La stratégie de Stackelberg est une solution adaptée aux jeux où les joueurs n'ont pas accès aux mêmes informations. Comme pour la définition donnée en 1.3.4, nous nous limitons aux jeux à deux joueurs. Le joueur 2 appelé leader possède dans sa structure d'information celle du joueur 1 appelé suiveur. Le leader connaît la réaction rationnelle du suiveur et va l'utiliser pour minimiser son propre critère. Contrairement à la stratégie de Nash, les rôles des joueurs ne sont pas interchangeables. Le jeu de Stackelberg est donc plus compliqué que celui de Nash à cause de ce biais de l'information. En fonction de la structure d'information dans le jeu, plusieurs stratégies de Stackelberg peuvent être définies menant à des commandes différentes. Ici dans ce chapitre, seule la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte est traitée. La stratégie de Stackelberg en boucle fermée, qui est un problème beaucoup plus ardu, est étudiée spécifiquement au chapitre 5.

Considérons un jeu différentiel à 2 joueurs, où le joueur " i " ($i = 1, 2$) doit déterminer une commande $u_i(t)$ pour minimiser le critère J_i donné par

$$J_i = K_{if}(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1(t), u_2(t), t) dt, \quad (3.1)$$

où $x_f = x(t_f)$ et sous la contrainte dynamique

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_1(t), u_2(t), t). \quad (3.2)$$

On recherche des commandes u_i continues appartenant à U_i ouvert. Dans la suite, nous présentons l'approche de Chen et Cruz [CC72] et Simaan et Cruz [SC73b, SC73a] par un calcul variationnel sur

les critères. Contrairement à la stratégie de Nash, les deux problèmes d'optimisation ne sont pas symétriques, il faut donc traiter l'optimisation pour le suiveur puis celle pour le leader, étant donné que le leader utilise la réaction rationnelle du suiveur pour établir sa commande.

3.1 Conditions nécessaires pour le suiveur

Le problème d'optimisation du suiveur est d'après la définition (1.25) identique au problème d'optimisation d'un joueur de la stratégie de Nash. On associe au suiveur l'Hamiltonien suivant

$$H_1(x, u_1, u_2, \psi_1, \psi_1^\circ, t) = \psi_1^\circ L_1(x, u_1, u_2, t) + \psi_1^T f(x, u_1, u_2, t), \quad (3.3)$$

où $\psi_1(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état adjoint de même taille que le vecteur d'état $x(t)$ associé à la contrainte dynamique (3.2) et ψ_1° un scalaire positif lié au critère instantané L_1 . Les conditions nécessaires pour le suiveur en boucle ouverte sont alors

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x}, \quad (3.4)$$

avec la condition de transversalité

$$\psi_1(t_f) = \psi_1^\circ \frac{\partial K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f}, \quad (3.5)$$

comme la condition finale est libre, le vecteur $(\psi_1(t_f), \psi_1^\circ)$ ne peut pas être nul. Le problème est de type normal ($\psi_1^\circ \neq 0$) et il est alors possible de normaliser le vecteur d'état adjoint ψ_1 en posant $\psi_1 = 1$. $u_1(t) = u_1(t, \eta_1(t)) = u_1^{**}(t)$ minimise

$$H_1(x, u_1, u_2^{**}(t), \psi_1, t). \quad (3.6)$$

On peut reformuler cette minimisation au premier ordre par

$$\frac{\partial H_1(t)}{\partial u_1} = 0, \quad (3.7)$$

comme l'ensemble U_1 est un espace ouvert. On considère que cette dernière équation permet d'obtenir l'expression de la commande $u_1^{**}(t)$, en fonction de $\psi_1(t)$ et $u_2^{**}(t)$. Il est alors possible d'obtenir par substitution

$$\tilde{L}_2(x, \psi_1, u_2, t) = L_2(x, u_1^{**}, u_2, t), \quad (3.8)$$

$$\tilde{f}(x, \psi_1, u_2, t) = f(x, u_1^{**}, u_2, t). \quad (3.9)$$

On retrouve bien les conditions nécessaires de la stratégie de Nash en boucle ouverte (2.4) pour le suiveur. Il n'en est pas de même pour le leader.

3.2 Conditions nécessaires pour le leader

Pour le leader, le problème d'optimisation est plus compliqué. Effectivement il doit tenir compte de la réaction rationnelle du suiveur. Le leader doit donc minimiser son critère (3.1), sous plusieurs contraintes : la contrainte dynamique du système (3.2) et les contraintes de la réaction du suiveur (3.4). La condition (3.7) permet de substituer la commande u_1^{**} dans le problème pour le suiveur et elle n'est alors plus considérée comme contrainte. Le problème du leader porte donc sur un système

dynamique augmenté $\begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \end{pmatrix}$ composé des vecteurs x et ψ_1

Pour le leader du jeu de Stackelberg en boucle ouverte, on associe l'Hamiltonien suivant

$$H_2(x, \psi_1, u_2, \psi_2, \psi_2^\circ) = \psi_2^\circ \tilde{L}_2(x, \psi_1, u_2, t) + \psi_2^T \tilde{f}(x, \psi_1, u_2, t) + \gamma^T \left(-\frac{\partial H_1}{\partial x} \right). \quad (3.10)$$

Les vecteurs colonnes $\psi_2(t) \in \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs d'état adjoints liés respectivement aux contraintes dynamiques (3.2), (3.4). ψ_2° est quant à lui, un scalaire positif

Les équations nécessaires pour le leader en boucle ouverte sont données par le Principe du Minimum de Pontryagin appliqué au système augmenté $\begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \end{pmatrix}$ [PBGM74, LM67].

$$\frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x}, \quad (3.11)$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial \psi_1}, \quad (3.12)$$

Une partie des valeurs initiales et finales du vecteur d'état augmenté $\begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \end{pmatrix}$ est imposée par la condition de transversalité pour le problème d'optimisation du suiveur $\psi_1(t_f) = \frac{\partial K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f}$ et par l'état initial $x(0) = x_0$. Nous pouvons formaliser ces conditions en définissant deux ensembles M_0 et M_1 [PBGM74, LM67].

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ \psi_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \psi_1(0) \end{pmatrix} \in M_0, \quad \begin{pmatrix} x(t_f) \\ \psi_1(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_f) \\ \frac{\partial K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f} \end{pmatrix} \in M_1, \quad (3.13)$$

où

$$M_0 = \{x_0\} \times \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \end{pmatrix} \left| F_0 \begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \end{pmatrix} = x - x_0 = 0 \right. \right\}, \quad (3.14)$$

et

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \end{pmatrix} \left| F_1 \begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \frac{\partial K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f} - \psi_1 = 0 \right. \right\}. \quad (3.15)$$

Les variétés tangentes $T_{(t_0)}M_0$ et $T_{(t_f)}M_1$ sont définies par

$$T_{(t_0)}M_0 = \{ (0, \alpha) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \alpha \in \mathbb{R}^n \}, \quad (3.16)$$

et

$$T_{(t_f)}M_1 = \left\{ \left(\beta, \beta \frac{\partial K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f} \right) \mid \beta \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (3.17)$$

Les conditions de transversalité s'écrivent (voir [Tre05, p. 104])

$$\begin{pmatrix} \psi_2(t_0) \\ \gamma(t_0) \end{pmatrix} \perp T_{(t_0)}M_0, \quad (3.18)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_2(t_f) \\ \gamma(t_f) \end{pmatrix} - \lambda^\circ \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f} \\ 0 \end{pmatrix} \perp T_{(t_f)}M_1, \quad (3.19)$$

et mènent à

$$\gamma(0) = 0, \quad (3.20)$$

$$\psi_2(t_f) = \psi_2^\circ \frac{\partial K_{2f}(x_f, t_f)}{\partial x_f} - \frac{\partial^2 K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f^2} \gamma(t_f). \quad (3.21)$$

Remarque 3.1. Ici, sans aucune autre considération, il n'est pas possible de déduire si le problème est de type normal ou anormal. Effectivement le vecteur d'état adjoint augmenté est en $t = t_f$

$$\begin{pmatrix} \psi_2(t_f) \\ \gamma(t_f) \\ \psi_2^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^\circ \frac{\partial K_{2f}(x_f, t_f)}{\partial x_f} - \frac{\partial^2 K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f^2} \gamma(t_f) \\ \gamma(t_f) \\ \psi_2^\circ \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Selon la valeur de $\gamma(t_f)$ (nulle ou non), il est possible de décider si le problème est anormal ou normal. Et donc s'il est possible de poser $\psi_2^\circ = 1$ ou non. Dans le cas linéaire-quadratique, nous n'étudierons que le cas normal.

La commande $u_2^{**}(t) = u_2(t, \eta_2(t))$ doit minimiser l'Hamiltonien H_2 , soit au premier ordre

$$\frac{\partial H_2(t)}{\partial u_2} = 0. \quad (3.23)$$

3.2.1 Cas d'un jeu linéaire-quadratique

On considère un jeu différentiel linéaire-quadratique défini par les équations (2.7) et les critères (2.8). L'application des conditions nécessaires pour une stratégie de Stackelberg en boucle ouverte mène pour le suiveur à

$$u_1^{**}(t) = -R_1^{-1} B_1^T \psi_1(t), \quad (3.24)$$

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -Q_1 x(t) - A^T \psi_1(t), \quad (3.25)$$

avec

$$\psi_1(t_f) = K_{1f} x_f, \quad (3.26)$$

et pour le leader

$$u_2^{**}(t) = -R_2^{-1} B_2^T \psi_2(t), \quad (3.27)$$

$$\frac{d\psi_2(t)}{dt} = -Q_2 x(t) - A^T \psi_2(t) + Q_1 \gamma(t), \quad (3.28)$$

$$\psi_2(t_f) = K_{2f} x_f - K_{1f} \gamma(t_f), \quad (3.29)$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -S_{21} \psi_1(t) + S_1 \psi_2(t) + A \gamma(t). \quad (3.30)$$

On peut résumer ces équations en y injectant les commandes u_1^{**} et u_2^{**} pour formuler le problème par une seule équation différentielle linéaire

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 & 0_n \\ -Q_1 & -A^T & 0_n & 0_n \\ -Q_2 & 0_n & -A^T & Q_1 \\ 0_n & -S_{21} & S_1 & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{S,BO} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

où $S_{ij} = B_j R_{jj}^{-1} R_{ij} R_{jj}^{-1} B_j^T$ et $S_i = S_{ii} = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$, pour $i, j = 1, 2$. Et les conditions aux limites

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ \psi_1(t_f) \\ \psi_2(t_f) \\ \gamma(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ K_{1f} x_f \\ K_{2f} x_f - K_{1f} \gamma(t_f) \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Remarque 3.2 ([AKB85]). La matrice caractéristique $\mathcal{M}_{S,BO}$ est Hamiltonienne.

Démonstration. En notant la matrice

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0_{2n} & I_{2n} \\ -I_{2n} & 0_{2n} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

et en découpant la matrice $\mathcal{M}_{S,BO}$ de la façon suivante

$$\mathcal{M}_{S,BO} = \left[\begin{array}{cc|cc} A & -S_1 & -S_2 & 0_n \\ -Q_1 & -A^T & 0_n & 0_n \\ \hline -Q_2 & 0_n & -A^T & Q_1 \\ 0_n & -S_{21} & S_1 & A \end{array} \right], \quad (3.34)$$

il est facile de vérifier que

$$\mathcal{J}\mathcal{M}_{S,BO}\mathcal{J}^{-1} = -\mathcal{M}_{S,BO}^T. \quad (3.35)$$

La matrice $\mathcal{M}_{S,BO}$ est donc Hamiltonienne. $\square$

On peut noter que la matrice $\mathcal{M}_{S,BO}$ est réelle et Hamiltonienne. Ses valeurs propres admettent donc l'origine comme centre de symétrie dans le plan complexe.

3.2.2 Remarques sur la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte

On peut noter que la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte est un prolongement naturel de la commande optimale classique. Elle représente une étape supplémentaire qui succède à la stratégie de Nash en boucle ouverte. La difficulté des problèmes d'optimisation augmente en conséquence et la détermination des lois devient ardue.

3.2.2.1 Incohérence intertemporelle des stratégies de Stackelberg

Pour obtenir les commandes issues d'une stratégie de Stackelberg, nous avons utilisé un calcul variationnel. Cependant contrairement à une stratégie de Nash, un des vecteurs d'état adjoint possède une condition de transversalité au temps $t = t_0$. De ce fait, si l'on considère un sous-jeu sur l'horizon $[t_1, t_f]$, avec $t_1 \in]t_0, t_f[$, la restriction d'une stratégie de Stackelberg de l'horizon $[t_0, t_f]$ n'est pas une stratégie de Stackelberg sur l'horizon restreint $[t_1, t_f]$, à cause de la valeur $\gamma(t_1)$ obtenue par intégration de (3.12) du problème sur $[t_0, t_f]$. Cette valeur n'est effectivement pas nulle *a priori*. La restriction à un sous-jeu d'une commande issue de la stratégie de Stackelberg n'est pas optimale. La programmation dynamique n'est pas utilisable pour déterminer les commandes issues de la stratégie de Stackelberg.

3.2.2.2 Conditions d'existence d'un équilibre de Stackelberg

Comme pour une stratégie de Nash, il est possible sous une condition de convexité des critères d'obtenir un résultat sur l'existence de l'équilibre de Stackelberg. Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} > 0_{r_1}, \\ Q_1 \geq 0_n, \\ K_{1f} \geq 0_n, \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{22} > 0_{r_2}, \\ Q_2 \geq 0_n, \\ K_{2f} \geq 0_n, \end{array} \right\}, \quad \text{et} \quad R_{21} \geq 0_{r_1}, \quad (3.36)$$

la condition de convexité pour la stratégie de Stackelberg. Si toutes les matrices de (3.36) vérifient les inégalités de (3.36) et sont symétriques, alors l'existence et l'unicité d'un équilibre de Stackelberg sont garantis. Il s'agit de conditions suffisantes et non de conditions nécessaires. Effectivement par exemple, la condition de convexité stricte (3.36) ne s'applique pas pour les jeux à somme nulle, qui peuvent admettre un équilibre de Stackelberg. Simaan et Cruz dans [SC73b, SC73a] proposent une démonstration de ce point en indiquant une condition suffisante moins contraignante.

Il est possible de déterminer des conditions d'existence d'un équilibre de Stackelberg qui soient moins fortes que des conditions de convexité. On propose de se reporter à [FJL01]. Cet article propose aussi des conditions d'unicité d'un équilibre de Stackelberg.

3.3 Résolution sous forme d'équations couplées de Riccati

Ce paragraphe reprend des éléments de [AKFIJ03].

Comme pour la commande monocritère et la commande issue de la stratégie de Nash, on suppose qu'il existe une relation linéaire entre les vecteurs d'état adjoint $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ et $\gamma(t)$ et l'état $x(t)$ à travers des matrices carrées $K_1(t)$, $K_2(t)$ et $P(t)$ soit

$$\psi_1(t) = K_1(t)x(t), \quad \psi_2(t) = K_2(t)x(t), \quad \gamma(t) = P(t)x(t). \quad (3.37)$$

En utilisant les équations de (3.31), on peut montrer que ces matrices doivent vérifier les équations différentielles suivantes

$$\frac{dK_1(t)}{dt} = -A^T K_1(t) - K_1(t)A - Q_1 + K_1(t) \sum_{j=1}^2 S_j K_j(t), \quad (3.38)$$

$$\frac{dK_2(t)}{dt} = -A^T K_2(t) - K_2(t)A - Q_2 + Q_1 P(t) + K_2(t) \sum_{j=1}^2 S_j K_j(t), \quad (3.39)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = AP(t) - P(t)A - S_{21}K_1(t) + S_1 K_2(t) + P(t) \sum_{j=1}^2 S_j K_j(t), \quad (3.40)$$

avec

$$K_1(t_f) = K_{1f}, \quad (3.41)$$

$$K_2(t_f) = K_{2f} - K_{1f}P(t_f), \quad (3.42)$$

$$P(t_0) = 0_n. \quad (3.43)$$

Ce système différentiel est un problème aux deux bouts. Il est possible de le résoudre numériquement par des méthodes de tir [Tre05].

Comme pour la stratégie de Nash en boucle ouverte, il est possible de réécrire cette série d'équations sous la forme d'une équation de Riccati rectangulaire

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T & 0_n & 0_n \\ 0_n & -A^T & Q_1 \\ -S_{21} & S_1 & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} A \quad (3.44)$$

$$- \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ 0_n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & 0_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{pmatrix} K_1(t_f) \\ K_2(t_f) \\ P(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1f} \\ K_{2f} - K_{1f}P(t_f) \\ 0_n \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

On peut noter que les matrices de pondération de cette équation de Riccati rectangulaire sont les matrices blocs issues de $\mathcal{M}_{S,BO}$

$$\mathcal{M}_{S,BO} = \left[\begin{array}{c|ccc} A & -S_1 & -S_2 & 0_n \\ \hline -Q_1 & -A^T & 0_n & 0_n \\ -Q_2 & 0_n & -A^T & Q_1 \\ 0_n & -S_{21} & S_1 & A \end{array} \right] \quad (3.47)$$

La stratégie de Stackelberg en boucle ouverte est donc obtenue en appliquant les commandes

$$u_i(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t) \phi(t, t_0) x_0. \quad (3.48)$$

La matrice de transition $\phi(t, t_0)$ vérifie

$$\frac{d\phi(t, t_0)}{dt} = (A - S_1 K_1(t) - S_2 K_2(t)) \phi(t, t_0), \quad \phi(t, t) = I_n. \quad (3.49)$$

Notons que $\phi(t, t_0)$ est introduite pour éviter l'apparition de l'état courant $x(t)$ dans l'expression de la commande (3.48). Ainsi, la structure d'information en boucle ouverte est bien respectée.

3.4 Résultats sur la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte

Les parties précédentes de ce chapitre ont permis d'établir les conditions nécessaires d'une stratégie de Stackelberg en boucle ouverte. Ces conditions se traduisent par des équations couplées de Riccati. Certaines limitations sont maintenant mises en évidence. Une stratégie de Stackelberg en boucle ouverte pour les critères d'horizon infini ne mène pas toujours à l'existence d'au moins une solution admissible, mais quand leur nombre est important, il est difficile de choisir la meilleure solution en terme de robustesse. Un exemple sur une suspension magnétique à trois électroaimants est présenté, suivie des liens entre stratégie de Stackelberg boucle ouverte et α -stabilité.

3.4.1 Des solutions pas toujours admissibles

Le fait que la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{S,BO}$ soit Hamiltonienne (théorème 3.2) indique que l'on peut séparer ses valeurs propres en deux groupes de même taille : les valeurs propres à partie réelle négative et celles à partie réelle positive. Néanmoins en terme de nombre de solution admissible, c'est-à-dire menant à une dynamique asservie réelle et stable, ce fait est trompeur. Il ne faut pas en conclure qu'il existe toujours une solution admissible issue d'une stratégie de Stackelberg en boucle ouverte. Effectivement il est possible de construire un contre-exemple très simple, en considérant le cas scalaire

$$a = 1; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = 1; \quad (3.50)$$

$$r_{11} = r_{12} = r_{21} = r_{22} = 1; \quad (3.51)$$

$$q_1 = 1; q_2 = \frac{1}{2}. \quad (3.52)$$

La matrice caractéristique $\mathcal{M}_{S,BO}$ vaut alors

$$\mathcal{M}_{S,BO} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= 1.51 & +0.21i; \\ \lambda_3 &= 1.51 & -0.21i; \\ \lambda_2 &= -1.51 & +0.21i; \\ \lambda_1 &= -1.51 & -0.21i. \end{aligned}$$

Pour obtenir une solution réelle et stable, il faut sélectionner une valeur propre réelle stable, ou bien des valeurs propres complexes de partie réelle négative avec leurs valeurs propres conjuguées. Ici le système étant scalaire, il ne faut sélectionner qu'une seule valeur propre. Il est alors impossible de

choisir λ_1 ou λ_2 comme ce sont des valeurs complexes.

Ce type de contre-exemple ne peut intervenir que dans le cas d'une dimension n impaire, et pour des matrices caractéristiques n'admettant pas de valeur propre réelle. Comme le montre le contre exemple suivant.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5201 & 0.9313 & 1.3408 \\ 0.4870 & 0.1636 & -0.2106 \\ -0.0046 & 2.9537 & -1.2174 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.6937 \\ -0.5629 \\ -1.1921 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.0917 \\ 0.5455 \\ -0.2536 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.4812 & -0.3905 & -0.8270 \\ -0.3905 & 0.3168 & 0.6710 \\ -0.8270 & 0.6710 & 1.4212 \end{bmatrix}, \quad S_2 = S_{21} = \begin{bmatrix} 0.0084 & -0.0500 & 0.0233 \\ -0.0500 & 0.2976 & -0.1383 \\ 0.0233 & -0.1383 & 0.0643 \end{bmatrix}.$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 3.0365 & -0.5359 & 1.4047 \\ -0.5359 & 0.7416 & -0.4578 \\ 1.4047 & -0.4578 & 0.9852 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1.1782 & -0.9450 & -1.0346 \\ -0.9450 & 3.8223 & 2.9770 \\ -1.0346 & 2.9770 & 2.4285 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{S,BO}$ sont alors

$$\begin{aligned} &-2.0427 + 1.6003i; \\ &-2.0427 - 1.6003i; \\ &2.0427 + 1.6003i; \\ &2.0427 - 1.6003i; \\ &-1.0048 + 1.3432i; \\ &-1.0048 - 1.3432i; \\ &-1.2148 + 0.1491i; \\ &-1.2148 - 0.1491i; \\ &1.0048 + 1.3432i; \\ &1.0048 - 1.3432i; \\ &1.2148 + 0.1491i; \\ &1.2148 - 0.1491i. \end{aligned}$$

Il n'est alors pas possible effectivement de choisir 3 valeurs propres menant à une dynamique réelle et stabilisante. Il faudrait nécessairement une valeur propre réelle négative.

Dans le cas d'un système de dimension n paire, il est toujours possible d'obtenir une solution admissible.

Contrairement au cas d'une stratégie de Nash, il est possible ici d'atténuer ce constat négatif. Effectivement ici le problème d'optimisation du leader porte sur un système d'état augmenté $\begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \end{pmatrix}$. Il est possible alors de considérer le système comme étant ce système augmenté et pas celui portant uniquement sur x . Alors en réarrangeant les conditions nécessaires linéaires, on obtient [Fre] :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ -\gamma \\ \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_n & -S_2 & -S_1 \\ 0_n & A & -S_1 & S_{21} \\ \hline -Q_2 & -Q_1 & -A^T & 0_n \\ -Q_1 & 0_n & 0_n & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\gamma \\ \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Avec les conditions aux limites

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ -\gamma(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_2(t_f) \\ \psi_1(t_f) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{2f} & K_{1f} \\ K_{1f} & 0_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ -\gamma(t_f) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Remarque 3.3. *La matrice apparaissant dans (3.54) est aussi Hamiltonienne.*

En notant :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} S_2 & S_1 \\ S_1 & S_{21} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_1 & 0_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{K}_f = \begin{bmatrix} K_{2f} & K_{1f} \\ K_{1f} & 0_n \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

il est possible d'énoncer le théorème tiré de [Fre].

Théorème 3.4. *Si l'équation différentielle de Riccati standard de variable $V(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$*

$$\dot{V} = \tilde{A}V + V\tilde{A}^T + V\tilde{Q}V - \tilde{S}, \quad V(t_0) = 0_{2n}, \quad (3.57)$$

admet une solution sur $[t_0, t_f]$ et que

$$\det(I_{2n} - \tilde{K}_f V(t_f)) \neq 0, \quad (3.58)$$

alors il existe au moins un équilibre de Stackelberg.

De ce fait, en ne considérant que l'équation algébrique de Riccati, il est toujours possible de sélectionner $2n$ valeurs propres (réelle ou complexe, mais avec leur conjugué), afin de toujours obtenir une solution admissible. Ceci est néanmoins la solution d'un problème qui est légèrement différent du problème initial qui ne considère que le système d'état x .

3.4.2 Choix des solutions guidé par la robustesse

Dans le cas où plusieurs solutions admissibles (menant à une dynamique réelle et stabilisante), la question du meilleur choix en terme de robustesse se pose. En particulier, comme pour la stratégie de Nash en boucle ouverte, il est mis en avant que le choix de la solution dichotomique (quand elle existe) n'est pas toujours le plus judicieux.

De la même manière que pour la stratégie de Nash en boucle ouverte, l'argument de la marge de module est utilisé comme terme de robustesse. Il est rappelé que la marge de module M_m est définie à partir de la fonction de sensibilité $\mathcal{S}(s)$

$$M_m = \frac{1}{\|\mathcal{S}\|_\infty} = \frac{1}{\sup \{\bar{\sigma}(\mathcal{S}(s)) \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}}. \quad (3.59)$$

où $\bar{\sigma}(\cdot)$ désigne la plus grande valeur singulière d'une matrice.

Encore une fois, comme il n'existe pas de relation directe entre les valeurs propres de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{S,BO}$ et les valeurs singulières de la fonction de sensibilité $\bar{\sigma}(\mathcal{S}(s))$, la comparaison est faite numériquement.

Considérons l'exemple suivant

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3.5 & -2 & 2 \\ 0 & -0.75 & -0.5 & -4 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$C_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]; \quad C_2 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad 1];$$

$$Q_1 = C_1^T C_1; \quad Q_2 = C_2^T C_2; \quad R_{11} = 1/3; \quad R_{21} = R_{12} = 0; \quad R_{22} = 1.$$

Le nombre de solutions admissibles est de 14. La matrice Hamiltonienne $\mathcal{M}_{S,BO}$ est dichotomiquement séparable. La solution dichotomique (figure 3.1) est associée à une norme $\|\mathcal{S}(s)\|_\infty$ valant 3,9416.

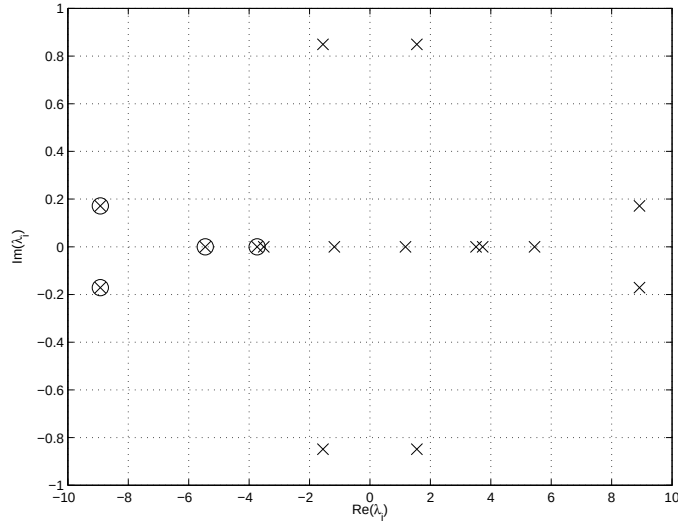


FIGURE 3.1 – Disposition des valeurs propres de $\mathcal{M}_{S,BO}(\cdot)$ et valeurs propres de la solution dichotomique (o).

Pour l'ensemble des solutions admissibles, les extrêmes pour la norme $\|\mathcal{S}(s)\|_\infty$ valent 1,8402 et 56,46. La meilleure solution est celle associée à cette plus faible valeur. Ce n'est pas la solution dichotomique comme l'indique la figure 3.2.

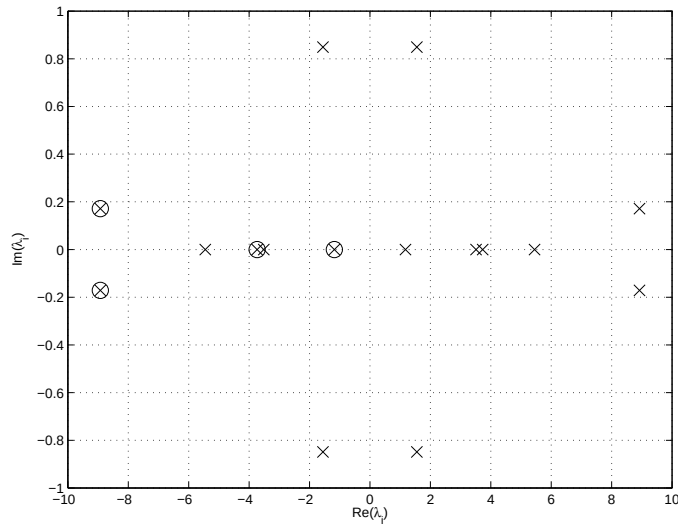


FIGURE 3.2 – Disposition des valeurs propres de $\mathcal{M}_{S,BO}(\cdot)$ et valeurs propres de la solution optimale (o).

Comme il a été indiqué précédemment, le lien entre les valeurs singulières de la fonction de sensibilité et les valeurs propres de la matrice caractéristique étant compliqué, aucun algorithme *a priori* n'a pu être déterminé afin de sélectionner la solution optimale avant le calcul de toutes les solutions de façon numérique.

3.4.3 Exemple d'une suspension magnétique non-linéaire

Ici le cas d'une suspension magnétique active est proposé. Néanmoins en utilisant le nombre minimum d'électroaimants, c'est-à-dire trois, pour pouvoir stabiliser dans les deux directions le rotor, la stratégie de Nash n'est plus naturelle. Suivant l'article [JP05], la stratégie de Stackelberg est utilisée pour respecter la hiérarchie naturelle des entrées du système.

La commande est déterminée sur le modèle linéarisé tangent avec un critère défini pour chaque entrée. Elle est ensuite appliquée au modèle non-linéaire autour du point d'équilibre étudié.

Après avoir donné le système magnétique non-linéaire étudié et avoir défini l'ensemble des points d'équilibre admissibles, le modèle linéarisé sera présenté. La résolution des équations couplées algébriques de Riccati issues de la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte déterminera les commandes à appliquer sur le système non-linéaire. Une série de simulations permettra une comparaison avec la commande LQ.

3.4.3.1 Modèle du système

La configuration la plus répandue pour les suspensions magnétiques comporte un nombre pair de pôles [CKS93b, JFPAK05, LLP96b] afin de simplifier le modèle, en faisant l'hypothèse que chaque paire de pôles correspond à un circuit magnétique indépendant. Néanmoins ces configurations nécessitent un nombre élevé d'amplificateurs de puissance et impliquent des pertes importantes. La configuration envisagée ici correspond au nombre de pôles minimal permettant de commander horizontalement et verticalement le rotor [CH02, HC03, HC02], soit trois pôles, comme l'indique la figure 3.3. Le centre du rotor est repéré par les variables de positions x et y .

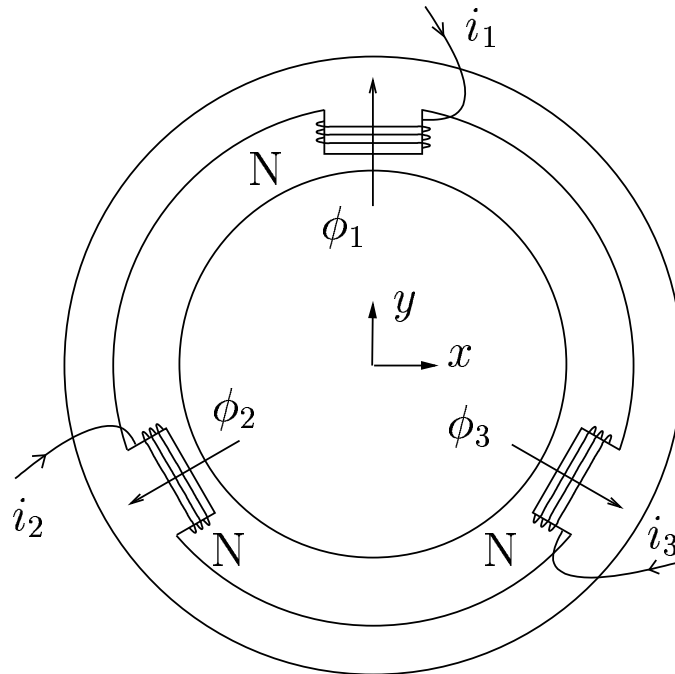


FIGURE 3.3 – Suspension magnétique comportant 3 pôles commandée en courant.

Le pôle « k » $k \in \{1, 2, 3\}$ de surface S possède N enroulements traversés par un courant i_k qui créent les flux Φ_k dans les entrefers. En négligeant les fuites magnétiques grâce à la présence

d'une armature reliant les différents pôles, en considérant la perméabilité infinie dans le matériau magnétique, le schéma équivalent magnétique est donné par la figure 3.4

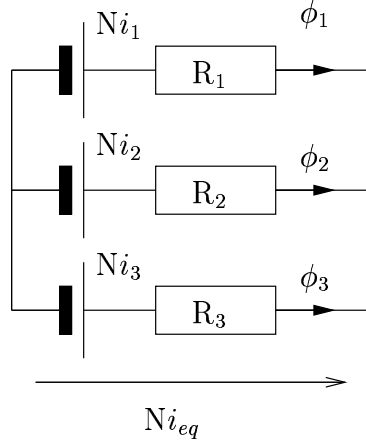


FIGURE 3.4 – Circuit magnétique équivalent.

Les flux vérifient alors la contrainte

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0. \quad (3.60)$$

En fonction des courants les flux s'expriment par

$$\begin{cases} \Phi_1 = N \frac{(R_2 + R_3)i_1 - R_2i_3 - R_3i_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}, \\ \Phi_2 = N \frac{(R_1 + R_3)i_2 - R_3i_1 - R_1i_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}, \\ \Phi_3 = N \frac{(R_2 + R_2)i_3 - R_1i_2 - R_2i_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}, \end{cases} \quad (3.61)$$

où les reluctances sont après développement limité

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{\mu_0 S} (l_0 - y), \\ R_2 = \frac{1}{\mu_0 S} (2l_0 + \sqrt{3}x + y), \\ R_3 = \frac{1}{\mu_0 S} \frac{1}{2} (2l_0 - \sqrt{3}x + y), \end{cases} \quad (3.62)$$

Les forces magnétiques qui agissent sur le rotor l'attirent toujours vers le pôle correspondant et ont pour amplitude

$$F_k = \frac{\Phi_k^2}{2\mu_0 S}. \quad (3.63)$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au rotor de masse m projeté sur l'axe horizontal et l'axe vertical donne

$$\begin{cases} f_x = m\ddot{x} = (F_3 - F_2) \cos 30^\circ, \\ f_y = m\ddot{y} = -(F_3 + F_2) \sin 30^\circ + F_1 - mg. \end{cases} \quad (3.64)$$

Le modèle est très fortement non-linéaire pour deux raisons. D'une part comme pour tout électroaimant, la force magnétique fait apparaître les courants sous forme quadratique et d'autre part, la

configuration choisie fait que les trois courants vont venir modifier les trois flux (ce qui n'est pas le cas pour une configuration avec quatre pôles étudiée au chapitre précédent). Le modèle de représentation d'état choisi est le suivant

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

soumis à

$$\dot{z} = f = \begin{bmatrix} z_2 \\ \underline{f_x} \\ m \\ z_4 \\ \underline{f_y} \\ m \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

L'objectif du problème est de commander le système non-linéaire (3.66) pour les courants de telle sorte que le rotor revienne à sa position centrale. L'état d'équilibre est donc $z_{eq} = 0$. En réinjectant cette valeur dans le modèle non-linéaire (3.66), on obtient les relations suivantes sur les courants

$$f_x = 0 \Rightarrow (i_{2eq} - i_{3eq})(i_{2eq} + i_{3eq} - 2i_{1eq}) = 0. \quad (3.67)$$

Pour avoir des courants réels, la seule solution est

$$i_{2eq} = i_{3eq}. \quad (3.68)$$

L'autre contrainte portant sur f_y donne en tenant compte de (3.68), et en posant

$$\gamma = \mu_0 S N^2, \quad (3.69)$$

$$f_y = 0 \Rightarrow \frac{\gamma}{6l_0^2} (i_{2eq} - i_{1eq})^2 - mg = 0. \quad (3.70)$$

Soit

$$i_{3eq} = i_{2eq}, \quad i_{1eq} = i_{2eq} \pm l_0 \sqrt{\frac{6mg}{\gamma}}. \quad (3.71)$$

La famille de points d'équilibre peut donc être paramétrée par le courant i_{2eq} . Seule la solution « + » dans (3.71) est retenue pour i_{1eq} . Il est à noter que ce modèle non-linéaire ne dépend pas du paramètre i_{2eq} des points d'équilibre, étant donné que les flux à l'équilibre n'en dépendent pas. On affecte à i_{2eq} la valeur qui minimise les pertes proportionnelles à

$$i_{1eq}^2 + i_{2eq}^2 + i_{3eq}^2, \quad (3.72)$$

soit

$$i_{1eq}^2 = 2l_0 \sqrt{\frac{2mg}{3\gamma}}, \quad i_{2eq} = i_{3eq} = -l_0 \sqrt{\frac{2mg}{3\gamma}}. \quad (3.73)$$

A partir du modèle non-linéaire (3.66), il est possible de déterminer le modèle linéarisé tangent autour des points d'équilibre (3.72)

$$\dot{\tilde{z}} = A\tilde{z} + B_1\tilde{i}_1 + B_2\tilde{i}_2 + B_3\tilde{i}_3, \quad (3.74)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{l_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{l_0} \sqrt{\frac{2\gamma g}{3m}} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{l_0} \sqrt{\frac{\gamma g}{2m}} \\ 0 \\ \frac{1}{l_0} \sqrt{\frac{\gamma g}{6m}} \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l_0} \sqrt{\frac{\gamma g}{2m}} \\ 0 \\ \frac{1}{l_0} \sqrt{\frac{\gamma g}{6m}} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

La matrice A possède deux valeurs propres doubles

$$-\sqrt{\frac{g}{l_0}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{g}{l_0}}. \quad (3.77)$$

Le système linéarisé est donc instable. Les paires (A, B_k) ont une matrice de commandabilité de rang 2, alors que la taille de la matrice A est 4. Néanmoins la paire $(A, [B_1, B_2, B_3])$ reste commandable. Ainsi aucune entrée ne peut-elle à elle seule commander l'ensemble du système linéarisé, alors qu'une action coopérative des trois entrées le permet. La théorie des jeux permet ainsi de gérer la coordination des différentes entrées, qui n'agissent que localement sur le système.

3.4.3.2 Application de la Stratégie de Stackelberg

L'approche proposée pour contrôler la suspension magnétique est une commande issue de la théorie des jeux. Effectivement les différents courants $\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \tilde{i}_3$ peuvent être considérés comme les joueurs, qui agissent sur un système dynamique et tendent à minimiser un critère qui leur est propre. Contrairement à la suspension magnétique à 4 pôles où la symétrie permet d'utiliser la stratégie de Nash [JFPAK05], ici les rôles des joueurs pour la suspension à 3 pôles ne sont pas interchangeables : la stratégie hiérarchisée de Stackelberg est donc proposée.

Chaque courant d'entrée $\tilde{i}_k$ doit optimiser son propre cahier des charges, ce qui peut être traduit comme la minimisation d'un critère. Ici, les critères prennent la forme de critères quadratiques sur un horizon infini (devant stabiliser rapidement l'état vers l'état d'équilibre nul, le temps final des critères peut être considéré comme infini)

$$J_k(\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \tilde{i}_3) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} (z^T Q_k z + R_{kk} \tilde{i}_k^2) dt. \quad (3.78)$$

Par exemple, pour avoir une interprétation physique, on peut poser

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad Q_2 = Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix}, \quad R_{kk} = \frac{4\gamma}{3l_0}. \quad (3.79)$$

Ces critères ne font intervenir que des termes énergétiques quadratiques (cinétique et électromagnétique dans l'entrefer). Dans Q_2 apparaît un terme $\frac{m}{2}$ exprimant une minimisation plus importante de l'énergie cinétique horizontale par rapport à celle verticale. Il faut noter que la paire (Q_1, A) donne une matrice d'observabilité de rang 2 uniquement, alors que les paires (Q_2, A) et (Q_3, A) sont observables.

Les joueurs 2 et 3 étant les seuls à pouvoir agir sur la dynamique linéarisée horizontale, ils imposent leur commande et le joueur 1 agissant uniquement sur la verticale s'adapte alors aux conséquences des commandes des joueurs 2 et 3 sur la dynamique linéarisée verticale. Ce système constitue donc un jeu de Stackelberg possédant deux leaders : 2 et 3 (qui entre eux jouent un jeu de Nash) et un

suiveur : 1.

L'ensemble des réactions rationnelles du suiveur est défini par

$$\mathcal{R}_1(\tilde{i}_2, \tilde{i}_3) = \{i_1 \mid J_1(i_1, \tilde{i}_2, \tilde{i}_3) \leq J_1(\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \tilde{i}_3), \forall \tilde{i}_1\} \quad (3.80)$$

Il est alors possible de définir un équilibre de Stackelberg à deux leaders et un suiveur $(\tilde{i}_1^*, \tilde{i}_2^*, \tilde{i}_3^*)$ [AK86]

$$\tilde{i}_1^* \in \mathcal{R}_1(\tilde{i}_2^*, \tilde{i}_3^*), \quad (3.81)$$

$$\sup_{\tilde{i}_1 \in \mathcal{R}_1(\tilde{i}_2^*, \tilde{i}_3^*)} J_2(\tilde{i}_1, \tilde{i}_2^*, \tilde{i}_3^*) \leq \sup_{\tilde{i}_1 \in \mathcal{R}_1(\tilde{i}_2, \tilde{i}_3^*)} J_2(\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \tilde{i}_3^*), \forall \tilde{i}_2, \quad (3.82)$$

$$\sup_{\tilde{i}_1 \in \mathcal{R}_1(\tilde{i}_2^*, \tilde{i}_3^*)} J_2(\tilde{i}_1, \tilde{i}_2^*, \tilde{i}_3^*) \leq \sup_{\tilde{i}_1 \in \mathcal{R}_1(\tilde{i}_2^*, \tilde{i}_3)} J_2(\tilde{i}_1, \tilde{i}_2^*, \tilde{i}_3), \forall \tilde{i}_3. \quad (3.83)$$

Les conditions nécessaires pour un tel équilibre de Stackelberg, avec les critères, sont décrites dans [AK86]. Si l'on pose ψ_k le vecteur d'état adjoint du joueur k associé à la contrainte dynamique (3.74), alors la condition nécessaire pour le suiveur s'écrit

$$\dot{\psi}_1 = -Q_1 \tilde{z} - A^T \psi_1. \quad (3.84)$$

Si l'on pose γ_{k1} le vecteur d'état adjoint du leader k associé à la contrainte du suiveur 1 (3.84), les conditions nécessaires pour les leaders sont ici

$$\begin{cases} \dot{\psi}_2 = -Q_2 \tilde{z} - A^T \psi_2 + Q_1 \gamma_{21}, \\ \dot{\psi}_3 = -Q_3 \tilde{z} - A^T \psi_3 + Q_1 \gamma_{31}. \end{cases} \quad (3.85)$$

et

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{21} = S_2 \psi_2 + A \gamma_{21}, \\ \dot{\gamma}_{31} = S_3 \psi_3 + A \gamma_{31}. \end{cases} \quad (3.86)$$

où $S_k = B_k R_{kk}^{-1} B_k^T$. Les courants sont alors donnés par

$$\tilde{i}_k = -R_{kk}^{-1} B_k^T \psi_k. \quad (3.87)$$

Ces équations différentielles peuvent se mettre sous forme matricielle en posant l'état augmenté

$$W = \begin{bmatrix} x \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \gamma_{21} \\ \psi_3 \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{M}_{S,3\text{pôles}} W = \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 & 0_n & -S_3 & 0_n \\ -Q_1 & -A^T & 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ -Q_2 & 0_n & -A^T & Q_1 & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & S_1 & A & 0_n & 0_n \\ -Q_3 & 0_n & 0_n & 0_n & -A^T & Q_1 \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n & S_1 & A \end{bmatrix} W \quad (3.89)$$

Ici on ne recherche (pour simplifier) que les solutions d'une famille particulière, où les vecteurs d'état adjoints sont linéaires en l'état

$$\psi_k = K_k x, \quad \gamma_{31} = P_{31} x, \quad \gamma_{21} = P_{21} x, \quad (3.90)$$

on obtient des équations de Riccati couplées différentielles

$$\begin{cases} \dot{K}_1 = -K_1 A - A^T K_1 - Q_1 + K_1 S_1 K_1 + K_1 S_2 K_2 + K_1 S_3 K_3, \\ \dot{K}_2 = -K_2 A - A^T K_2 - Q_2 + K_2 S_1 K_1 + K_2 S_2 K_2 + K_2 S_3 K_3 + Q_1 P_{21}, \\ \dot{P}_{21} = A P_{21} - P_{21} A + S_1 K_2 + P_{21} S_1 K_1 + P_{21} S_2 K_2 + P_{21} S_3 K_3, \\ \dot{K}_3 = -K_3 A - A^T K_3 - Q_3 + K_3 S_1 K_1 + K_3 S_2 K_2 + K_3 S_3 K_3 + Q_1 P_{31}, \\ \dot{P}_{31} = A P_{31} - P_{31} A + S_1 K_2 + P_{31} S_1 K_1 + P_{31} S_2 K_2 + P_{31} S_3 K_3. \end{cases} \quad (3.91)$$

Ces équations non-linéaires sont linéarisables par le lemme de Radon grâce à la matrice $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$. Pour des critères à horizon infini, on peut chercher les solutions constantes aux équations (3.91) qui deviennent alors algébriques. Une méthode de détermination de ces solutions algébriques est d'étudier les espaces invariants de la matrice $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$. Les commandes à appliquer sont alors de la forme

$$\tilde{i} = -R_{kk}^{-1} B_k^T \xi(t, t_0) x_0, \quad (3.92)$$

avec

$$\dot{\xi}(t, t_0) = (A - S_1 K_1 - S_2 K_2 - S_3 K_3) \xi(t, t_0), \quad \xi(t, t) = I_n. \quad (3.93)$$

Le spectre de $(A - S_1 K_1 - S_2 K_2 - S_3 K_3)$ est inclus dans celui de la matrice $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$. Etant donné que $Q_2 = Q_3$, ce jeu différentiel correspond à une quasi-coopération entre les deux leaders 2 et 3 de rapport 1. Le changement de base

$$T = \begin{bmatrix} I_8 & 0_8 & 0_8 \\ 0_8 & I_8 & 0_8 \\ 0_8 & I_8 & I_8 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

sur la matrice $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$ fait apparaître une propriété de symétrie sur les valeurs propres de $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$

$$T \mathcal{M}_{S,3\text{pôles}} T^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} A & -S_1 & -(S_2 + S_3) & 0_n & -S_3 & 0_n \\ -Q_1 & -A^T & 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline -Q_2 & 0_n & -A^T & Q_1 & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & S_1 & A & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & 0_n & 0_n & 0_n & -A^T & Q_1 \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n & S_1 & A \end{array} \right] \quad (3.95)$$

Cette matrice est triangulaire supérieure par blocs et les matrices blocs sur la diagonale sont hamiltoniennes. Le spectre de la matrice réelle $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$ possède donc l'axe réel et l'axe imaginaire comme axes de symétrie dans le plan complexe.

Les deux valeurs propres doubles de A sont $-\sqrt{\frac{g}{l_0}}$ et $\sqrt{\frac{g}{l_0}}$, à cause de la structure de B_1 et Q_1 quadruples pour la matrice $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$, mais les vecteurs propres associés pour la matrice $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$ possèdent leurs 4 premiers éléments nuls, ils ne permettent pas d'obtenir une solution algébrique aux équations de Riccati. Malgré cela, il existe plusieurs solutions aux équations de Riccati couplées. Avec les données numériques de la table 3.1, toutes les valeurs propres de la matrice $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$ sont réelles. Il existe 68 solutions menant à une dynamique linéaire stable et réelle en tenant compte de la structure des vecteurs propres de la matrice $\mathcal{M}_{S,3\text{pôles}}$. Dans la suite on ne sélectionne que la solution menant à la dynamique la plus rapide (solution dichotomique).

Par la suite les commandes (3.92) sont appliquées sur le modèle non-linéaire de la suspension (3.66) dans la section suivante avec les données numériques

Paramètre	Valeur nominale
m	0,6325 kg
g	9,81 m.s ⁻¹
μ	$4\pi.10^{-7}$ H.m ⁻¹
l_0	$9,45.10^{-7}$ m
S	4.10^{-4} m ²
N	300

TABLEAU 3.1 – Valeurs nominales des paramètres.

3.4.3.3 Simulations

La commande LQ est utilisée comme commande de référence pour évaluer la commande issue de la stratégie de Stackelberg, avec les pondérations suivantes (par exemple)

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

Le critère global de la commande LQ est alors la somme des trois critères. La figure 3.5 montre la stabilisation du centre du rotor pour une position initiale au repos (indiquée par un +) ainsi que les trajectoires pour les commandes LQ (en pointillés) et issue de la stratégie de Stackelberg (en trait plein). Le cercle qui apparaît dans la figure 3.5, défini par (3.97), délimite l'ensemble des positions admissibles pour que le rotor ne touche pas les électroaimants.

$$x^2 + y^2 \leq l_0^2. \quad (3.97)$$

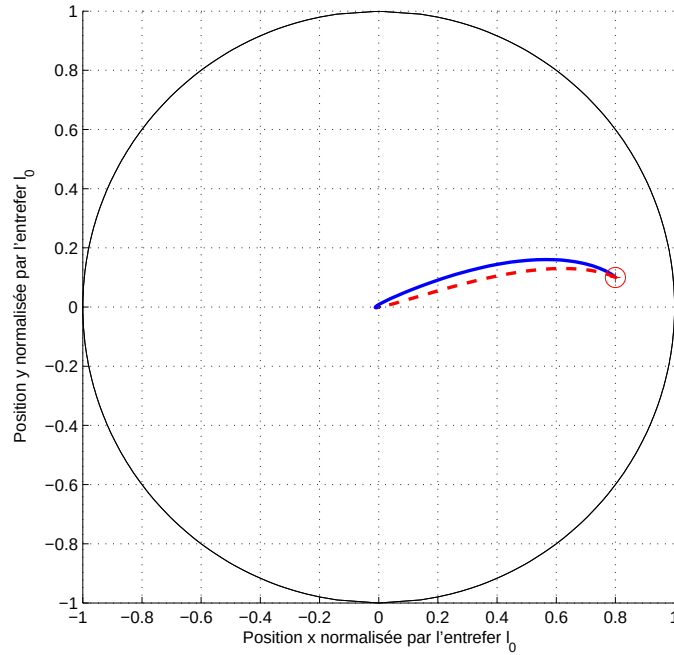


FIGURE 3.5 – Trajectoires pour une commande LQ et une issue de la stratégie de Stackelberg ($x(0) = 0,8 l_0, y(0) = 0,1 l_0$).

La figure 3.6 indique positions et vitesses pour la stratégie de Stackelberg et commande LQ, alors que la figure 3.7 indique les courants qu'il faut appliquer.

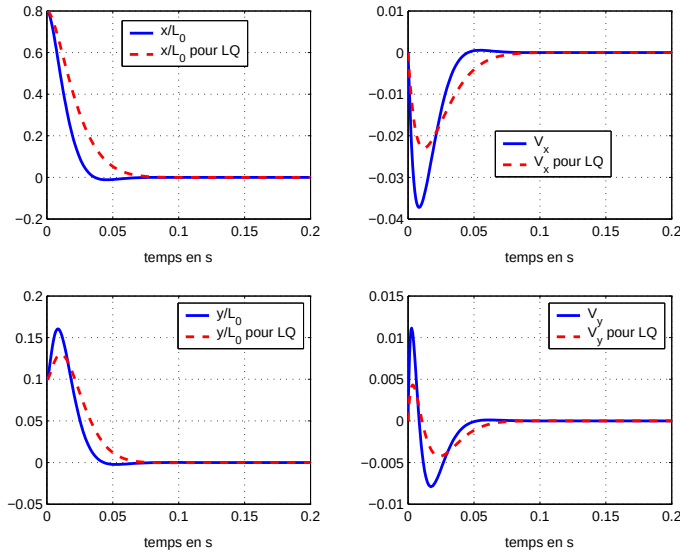


FIGURE 3.6 – Position et vitesse pour une commande LQ et une issue de la stratégie de Stackelberg ($x(0) = 0,8 l_0, y(0) = 0,1 l_0$).

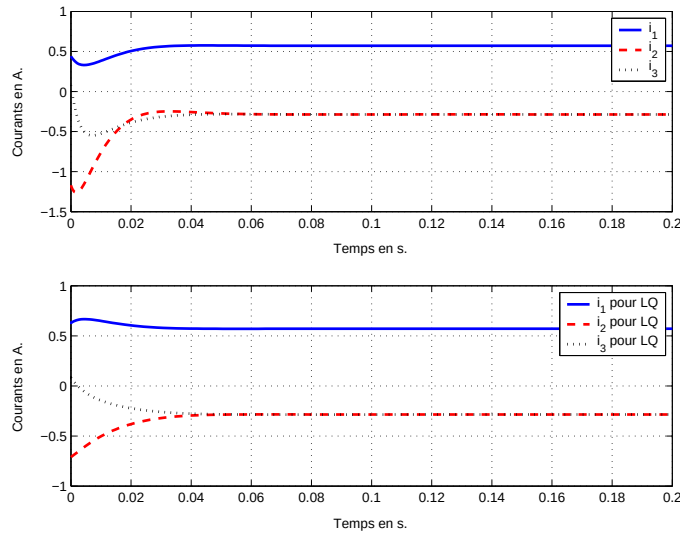


FIGURE 3.7 – Courants pour une commande LQ et une issue de la stratégie de Stackelberg ($x(0) = 0,8 l_0, y(0) = 0,1 l_0$).

Pour les courants sur la figure 3.7, on peut remarquer que l'on retrouve bien les courants d'équilibre après le transitoire. La stabilisation se produit en moins d'un dixième de seconde. Les courants à appliquer pour la stratégie de Stackelberg sont du même ordre de grandeur que pour la commande LQ. La figure 3.8 propose l'ensemble des positions initiales au repos qui mènent à une trajectoire admissible (respectant (3.97) à tout instant). L'ensemble du domaine est stabilisé, pour la commande LQ et la commande issue de Stackelberg.

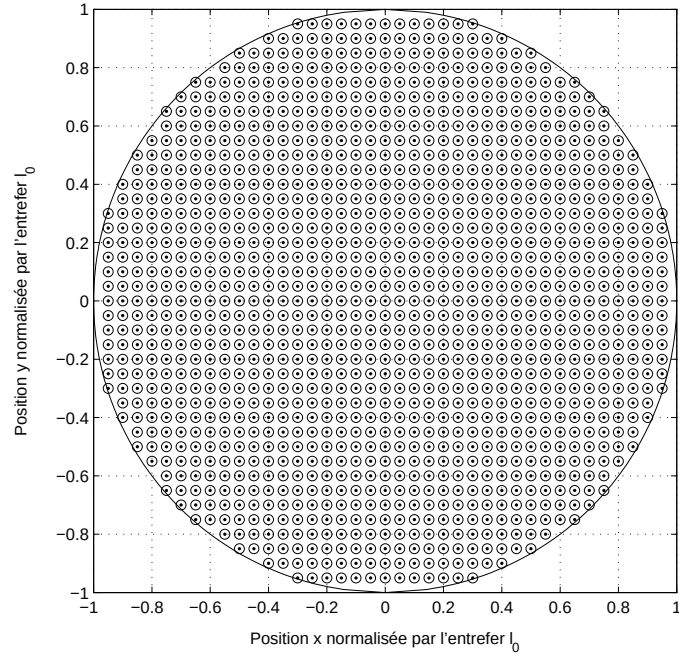


FIGURE 3.8 – Ensemble des positions initiales au repos des trajectoires admissibles (LQ : o ; Stackelberg : .).

Cependant si l'on prend en compte des vitesses initiales non nulles, la stratégie de Stackelberg peut être préférable à la commande LQ, comme le montre la figure 3.9.

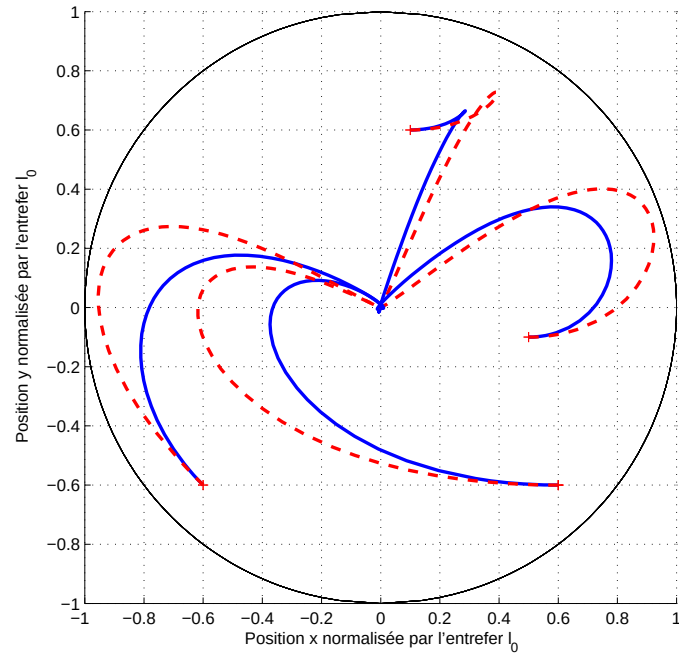


FIGURE 3.9 – Exemples de trajectoires avec vitesses initiales (LQ : pointillés ; Stackelberg : trait plein).

La figure 3.10 montre l'ensemble des positions initiales avec une vitesse initiale horizontale de $+0,1m.s^{-1}$ des trajectoires stabilisées. La commande de Stackelberg est meilleure que la commande

LQ dans ce cas.

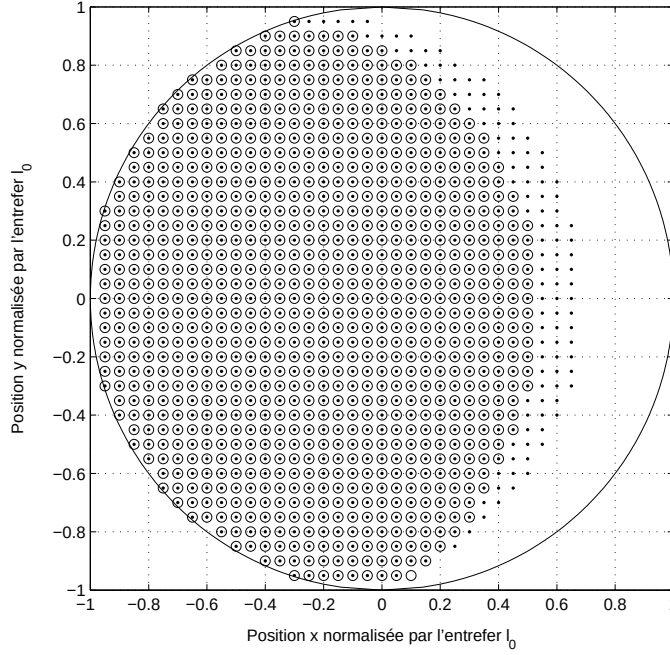


FIGURE 3.10 – Ensemble des positions initiales avec vitesse horizontale des trajectoires admissibles (LQ : o ; Stackelberg : .).

3.5 Stratégie de Stackelberg pour les jeux incluant des critères quadratiques à pondération temporelle

Pour la fin de ce chapitre, une extension des jeux linéaires-quadratiques est étudiée. Cette partie rassemble les résultats de [JAK04a, Jun06a, Jun06b]. On considère un jeu différentiel à deux joueurs, sur un horizon infini, de contrainte linéaire

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.98)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathcal{U}_{ad,i} \subset \mathbb{R}^{r_i}$ ($i \in \{1, 2\}$ et $n, r_i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{ad,i}$ est l'ensemble des commandes admissibles u_i) et avec les critères (pour $i \in \{1, 2\}$) incluant un taux de pondération temporelle α_i

$$J_i = \frac{1}{2} x_f^T e^{2\alpha_i t_f} K_{if} x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} e^{2\alpha_i t} (x^T Q_i x + u_1^T R_{i1} u_1 + u_2^T R_{i2} u_2) d\tau, \quad (3.99)$$

où $x_f = x(t_f)$. Toutes les matrices de pondération sont constantes et symétriques avec $Q_i = C_i^T C_i \geq 0$, $K_{if} \geq 0$, $R_{ij} \geq 0$ ($i \neq j$) et $R_{ii} > 0$. Les matrices C_i sont supposées de rang plein $C_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$. De façon à simplifier la preuve du théorème 3.13, il est supposé que $m_1 \leq r_2$. Le coefficient constant $\alpha_i \in \mathbb{R}$ correspond à un taux de pondération temporelle.

Ce problème a déjà été étudié dans la littérature dans le cadre de la stratégie de Nash en boucle ouverte [AKJ03]. Ici il est étudié dans le cadre de la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte. Pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, il a déjà été vu dans la première partie de ce chapitre (aussi voir [AKB85, AKFIJ03]), que cette stratégie est caractérisée par une matrice Hamiltonienne notée $\mathcal{M}_{S,BO}$, définie par (3.31). Dans le cas général, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, cette propriété de caractérisation par une matrice Hamiltonienne ne tient plus.

L'objectif, ici, est double : d'abord étudier le cas général, où aucune hypothèse n'est faite sur les valeurs α_1 et α_2 et examiner les propriétés et la structure de la matrice caractérisant les conditions nécessaires (paragraphe 3.5.1). Ensuite des conditions suffisantes, assez faibles, sont proposées pour assurer un degré d' α -stabilité du système asservi.

Le cas de la commande linéaire-quadratique classique, incluant un taux de pondération temporelle α a été complètement étudié (voir [AM89] par exemple).

La catégorie des critères (3.99) tenant compte d'une pondération temporelle peut rassembler plusieurs applications. En économie par exemple $\alpha_i < 0$ modélise le taux d'escompte (ou "discount rate" en anglais) comme on peut le voir dans [DJLS00, CW], [Bag84, p. 77]. En automatique, généralement $\alpha_i \geq 0$, afin d'essayer d'assurer une stabilité asymptotique de degré $\alpha \geq 0$, définie par

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha t} x(t) = 0. \quad (3.100)$$

Pour $\alpha > 0$, une convergence dans une enveloppe exponentielle est garantie et pour $\alpha = 0$, les critères (3.99) sont purement quadratiques, et on retrouve la définition de la stabilité asymptotique.

Dans la suite, plus aucune hypothèse n'est faite sur le signe des coefficients α_1 et α_2 , afin de permettre l'utilisation dans ces divers champs applicatifs, sans restriction. L'utilisation de coefficients différents $\alpha_1 \neq \alpha_2$ dans les critères (3.99) permet de modéliser des objectifs de degré de stabilité différents, ou par exemple, des taux d'escompte de différents pays.

La fin du chapitre est organisée de la façon suivante. Dans le paragraphe suivant, les conditions nécessaires sont modifiées, ainsi que les équations couplées de Riccati, pour tenir compte des valeurs quelconques de α_1 et α_2 . La matrice caractéristique est particulièrement étudiée, notamment les propriétés de symétrie de la distribution de ses valeurs propres. Enfin, le dernier paragraphe proposera des conditions suffisantes faibles, utiles dans le cadre de l' α -stabilité.

3.5.1 Mise en équations

Les conditions nécessaires pour une stratégie de Stackelberg en boucle ouverte sont bien connues depuis [SC73b, SC73a]. Elles sont rappelées au début de ce chapitre. Dans [DJLS00, chapter 5], il est possible de trouver une forme plus explicite, correspondant aux critères incluant une pondération temporelle sous forme exponentielle.

Les conditions nécessaires sont valables pour des matrices de pondération dans les critères, qui dépendent du temps t . L'inconvénient est que la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{S,BO}$ dépend aussi du temps. Néanmoins un changement de variable sur les vecteurs d'états adjoints permet de rendre cette matrice caractéristique indépendante du temps.

Rappelons que le vecteur ψ_1 est le vecteur d'état adjoint du suiveur, associé à la contrainte dynamique (3.98) et que les vecteurs ψ_2 et γ sont les vecteurs d'états adjoints du leader, associés respectivement à la contrainte dynamique (3.98) et à la réaction rationnelle du suiveur $\mathcal{R}_1(\cdot)$.

Ainsi en effectuant les changements de variables suivants :

$$\psi_1(t) \longmapsto e^{-2\alpha_1 t} \psi_1(t), \quad (3.101)$$

$$\psi_2(t) \longmapsto e^{-2\alpha_2 t} \psi_2(t), \quad (3.102)$$

$$\gamma(t) \longmapsto e^{-2(\alpha_2 - \alpha_1)t} \gamma(t), \quad (3.103)$$

les commandes (u_1^{**}, u_2^{**}) associées à la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte sont de la forme

$$\begin{cases} u_1^{**}(t) = -R_{11}^{-1} B_1^T \psi_1(t), \\ u_2^{**}(t) = -R_{22}^{-1} B_2^T \psi_2(t). \end{cases} \quad (3.104)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = M_{\alpha_1 \alpha_2} \begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (3.105)$$

et les conditions de transversalité

$$\begin{cases} x(t_0) &= x_0, \\ \psi_1(t_f) &= K_{1f} x_f, \\ \psi_2(t_f) &= K_{2f} x_f - K_{1f} \gamma(t_f), \\ \gamma(t_0) &= 0, \end{cases} \quad (3.106)$$

où

$$M_{\alpha_1 \alpha_2} = \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 & 0_n \\ -Q_1 & -A^T - 2\alpha_1 I_n & 0_n & 0_n \\ -Q_2 & 0_n & -A^T - 2\alpha_2 I_n & Q_1 \\ 0_n & -S_{21} & S_1 & A - 2(\alpha_2 - \alpha_1)I_n \end{bmatrix}. \quad (3.107)$$

On rappelle que les notations $S_{ij} = B_j R_{jj}^{-1} R_{ij} R_{jj}^{-1} B_j^T$ et $S_i = S_{ii}$ sont utilisées.

La nouvelle matrice $M_{\alpha_1 \alpha_2}$ définie par (3.105), (en association avec les conditions terminales (3.106)) est caractéristique des conditions nécessaires de la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte avec des critères possédant une pondération temporelle exponentielle. Il s'agit encore une fois d'un problème aux deux bouts. Notons que pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, nous retrouvons bien le cas des jeux linéaires quadratiques sans termes croisés et la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{S,BO}$ définie par (3.31).

$$M_{\alpha_1 \alpha_2} = M_{0,0} = \mathcal{M}_{S,BO}. \quad (3.108)$$

Avoir des coefficients α_1 et α_2 non nuls ne change rien au fait que les conditions nécessaires sont aussi suffisantes si les critères sont convexes sur l'horizon fini (t_f fini) [SC73b, SC73a]. Cependant cet argument est assez restrictif. Le but avoué étant de stabiliser le système dynamique (3.98) avec une commande issue de la stratégie de Stackelberg, nous n'insisterons plus sur le lien (avec une structure d'information en boucle ouverte) entre ces commandes et un éventuel équilibre de Stackelberg.

La principale contribution ici sera d'étudier les propriétés de la nouvelle matrice caractéristique $M_{\alpha_1 \alpha_2}$. Rappelons, dans le paragraphe, suivant une manière de résoudre le problème aux deux bouts associé à ces conditions nécessaires.

3.5.2 Détermination de la stratégie de Stackelberg

3.5.2.1 Critères sur un horizon fini

A l'aide du même raisonnement que pour la détermination d'une stratégie de Nash, les équations des conditions nécessaires pouvant se mettre sous forme linéaire, et les conditions de transversalité étant linéaires en x_0 , les vecteurs d'état adjoint sont de la forme linéaire en l'état x . Notons $K_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_2(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant

$$\begin{cases} \psi_1(t) &= K_1(t) x(t), \\ \psi_2(t) &= K_2(t) x(t), \\ \gamma(t) &= P(t) x(t). \end{cases} \quad (3.109)$$

On obtient ainsi les équations différentielles couplées de Riccati

$$\begin{cases} \dot{K}_1 &= -(A^T + 2\alpha_1 I_n) K_1 - K_1 A - Q_1 + K_1 S_1 K_1 + K_1 S_2 K_2, \\ \dot{K}_2 &= -(A^T + 2\alpha_2 I_n) K_2 - K_2 A - Q_2 + Q_1 P + K_2 S_1 K_1 + K_2 S_2 K_2, \\ \dot{P} &= (A - 2(\alpha_2 - \alpha_1) I_n) P - P A + P S_1 K_1 + P S_2 K_2 - S_{21} K_1 + S_1 K_2, \end{cases} \quad (3.110)$$

avec

$$\begin{cases} K_1(t_f) = K_{1f}, \\ K_2(t_f) = K_{2f} - K_{1f} P(t_f), \\ P(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.111)$$

Dans ce cas, les commandes issues de la stratégie de Stackelberg peuvent se reformuler en

$$\begin{cases} u_1^{**}(t) = -R_{11}^{-1} B_1^T K_1(t) \xi(t, t_0) x_0, \\ u_2^{**}(t) = -R_{22}^{-1} B_2^T K_2(t) \xi(t, t_0) x_0, \end{cases} \quad (3.112)$$

où

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t, t_0) = (A - S_1 K_1(t) - S_2 K_2(t)) \xi(t, t_0), \\ \xi(t, t) = I_n. \end{cases} \quad (3.113)$$

Ces commandes ne sont pas des fonctions de l'état $x(t)$, mais bien uniquement de l'état pré-déterminé $\xi(t, t_0) x_0$, fonction du temps, déterminée par le modèle du système.

Les équations couplées de Riccati (3.110) sont caractérisées par la matrice $M_{\alpha_1 \alpha_2}$. Effectivement en utilisant les sous-matrices

$$M_{\alpha_1 \alpha_2} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 & 0_n \\ -Q_1 & -A^T - 2\alpha_1 I_n & 0_n & 0_n \\ -Q_2 & 0_n & -A^T - 2\alpha_2 I_n & Q_1 \\ 0_n & -S_{21} & S_1 & A - 2(\alpha_2 - \alpha_1) I_n \end{bmatrix}, \quad (3.114)$$

nous pouvons réécrire les équations (3.110) en une seule équation de Riccati non symétrique

$$\begin{pmatrix} \dot{K}_1 \\ \dot{K}_2 \\ \dot{P} \end{pmatrix} = M_4 \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} M_1 + M_3 - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} M_2 \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

3.5.2.2 Critères à horizon infini

Ce paragraphe s'attache à l'étude du cas particulier de critères à horizon infini ($t_f \rightarrow +\infty$). En ne recherchant que des commandes stabilisantes, les critères terminaux dans (3.99) n'ont plus de sens, ainsi que les conditions de transversalité associées (3.106).

Aussi en se plaçant sur un horizon infini, il est possible de ne rechercher que les solutions constantes de (3.115), en remplaçant le membre de gauche par une matrice nulle de taille adaptée. Cette équation non-symétrique de Riccati devient alors algébrique.

Une méthode pour trouver toutes les solutions K_1 , K_2 et P de l'équation algébrique de Riccati, est d'étudier les espaces invariants de la matrice $M_{\alpha_1 \alpha_2}$ [AKFIJ03, JAK04a]. Nous rappelons ici certaines conditions nécessaires (théorème 3.10) à l'existence de solutions à ces équations. Ces conditions nécessaires peuvent aussi bien s'appliquer dans le cas particulier $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. La démonstration que nous rappelons ici a été publiée dans [JAK04a]. Elle nécessite deux définitions et trois lemmes que nous indiquons.

Définition 3.5 (Mode non-commandable). λ est appelé mode non-commandable (de rang 1) de la paire (A, B) s'il existe un vecteur $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\begin{cases} A^T y = \lambda y \\ B^T y = 0 \end{cases}$$

Définition 3.6 (Mode non-observable). λ est appelé mode non-observable (de rang 1) de la paire (A, Q) s'il existe un vecteur $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\begin{cases} Ay = \lambda y \\ Qy = 0 \end{cases}$$

Lemme 3.7. Il existe $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M_{\alpha_1 \alpha_2}$ associé à λ est équivalent à $-(2\alpha_1 + \lambda)$ est un mode non-commandable de la paire (A, B_1) .

Démonstration. $M_{\alpha_1 \alpha_2} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_2 y \\ -A^T y - 2\alpha_1 y \\ 0 \\ -S_{21} y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1^T y = 0 \\ A^T y = -(2\alpha_1 + \lambda) y \end{cases} \quad \square$

Lemme 3.8. Il existe $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M_{\alpha_1 \alpha_2}$ associé à λ est équivalent à $-(2\alpha_2 + \lambda)$ est un mode non-commandable des paires (A, B_1) et (A, B_2) .

Démonstration. $M_{\alpha_1 \alpha_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_2 y \\ 0 \\ -A^T y - 2\alpha_2 y \\ S_{1y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1^T y = 0 \\ B_2^T y = 0 \\ A^T y = -(2\alpha_2 + \lambda) y \end{cases} \quad \square$

Lemme 3.9. Il existe $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre $M_{\alpha_1 \alpha_2}$ associé à λ est équivalent à $(2(\alpha_2 - \alpha_1) + \lambda)$ est un mode non-observable de la paire (A, Q_1) .

Démonstration. $M_{\alpha_1 \alpha_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1 y \\ Ay - 2(\alpha_2 - \alpha_1)y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 y = 0 \\ Ay = (2(\alpha_2 - \alpha_1) + \lambda)y \end{cases} \quad \square$

Théorème 3.10 (Conditions nécessaires d'existence). Soit un sous-espace invariant de la matrice $M_{\alpha_1 \alpha_2}$, associé aux valeurs propres $\lambda_{\nu_1}, \dots, \lambda_{\nu_n}$. Des conditions nécessaires à l'existence d'une solution finie à l'équation algébrique de Riccati (3.115) sont d'éviter les vecteurs propres de $M_{\alpha_1 \alpha_2}$ des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.116)$$

C'est-à-dire, choisir $\lambda_{\nu_1}, \dots, \lambda_{\nu_n}$ telles que

1. $-(2\alpha_1 + \lambda_{\nu_i})$ est un mode commandable de (A, B_1) .
2. $-(2\alpha_2 + \lambda_{\nu_i})$ est un mode commandable de (A, B_1) ou (A, B_2) .
3. $(2(\alpha_2 - \alpha_1) + \lambda_{\nu_i})$ est un mode observable de (A, Q_1) .

Si K_1 , K_2 et P sont solutions constantes de (3.115), alors le spectre de $(A - S_1K_1 - S_2K_2)$ est inclus dans celui de $M_{\alpha_1\alpha_2}$.

3.5.3 Symétrie Hamiltonienne non apparente

De ce paragraphe, une propriété de symétrie de la distribution des valeurs propres de la matrice $M_{\alpha_1\alpha_2}$ est mise en valeur.

Théorème 3.11 (Symétrie). *La matrice $(M_{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_2 I_{4n})$ est Hamiltonienne.*

Démonstration. De façon à mettre en évidence la structure Hamiltonienne de la matrice $M_{\alpha_1\alpha_2}$, on pose les matrices

$$\tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2} = \begin{bmatrix} A + \alpha_2 I_n & -S_1 \\ -Q_1 & -A^T + (\alpha_2 - 2\alpha_1)I_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0_{n \times r_2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{m_2 \times n} \\ 0_{r_1 \times n} & R_{11}^{-1} B_1^T \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_{\alpha_1\alpha_2}$ vérifie

$$M_{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_2 I_{4n} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2} & -\tilde{B}R_{22}^{-1}\tilde{B}^T \\ -\tilde{C}^T \begin{bmatrix} I_{m_2} & 0_{m_2 \times r_1} \\ 0_{r_1 \times m_2} & R_{21} \end{bmatrix} \tilde{C} & -\tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2}^T \end{bmatrix}. \quad (3.117)$$

En notant $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0_{2n} & I_{2n} \\ -I_{2n} & 0_{2n} \end{bmatrix}$, (remarquons que $\mathcal{J}^T = -\mathcal{J} = \mathcal{J}^{-1}$), Il est possible de vérifier que

$$\mathcal{J}^T (M_{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_2 I_{4n}) \mathcal{J} = -(M_{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_2 I_{4n})^T$$

ce qui prouve que $(M_{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_2 I_{4n})$ est une matrice Hamiltonienne. Il est bien connu que pour une matrice Hamiltonienne si λ est une valeur propre, alors $-\lambda$ en est aussi une. Pour notre cas, la matrice $(M_{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_2 I_{4n})$ est Hamiltonienne réelle. De ce fait, la matrice $M_{\alpha_1\alpha_2}$ admet le point $(-\alpha_2; 0)$ comme centre de symétrie de la distribution des valeurs propres de $M_{\alpha_1\alpha_2}$ dans le plan complexe. $\square$

Remarque 3.12. *Cette propriété de symétrie ne dépend que de α_2 , le taux de pondération temporelle du leader. En particulier, elle est indépendante du terme α_1 , taux de pondération temporelle du suiveur. La structure hiérarchique du jeu autorise le leader à imposer son taux de pondération temporelle au système (3.98).*

En notant λ_k ($k \in \{1, \dots, 4n\}$) les $4n$ valeurs propres de $M_{\alpha_1\alpha_2}$, à une permutation près, nous avons

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda_{2n}) \leq -\alpha_2 \leq \operatorname{Re}(\lambda_{2n+1}) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda_{4n}). \quad (3.118)$$

3.5.4 Conditions suffisantes pour obtenir une stricte α_2 -stabilité

Dans le cas particulier $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, la relation

$$\operatorname{Re}(\lambda_{2n}) < 0 < \operatorname{Re}(\lambda_{2n+1}), \quad (3.119)$$

est imposée si [AKB85],

- les paires (C_1, A) et (C_2, A) sont détectables,
- la paire (A, B_1) est stabilisable.

L'objectif ici est de déterminer des conditions suffisantes pour assurer

$$\operatorname{Re}(\lambda_{2n}) < -\alpha_2 < \operatorname{Re}(\lambda_{2n+1}). \quad (3.120)$$

pour toute valeur de α_1 et de α_2 .

Théorème 3.13 (Stricte α_2 -stabilité). *Pour tout couple $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, la relation (3.120) est vérifiée sous les conditions suffisantes suivantes*

- i. la paire $(C_1, A + (2\alpha_1 - \alpha_2)I_n)$ n'admet pas de mode inobservable imaginaire,
 - ii. la paire $(C_2, A + \alpha_2 I_n)$ n'admet pas de mode inobservable imaginaire,
 - iii. la paire $(A + (2\alpha_1 - \alpha_2)I_n, B_1)$ n'admet pas de mode incommandable imaginaire,
 - iv. et de plus, si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ le triplet $(A + \alpha_2 I_n, B_2, C_1)$ n'admet pas de zéro de transmission imaginaire.
- Il est rappelé ici que $m_1 \leq r_2$ est imposé.

La preuve nécessite l'utilisation de deux lemmes.

Lemme 3.14. *En supposant que $R > 0$ et $W > 0$, la matrice Hamiltonienne*
$$\begin{bmatrix} P & -DR^{-1}D \\ -E^T W E & -P^T \end{bmatrix}$$
 n'admet pas de valeur propre imaginaire si

- la paire (E, P) n'admet pas de mode inobservable imaginaire.
- la paire (P, D) n'admet pas de mode incommandable imaginaire.

Ce lemme est bien connu dans le cadre du problème linéaire-quadratique classique. On peut trouver une preuve, par exemple dans [AKFIJ03, p. 59].

Lemme 3.15 (Inégalité du rang d'un produit de matrice). *Soit U_1 et U_2 des matrices de tailles $q \times w$ et $w \times p$. Alors en notant $\rho(U_1)$ le rang de la matrice U_1 ,*

$$\rho(U_1) + \rho(U_2) - w \leq \rho(U_1 U_2) \leq \min(\rho(U_1), \rho(U_2)). \quad (3.121)$$

Notons qu'en anglais, cette inégalité s'appelle "l'inégalité de Sylvester".

Une démonstration de ce lemme se trouve, par exemple, dans [Che84].

Démonstration. Afin d'éviter les valeurs propres imaginaires de la matrice Hamiltonienne $(M_{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_2 I_{4n})$, le lemme 3.14 et les tests d'observabilité et de commandabilité de Hautus sont utilisés. La matrice $(M_{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_2 I_{4n})$ définie par (3.117) n'admet pas de valeur propre imaginaire si pour tout $\omega \in \mathbb{R}$

$$-\rho \left(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2} - i\omega I_{2n} & \tilde{B} \end{bmatrix} \right) = 2n,$$

$$-\rho \left(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2} - i\omega I_{2n} \\ \tilde{C} \end{bmatrix} \right) = 2n.$$

La première égalité est d'abord étudiée.

$$\begin{aligned} \rho \left(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2} - i\omega I_n \\ \tilde{C} \end{bmatrix} \right) &= \rho \left(\begin{bmatrix} A + \alpha_2 I_n - i\omega I_n & -B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \\ -Q_1 & -A^T + (\alpha_2 - 2\alpha_1 - i\omega) I_n \\ C_2 & 0_n \\ 0_{r_1 \times n} & R_{11}^{-1} B_1^T \end{bmatrix} \right) \\ &= \rho \left(\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} A + \alpha_2 I_n - i\omega I_n \\ C_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_n \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -Q_1 \\ 0_{r_1 \times n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -A^T + (\alpha_2 - 2\alpha_1 - i\omega) I_n \\ R_{11}^{-1} B_1^T \end{bmatrix} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Les conditions ii) et iii) du théorème 3.13 mènent à $\rho \left(\left[\begin{array}{c} \tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2} - i\omega I_n \\ \hline \tilde{C} \end{array} \right] \right) = 2n$.

Maintenant la condition sur la paire $(\tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2} - i\omega I_{2n}, \tilde{B})$ est étudiée.

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{A}_{\alpha_1, \alpha_2} - i\omega I_{2n} \\ \hline \tilde{B} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A + (\alpha_2 - i\omega)I_n & -S_1 & B_2 \\ -Q_1 & -A^T + (\alpha_2 - 2\alpha_1 - i\omega)I_n & 0_{n \times r_2} \end{array} \right] = U_1 U_2,$$

avec

$$U_1 = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n \times m_1} \\ \hline 0_n & -C_1^T \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{2n \times (2n + m_1)}, \quad (3.122)$$

et

$$U_2 = \left[\begin{array}{cc|c} A + (\alpha_2 - i\omega)I_n & B_2 & -S_1 \\ C_1 & 0_{m_1 \times r_2} & 0_{m_1 \times n} \\ \hline 0_n & 0_{n \times r_2} & I_n \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(2n + m_1) \times 2n}. \quad (3.123)$$

La condition i) dans le théorème 3.13 donne $\rho(U_1) = 2n$, et la condition iv) donne $\rho(U_2) = 2n + m_1$ (en se souvenant que $m_1 \leq r_2$).

L'inégalité de Sylvester (lemme 3.15) permet d'écrire $\rho(U_1 U_2) = 2n$.

Remarque 3.16. Il est à noter que dans le cas $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, la condition iv) sur le zéro de transmission est superflue. La matrice $\tilde{A}_{\alpha, \alpha}$ est Hamiltonienne. Par le lemme 3.14, les deux conditions $(C_1, A + \alpha I_n)$ n'admet pas de mode inobservable imaginaire et $(A + \alpha I_n)$ n'admet pas de mode incommandable imaginaire sont suffisantes pour garantir que $\tilde{A}_{\alpha, \alpha} - i\omega I_{2n}$ est inversible pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et que $\rho \left(\left[\begin{array}{c} \tilde{A}_{\alpha, \alpha} - i\omega I_{2n} \\ \hline \tilde{B} \end{array} \right] \right) = 2n$, sans autre considération sur le triplet $(A + \alpha I_n, B_2, C_1)$. $\square$

Remarque 3.17. La condition iv) peut être interprétée en théorie des jeux. Ce triplet correspond à un couplage entre les joueurs. L'action du leader (matrice B_2) sur le système (matrice A) peut être vue par le suiveur (matrice C_1). En d'autres termes, le leader est capable d'imposer sa commande désirée au suiveur, grâce à sa position hiérarchique privilégiée.

Remarque 3.18. Il est à noter, même pour α_1 et α_2 quelconques, qu'aucune hypothèse sur la paire (A, B_2) n'est faite. La commandabilité ou simplement la stabilisabilité du leader n'influence pas ce résultat. Preuve encore du rôle privilégié du leader.

3.6 Conclusion

Les différents aspects de robustesse des commandes issues de la stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle ouverte sont étudiés dans ce chapitre. Après avoir donné les conditions nécessaires, pour le suiveur et pour le leader, permettant de déterminer ces commandes. Il est montré comment résoudre les équations couplées de Riccati associées. Même si rien n'assure l'existence de solutions menant à un asservissement stable et réel, généralement de telles solutions existent en grand nombre. La sélection de la meilleure solution en terme de robustesse est assez délicate et ne peut se faire que numériquement pour l'instant. Néanmoins, l'utilisation de la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte sur des applications comme la suspension magnétique est pourtant un bon compromis, par rapport aux commandes classiques. Enfin, ce chapitre se termine par une étude détaillée des propriétés de la matrice caractéristique dans le cas plus général des critères incluant des

pondérations temporelles sous forme exponentielle. Ce chapitre achève l'étude avec une structure en boucle ouverte dans ce mémoire.

Chapitre 4

Stratégie de Nash en boucle fermée

4×142857
 $= 571428$

Un élément essentiel dans le domaine de la commande robuste est la commande de type mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ [ZGBD94, DGKF89, DZGB94, Doy78]. Ce type de commande consiste à minimiser un critère sous la forme d'une norme $\mathcal{H}_2$, sous une contrainte traduite par une norme de type $\mathcal{H}_\infty$. La commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ sera présentée plus en détail dans le chapitre 6. La recherche de cette commande se formulant comme un problème de décision multicritère, une idée assez naturelle est d'utiliser le cadre de la théorie des jeux. Limebeer, Anderson et Hendel dans [LAH94] sont les premiers à traiter ce problème dans ce cas en utilisant la stratégie de Nash.

L'idée générale, reprise dans [FS97] et [CZ01] est de considérer un jeu différentiel à deux joueurs de somme non nulle. Un joueur traduit l'action de la commande à appliquer et son critère correspond à la norme $\mathcal{H}_2$ qu'il faut minimiser. L'autre joueur traduit l'action de la perturbation et son critère correspond à la norme $\mathcal{H}_\infty$, qu'il cherche à maximiser. À l'équilibre, cette perturbation est donc celle dans le pire des cas dans le sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$.

En revanche, les "bonnes" propriétés pour la commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ dans [LAH94] ne sont pas obtenues à l'aide de la structure d'information en boucle ouverte, mais grâce à la structure d'information en boucle fermée. La stratégie de Nash en boucle fermée a donc une utilisation directe dans le problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$, en étant une de ses reformulations possibles.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle fermée. La détermination des commandes associées à un équilibre de cette stratégie mène à la résolution d'équation de type Riccati d'un nouveau genre, où le couplage des termes quadratiques est très fortement non-linéaire. Ces équations sont difficiles à résoudre. Après la mise en place de ces équations, et la présentation des principales propriétés de leurs solutions, ce chapitre s'attache tout particulièrement à des algorithmes numériques itératifs permettant de résoudre ces équations.

4.1 Intérêt et mise en équations

Le cadre de la structure d'information en boucle ouverte pour la stratégie de Nash conduit à des équations de type Riccati couplées qui peuvent se réécrire sous forme d'une seule équation de Riccati rectangulaire. Cette équation de Riccati rectangulaire est relativement aisée à résoudre dans le cas où elle est algébrique. Néanmoins comme le chapitre précédent l'a mis en valeur, cette facilité de résolution se paye en manque de propriétés intéressantes.

En revanche, la structure d'information étudiée, en boucle fermée pour la stratégie de Nash mène à des équations de Riccati fortement couplées qui sont beaucoup plus ardues à résoudre. Néanmoins, une fois ces équations résolues, les solutions sont très riches en propriétés.

Cette richesse en propriétés a généré un nombre important de publications dans la littérature sur cette stratégie de Nash en boucle fermée. Dans les premières, on peut citer celles de Starr et Ho [SH69b, SH69a], celle de Foley et Schmitendorf [FS71] et celle de Lukes et Russel [LR71]. Aussi le cas linéaire quadratique est particulièrement étudié par Krikelis et Rekasius [KR71]. En particulier dans cet article, la première méthode de type Newton est présentée pour résoudre les équations couplées de type Riccati algébriques issues de la stratégie de Nash en boucle fermée.

Comme dans le chapitre précédent, nous suivons l'approche de Starr et Ho [SH69b, SH69a] pour déterminer les commandes associées à un équilibre de Nash avec une structure d'information en boucle fermée. Considérons un jeu différentiel à N joueurs, où le joueur " i " ($i = 1, 2, \dots, N$) doit déterminer une commande $u_i(t)$ pour minimiser le critère J_i donné par

$$J_i = K_{if}(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) dt, \quad (4.1)$$

où $x_f = x(t_f)$ et sous la contrainte

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)). \quad (4.2)$$

La fonction f est supposée continûment dérivable par rapport à chacune de ses variables. Dans la suite, on se limite à la recherche de commandes $u_i^*(t, \eta_i(t)) = u_i^*(t, x(t))$ qui soient continûment dérivables par rapport à chacune de ses variables. De ce fait, nous ne tenons pas compte des commandes discontinues en l'état et donc des commandes de type représsailles. Ce type de commande discontinue permet au leader de forcer le suiveur à jouer la commande qu'il souhaite.

Le Hamiltonien associé au joueur " i " ($i = 1, 2, \dots, N$) s'écrit

$$H_i(x, u_1, \dots, u_N, \psi_i, t) = L_i(x, u_1, \dots, u_N, t) + \psi_i^T f(x, u_1, \dots, u_N, t), \quad (4.3)$$

où $\psi_i(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur colonne d'état adjoint du problème d'optimisation du joueur " i ", associé à la contrainte dynamique (4.2). Notons que ce problème d'optimisation étant de type normal, le critère instantané L_i a une pondération normalisée à 1 dans le Hamiltonien $H_i(t)$. Les conditions nécessaires d'un équilibre de Nash sont données dans [SH69b]

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial x} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{\partial u_j^*(x, t)}{\partial x} \right)^T \frac{\partial H_i(t)}{\partial u_j}, \quad (4.4)$$

avec comme condition de transversalité

$$\psi_i(t_f) = \frac{\partial K_{if}(x_f, t_f)}{\partial x_f}, \quad (4.5)$$

et la commande $u_i(t) = u_i^*(x, t)$ minimise

$$H_i(x(t), u_1^*(x, t), \dots, u_{i-1}^*(x, t), u_i, u_{i+1}^*(x, t), \dots, u_N^*(x, t), \psi_i(t), t). \quad (4.6)$$

Par rapport à un problème de commande optimale classique monocritère, le terme de sommation dans l'équation traduit la prise en compte par le joueur " i " des réactions des autres joueurs. Ainsi,

pour $N = 1$, ce terme disparaît, comme en boucle ouverte. Il faut donc noter que pour $N = 1$ (problème LQ), les notions de structure d'information en boucle ouverte ou en boucle fermée coïncident. La détermination des commandes associées passe par la résolution d'une seule équation de Riccati standard. Néanmoins ici pour un nombre de joueurs $N > 1$, il faut prendre en compte ces termes de couplages entre les commandes, comme les commandes optimales sont fonctions du temps et aussi de la mesure instantanée de l'état du système $u_i^*(x, t)$. Donc ici *a priori* $\frac{\partial u_i^*(x, t)}{\partial x} \neq 0$

Ces conditions nécessaires générales sont appliquées au cas des systèmes linéaires-quadratiques multicritères. La dynamique est donc de la forme

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^N B_i u_i, \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.7)$$

et les critères quadratiques sans termes croisés

$$J_i = \frac{1}{2} x_f^T K_{if} x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T(t) Q_i x(t) + \sum_{j=1}^N u_j^T(t) R_{ij} u_j(t) \right) dt. \quad (4.8)$$

A partir de la condition (4.6), on obtient l'expression de la commande optimale en fonction des vecteurs d'état adjoints

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T \psi_i(t), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.9)$$

Les conditions nécessaires se réécrivent alors en

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -Q_i x - A^T \psi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial x} \right)^T \frac{\partial H_i}{\partial u_j} \quad (4.10)$$

$$= -Q_i x - A^T \psi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^T B_j R_{jj}^{-1} (-R_{ij} + R_{jj}) R_{jj}^{-1} B_j^T \psi_j \quad (4.11)$$

$$= -Q_i x - A^T \psi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^T (-S_{ij} + S_{jj}) \psi_j \quad (4.12)$$

$$= -Q_i x - A^T \psi_i + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^T (-S_{ij} + S_{jj}) \psi_j, \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

avec $S_{ij} = B_j R_{jj}^{-1} R_{ij} R_{jj}^{-1} B_j^T$ et $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$. Ces équations sont associées aux conditions de transversalité (comme l'extrémité $x(t_f) = x_f$ est libre)

$$\psi_i(t_f) = K_{if} x_f. \quad (4.15)$$

Les conditions aux limites se résument de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ \psi_1(t_f) \\ \vdots \\ \psi_N(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ K_{1f} x_f \\ \vdots \\ K_{Nf} x_f \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Il s'agit donc d'un problème dit "aux deux bouts" comme les conditions aux limites portent en même temps sur les conditions initiales et sur les conditions finales.

La section suivante indique comment résoudre ce problème grâce à des équations couplées de type Riccati.

4.2 Equations couplées de type Riccati d'un autre genre

Les conditions nécessaires (4.14) sont difficiles à résoudre, à cause de la présence des termes $\frac{\partial \psi_j}{\partial x}$. Même si la possibilité de résolution par des commandes non-linéaires a été envisagée [Baş74], comme dans le cas monocrère ou des stratégies en boucle ouverte, il est fait une hypothèse de simplification pour restreindre la classe d'étude. Il est supposé que les vecteurs d'état adjoints sont linéaires par rapport au vecteur d'état. On pose alors

$$\psi_i(t) = K_i(t)x(t), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.17)$$

Ici pour des raisons d'allègement des écritures, la même notation " K_i " est utilisée que pour la stratégie en boucle ouverte. A part au moment de la discussion entre boucle ouverte et boucle fermée, il n'y a pas de confusion sur l'interprétation, en fonction de la partie boucle ouverte ou boucle fermée.

En injectant cette forme dans les équations nécessaires, ces équations se reformulent en $\forall i = 1, 2, \dots, N$

$$\dot{K}_i = -K_i A - A^T K_i - Q_i - \sum_{j=1}^N (K_j S_{ij} K_j - K_i S_j K_j - K_j S_j K_i), \quad K_i(t_f) = K_{if}. \quad (4.18)$$

Les commandes optimales associées à la stratégie de Nash en boucle fermée sont alors de la forme d'un retour d'état mesuré (en accord avec la définition de la structure d'information en boucle fermée)

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t)x(t). \quad (4.19)$$

Il est possible de trouver plus de détails dans [FJAK96].

Les couplages de type quadratique qui sont présents dans (4.18) sont fortement non-linéaires. Le lemme de Radon ne permet pas de réécrire ces équations sous la forme d'une seule équation de Riccati de type rectangulaire. A notre connaissance, il n'existe pas de méthode générale et systématique pour résoudre ces équations, comme les équations de Riccati couplées de type boucle ouverte.

Certains résultats existent cependant sur ces équations. Il est possible de référer à [AKFIJ03] afin d'obtenir des informations plus détaillées. En particulier dans [LR71], Lukes et Russel étudient l'unicité d'une commande par retour d'état linéaire (si elle existe). La possible existence de commandes non-linéaires a été étudiée dans [Baş74, BO95]. Des conditions suffisantes pour l'existence locale des solutions de (4.18) sur un horizon fini sont obtenues dans [PC79b, PC80]. On peut citer aussi [PO84]. Diverses méthodes de résolution ont été proposées. Certaines seront détaillées dans la suite de ce chapitre. Ici nous ne citerons que l'approche par le portrait de phase dans le cas scalaire de [WSE95], ou bien l'approche par séries dans [CC71, OP77].

Dans le cas d'horizon infini pour les critères quadratiques (4.8), c'est-à-dire qu'à t_0 fixé, $t_f \rightarrow +\infty$, la méthode de résolution est identique. Néanmoins, pour les mêmes raisons citées pour le passage à un horizon infini pour les stratégies en boucle ouverte, le coût terminal n'a plus de sens dans les critères (4.8). Les conditions de transversalité (4.15) ne tiennent plus. Les équations différentielles couplées

de type Riccati (4.18) deviennent algébriques et il devient possible de ne rechercher que les solutions constantes

$$0_n = -K_i A - A^T K_i - Q_i - \sum_{j=1}^N (K_j S_{ij} K_j - K_i S_j K_j - K_j S_j K_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.20)$$

4.3 Propriétés des solutions des équations de type Riccati

Les équations différentielles couplées de type Riccati issues d'une stratégie de Nash en boucle fermée (4.18) présentent certaines propriétés intéressantes, qui en particulier ne sont pas vérifiées dans le cas général pour la stratégie de Nash en boucle ouverte.

En premier lieu, il est possible de voir que les équations différentielles (4.18) sont symétriques en K_i . C'est-à-dire que si les $K_i(t)$ sont solutions de (4.18), alors $K_i^T(t)$ en sont aussi solutions. A la condition supplémentaire que les K_{if} soient symétriques, les solutions de (4.18) sont symétriques. Il en sera donc de même pour les solutions des équations algébriques (4.20), étant donné que les conditions terminales K_{if} n'interviennent plus.

En second lieu, il est possible de faire un rapprochement entre les valeurs de $K_i(t_0)$ et les valeurs optimales des critères J_i^* , comme pour le problème d'optimisation LQ (à un seul critère).

Théorème 4.1 ([FJAK96]). *Soit $K_i(t)$ des solutions des équations différentielles de type Riccati (4.18). Les valeurs des critères optimaux sont alors données par*

$$J_i^* = \frac{1}{2} x_0^T K_i(t_0) x_0. \quad (4.21)$$

Démonstration. Pour plus de clarté, la dépendance en temps des grandeurs est sous-entendue. En utilisant les équations différentielles (4.18), on obtient

$$\frac{d}{dt} [x^T K_i x] = \dot{x}^T K_i x + x^T \dot{K}_i x + x^T K_i \dot{x} \quad (4.22)$$

$$= x^T \left[\left(A^T - \sum_{j=1}^N K_j S_j \right) K_i + K_i \left(A - \sum_{j=1}^N S_j K_j \right) - K_i A - A^T K_i - Q_i - \sum_{j=1}^N (K_j S_{ij} K_j - K_i S_j K_j - K_j S_j K_i) \right] x \quad (4.23)$$

$$= -x^T \left(Q_i + \sum_{j=1}^N K_j S_{ij} K_j \right) x. \quad (4.24)$$

En intégrant cette égalité, il vient

$$x^T(t_f) K_{if} x(t_f) - x^T(t_0) K_i(t_0) x(t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [x^T K_i x] dt \quad (4.25)$$

$$= - \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T \left[Q_i + \sum_{j=1}^N K_j R_{ij} K_j \right] x \right) dt \quad (4.26)$$

L'identification de J_i^* donne alors

$$J_i^* = \frac{1}{2} x^T(t_f) K_{if} x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T \left[Q_i + \sum_{j=1}^N K_j R_{ij} K_j \right] x \right) dt = \frac{1}{2} x_0^T K_i(t_0) x_0. \quad (4.27)$$

□

Ce lien est d'une grande importance. Effectivement il permet d'exprimer analytiquement le critère pour les équilibres de Nash en boucle fermée directement à partir de la valeur intégrée des $K_i(t_0)$. Pour les systèmes d'horizon infini, les solutions des équations algébriques présentent la même propriété. Cette propriété est la généralisation directe de l'expression du critère optimal pour le problème classique LQ. Elle permettra aussi de pouvoir plus facilement intégrer dans le modèle la valeur des critères par l'utilisation des équations (4.20) dans le cas d'horizon infini. Si l'on interprète la valeur optimale des critères comme le grammien d'observabilité du système, l'équation de type Riccati (4.20) peut alors être considérée comme une équation de Lyapunov implicite.

On notera que pour la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle ouverte, il n'existe pas à notre connaissance d'expression simple générale pour exprimer la valeur des critères. Le plus simple en pratique est alors de déterminer les matrices K_i de la stratégie de Nash en boucle ouverte et de calculer le grammien d'observabilité associé aux critères. Cependant ici l'équation de Lyapunov associée à ce grammien, ne coïncide pas avec les équations (4.20).

4.4 Différence entre les stratégies de Nash en boucle ouverte et en boucle fermée

Il est clair en observant les équations de type Riccati associées à des stratégies de Nash en boucle fermée (4.18) et en boucle ouverte (2.18) que les solutions ne peuvent être que différentes dans le cas général. Ceci montre la différence entre les deux types de stratégies. Cependant ce n'est pas l'unique différence.

Une autre différence concerne le champ d'application de chaque stratégie. Contrairement à la boucle ouverte, où les joueurs ne peuvent pas changer leur commande dans l'intervalle $[t_0, t_f]$, en boucle fermée, les joueurs peuvent interagir de façon permanente sur cet intervalle de temps. Les joueurs sont alors considérés comme intelligents, dans le sens où ils sont capables d'adapter leur commande en fonction de l'état du système.

Le nombre de solutions liées à ces équations n'est pas identique non plus. Effectivement en stratégie de Nash en boucle ouverte, et sous la condition suffisante qu'une solution existe, le problème admet une solution unique [Bag84]. Ce qui n'est pas le cas en boucle fermée, même dans le cadre linéaire-quadratique [Baş77, Meh82].

On peut noter qu'une stratégie de Nash en boucle ouverte peut être considérée comme une stratégie en boucle fermée particulière où la mesure de l'état est limitée à l'instant initial t_0 . En effet, la structure d'information en boucle ouverte est incluse dans la structure d'information en boucle fermée. Une stratégie en boucle ouverte est aussi une stratégie en boucle fermée, mais l'inverse n'est pas vrai [San74].

Il faut aussi lutter contre une mauvaise intuition. Effectivement, avoir une stratégie en boucle fermée ne veut pas dire nécessairement que les valeurs des critères vont être améliorées [Wit71]. Il existe même des cas où la perte d'information pour un joueur entraîne une amélioration de son critère [WC79].

4.5 Algorithmes de résolution numérique des équations de Riccati de Nash en boucle fermée

Les équations différentielles couplées de type Riccati de la forme (4.18) ne sont pas à notre connaissance des équations différentielles que l'on peut résoudre de façon systématique, mis à part une mé-

thode numérique d'intégration. En revanche, il existe plusieurs algorithmes numériques qui permettent de résoudre de façon itérative, les équations algébriques (4.20) associées. Cette partie est consacrée à l'étude de ces algorithmes. Pour des raisons de lisibilité évidentes, l'étude se limite au cas de jeux différentiels linéaires-quadratiques de somme non nulle à deux joueurs ($N = 2$) sur un horizon infini. Les algorithmes qui vont suivre ont donc comme objectif de résoudre les deux équations couplées algébriques de type Riccati

$$\mathcal{N}_1(K_1, K_2) = 0_n, \quad (4.28)$$

$$\mathcal{N}_2(K_1, K_2) = 0_n. \quad (4.29)$$

où

$$\mathcal{N}_1(K_1, K_2) = -A^T K_1 - K_1 A - Q_1 + K_1 S_1 K_1 + K_1 S_2 K_2 + K_2 S_2 K_1 - K_2 S_{12} K_2, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{N}_2(K_1, K_2) = -A^T K_2 - K_2 A - Q_2 + K_2 S_2 K_2 + K_2 S_1 K_1 + K_1 S_1 K_2 - K_1 S_{21} K_1. \quad (4.31)$$

4.5.1 Algorithmes "classiques"

La difficulté de résolution des équations algébriques couplées (4.28) et (4.29) provient principalement de certains termes quadratiques. Le point commun des algorithmes suivants, est d'éviter les termes quadratiques "gênants pour la résolution", en les fixant à l'itérée précédente et en injectant ces termes quadratiques "fixes" soit dans les termes constants Q_i , soit dans les termes linéaires $A^T K_i$ ou $K_i A$. Il faut signaler que ce constat est *a posteriori*. Rien n'indique qu'il est à l'origine de la mise au point de ces algorithmes.

Le reste du chapitre présente donc quatre algorithmes différents. Les trois premiers indiqués ci-dessous sont déjà existants. Le quatrième et dernier a été élaboré durant cette thèse.

Algorithme 1 : l'algorithme de Gajic *et al.* [GS93], le plus ancien utilise à chaque itérée la résolution d'équations découplées de type Lyapounov.

Algorithme 2 : le deuxième algorithme est dû à Abou-Kandil *et al.* [FJAK96]. Il permet la résolution de (4.28) et (4.29), en utilisant la résolution en parallèle de deux équations découplées de type Riccati standards.

Algorithme 3 : le troisième est dû à Cherfi *et al.* [CCAK05]. Il permet une augmentation de la vitesse de convergence de l'algorithme 2, en réinjectant directement le calcul de K_1 dans celui de K_2 à la même itérée. Les équations de Riccati standard sont toujours découplées.

Algorithme 4 : ce dernier algorithme a été élaboré durant cette thèse [JPAK06]. Il est fondé sur une interprétation de la théorie des jeux en introduisant la notion de manque de confiance. Son intérêt réside dans l'utilisation à chaque étape de la résolution d'une équation de type Riccati rectangulaire. Cela permet de conserver un couplage entre les équations. Deux versions seront données en s'inspirant des algorithmes 2 et 3 : parallèle et réinjecté.

Pour plus de lisibilité, les mêmes notations seront utilisées pour présenter les divers algorithmes, en particulier le numéro de l'itérée sera indiqué en exposant entre parenthèses (exemple $K_1^{(c)}$ est la valeur de l'itérée " $c \in \mathbb{N}$ " de la matrice K_1). Les algorithmes possèdent la même structure, tout d'abord une phase d'initialisation, l'élaboration des solutions à chaque itérée, et l'évaluation de l'erreur pour obtenir le critère d'arrêt.

4.5.1.1 Algorithme de Gajic *et al.*

Cet algorithme a été publié par Gajic et Shen [GS93]. Il propose d'approcher les équations couplées de type Riccati (4.28) et (4.29) par des équations découplées de type Lyapounov à chaque itération.

Algorithme 1 (Gajic *et al.*). Fixer un niveau d'erreur maximale ϵ .

- Sélectionner les valeurs initiales $K_1^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $K_2^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$A - S_1 K_1^{(0)} - S_2 K_2^{(0)} \quad (4.32)$$

soit stable.

- A chaque itérée $c \in \mathbb{N}^*$, on obtient les solutions $K_1^{(c)}$ et $K_2^{(c)}$ de la manière suivante. On résout l'équation de type Lyapounov standard, d'inconnue $K_1^{(c)}$

$$\begin{aligned} 0_n &= \left(A - S_1 K_1^{(c-1)} - S_2 K_2^{(c-1)} \right)^T K_1^{(c)} + K_1^{(c)} \left(A - S_1 K_1^{(c-1)} - S_2 K_2^{(c-1)} \right) \\ &\quad K_1^{(c-1)} S_1 K_1^{(c-1)} + K_2^{(c-1)} S_{12} K_2^{(c-1)} + Q_1. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ensuite on résout en parallèle, l'équation de type Lyapounov standard, d'inconnue $K_2^{(c)}$

$$\begin{aligned} 0_n &= \left(A - S_1 K_1^{(c-1)} - S_2 K_2^{(c-1)} \right)^T K_2^{(c)} + K_2^{(c)} \left(A - S_1 K_1^{(c-1)} - S_2 K_2^{(c-1)} \right) \\ &\quad K_2^{(c-1)} S_2 K_2^{(c-1)} + K_1^{(c-1)} S_{21} K_1^{(c-1)} + Q_2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

- Le calcul de l'erreur se fait à chaque itérée c en évaluant la quantité $(\mathcal{N}_1(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{N}_2(\cdot, \cdot)$ étant définis par les relations (4.30) et (4.31)

$$\epsilon^{(c)} = \max \left\{ \left\| \mathcal{N}_1 \left(K_1^{(c)}, K_2^{(c)} \right) \right\|_\infty, \left\| \mathcal{N}_2 \left(K_1^{(c)}, K_2^{(c)} \right) \right\|_\infty \right\}. \quad (4.35)$$

L'algorithme s'arrête à la condition

$$\epsilon^{(c)} \leq \epsilon. \quad (4.36)$$

Cet algorithme approche les équations de Riccati (possédant des termes quadratiques) par des équations de type Lyapounov, qui sont affines. Ici l'ensemble des termes quadratiques des équations (4.28) et (4.29) sont modifiés avec les itérées précédentes, de façon à les intégrer soit dans les termes linéaires, soit aux termes constants. L'algorithme n'a pas un bon comportement. L'approche d'équations quadratiques par des équations affines est trop grossière.

Gajic impose [GS93] que les paires (A, B_i) et (Q_i, A) ($i = 1, 2$) soient stabilisables et détectables respectivement. Cela assure l'existence de conditions initiales $K_1^{(0)}$ et $K_2^{(0)}$ vérifiant (4.32). Des conditions fortes doivent être imposées de façon à garantir la stabilité de la matrice $(A - S_1 K_1^{(c)} - S_2 K_2^{(c)})$ à chaque itérée (cf. [Che05] pour plus de détails à ce sujet).

Cherfi, dans sa thèse [Che05] a proposé certaines conditions suffisantes, mais fortes, qui permettent d'assurer la convergence de cet algorithme. Ces conditions correspondent à des conditions de monotonie des solutions $K_1^{(c)}$ et $K_2^{(c)}$. On peut néanmoins très souvent observer une convergence sans monotonie des itérées (convergence oscillante amortie), même si ces conditions ne sont pas vérifiées.

De plus aucune preuve de convergence dans les cas relativement généraux n'existe. Pour toutes ces raisons, nous n'aborderons plus cet algorithme dans la suite de la thèse.

4.5.1.2 Algorithme de Abou-Kandil et al.

Cet algorithme a été publié dans [FJAK96]. Une version détaillée peut se trouver dans [AKFIJ03]. Il propose d'utiliser des équations de type Riccati standard découplées pour approcher les équations (4.28) et (4.29).

Algorithme 2 (Abou-Kandil et al.). Fixer un niveau d'erreur maximale ϵ .

- Sélectionner les valeurs initiales $K_1^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $K_2^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- A chaque itérée $c \in \mathbb{N}^*$, on obtient les solutions $K_1^{(c)}$ et $K_2^{(c)}$ de la manière suivante. On résout en parallèle les deux équations de Riccati standard, d'inconnues $K_1^{(c)}$ pour la première et $K_2^{(c)}$ pour la deuxième.

$$\begin{aligned} 0_n &= \left(A - S_2 K_2^{(c-1)} \right)^T K_1^{(c)} + K_1^{(c)} \left(A - S_2 K_2^{(c-1)} \right) \\ &\quad - K_1^{(c)} S_1 K_1^{(c)} + K_2^{(c-1)} S_{12} K_2^{(c-1)} + Q_1, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} 0_n &= \left(A - S_1 K_1^{(c-1)} \right)^T K_2^{(c)} + K_2^{(c)} \left(A - S_1 K_1^{(c-1)} \right) \\ &\quad - K_2^{(c)} S_2 K_2^{(c)} + K_1^{(c-1)} S_{21} K_1^{(c-1)} + Q_2. \end{aligned} \quad (4.38)$$

- Le calcul de l'erreur se fait à chaque itérée c en évaluant la quantité $(\mathcal{N}_1(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{N}_2(\cdot, \cdot)$ étant définis par les relations (4.30) et (4.31)

$$\epsilon^{(c)} = \max \left\{ \left\| \mathcal{N}_1 \left(K_1^{(c)}, K_2^{(c)} \right) \right\|_\infty, \left\| \mathcal{N}_2 \left(K_1^{(c)}, K_2^{(c)} \right) \right\|_\infty \right\}. \quad (4.39)$$

L'algorithme s'arrête à la condition

$$\epsilon^{(c)} \leq \epsilon. \quad (4.40)$$

Comme choix naturel pour les valeurs initiales $K_1^{(0)}$ et $K_2^{(0)}$, nous proposons ici, dans une mesure de simplification

$$K_1^{(0)} = 0_n, \quad K_2^{(0)} = 0_n. \quad (4.41)$$

Les conditions naturelles indiquées dans [AKFIJ03, p. 341] : les solutions définies positives de

$$-A^T K_1^{(0)} - K_1^{(0)} A - Q_1 + K_1^{(0)} S_1 K_1^{(0)} = 0_n, \quad (4.42)$$

$$-A^T K_2^{(0)} - K_2^{(0)} A - Q_2 + K_2^{(0)} S_2 K_2^{(0)} = 0_n, \quad (4.43)$$

ne sont que les valeurs obtenues après une itérée.

Une condition est imposée pour trouver à chaque itération des valeurs $K_1^{(c)}$ et $K_2^{(c)}$ définies positives à chaque itérée " c " : les paires (A, B_1) et (A, B_2) sont stabilisables. Cette condition faible est valable pour toutes les itérées (indépendante de l'indice de l'itération " c "), contrairement à l'algorithme 1, qui nécessite une vérification à chaque itérée.

Aucune preuve de convergence de cet algorithme n'existe à notre connaissance. Même si en pratique, la convergence est vérifiée dans la plupart des cas. Une preuve de convergence ne semble effectivement pas facile à déterminer, si elle existe. Comme le montreront certains exemples numériques, les équations de Riccati algébriques issues de la stratégie de Nash en boucle fermée peuvent admettre plusieurs solutions. La non-unicité de ces solutions n'aide pas à la construction d'une preuve de convergence des algorithmes.

4.5.1.3 Algorithme de Cherfi et al.

Cet algorithme a été publié dans [CCAK05]. Il est possible de trouver plus de détails dans la thèse [Che05]. Il ne s'agit que d'une modification de l'algorithme 2. Au lieu de traiter les équations de Riccati standards en parallèle, le résultat de la première est réinjecté dans la deuxième avant de la résoudre. Comme nous le montrerons sur divers exemples, cette modification permet quasiment de diviser par deux le nombre d'itérations pour le même niveau d'erreur ϵ . L'initialisation, à cause de cette réinjection n'est nécessaire que sur $K_2^{(0)}$.

Algorithme 3 (Cherfi et al.). Fixer un niveau d'erreur maximale ϵ .

- Sélectionner la valeur initiale $K_2^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- A chaque itérée $c \in \mathbb{N}^*$, on obtient les solutions $K_1^{(c)}$ et $K_2^{(c)}$ de la manière suivante. On résout d'abord l'équation de Riccati standard, d'inconnue $K_1^{(c)}$

$$\begin{aligned} 0_n = & \left(A - S_2 K_2^{(c-1)} \right)^T K_1^{(c)} + K_1^{(c)} \left(A - S_2 K_2^{(c-1)} \right) \\ & - K_1^{(c)} S_1 K_1^{(c)} + K_2^{(c-1)} S_{12} K_2^{(c-1)} + Q_1, \end{aligned} \quad (4.44)$$

A ce moment $K_1^{(c)}$ est fixé, et peut être réinjecté, comme mise à jour dans l'autre équation de Riccati standard, de seule inconnue $K_2^{(c)}$

$$\begin{aligned} 0_n = & \left(A - S_1 K_1^{(c)} \right)^T K_2^{(c)} + K_2^{(c)} \left(A - S_1 K_1^{(c)} \right) \\ & - K_2^{(c)} S_2 K_2^{(c)} + K_1^{(c)} S_{21} K_1^{(c)} + Q_2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

- Le calcul de l'erreur se fait à chaque itérée c en évaluant la quantité $(\mathcal{N}_1(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{N}_2(\cdot, \cdot)$ étant définis par les relations (4.30) et (4.31)

$$\epsilon^{(c)} = \max \left\{ \left\| \mathcal{N}_1 \left(K_1^{(c)}, K_2^{(c)} \right) \right\|_\infty, \left\| \mathcal{N}_2 \left(K_1^{(c)}, K_2^{(c)} \right) \right\|_\infty \right\}. \quad (4.46)$$

L'algorithme s'arrête à la condition

$$\epsilon^{(c)} \leq \epsilon. \quad (4.47)$$

4.5.2 Nouvelle notion : le manque de confiance

A partir des algorithmes précédents, nous pouvons voir se dégager une certaine évolution de l'utilisation d'approximations de plus en plus sophistiquées pour les équations de type Riccati issues de la stratégie de Nash en boucle fermée : des équations découplées de type Lyapounov, des équations découplées de type Riccati standard. L'idée ici est de poursuivre cette évolution en proposant comme approximation, la résolution d'une seule équation de Riccati rectangulaire. Cela permet de conserver, aspect inédit par rapport aux autres algorithmes, le couplage dans la résolution des équations. Les équations de Riccati rectangulaires étant caractéristiques de la structure d'information en boucle ouverte, durant la thèse il a donc été proposé de faire un lien entre les structures d'information en boucle ouverte et en boucle fermée pour la stratégie de Nash, afin d'obtenir un nouvel algorithme de résolution. Ce lien a été établi grâce à une nouvelle notion en théorie des jeux : le manque de confiance.

Si chaque joueur peut disposer d'une observation (à définir : soit une observation indirecte de l'état, sous des conditions d'observabilité des paires (Q_i, A) par exemple) des conséquences de l'action des autres joueurs, il peut alors éventuellement en déduire l'action des autres joueurs. Chaque joueur pourrait alors modifier sa commande.

Aussi certains joueurs peuvent mentir, et ne pas utiliser la commande qu'ils annoncent. Une information supplémentaire est alors nécessaire pour connaître au mieux l'action des autres joueurs.

Dans ces deux cas, chaque joueur a intérêt à prendre en considération une commande de l'autre joueur qui n'est pas annoncée. Nous restreignons le choix possible des commandes à l'ensemble des retours d'état statiques. On notera G_i le retour d'état du joueur " i ". N'ayant que peu d'information sur le système, la structure d'information en boucle ouverte est tout indiquée. Ainsi le problème d'optimisation est le suivant. Le joueur 1 voit la structure du système, avec comme commande pour le joueur 2 un retour d'état statique G_2 (figure 4.1).

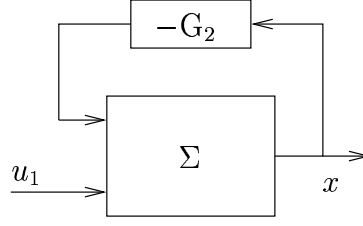


FIGURE 4.1 – Structure vue par le joueur 1

Le critère du joueur 1 devient alors

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} (x^T [Q_1 + G_2^T R_{12} G_2] x + u_1^T R_{11} u_1) d\tau, \quad (4.48)$$

avec la contrainte dynamique associée

$$\dot{x} = (A - B_2 G_2) x + B_1 u_1. \quad (4.49)$$

De son côté, le joueur 2 voit la structure du système, avec comme commande pour le joueur 1 un retour d'état statique G_1 (figure 4.2).

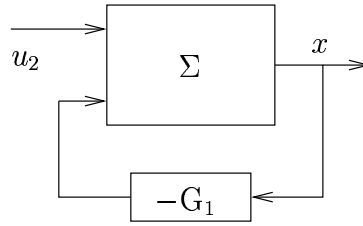


FIGURE 4.2 – Structure vue par le joueur 2

Le critère du joueur 2 devient alors

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} (x^T [Q_2 + G_1^T R_{21} G_1] x + u_2^T R_{22} u_2) d\tau, \quad (4.50)$$

avec la contrainte dynamique associée

$$\dot{x} = (A - B_1 G_1) x + B_2 u_2. \quad (4.51)$$

La structure d'information étant en boucle ouverte, il est possible selon les précédents chapitres, d'obtenir une équation de Riccati rectangulaire associée à la matrice caractéristique

$$\tilde{\mathcal{M}}_{N,BO} = \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 \\ \hline -Q_1 - G_2^T R_{12} G_2 & (B_2 G_2 - A)^T & 0 \\ -Q_2 - G_1^T R_{21} G_1 & 0 & (B_1 G_1 - A)^T \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

L'équation de Riccati rectangulaire (de variables K_1 et K_2) à résoudre est alors

$$\begin{aligned} 0_{2n \times n} &= \begin{pmatrix} (A - B_2 G_2)^T & 0 \\ 0 & (A - B_1 G_1)^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} A + \begin{pmatrix} Q_1 + G_2^T R_{12} G_2 \\ Q_2 + G_1^T R_{21} G_1 \end{pmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Comme il a été vu dans le chapitre 2, cette équation de Riccati rectangulaire est relativement aisée à résoudre.

Notons, point important, que si les matrices de retour d'état considérées G_1 et G_2 sont définies par

$$G_1 = R_{11}^{-1} B_1^T K_1, \quad (4.54)$$

$$G_2 = R_{22}^{-1} B_2^T K_2, \quad (4.55)$$

alors l'équation de Riccati rectangulaire (4.53) est une représentation implicite des équations algébriques de type Riccati issues de la stratégie de Nash en boucle fermée (4.28) et (4.29).

Cette remarque permet de construire un algorithme itératif de résolution de (4.28) et (4.29). En effet, à chaque itération, nous proposons de remettre à jour les matrices G_1 et G_2 , selon (4.54) et (4.55) avec les matrices K_1 et K_2 obtenues à l'itérée précédente. L'algorithme est explicité dans le paragraphe suivant.

Le manque de confiance peut constituer un cadre d'étude intéressant afin d'avoir la possibilité de réagir à une autre trajectoire, non annoncée par le joueur concurrent.

4.5.2.1 Algorithme issu de la notion de manque de confiance en théorie des jeux

La notion nouvelle de manque de confiance permet de construire l'algorithme suivant

Algorithme 4 (Manque de Confiance). *Fixer un niveau d'erreur maximale ϵ .*

- Sélectionner les valeurs initiales $K_1^{(0)} = K_2^{(0)} = 0_n$.
- A chaque itérée $c \in \mathbb{N}^*$, effectuer la mise à jour

$$G_1^{(c-1)} = R_{11}^{-1} B_1^T K_1^{(c-1)}, \quad (4.56)$$

$$G_2^{(c-1)} = R_{22}^{-1} B_2^T K_2^{(c-1)}. \quad (4.57)$$

Résoudre l'équation de Riccati rectangulaire.

$$\begin{aligned} 0_{2n \times n} = & \begin{pmatrix} (A - B_2 G_2^{(c-1)})^T & 0 \\ 0 & (A - B_1 G_1^{(c-1)})^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K_1^{(c)} \\ K_2^{(c)} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_1^{(c)} \\ K_2^{(c)} \end{bmatrix} A + \begin{pmatrix} Q_1 + (G_2^{(c-1)})^T R_{12} G_2^{(c-1)} \\ Q_2 + (G_1^{(c-1)})^T R_{21} G_1^{(c-1)} \end{pmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} K_1^{(c)} \\ K_2^{(c)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K_1^{(c)} \\ K_2^{(c)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

En supposant qu'à chaque itération, la matrice caractéristique $\tilde{\mathcal{M}}_{N,BO}^{(c)}$ soit dichotomiquement séparable, la solution dichotomiquement séparable est sélectionnée.

- Le calcul de l'erreur se fait à chaque itérée c en évaluant la quantité $(\mathcal{N}_1(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{N}_2(\cdot, \cdot)$ étant définis par les relations (4.30) et (4.31)

$$\epsilon^{(c)} = \max \left\{ \left\| \mathcal{N}_1 \left(K_1^{(c)}, K_2^{(c)} \right) \right\|_\infty, \left\| \mathcal{N}_2 \left(K_1^{(c)}, K_2^{(c)} \right) \right\|_\infty \right\}. \quad (4.59)$$

L'algorithme s'arrête à la condition

$$\epsilon^{(c)} \leq \epsilon. \quad (4.60)$$

Il faut noter qu'ici nous supposons que la matrice caractéristique $\tilde{\mathcal{M}}_{N,BO}^{(c)}$ est dichotomiquement séparable à chaque itération "c". Cette hypothèse permet de déterminer une solution à sélectionner. Mais d'autres solutions de cette équation (4.58) existent, même si la matrice caractéristique n'est pas dichotomiquement séparable. L'hypothèse n'est là que pour une raison pratique de calcul. Nous reviendrons sur ce point dans la comparaison des algorithmes.

En nous inspirant de l'idée de réinjection de l'algorithme 3 par rapport à l'algorithme 2, nous proposons ici une variante de l'algorithme 4, en calculant $K_1^{(c)}$ et en réinjectant dans G_1 avant le calcul de $K_2^{(c)}$. Ce nouvel algorithme est baptisé algorithme "manque de confiance rapide" ou algorithme 5.

4.5.2.2 Comparaison des algorithmes

En premier lieu, certaines comparaisons de structures entre les différents algorithmes sont possibles (tableau 4.1).

Algorithmes	Eq. Riccati symétriques	Eq. Riccati découplées	Réinjection
Abou-Kandil <i>et al.</i>	Oui	Oui	Non
Cherfi <i>et al.</i>	Oui	Oui	Oui
Manque de confiance	Non	Non	Non
Manque de confiance rapide	Non	Non	Oui

TABLEAU 4.1 – Comparaison des structures des algorithmes

De façon à comparer le comportement des divers algorithmes, nous les testons ici sur des exemples réputés difficiles de la littérature.

L'outil de comparaison pour les divers algorithmes est l'erreur par itération $\epsilon^{(c)}$, défini de la même manière pour tous les algorithmes. Un même objectif d'erreur $\epsilon = 10^{-6}$ est fixé pour les exemples suivants.

En remarquant que les équations de Riccati rectangulaires à résoudre à chaque itération dans les algorithmes de type "manque de confiance" ne sont pas symétriques, nous utilisons aussi le taux de symétrie d'une matrice défini par

$$M \in \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \frac{\|M - M^T\|_2}{\|M\|_2}. \quad (4.61)$$

Exemple 1

Cet exemple est tiré de [AKFIJ03, p. 342].

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 20 & 50 \\ -25 & 15 \end{pmatrix}; & S_{12} &= S_{21} = 0; \\ S_1 &= \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{pmatrix}; & S_2 &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}; \\ Q_1 &= \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; & Q_2 &= \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Il est particulièrement atypique. Les équations algébriques couplées de type Riccati associées à la stratégie de Nash en boucle fermée admettent plusieurs couples de solutions. Quatre couples de solutions ont été obtenus par Jank et Kun [JK98], par une méthode d'optimisation.

$$K_{1,a}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 2.0139 & 0.0704 \\ 0.0704 & 1.4959 \end{bmatrix}, \quad K_{2,a}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0.6342 & -0.1188 \\ -0.1188 & 0.2994 \end{bmatrix}; \quad (4.63)$$

$$K_{1,b}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0.2989 & 0.06868 \\ 0.06868 & 0.1362 \end{bmatrix}, \quad K_{2,b}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 3.1659 & 0.43560 \\ 0.43560 & 2.3835 \end{bmatrix}; \quad (4.64)$$

$$K_{1,c}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} -1.4501 & 0.037882 \\ 0.037882 & 0.13624 \end{bmatrix}, \quad K_{2,c}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} -0.1793 & -1.817 \times 10^{-4} \\ -1.817 \times 10^{-4} & -0.3435 \end{bmatrix}; \quad (4.65)$$

$$K_{1,d}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} -0.11991 & -0.1311 \times 10^{-2} \\ -0.1311 \times 10^{-2} & 2.6932 \end{bmatrix}, \quad K_{2,d}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} -0.60076 & -1.2321 \\ -1.2321 & 0.084834 \end{bmatrix}; \quad (4.66)$$

Les matrices apparaissant dans les couples $(K_{1,a}^{(\infty)}, K_{2,a}^{(\infty)})$ et $(K_{1,b}^{(\infty)}, K_{2,b}^{(\infty)})$ sont définies positives. Celles dans le couple $(K_{1,c}^{(\infty)}, K_{2,c}^{(\infty)})$ sont définies négatives. Et les matrices du couple $(K_{1,d}^{(\infty)}, K_{2,d}^{(\infty)})$ ne sont pas définies. Il faut remarquer que la matrice de dérive $(A - S_1 K_{1,a}^{(\infty)} - S_2 K_{2,a}^{(\infty)})$ est stable, ainsi que $(A - S_1 K_{1,b}^{(\infty)} - S_2 K_{2,b}^{(\infty)})$. $(A - S_1 K_{1,c}^{(\infty)} - S_2 K_{2,c}^{(\infty)})$ est instable. La matrice de dérive $(A - S_1 K_{1,d}^{(\infty)} - S_2 K_{2,d}^{(\infty)})$ a une valeur propre de partie réelle négative et une de partie réelle positive.

Tous les algorithmes proposés convergent vers la première solution $(K_{1,a}^{(\infty)}, K_{2,a}^{(\infty)})$.

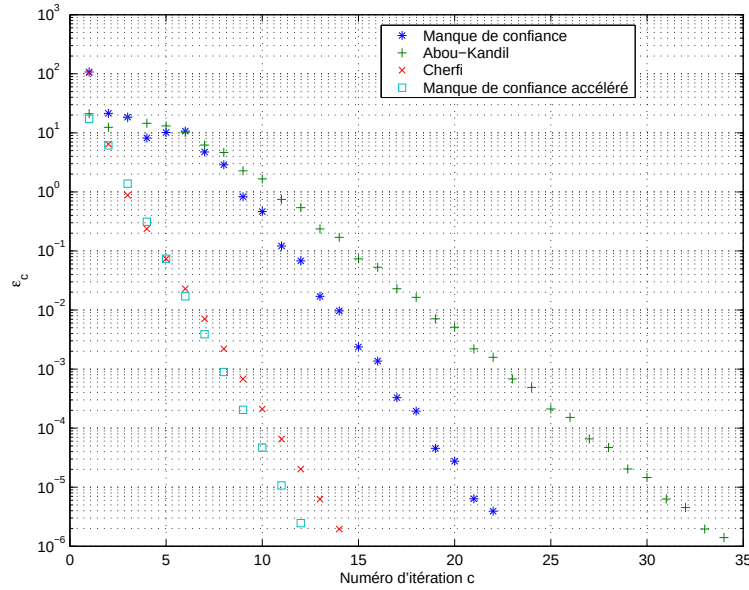
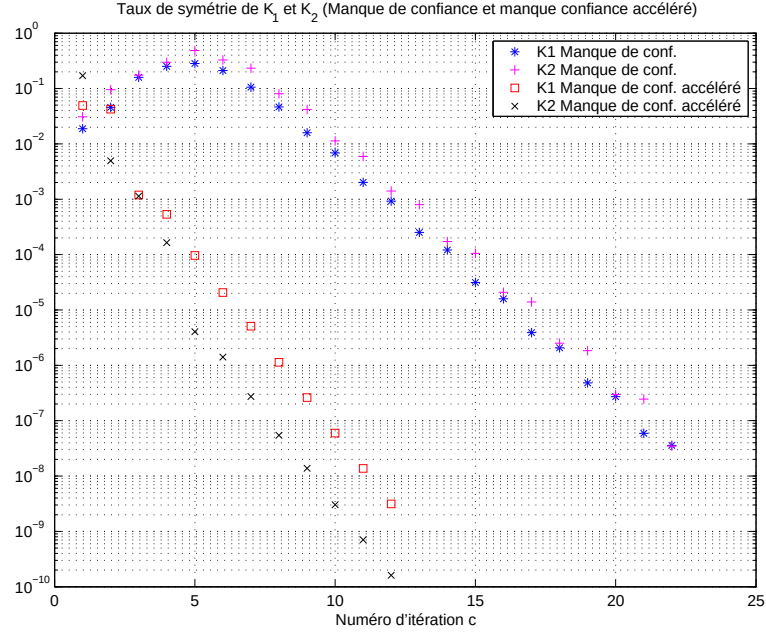


FIGURE 4.3 – Erreur $\epsilon^{(c)}$ par itération c .

Exemple 2 : [LAH94]

$$\begin{aligned} A &= 2; & B_1 &= 1; & B_2 &= 3; \\ Q_1 &= -9; & Q_2 &= +9; \\ R_{12} &= -1; & R_{21} &= 0; & R_{22} &= 1; \\ R_{11} &= \gamma^2; & \text{avec } \gamma &= 0.8 \end{aligned} \quad (4.67)$$


 FIGURE 4.4 – Taux de Dissymétrie par itération c pour les algorithmes 4 et 5.

$$K_1^{(\infty)} = -1.4145; \quad K_2^{(\infty)} = 1.5718 \quad (4.68)$$

Exemple 3 : [Ger89]

$$A = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5.78e^{-2} & 0 & 0 & 4.80e^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3.04e^{-1} & 0 & 0 & 1.10e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 7.48e^{-1} & 0 & 0 & 1.73e^{-4} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.53 & -0.39 & -0.11 \end{bmatrix}$$

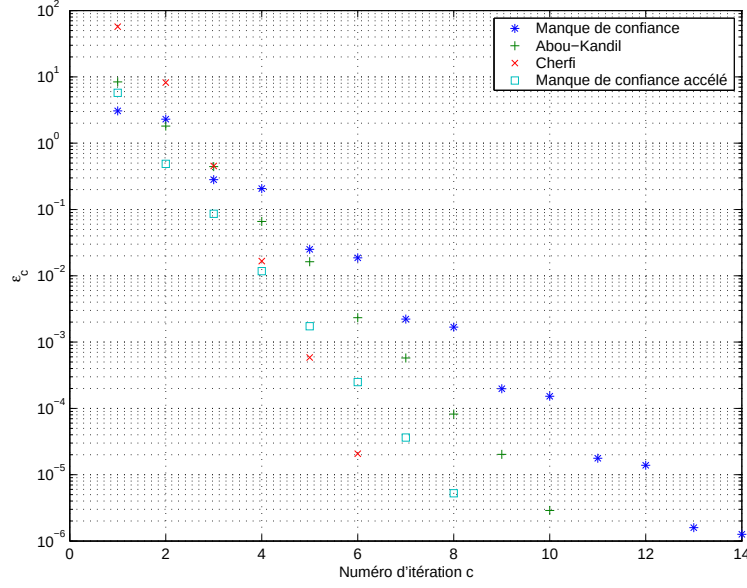
$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.42 & 0.11 & -0.44 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = 2.\text{diag}([2.3 \quad 1.7 \quad 0.3 \quad 1.1 \quad 0.85 \quad 1.4])$$

$$Q_2 = 2.\text{diag}([0.5 \quad 1 \quad 1.5 \quad 2 \quad 2 \quad 1])$$

$$R_{11} = 1; \quad R_{22} = 2; \quad R_{12} = 1.5; \quad R_{21} = 2.7$$

$$K_1^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 19.40 & 5.26 & 2.60 & 13.95 & 9.17 & 9.90 \\ 5.26 & 15.48 & 4.05 & 5.76 & 9.95 & 5.57 \\ 2.60 & 4.05 & 16.84 & -6.90 & -7.30 & -4.20 \\ 13.95 & 5.76 & -6.90 & 28.51 & 23.3 & 23.15 \\ 9.17 & 9.95 & -7.30 & 23.30 & 30.20 & 21.62 \\ 9.90 & 5.57 & -4.20 & 23.15 & 21.62 & 24.30 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

FIGURE 4.5 – Erreur $\epsilon^{(c)}$ par itération c

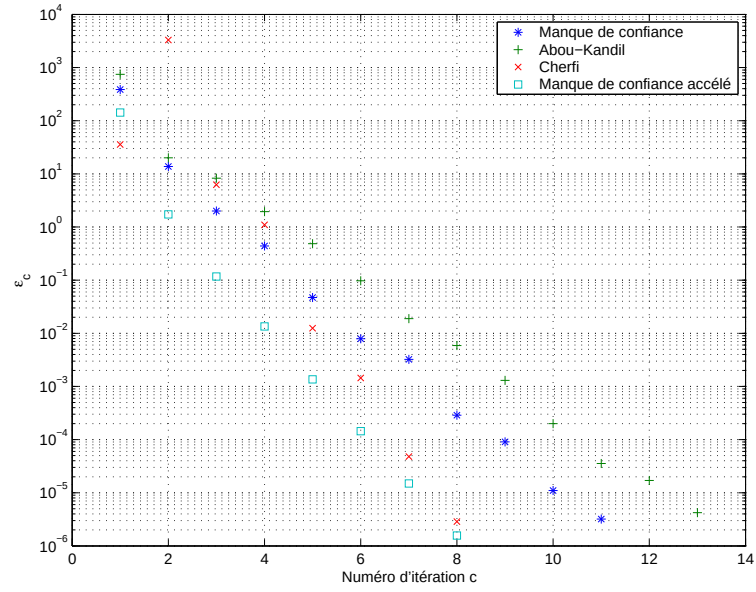
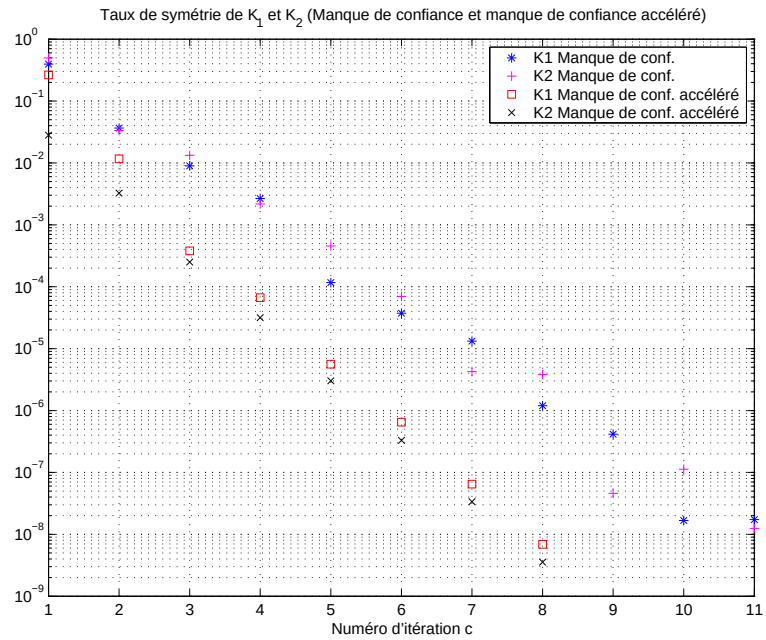
$$K_2^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 9.73 & 2.90 & 1.31 & 7.53 & 7.73 & 6.86 \\ 2.90 & 12.19 & 4.10 & 1.90 & 4.09 & 2.22 \\ 1.31 & 4.10 & 24.51 & -8.63 & -9.01 & -1.14 \\ 7.53 & 1.90 & -8.63 & 26.74 & 25.72 & 20.61 \\ 7.73 & 4.09 & -9.01 & 25.72 & 30.43 & 19.00 \\ 6.86 & 2.22 & -1.14 & 20.61 & 19.00 & 28.76 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Il est à noter qu'un autre avantage des méthodes du type "manque de confiance" par rapport aux autres algorithmes est qu'à chaque itérée, il est possible de sélectionner une solution parmi un nombre important. Cela laisse la porte ouverte à un grand nombre de limites possibles. En particulier pour l'exemple 1, tiré de [AKFIJ03, p. 342], il est possible d'atteindre la solution définie négative $(K_{1,c}^{(\infty)}, K_{2,c}^{(\infty)})$, en sélectionnant à chaque itérée les valeurs propres menant à la dynamique la plus instable.

Une perspective de recherche est alors d'utiliser cet algorithme modifié par un choix plus complexe des valeurs propres à chaque itérée, afin d'atteindre les solutions indéfinies comme $(K_{1,d}^{(\infty)}, K_{2,d}^{(\infty)})$. Résultat qui n'est atteignable par aucun des algorithmes (sous leur forme actuelle) présentés dans ce chapitre.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle fermée est étudiée. Son intérêt ici est qu'elle est utilisée dans la littérature pour modéliser des problèmes de robustesse de type commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$. La mise en équations de cette stratégie mène à des équations couplées de type Riccati plus difficiles à résoudre, mais qui présentent des propriétés assez riches. En particulier la nouvelle notion en théorie des jeux baptisée manque de confiance conduit à la construction d'un nouvel algorithme de résolution numérique, utilisant les équations couplées de Riccati en boucle ouverte pour résoudre les équations couplées de type Riccati en boucle fermée. Un état de l'art et une comparaison des divers algorithmes existants sont présentés.

FIGURE 4.6 – Erreur $\epsilon^{(c)}$ par itération c FIGURE 4.7 – Taux de Dissymétrie par itération c pour les algorithmes 4 et 5.

Chapitre 5

Stratégie de Stackelberg en boucle fermée

5 × 142857
= 714285

5.1 Introduction

Contrairement à la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte, étudiée précédemment, la stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle fermée est un problème d'optimisation réputé très ardu et largement ouvert. Ce chapitre propose une résolution complète de cette stratégie. Il est le fruit d'une collaboration [JTAK06c], avec Emmanuel Trélat, Maître de Conférences à l'Université Paris-Sud 11, Orsay, et maintenant Professeur des Universités à Orléans.

Dans ce chapitre, l'étude est restreinte à des jeux de somme non nulle à deux joueurs (un leader et un suiveur), en temps continu.

Dans le cas d'une structure d'information en boucle fermée, les commandes associées à la stratégie de Stackelberg sont des fonctions non seulement du temps mais aussi de la valeur instantanée mesurée de l'état du système. La difficulté principale provient de la présence de la dérivée partielle de la commande du leader par rapport à l'état du système dans l'expression de la réaction rationnelle du suiveur. Les techniques utilisées pour la structure d'information en boucle ouverte ne peuvent pas s'appliquer telles quelles ici.

Divers auteurs ont proposé différentes approches détournées pour éviter cette difficulté majeure [BO95]. Le premier moyen, introduit dans [BS79] pour les systèmes à temps discret, est repris pour les systèmes à temps continu dans [BO80]. La première étape est de considérer l'optimisation du critère du leader, par une "équipe optimale". En d'autres termes le leader et le suiveur s'associent pour minimiser le critère du leader. Sous certaines hypothèses, garantissant d'atteindre la borne, il existe une représentation paramétrique des commandes du leader et du suiveur. La deuxième étape consiste à déterminer les paramètres menant à la minimisation du critère du suiveur. On peut trouver dans [BO80] des conditions permettant de forcer la commande du suiveur obtenue par le problème "d'équipe optimale" à appartenir à l'ensemble des réactions rationnelles du suiveur. Quand le leader est capable d'influencer suffisamment le critère du leader, avec certaines conditions additionnelles, le leader peut atteindre la borne inférieure de son propre critère [Tol81]. Cela peut être interprété en théorie des jeux, comme une menace du leader sur le suiveur. On peut citer aussi une approche par les modes glissants [CDS96].

Une autre possibilité consiste à expliciter l'ensemble des réactions rationnelles du suiveur et à utiliser cet ensemble comme une contrainte supplémentaire dans le problème d'optimisation du leader. Le problème d'optimisation du leader ainsi obtenu est non classique. Ce qui entraîne que le Principe

du Minimum de Pontryagin ne s'applique pas tel quel. Afin de résoudre ce type de problème non classique, une méthode variationnelle est proposée dans [PC79a], mais en ne considérant que le cas normal (le cas anormal n'est pas mentionné). En outre, dans [Med78], il est mis en avant que cette technique ne mène pas à une solution pour toute valeur de l'état initial. Une méthode proposée pour éviter cet écueil est de considérer un vecteur d'état initial aléatoire, de densité de probabilité uniformément répartie sur la sphère unité et de remplacer le critère par son espérance sur ce vecteur d'état initial.

Dans ce chapitre, nous prouvons de façon rigoureuse les conditions nécessaires pour la stratégie de Stackelberg en boucle fermée en restreignant les commandes à des retours d'état continûment dérivables par rapport à l'état dans le même esprit que [PC79a] mais en considérant tous les cas possibles. De plus, en utilisant la théorie des temps focaux, nous obtenons des conditions suffisantes pour le problème d'optimisation dans le cadre des jeux différentiels linéaires-quadratiques, sans terme croisé. Comme nous le montrerons, même si le résultat final de [PC79a] (réduit au cas linéaire-quadratique) est correct, certains arguments pour déterminer les conditions nécessaires sont erronés ou peu précis. De plus, ici une extension, ajoutant au critère du leader une pondération sur le Jacobien de la commande du leader permet d'associer à tout état initial une trajectoire optimale.

Dans ce chapitre, après une formulation détaillée de la stratégie de Stackelberg en boucle fermée, les conditions nécessaires sont décrites d'abord pour le suiveur, puis pour le leader. Une propriété de dégénérescence, liée à l'omnipotence du leader est mise en avant. Les conditions sont développées pour le cas linéaire-quadratique sans terme croisé. A partir de ce cas, les conditions suffisantes pour les deux joueurs et donc pour le jeu sont établies en utilisant la théorie des temps focaux. L'association de ces conditions nécessaires et suffisantes permet d'assurer l'existence de trajectoires optimales. Enfin une extension modifiant le critère du leader est proposée pour permettre d'obtenir une trajectoire optimale à partir de tout vecteur d'état initial.

5.2 Préliminaires : la stratégie de Stackelberg en boucle fermée

Soit $t_f > 0$. Considérons le jeu différentiel à deux joueurs, d'horizon fini, associé au système commandé

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_1(t, x(t)), u_2(t, x(t))), \quad x(0) = x_0, \quad (5.1)$$

où le vecteur d'état $x(t)$ est dans $\mathbb{R}^n$, f est de classe $\mathcal{C}^1$, la commande $t \mapsto u_1(t, x(t))$ et $t \mapsto u_2(t, x(t))$ des deux joueurs sont des fonctions vectorielles de dimensions respectives m_1 et m_2 appartenant aux ensembles des commandes admissibles $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. Ici, $\mathcal{U}_1$ (resp. $\mathcal{U}_2$) représente un sous-espace ouvert de $\mathcal{L}^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^{m_1})$ (resp. de $\mathcal{L}^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^{m_2})$) tel que, pour chaque couple de commandes $(u_1, u_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, la trajectoire associée $x(\cdot)$, solution de (5.1), est bien définie sur $[0, t_f]$. Les deux critères définis comme des fonctions à valeurs réelles sur $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, sont

$$J_1(u_1, u_2) = g_1(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L_1(t, x(t), u_1(t, x(t)), u_2(t, x(t))) dt, \quad (5.2)$$

$$J_2(u_1, u_2) = g_2(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L_2(t, x(t), u_1(t, x(t)), u_2(t, x(t))) dt. \quad (5.3)$$

Le joueur, qui choisit la commande $u_2(t, x(t))$, est le leader de la stratégie de Stackelberg et cherche à minimiser le critère J_2 et l'autre joueur, qui choisit la commande $u_1(t, x(t))$, est le suiveur et cherche à minimiser le critère J_1 .

L'ensemble des réactions rationnelles du suiveur est noté

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 : \quad \Phi_2 &\rightarrow \mathcal{U}_1 \\ \varphi_2 &\mapsto \mathcal{R}_1(\varphi_2) = \left\{ u_1 \in \mathcal{U}_1 \mid u_1 = \arg \inf_{u_1 \in \mathcal{U}_1} J_1(u_1, \varphi_2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Définition 5.1. *Le couple de commandes (u_1^{**}, u_2^{**}) associé à la stratégie de Stackelberg est défini par le problème de minimisation*

$$\begin{cases} u_1^{**} \in \mathcal{R}_1(u_2^{**}), \\ u_2^{**} = \operatorname{argmin}_{\varphi_2 \in \Phi_2} \max_{u_1 \in \mathcal{R}_1(\varphi_2)} J_2(u_1, \varphi_2). \end{cases} \quad (5.5)$$

Remarque 5.2. *La commande u_1^{**} est définie sur $\mathcal{U}_1$, étant donné qu'à une commande u_2^{**} fixée, le problème d'optimisation pour le suiveur est un problème d'optimisation à un seul joueur. La commande optimale du suiveur alors obtenue avec une structure d'information en boucle ouverte coïncide avec celle obtenue avec une structure d'information en boucle fermée.*

Dans le cadre d'une structure d'information en boucle fermée, les commandes issues de la stratégie de Stackelberg dépendent du temps t et du vecteur d'état $x(t)$. La difficulté majeure est la présence de la dérivée partielle $\frac{\partial u_2^{**}}{\partial x}$ dans les conditions nécessaires du suiveur. Sans cette dépendance, c'est-à-dire que u_2^{**} n'est fonction que du temps t , la structure d'information est en boucle ouverte et la stratégie de Stackelberg a déjà été étudiée dans le chapitre 3.

Afin d'éviter la difficulté de la présence de la dérivée partielle $\frac{\partial u_2^{**}}{\partial x}$ dans les conditions nécessaires du suiveur, diverses alternatives sont proposées dans [BO95]. La première approche est de déterminer un problème équivalent de coopération, menant à la minimisation globale du critère du leader en considérant libres les commandes u_1 et u_2 , et obtenir une représentation particulière de la commande du leader induisant la minimisation du critère du suiveur [BO80]. La deuxième approche consiste à déterminer la réaction rationnelle du suiveur et les conditions nécessaires du leader pour un problème d'optimisation portant sur l'état augmenté incluant état et vecteur d'état adjoint du suiveur. Dans [PC79a], ce problème est étudié avec une méthode variationnelle. Cette méthode n'y est pas approfondie et ne mène pas à toutes les solutions. Dans ce chapitre, une approche fondée sur le Principe du Minimum de Pontryagin est proposée pour déterminer rigoureusement les conditions nécessaires. Ensuite, la théorie des temps focaux est utilisée pour obtenir les conditions suffisantes.

5.3 Conditions nécessaires

La première étape pour déterminer les commandes associées à la stratégie de Stackelberg est d'établir les conditions nécessaires. A cause de la hiérarchie entre les deux joueurs, les conditions nécessaires doivent être établies d'abord pour le suiveur et ensuite pour le leader.

5.3.1 Pour le suiveur

La première équation de (5.5) implique que, pour une commande fixée u_2^{**} , la commande u_1^{**} minimise $J_1(u_1, u_2^{**})$. Il est possible de le reformuler en un problème d'optimisation classique

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x, u_1(t, x(t)), u_2^{**}(t, x(t))), \quad x(0) = x_0, \\ \min_{u_1 \in \mathcal{U}_1} & J_1(u_1, u_2^{**}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Le Hamiltonien H_1 associé à ce problème (5.6) est donné par

$$H_1 = p_1 f + p_1^\circ L_1, \quad (5.7)$$

où p_1 est un vecteur ligne avec le même nombre de composantes que le vecteur d'état x , et $p_1^\circ \geq 0$ est un scalaire constant. Les conditions nécessaires proviennent du Principe du Minimum de Pontryagin [PBGM74]

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_1} = 0 = p_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + p_1^\circ \frac{\partial L_1}{\partial u_1}, \quad (5.8)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{dH_1}{dx} = -p_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2^{**}}{\partial x} \right) - p_1^\circ \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} \frac{\partial u_2^{**}}{\partial x} \right). \quad (5.9)$$

Il est à noter qu'il n'y a pas de terme $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ dans (5.9) à cause de (5.8). Comme l'état final $x(t_f)$ est libre, ces équations différentielles (5.8) sont associées à la condition de transversalité

$$p_1(t_f) = p_1^\circ \frac{\partial g_1(x(t_f))}{\partial x}. \quad (5.10)$$

De plus, $(p_1(t_f), p_1^\circ)$ est nécessairement non nul. Alors de (5.9) et (5.10), il vient $p_1^\circ \neq 0$. Il est possible de normaliser le vecteur d'état adjoint par $p_1^\circ = 1$, car $(p_1(t_f), p_1^\circ)$ est défini à une constante multiplicative près.

5.3.2 Pour le leader

En supposant que l'équation (5.8) puisse être résolue (par le Théorème des Fonctions Implicites), on peut noter S une solution possible

$$u_1(t) = S(t, x(t), p_1(t), u_2^{**}(x(t), t)). \quad (5.11)$$

Cette hypothèse est faible et naturelle, car le leader, qui possède une position hiérarchique privilégiée par rapport au suiveur, peut imposer au suiveur la commande qu'il souhaite. En outre s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\frac{\partial^2 H_1}{\partial u_1^2} > \alpha I$, alors il est possible de déterminer cette commande $u_1(t, x)$, continûment dérivable par rapport à ses variables.

Le leader connaît la réaction rationnelle du suiveur, c'est-à-dire qu'il connaît la fonction S . Ainsi le leader cherche à minimiser son propre critère, où u_1 est remplacé par la fonction S .

Remarque 5.3. *Si l'équation (5.8) admet plusieurs solutions, alors l'étude peut être faite en appliquant le raisonnement à chacune d'elles (au moins grâce au Théorème des Fonctions Implicites). Dans le cas linéaire-quadratique, il existe une solution unique et globale (voir le paragraphe 5.3.5).*

En utilisant les notations

$$\tilde{L}_2(t, x, p_1, u_2) = L_2(t, x, S(t, x, p_1, u_2), u_2) \quad (5.12)$$

et

$$\tilde{J}_2(u_2) = \int_0^{t_f} \tilde{L}_2(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))) dt + g_2(x(t_f)), \quad (5.13)$$

le problème suivant est à considérer

$$\min_{u_2 \in \mathcal{U}_2} \tilde{J}_2(u_2) \quad (5.14)$$

sous les deux contraintes dynamiques

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x(t), S(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))), u_2(t, x(t))) \\ &= \tilde{f}(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t)))\end{aligned}\quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -p_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), S(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))), u_2(t, x(t))) \\ &\quad - \frac{\partial L_1}{\partial x}(t, x(t), S(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))), u_2(t, x(t))) \\ &\quad - p_1 \frac{\partial f}{\partial u_2}(t, x(t), S(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))), u_2(t, x(t))) \frac{\partial u_2}{\partial x}(t, x(t)) \\ &\quad - \frac{\partial L_1}{\partial u_2}(t, x(t), S(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))), u_2(t, x(t))) \frac{\partial u_2}{\partial x}(t, x(t)) \\ &= F_{21}(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))) + F_{22}(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))) \frac{\partial u_2}{\partial x}(t, x(t)),\end{aligned}\quad (5.16)$$

et $x(0) = x_0$, $p_1(t_f) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(x(t_f))$. Notons

$$\tilde{L}_1(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))) = L_1(t, x(t), S(t, x(t), p_1(t), u_2(t, x(t))), u_2(t, x(t))),$$

$$F_{21} = -p_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{L}_1}{\partial x}, \quad \text{et} \quad F_{22} = -p_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} - \frac{\partial \tilde{L}_1}{\partial u_2}.$$

Proposition 5.4. *Les conditions nécessaires pour le leader dans le jeu composé des deux contraintes dynamiques (5.15) et (5.16) et du critère (5.13) sont*

$$0 = \lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} + \lambda_2 \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial u_2} + \frac{\partial F_{22}}{\partial u_2} u_{2,y} \right)^T + \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial u_2}, \quad (5.17)$$

$$0 = \lambda_2^T F_{22} = \lambda_2^T \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} \right), \quad (5.18)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial x} + \frac{\partial F_{22}}{\partial x} u_{2,y} \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial x}, \quad (5.19)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_1} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial p_1} + \frac{\partial F_{22}}{\partial p_1} u_{2,y} \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial p_1}. \quad (5.20)$$

où $\lambda_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs d'état adjoints lignes respectivement associés aux dynamiques (5.15) et (5.16), et $\lambda^\circ \geq 0$ est une constante scalaire. La notation $u_{2,y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}$ représente le Jacobien de la commande $u_2(t, y)$ par rapport à la deuxième variable y .

A cause de la présence du Jacobien $u_{2,y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}$ dans la dynamique (5.16), le problème d'optimisation ne correspond pas au cadre classique du Principe du Minimum de Pontryagin, qui ne peut donc pas être appliqué tel quel. Nous proposons dans la suite deux approches différentes pour résoudre ce type de problème non classique. La première approche est fondée sur une représentation affine de la commande du leader. Ce qui permet de revenir à l'application classique du Principe du Minimum de Pontryagin. La seconde est fondée sur une étude variationnelle générale qui n'est autre qu'une version du Principe du Minimum de Pontryagin adaptée au système (5.16).

5.3.2.1 Première preuve de la proposition 5.4

Le problème d'optimisation associé aux dynamiques (5.15) et (5.16) et au critère (5.13) peut être reformulé comme un problème d'optimisation auxiliaire en notant $z = \begin{pmatrix} x \\ p_1^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t), u_2(t, h(z(t))), u_{2,y}(t, h(z(t)))), \\ \min J(u_2) = \int_0^{t_f} L(t, z(t), u_2(t, h(z(t))), u_{2,y}(t, h(z(t)))) dt + g(h(z(t_f))), \end{cases} \quad (5.21)$$

où $u_{2,y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}$ est le Jacobien de u_2 par rapport à la seconde variable de u_2 , et $h(z) = h((x^T, p_1)^T) = x$ est une projection. Il est important de noter que u_2 n'est pas une fonction de l'ensemble des composantes du vecteur d'état augmenté $(x^T, p_1)^T$, mais seulement de sa projection x .

Le lemme suivant donne à ce problème d'optimisation auxiliaire une formulation équivalente et plus standard.

Lemme 5.5. *Le problème de commande optimale*

$$(P_1) \begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t), u_2(t, h(z(t))), u_{2,y}(t, h(z(t)))) \\ \min J(u_2) = \int_0^{t_f} L(t, z(t), u_2(t, h(z(t))), u_{2,y}(t, h(z(t)))) dt + g(h(z(t_f))), \end{cases} \quad (5.22)$$

est équivalent au problème classique de commande optimale

$$(P_2) \begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t), w_1(t), w_2(t)), \\ \min \check{J}(u) = \int_0^{t_f} L(t, z(t), w_1(t), w_2(t)) dt + g(h(z(t_f))). \end{cases} \quad (5.23)$$

Aussi, les commandes optimales respectives de ces problèmes sont reliées par

$$u_2(t, y) = \langle w_2(t), (y - h(z(t))) \rangle + w_1(t). \quad (5.24)$$

Démonstration. Soit $u_2(t, y)$ la commande optimale du problème (P_1) , associée à la trajectoire $z(\cdot)$. Alors en utilisant $w_1(t) = u_2(t, h(z(t)))$ et $w_2(t) = u_{2,y}(t, h(z(t)))$, les commandes (w_1, w_2) génèrent pour le problème (P_2) la même trajectoire $z(\cdot)$. Donc $\inf \check{J} \leq \inf J$.

D'un autre côté, si (w_1, w_2) est le couple de commandes optimales pour le problème (P_2) , associé à la trajectoire $z(\cdot)$, alors la commande $u_2(t, y) = w_2(t)(y - h(z(t))) + w_1(t)$ génère la même trajectoire $z(\cdot)$, et alors $\inf J \leq \inf \check{J}$.

Donc, $\inf J = \inf \check{J}$.

Les deux problèmes d'optimisation sont équivalents, dans le sens que si la trajectoire est optimale pour un problème, alors elle est aussi optimale pour l'autre et les valeurs des critères coïncident. Les commandes optimales associées sont reliées par (5.24). $\square$

Remarque 5.6. *Ici, il est choisi une représentation affine de $u_2(t, y)$, mais d'autres choix sont possibles, comme dans [PC79a]. Ce choix permet de restreindre la recherche d'une commande optimale uniquement au terme w_1 de (5.24), le long de la trajectoire optimale, comme le terme w_2 n'apparaît*

plus dans l'expression de la commande. C'est-à-dire que le long de la trajectoire optimale, la commande est uniquement fonction du temps t .

Ce lemme permet une application directe du Principe du Minimum de Pontryagin avec l'Hamiltonien suivant, pour obtenir les conditions nécessaires ($\lambda \in \mathbb{R}^{2n}$ représente le vecteur ligne d'état adjoint associé à l'état $z \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\lambda^\circ \geq 0$ une constante scalaire) :

$$H = \lambda F(t, z, w_1, w_2) + \lambda^\circ L(t, z, w_1, w_2). \quad (5.25)$$

Les équations s'écrivent

$$\frac{\partial H}{\partial w_1} = 0 = \lambda F_u + \lambda^\circ L_u, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial H}{\partial w_2} = 0 = \lambda F_{u_y} + \lambda^\circ L_{u_y}, \quad (5.27)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{dH}{dz} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda^\circ \frac{\partial L}{\partial z}. \quad (5.28)$$

On utilise les notations supplémentaires $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2n}$. Alors

$$F(t, z, u, u_z) = \begin{pmatrix} \tilde{f}(t, x, p_1, u_2) \\ (F_{21}(t, x, p_1, u_2) + F_{22}(t, x, p_1, u_2)u_{2,y})^T \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Le Hamiltonien (5.25) prend la forme

$$H = \lambda_1 \tilde{f} + \lambda_2 (F_{21} + F_{22}u_{2,y})^T + \lambda^\circ \tilde{L}_2(t, x, p_1, u_2). \quad (5.30)$$

Les conditions nécessaires (5.26), (5.27), (5.28) peuvent se réécrire en

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 = \lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} + \lambda_2 \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial u_2} + \frac{\partial F_{22}}{\partial u_2} u_{2,y} \right)^T + \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial u_2}, \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_{2,y}} = 0 = \lambda_2^T F_{22} = \lambda_2^T \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} \right), \quad (5.32)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial x} + \frac{\partial F_{22}}{\partial x} u_{2,y} \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial x}, \quad (5.33)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_1} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial p_1} + \frac{\partial F_{22}}{\partial p_1} u_{2,y} \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial p_1}. \quad (5.34)$$

Cela prouve la proposition 5.4.

5.3.2.2 Deuxième preuve de la proposition 5.4

Les conditions nécessaires (5.16) font apparaître le terme $\frac{\partial u_2}{\partial x}$. Le problème d'optimisation pour le leader est non classique. Définissons l'état augmenté $Z = \begin{pmatrix} x \\ p_1^T \\ x^\circ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1}$, où x° est le coût instantané associé au critère du leader satisfaisant

$$\dot{x}^\circ = \tilde{L}_2(t, x, p_1, u_2), \quad x^\circ(0) = 0. \quad (5.35)$$

Le système augmenté admet la dynamique

$$\dot{Z} = \tilde{F}(t, Z, u, u_y^T) = \begin{pmatrix} \tilde{f}(t, x, p_1, u_2) \\ (F_{21}(t, x, p_1, u_2) + F_{22}(t, x, p_1, u_2)u_{2,y})^T \\ \tilde{L}_2(t, x, p_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

où $u_2 = u_2(t, h(Z))$ est une fonction du temps t et de la projection $h(Z) = x$.

La résolution de ce type de problème requiert la définition de l'application entrée-sortie et des commandes singulières.

Définition 5.7. *L'application entrée-sortie au temps t_f du système (5.36) avec l'état initial Z_0 est l'application*

$$\begin{aligned} E_{Z_0, t_f} : \mathcal{U}_2 \subset L^\infty([0, t_f] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m_2}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \\ u_2 &\longmapsto Z_{u_2}(t_f) \end{aligned} \quad (5.37)$$

où Z_{u_2} est la solution de (5.36), associée à u_2 , issue de Z_0 . Ici $\mathcal{U}_2$ représente l'espace ouvert des commandes $u_2 \in \mathcal{L}^\infty([0, t_f] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m_2})$ tel que la solution $Z_{u_2}(\cdot)$ de (5.36), associée à u_2 et issue de Z_0 , est définie sur $[0, t_f]$.

Notons que, si $\tilde{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors E_{Z_0, t_f} est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour calculer la première dérivée de Fréchet, considérons une commande fixe δu_2 de $\mathcal{U}_2$ et notons $Z + \delta Z$ la trajectoire associée à la commande $u_2 + \delta u_2$ [Tre05, LM67]. Un développement de Taylor de $\tilde{F}$ mène à

$$\begin{aligned} \frac{d(Z + \delta Z)}{dt} = \\ \tilde{F}\left(t, Z + \delta Z, u_2(t, h(Z + \delta Z)) + \delta u_2(t, h(Z + \delta Z)), u_{2,y}(t, h(Z + \delta Z))^T + (\delta u_2)_y(t, h(Z + \delta Z))^T\right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

De plus un développement de Taylor de la commande u_2 donne

$$\begin{aligned} u_2(t, h(Z + \delta Z)) &= u_2(t, h(Z) + h_Z(Z)\delta Z + o(\delta Z)) \\ &= u_2(t, h(Z)) + u_{2,y}(t, h(Z))h_Z(Z)\delta Z + o(\delta Z) \end{aligned}$$

Par combinaison de ces deux développements de Taylor, on obtient, au premier ordre,

$$\frac{d(\delta Z)}{dt} = \tilde{F}_Z \delta Z + \tilde{F}_{u_2} u_{2,y} h_Z \delta Z + \tilde{F}_{u_2} \delta u_2 + \tilde{F}_{u_{2,y}} u_{2,yy} h_Z \delta Z + \tilde{F}_{u_{2,y}} \delta u_{2,y}^T \quad (5.39)$$

$$= \underbrace{\left(\tilde{F}_Z + \tilde{F}_{u_2} u_{2,y} h_Z + \tilde{F}_{u_{2,y}} u_{2,yy} h_Z\right)}_A \delta Z + \underbrace{\tilde{F}_{u_2}}_B \delta u_2 + \underbrace{\tilde{F}_{u_{2,y}}}_{C} \delta u_{2,y}^T \quad (5.40)$$

En utilisant la matrice de transition M vérifiant $\dot{M} = AM$ et $M(0) = Id$, il vient que

$$dE_{Z_0, t_f}(u_2) \cdot \delta u_2 = \delta Z(t_f) = M(t_f) \int_0^{t_f} M^{-1}(s) \left(B(s) \delta u_2(s) + C(s) \delta u_{2,y}^T(s) \right) ds. \quad (5.41)$$

Définition 5.8. *Une commande $u_2 \in \mathcal{U}_2$ est dite singulière sur $[0, t_f]$ si la première différentielle de Fréchet de l'application entrée-sortie n'est pas surjective.*

Une caractérisation des commandes singulières est maintenant proposée. Si u est singulière, alors il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $\psi \neq 0$ tel que

$$\psi \cdot dE_{Z_0, t_f}(u_2) \delta u_2 = 0, \quad \forall \delta u_2. \quad (5.42)$$

Définition 5.9. *Une commande singulière est dite de corang 1 si*

$$\text{codim Im } dE_{X_0, t_f}(u_2) = 1.$$

En d'autres termes, ψ est l'unique vecteur (à un scalaire multiplicatif près) vérifiant (5.42).

Soit $\psi(t) = \psi M(t_f) M^{-1}(t)$, alors

$$\dot{\psi} = -\psi A = -\psi \left(\tilde{F}_Z + \tilde{F}_{u_2} u_{2,y} h_Z + \tilde{F}_{u_{2,y}} u_{2,yy} h_Z \right). \quad (5.43)$$

La relation (5.42) est vérifiée pour chaque commande δu_2 , et

$$\int_0^{t_f} \psi(t) \left(B(t) \delta u_2(t, x) + C(t) \delta u_{2,y}^T(t, x) \right) dt = 0. \quad (5.44)$$

Cette relation est satisfaite pour toutes les commandes δu_2 , fonctions de t et x . En particulier, elle est aussi vérifiée pour les commandes δu_2 fonctions uniquement du temps. Pour ce type de commande, la dernière relation devient

$$\int_0^{t_f} \psi(t) \left(B(t) \delta u_2(t) \right) dt = 0. \quad (5.45)$$

Cela implique que, presque partout sur $[0, t_f]$

$$\psi(t) B(t) = 0. \quad (5.46)$$

La relation (5.44) peut se simplifier en

$$\int_0^{t_f} \psi(t) \left(C(t) \delta u_{2,y}^T(t, x) \right) dt = 0. \quad (5.47)$$

De ce fait, presque partout sur $[0, t_f]$, il vient

$$\psi(t) C(t) = 0. \quad (5.48)$$

Remarque 5.10. Cette propriété tient uniquement car le temps est un argument de la commande u_2 . Si les commandes admissibles sont des retours d'état purs, les relations (5.46) et (5.48) ne sont plus valables. La condition (5.45) dans ce cas donne une contrainte reliant $B(t)$ et $C(t)$.

Remarque 5.11. Remarquons aussi que ce résultat permet d'affirmer qu'il est possible de se contenter des deux premiers termes du développement de u_2 en y sa deuxième variable, c'est-à-dire avoir une stratégie affine en l'état x .

Soit $H = \psi \tilde{F}(t, Z, u_2, u_{2,y})$ l'Hamiltonien associé à ce problème d'optimisation. Les dernières équations peuvent se réécrire comme une caractérisation Hamiltonienne d'une commande singulière presque partout sur $[0, t_f]$:

$$\dot{Z} = \tilde{F}(t, Z, u_2, u_{2,y}) = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad (5.49)$$

$$\dot{\psi} = -\psi \left(\tilde{F}_Z + \tilde{F}_{u_2} u_{2,y} h_Z + \tilde{F}_{u_{2,y}} u_{2,yy} h_Z \right) = -\frac{dH}{dZ}, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = \psi(t) B(t) = 0, \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_{2,y}} = \psi(t) C(t) = 0. \quad (5.52)$$

Lemme 5.12. Si une commande u_2 est optimale pour le problème d'optimisation composé des dynamiques (5.15) et (5.16) et du critère (5.13), alors elle est singulière pour la dynamique augmentée (5.36).

On peut trouver une preuve dans [BC03].

En notant $\psi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda^\circ \end{pmatrix}$, on obtient

$$0 = \lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} + \lambda_2 \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial u_2} + \frac{\partial F_{22}}{\partial u_2} u_{2,y} \right)^T + \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial u_2}, \quad (5.53)$$

$$0 = \lambda_2^T F_{22} = \lambda_2^T \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} \right), \quad (5.54)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial x} + \frac{\partial F_{22}}{\partial x} u_{2,y} \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_1}{\partial x}, \quad (5.55)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_1} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial p_1} + \frac{\partial F_{22}}{\partial p_1} u_{2,y} \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial p_1}, \quad (5.56)$$

qui sont les conditions nécessaires de la proposition 5.4.

5.3.3 Conditions de transversalité

Une partie des valeurs initiales et finales du vecteur d'état augmenté z est imposée par la condition de transversalité pour le problème d'optimisation du suiveur (5.10) et par l'état initial $x(0) = x_0$. Nous pouvons formaliser ces conditions en définissant deux ensembles M_0 et M_1 .

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ p_1^T(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_1^T(0) \end{pmatrix} \in M_0, \quad \begin{pmatrix} x(t_f) \\ p_1^T(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_f) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x}(h(z(t_f))) \end{pmatrix} \in M_1, \quad (5.57)$$

où

$$M_0 = \{x_0\} \times \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ p_1^T \end{pmatrix} \mid F_0 \begin{pmatrix} x \\ p_1^T \end{pmatrix} = x - x_0 = 0 \right\}, \quad (5.58)$$

et

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ p_1^T \end{pmatrix} \mid \tilde{f} \begin{pmatrix} x \\ p_1^T \end{pmatrix} = \frac{\partial g_1}{\partial x}(h(z(t_f))) - p_1 = 0 \right\}. \quad (5.59)$$

Les variétés tangentes $T_{z(0)}M_0$ et $T_{z(t_f)}M_1$ sont définies par

$$T_{z(0)}M_0 = \{(0, \alpha) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \alpha \in \mathbb{R}^n\}, \quad (5.60)$$

et

$$T_{z(t_f)}M_1 = \left\{ \left(\beta, \beta \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} \right) \mid \beta \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (5.61)$$

Les conditions de transversalité s'écrivent (voir [Tre05, p. 104])

$$\lambda(0) \perp T_{z(0)}M_0, \quad (5.62)$$

$$\lambda(t_f) - \lambda^\circ \frac{\partial g_2}{\partial z}(h(z(t_f))) \perp T_{z(t_f)}M_1, \quad (5.63)$$

et mènent à

$$\lambda_2(0) = 0, \quad (5.64)$$

$$\lambda_1(t_f) - \lambda^\circ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x(t_f)) + \lambda_2(t_f) \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(x(t_f)) = 0. \quad (5.65)$$

5.3.4 Propriété de dégénérescence

Avec une hypothèse supplémentaire faible, le leader cherche une commande optimale sans tenir compte de la réaction rationnelle du suiveur, alors les rôles hiérarchiques des joueurs semblent disparaître. Cette stratégie de Stackelberg mène à l'omnipotence du leader, qui est capable d'imposer sa volonté à l'autre joueur et peut ne pas se soucier de la réaction rationnelle du suiveur.

Proposition 5.13. *L'équation (5.18) implique que $\lambda_2 \equiv 0$ ou $F_{22} \equiv 0$ (ou les deux). Sous la condition supplémentaire que la matrice de taille $m_2 \times m_2$*

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} \right)^T \quad (5.66)$$

soit inversible, alors

$$\lambda_2 \equiv 0. \quad (5.67)$$

Démonstration. La preuve est faite par un raisonnement par l'absurde. Le terme $\lambda_2^T F_{22}$ dans (5.18) est le produit d'un vecteur colonne (λ_2^T) et d'un vecteur ligne $F_{22} = p_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial L_1}{\partial u_2}$, car λ_2 est un vecteur d'état adjoint ligne. Le fait que ce produit soit nul induit que toutes les composantes de λ_2 ou de F_{22} sont nulles (ou les deux).

En supposant que $\lambda_2 \neq 0$, alors $F_{22} = p_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} \equiv 0$. Si de plus

$$\frac{\partial F_{22}}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} \right) \quad (5.68)$$

est inversible, alors le Théorème des Fonctions Implicites appliqué à la fonction F_{22} par rapport à la variable u_2 permet d'écrire, localement le long de la trajectoire, la commande

$$u_2 = u_2(t, x, p_1). \quad (5.69)$$

Le système en (x, p_1) peut se réécrire en

$$\begin{cases} \dot{x} &= \tilde{f}(t, x, p_1, u_2(t, x, p_1)) \\ \dot{p}_1 &= F_{21}(t, x, p_1, u_2(t, x, p_1)), \end{cases} \quad \text{car } F_{22} = 0. \quad (5.70)$$

Comme les dynamiques et le critère sont indépendants de $u_{2,y}$, nous pouvons déduire que toute commande $u_{2,y}$ est extrémale pour le problème d'optimisation. Mais la relation (5.17) est une contrainte sur $u_{2,y}$. De ce fait

$$\lambda_2 \equiv 0. \quad (5.71)$$

□

Remarque 5.14. *Le fait que $\lambda_2 \equiv 0$ signifie que le leader ne tient pas compte de la réaction rationnelle de suiveur. Cela semble être en contradiction avec la hiérarchie des positions des joueurs entre le leader et le suiveur. En fait, le leader ne tient pas compte de la réaction rationnelle du suiveur, car il impose sa volonté au suiveur. Le leader est omnipotent par rapport au suiveur. La condition $\frac{\partial F_{22}}{\partial u_2}$ inversible formalise la puissance du leader sur le suiveur.*

5.3.5 Le cas linéaire-quadratique pur

Dans ce paragraphe, les résultats précédents sont spécifiés dans le cas linéaire-quadratique. Considérons la contrainte dynamique linéaire

$$\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2 \quad (5.72)$$

et les critères quadratiques

$$J_1(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q_1 x + u_1^T R_{11} u_1 + u_2^T R_{12} u_2) dt + \frac{1}{2} x(t_f)^T K_{1f} x(t_f), \quad (5.73)$$

$$J_2(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q_2 x + u_1^T R_{21} u_1 + u_2^T R_{22} u_2) dt + \frac{1}{2} x(t_f)^T K_{2f} x(t_f), \quad (5.74)$$

$$(5.75)$$

où les matrices Q_i , R_{ij} et K_{if} sont symétriques pour $i, j \in \{1, 2\}$, et R_{22} et R_{11} sont inversibles.

5.3.5.1 Conditions nécessaires pour le suiveur

L'Hamiltonien associé au suiveur (contrainte dynamique (5.72) et critère (5.74)) est

$$H_1 = p_1(Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2) + \frac{1}{2}(x^T Q_1 x + u_1^T R_{11} u_1 + u_2^T R_{12} u_2). \quad (5.76)$$

Appliquant les relations (5.8) et (5.9), nous obtenons

$$\dot{p}_1 = -\frac{dH_1}{dx} = -p_1 A - x^T Q_1 - p_1 B_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - u_2^T R_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (5.77)$$

$$p_1(t_f) = x(t_f)^T K_{1f}, \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_1} = 0 = p_1 B_1 + u_1^T R_{11}. \quad (5.79)$$

Comme R_{11} est inversible par hypothèse, la commande optimale est

$$u_1 = -R_{11}^{-1} B_1^T p_1^T = S(t, x, p_1, u_2). \quad (5.80)$$

5.3.5.2 Conditions nécessaires pour le leader

Dans le cas linéaire-quadratique pur, il vient

$$\tilde{f}(t, x, p_1, u_2) = Ax + B_2 u_2 - B_1 R_{11}^{-1} B_1^T p_1^T, \quad (5.81)$$

$$F_{21}(t, x, p_1, u_2) = -p_1 A - x^T Q_1, \quad (5.82)$$

$$F_{22}(t, x, p_1, u_2) = -p_1 B_2 - u_2^T R_{12}. \quad (5.83)$$

En injectant l'expression de la commande optimale du suiveur (5.80), le coût instantané du leader peut s'écrire

$$\tilde{L}_2(t, x, p_1, u_2) = \frac{1}{2} (x^T Q_2 x + u_2^T R_{22} u_2 + p_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T p_1). \quad (5.84)$$

Les conditions nécessaires (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) mènent à

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 = \lambda_1 B_2 - \lambda_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^T R_{12} + \lambda^\circ u_2^T R_{22}, \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_{2,y}} = 0 = -\lambda_2^T (p_1 B_2 + u_2^T R_{12}), \quad (5.86)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 A + \lambda_2 Q_1 - \lambda^\circ x^T Q_2, \quad (5.87)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T + \lambda_2 \left(A + B_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right)^T - \lambda^\circ p_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T, \quad (5.88)$$

$$\dot{\lambda}^\circ = 0, \quad (5.89)$$

avec les conditions de transversalité

$$\lambda_1(t_f) = \lambda^\circ x(t_f)^T K_{2f} - \lambda_2(t_f) K_{1f}, \quad (5.90)$$

$$\lambda_2(0) = 0. \quad (5.91)$$

De la proposition 5.13, et en supposant que $\frac{\partial}{\partial u_2} \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial L_1}{\partial u_2} \right) = R_{12}$ soit inversible, il est possible de déduire que $\lambda_2 \equiv 0$.

Comme le vecteur $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda^\circ)$ à $t = t_f$ ne peut pas être nul, et à cause de la condition de transversalité (5.90), il est possible de poser $\lambda^\circ = 1$.

De (5.85), on peut déduire de l'inversibilité de R_{22} , que

$$u_2 = -R_{22}^{-1} B_2^T \lambda_1^T. \quad (5.92)$$

De plus, l'équation (5.88) devient, avec $\lambda_2 \equiv 0$,

$$\lambda_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T - p_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T \equiv 0. \quad (5.93)$$

Supposant que le rang de B_1 soit maximal, c'est-à-dire, $\text{rang } B_1 = m_1$ (le nombre de composantes de la commande u_1), cette relation donne

$$\lambda_1 B_1 = p_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21}. \quad (5.94)$$

Dans cette expression, la commande optimale u_1 , donnée par (5.80) peut être reconnue. La commande optimale u_1 vérifie donc aussi

$$R_{21} u_1 = -B_1^T \lambda_1^T. \quad (5.95)$$

Si R_{21} est inversible, alors la commande u_1 admet deux expressions :

$$u_1 = -R_{21}^{-1} B_1^T \lambda_1^T = -R_{11}^{-1} B_1^T p_1^T. \quad (5.96)$$

Nous rassemblons les conditions nécessaires obtenues dans le théorème suivant.

Proposition 5.15. *Pour $x_0 \neq 0$, si les matrices Q_i , R_{ij} et K_{if} sont symétriques, si $R_{11} > 0$, $R_{22} > 0$, R_{12} , et R_{21} sont inversibles et si $\text{rang } B_1 = m_1$ (B_1 est de rang plein), alors les commandes issues de la stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle fermée sont*

$$u_2 = -R_{22}^{-1} B_2^T \lambda_1^T, \quad (5.97)$$

$$u_1 = -R_{11}^{-1} B_1^T p_1^T = -R_{21}^{-1} B_1^T \lambda_1^T, \quad (5.98)$$

$$\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2, \quad x(0) = x_0, \quad (5.99)$$

$$\dot{p}_1 = -p_1 A - x^T Q_1 - \left(p_1 B_2 + u_2^T R_{12} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad p_1(t_f) = x_f^T K_{1f}, \quad (5.100)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 A - x^T Q_2, \quad \lambda_1(t_f) = x_f^T K_{2f}, \quad (5.101)$$

$$\lambda_1 B_1 = p_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21}. \quad (5.102)$$

À ce stade, deux cas sont à considérer pour obtenir des conditions nécessaires : $p_1 B_2 + u_2^T R_{12} = 0$ et $p_1 B_2 + u_2^T R_{12} \neq 0$. Le premier cas est d'abord étudié, et il est mis en évidence qu'il mène -sous de faibles hypothèses- à une solution, qui peut être écartée. Le deuxième cas est ensuite étudié et il est montré que c'est un cas intéressant.

5.3.5.3 Cas $p_1 B_2 + u_2^T R_{12} = 0$

Dans ce paragraphe, on suppose que

$$p_1 B_2 + u_2^T R_{12} = 0. \quad (5.103)$$

Lemme 5.16. *Sous l'hypothèse (5.103), si la paire (Q_2, A) est observable, et si au moins une des paires (A, B_1) ou (A, B_2) est commandable, alors*

$$x(t) = \lambda_1^T(t) = p_1^T(t) = 0, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (5.104)$$

Cela signifie que la seule trajectoire optimale est identiquement nulle.

Remarque 5.17. *Les équations (5.104) impliquent en particulier, que $x(0) = 0$. Si $x(0) = x_0 \neq 0$, alors il n'existe pas de trajectoire optimale issue de x_0 .*

Démonstration. Avec la condition

$$p_1 B_2 + u_2^T R_{12} = 0, \quad (5.105)$$

le terme $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ n'apparaît plus dans les conditions nécessaires (5.99)-(5.102). Dérivant par rapport au temps la relation (5.105) ne permet pas d'obtenir des conditions nécessaires portant sur $\frac{\partial u_2}{\partial x}$.

Néanmoins s'il est supposé que R_{12} est inversible, la commande u_2 admet deux représentations

$$u_2 = -R_{22}^{-1} B_2^T \lambda_1^T = -R_{12}^{-1} B_2^T p_1^T. \quad (5.106)$$

A partir de cette relation et de (5.102), les conditions nécessaires sur $x(t_f)$ sont développées par des dérivées successives par rapport au temps.

$$\begin{cases} \lambda_1 B_1 - p_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} = 0, \\ \lambda_1 B_2 R_{22}^{-1} R_{12} - p_1 B_2 = 0. \end{cases} \quad (5.107)$$

Ces deux relations peuvent se réécrire pour chaque instant $t \in [0, t_f]$ comme

$$\begin{pmatrix} x & \lambda_1 & p_1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & B_2 R_{22}^{-1} R_{12} \\ -B_1 R_{11}^{-1} R_{21} & -B_2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} = 0. \quad (5.108)$$

En injectant (5.105) dans les dynamiques de x , λ_1 et p_1 , on obtient le système différentiel autonome suivant

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1^T \\ p_1^T \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1^T \\ p_1^T \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} A^T & -Q_2 & -Q_1 \\ -B_2 R_{22}^{-1} B_2^T - B_1 R_{21}^{-1} B_1^T & -A & 0 \\ 0 & 0 & -A \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \quad (5.109)$$

La dérivée d'ordre k de (5.108) par rapport au temps, au temps $t = t_f$, donne

$$\begin{bmatrix} x^T(t_f) & x^T(t_f) K_{2f} & x^T(t_f) K_{1f} \end{bmatrix} \mathcal{A}^k \mathcal{B} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.110)$$

Supposant que la paire $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ soit commandable, ces conditions impliquent que $x(t_f) = 0$. Mais le système linéaire autonome portant sur x , λ_1 et p_1 avec les conditions terminales $x(t_f) = \lambda_1^T(t_f) = p_1^T(t_f) = 0$ impose, par une intégration rétrograde de (5.109) que

$$x(t) = \lambda_1^T(t) = p_1^T(t) = 0, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (5.111)$$

La seule trajectoire optimale dans ce cas est la trajectoire identiquement nulle. $\square$

Les conditions suffisantes sont développées dans la suite pour assurer que la paire $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ soit commandable.

Proposition 5.18. *Supposons que*

- *la paire (Q_2, A) est observable,*
 - *au moins une des paires (A, B_1) ou (A, B_2) est commandable,*
- alors la paire $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est commandable.*

Démonstration. La preuve utilise les tests de commandabilité et d'observabilité de Hautus. La paire $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est commandable si et seulement si la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} - \alpha I & \vdots & \mathcal{B} \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

est de rang plein, pour chaque $\alpha \in \mathbb{C}$. La preuve consiste à montrer que tous les vecteurs lignes $\begin{pmatrix} z_1^T & z_2^T & z_3^T \end{pmatrix}$ vérifiant

$$\begin{pmatrix} z_1^T & z_2^T & z_3^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} - \alpha I & \vdots & \mathcal{B} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.113)$$

sont nuls. En développant l'équation (5.113), on obtient

$$-z_1^T Q_2 = z_2^T (A - \alpha I_n), \quad (5.114)$$

$$-z_1^T Q_1 = z_3^T (A - \alpha I_n), \quad (5.115)$$

$$z_1^T (A^T - \alpha I_n) = z_2^T (B_2 R_{22}^{-1} B_2^T + B_1 R_{21}^{-1} B_1^T), \quad (5.116)$$

$$z_2^T B_1 = z_3^T B_1 R_{11}^{-1} R_{21}, \quad (5.117)$$

$$z_2^T B_2 R_{22}^{-1} R_{12} = z_3^T B_2. \quad (5.118)$$

En multipliant par z_1 l'équation (5.114) et par z_2 l'équation (5.116), on obtient

$$-z_1^T Q_2 z_1 = z_2^T (A - \alpha I_n) z_1 = z_2^T (B_2 R_{22}^{-1} B_2^T + B_1 R_{21}^{-1} B_1^T) z_2 \quad (5.119)$$

Le premier terme est semi-défini négatif, et le dernier terme est semi-défini positif, de ce fait les deux sont nuls. Il vient

$$z_1^T Q_2 = 0, \quad z_2^T B_2 = 0, \quad z_2^T B_1 = 0. \quad (5.120)$$

Injectant ces relations dans (5.114), (5.118), on obtient

$$z_1^T (A^T - \alpha I_n) = 0, \quad z_1^T Q_2 = 0, \quad (5.121)$$

$$z_2^T (A - \alpha I_n) = 0, \quad z_2^T B_1 = 0, \quad z_2^T B_2 = 0, \quad (5.122)$$

$$z_3^T (A - \alpha I_n) = 0, \quad z_3^T B_1 = 0, \quad z_3^T B_2 = 0. \quad (5.123)$$

Les relations (5.121) correspondent au test d'observabilité de Hautus de la paire (Q_2, A) , les relations (5.122) au test de commandabilité de Hautus de la paire (A, B_1) ou de (A, B_2) . Les hypothèses de commandabilité et d'observabilité mènent à la nullité des composantes z_1 , z_2 et z_3 . $\square$

Remarque 5.19. *Cela signifie que le cas particulier $p_1 B_2 + u_2^T R_{12} = 0$ peut être écarté avec quelques hypothèses faibles sur le système. Le leader doit être capable d'observer le système (paire (Q_2, A) observable) et au moins l'un des joueurs est capable de le commander ((A, B_1) ou (A, B_2) commandable). Une fois de plus, il est mis en évidence que les joueurs n'ont pas la même position hiérarchique.*

Nous pouvons ainsi supposer que

$$p_1 B_2 + u_2^T R_{12} \neq 0. \quad (5.124)$$

5.3.5.4 Cas $p_1 B_2 + u_2^T R_{12} \neq 0$

La relation (5.102) est équivalente aux deux relations suivantes : (5.102) au temps $t = t_f$ et sa dérivée par rapport au temps, c'est-à-dire,

$$\lambda_1(t_f) B_1 = x^T(t_f) K_{2f} B_1 = p_1(t_f) B_1 R_{11}^{-1} R_{21} = x^T(t_f) K_{1f} B_1 R_{11}^{-1} R_{21}, \quad (5.125)$$

et

$$\dot{\lambda}_1 B_1 = \dot{p}_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} \quad (5.126)$$

$$= (\lambda_1 A + x^T Q_2) B_1 \quad (5.127)$$

$$= \left(p_1 A + x^T Q_1 + (p_1 B_2 + u_2^T R_{12}) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right) B_1 R_{11}^{-1} R_{21}. \quad (5.128)$$

Ainsi

$$(p_1 B_2 + u_2^T R_{12}) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) B_1 = (\lambda_1 A + x^T Q_2) B_1 R_{21}^{-1} R_{11} - (p_1 A + x^T Q_1) B_1. \quad (5.129)$$

De plus, (5.102) est équivalent à

$$\begin{cases} (B_1^T K_{2f} - R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T K_{1f}) x(t_f) = 0, \\ (p_1 B_2 + u_2^T R_{12}) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) B_1 = (\lambda_1 A + x^T Q_2) B_1 R_{21}^{-1} R_{11} - (p_1 A + x^T Q_1) B_1. \end{cases} \quad (5.130)$$

L'équation (5.129) permet de déduire une expression de $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, car $p_1 B_2 + u_2^T R_{12} \neq 0$

$$(p_1 B_2 + u_2^T R_{12}) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = w_2 + w'_2, \quad (5.131)$$

avec

$$w_2 = ((\lambda_1 A + x^T Q_2) B_1 R_{21}^{-1} R_{11} - (p_1 A + x^T Q_1) B_1) \frac{B_1^T}{\|B_1\|^2}, \quad (5.132)$$

et $(w'_2)^T \in \text{Ker}(B_1^T)$ (arbitraire).

La contrainte (5.125) traduit une contrainte sur l'ensemble des conditions initiales $x_0 \in \mathbb{R}^n$, à partir desquelles une trajectoire optimale peut être engendrée.

Lemme 5.20. *Les solutions optimales existantes sont associées à un ensemble de valeurs de x_0 inclus dans un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de codimension m_1 (au pire).*

Démonstration. Ici, il est possible de chercher une solution optimale en supposant que le vecteur d'état adjoint $\lambda_1(t)$ est linéaire par rapport à l'état $x(t)$.

$$\lambda_1^T(t) = K_2(t) x(t). \quad (5.133)$$

La matrice $K_2(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifie

$$\dot{K}_2 x + K_2 (Ax - (B_2 R_{22}^{-1} B_2^T + B_1 R_{21}^{-1} B_1^T) K_2 x) = -A^T K_2 x - Q_2 x. \quad (5.134)$$

Nous pouvons imposer l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{K}_2 = -K_2 A - A^T K_2 - Q_2 + K_2 (B_2 R_{22}^{-1} B_2^T + B_1 R_{21}^{-1} B_1^T) K_2, \\ K_2(t_f) = K_{2f}. \end{cases} \quad (5.135)$$

Réciproquement, l'existence d'une solution est assurée classiquement par un raisonnement "à la Riccati" et par unicité de la trajectoire optimale. Cela est justifié *a posteriori* dans la suite par l'utilisation de la théorie des temps focaux.

En réinjectant $\lambda_1^T = K_2 x$ dans (5.96) et (5.106), l'état $x(t)$ vérifie la contrainte dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - (B_2 R_{22}^{-1} B_2^T + B_1 R_{21}^{-1} B_1^T) K_2(t)) x(t) = \tilde{A}x(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.136)$$

Soit $\mathcal{M}(t)$ la matrice de transition associée à (5.136). Alors $x(t) = \mathcal{M}(t)x_0$. Donc la contrainte (5.125) devient

$$(B_1^T K_{2f} - R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T K_{1f}) \mathcal{M}(t_f) x_0 = 0. \quad (5.137)$$

C'est une condition de codimension m_1 (au pire) sur l'état initial x_0 . $\square$

De plus, dans ce cas la trajectoire optimale est unique, mais elle est atteinte par toutes les commandes qui vérifient la relation (5.129). Une trajectoire optimale induit plusieurs $\frac{\partial u_2}{\partial x}$.

Le fait que chaque condition initiale ne génère pas une trajectoire optimale explique l'idée dans [Med78] de supposer que l'état initial est aléatoire, de loi uniforme sur la sphère unité et de remplacer le critère d'optimisation par sa valeur moyenne, en moyennant sur les états initiaux.

Remarque 5.21. *Dans le cas d'un problème d'optimisation sans critère terminal, la relation (5.125) ne réduit pas l'ensemble des conditions initiales x_0 associées à des trajectoires optimales.*

Nous rassemblons tous les résultats précédents dans le théorème suivant.

Théorème 5.22. *Si*

- $x_0 \neq 0$,
- Q_i , R_{ij} et K_{if} sont symétriques,
- $R_{11} > 0$, $R_{22} > 0$ et R_{12} et R_{21} sont inversibles,
- la paire (Q_2, A) est observable,
- au moins une des paires (A, B_1) ou (A, B_2) est commandable,
- rang $B_1 = m_1$ (B_1 est de rang plein),

alors la trajectoire optimale vérifie les conditions nécessaires

$$u_2(t, x(t)) = -R_{22}^{-1} B_2^T K_2(t) x(t), \quad u_1(t, x(t)) = -R_{21}^{-1} B_1^T K_2(t) x(t), \quad (5.138)$$

avec

$$\dot{x}(t) = (A - (B_2 R_{22}^{-1} B_2^T + B_1 R_{21}^{-1} B_1^T) K_2(t)) x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (5.139)$$

où

$$\dot{K}_2 = -K_2 A - A^T K_2 - Q_2 - K_2 (B_2 R_{22}^{-1} B_2^T + B_1 R_{21}^{-1} B_1^T) K_2, \quad K_2(t_f) = K_{2f}. \quad (5.140)$$

de plus $\frac{\partial u_2(t, x(t))}{\partial x}$ vérifie

$$(p_1 B_2 + u_2^T R_{12}) \frac{\partial u_2}{\partial x} B_1 = (\lambda_1 A + x^T Q_2) B_1 R_{21}^{-1} R_{11} - (p_1 A + x^T Q_1) B_1, \quad (5.141)$$

où

$$\dot{p}_1 = -p_1 A - x^T Q_1 - (p_1 B_2 + u_2^T R_{12}) \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad p_1(t_f) = x^T(t_f) K_{1f}, \quad (5.142)$$

et

$$(B_1^T K_{2f} - R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T K_{1f}) x(t_f) = 0. \quad (5.143)$$

Dans la section suivante, la théorie des temps focaux permet d'obtenir les conditions suffisantes pour une stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle fermée.

5.4 Conditions suffisantes

Dans ce paragraphe, afin d'obtenir les conditions suffisantes, la théorie des temps focaux est utilisée. Il s'agit bien des temps focaux et non conjugués, comme l'état final $x(t_f)$ est libre. Les conditions suffisantes sont d'abord développées pour le leader, puis pour le suiveur dans le cas des jeux purement linéaires quadratiques.

Remarque 5.23. *Pour une présentation plus détaillée des points focaux et des points conjugués, il est possible de se reporter à [Ber83, Car99].*

5.4.1 Conditions suffisantes pour le leader

Le problème d'optimisation pour le leader est

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - B_1 R_{11}^{-1} B_1^T p_1^T + B_2 u_2, \\ \dot{p}_1^T = -A^T p_1^T - Q_1 x - w^T (p_1 B_2 + u_2^T R_{12})^T, \\ \hat{J}_2(u_2) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q_2 x + u_2^T R_{22} u_2 + p_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T p_1^T) dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) K_{2f} x(t_f), \end{cases} \quad (5.144)$$

avec $x(0) = x_0$ et $p_1(t_f) = x^T(t_f) K_{2f}$. Quand $p_1 B_2 + u_2^T R_{12} \neq 0$, la commande w est dite en anglais "cheap" [BC03], et p_1 peut être considérée comme une commande. Plus exactement $y = B_1 p_1^T$ est considéré comme une commande. Alors le problème (5.144) peut se réécrire en

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - B_1 R_{11}^{-1} y + B_2 u, \\ \hat{J}_2(u_2, y) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q_2 x + u_2^T R_{22} u_2 + y^T R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} y) dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) K_{2f} x(t_f). \end{cases} \quad (5.145)$$

Remarque 5.24. *Notons que le problème linéaire-quadratique avec les commandes (u_2, y) peut être relié à l'approche optimale d'équipe de [BO80]. Dans cette référence, la première étape dans la recherche d'un équilibre de Stackelberg est d'obtenir un minimum du critère du leader, par une coopération collective entre le leader et le suiveur. Alors la commande du suiveur est modifiée pour atteindre le minimum du suiveur.*

Le problème linéaire-quadratique correspond à trouver le couple de commandes optimales (u_2, y) . Une condition nécessaire pour l'existence de ces commandes optimales est $R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} \geq 0$. C'est équivalent à la condition $R_{21} \geq 0$, comme R_{11} est définie positive. Une condition suffisante, quand t_f est petit, est que $R_{21} > 0$. Dans la suite, $R_{21} > 0$ est imposé.

Pour caractériser les temps focaux, et en prenant

$$u_2 = -R_{22}^{-1} B_2^T \lambda_1^T, \quad y = R_{11} R_{21}^{-1} B_1^T \lambda_1^T, \quad (5.146)$$

nous considérons le système variationnel

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = A \delta x - (B_2 R_{22}^{-1} B_2^T + B_1 R_{21}^{-1} B_1^T) \delta \lambda_1^T, \\ \delta \dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 A - \delta x^T Q_2. \end{cases} \quad (5.147)$$

Nous cherchons le premier temps focal noté $t_c > 0$ (voir [BFT06]), tel qu'il existe une solution $(\delta x, \delta \lambda_1)$ vérifiant $(x(0) = x_0)$ étant fixé

$$\begin{cases} \delta x(0) = 0, \\ \delta \lambda_1(t_c) = \delta x^T(t_c) K_{2f}. \end{cases} \quad (5.148)$$

C'est équivalent à

$$\|K(t)\| \begin{matrix} \longrightarrow & +\infty, \\ t \rightarrow t_c \\ t < t_c \end{matrix} \quad (5.149)$$

où $K(t)$ est la solution de l'équation différentielle de Riccati

$$\begin{cases} \dot{K} = KA + A^T K + Q_2 - K(B_2 R_{22}^{-1} B_2^T + B_1 R_{21}^{-1} B_1^T) K, \\ K(0) = K_{2f}. \end{cases} \quad (5.150)$$

Le premier temps focal t_c est le temps fini d'explosion de l'équation de Riccati (5.150). La matrice $K(t)$ peut être vue comme la matrice $K_2(t)$ après un changement de temps $t \in [0, t_f] \mapsto (t_f - t)$.

Lemme 5.25. *Si $R_{22} > 0$ et $R_{21} > 0$ alors $t_c > 0$.*

Démonstration. De l'équation (5.144), on tire

$$x(t) = e^{tA} x_0 - \int_0^t e^{(t-s)A} (B_1 R_{11}^{-1} y(s) - B_2 u_2(s)) ds. \quad (5.151)$$

A un $t_f > 0$ fixé, pour tout $t \in [0, t_f]$, il existe des scalaires constants $C_k \geq 0$ vérifiant

$$\|x(t)\| \leq C_1 \|x_0\| + C_2 \sqrt{t_f} \left[\left(\int_0^{t_f} \|y(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{t_f} \|u_2(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.152)$$

A partir de cette expression, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t_f} x^T(s) Q_2 x(s) ds \right\| &\leq C_3 \|x_0\|^2 + C_4 t_f^2 \left(\int_0^{t_f} \|y(s)\|^2 ds + \int_0^{t_f} \|u_2(s)\|^2 ds \right) \\ &\quad + C_5 t_f + C_5 t_f^2 \int_0^{t_f} \|y(s)\|^2 ds + C_5 t_f^2 \int_0^{t_f} \|u_2(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (5.153)$$

De plus, en supposant que $R_{22} > 0$ et $R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} > 0$,

$$\left\| \int_0^{t_f} u_2^T(s) R_{22} u_2(s) ds \right\| \geq C_6 \int_0^{t_f} \|u_2(s)\|^2 ds, \quad (5.154)$$

$$\left\| \int_0^{t_f} y^T(s) R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} y(s) ds \right\| \geq C_6 \int_0^{t_f} \|y(s)\|^2 ds. \quad (5.155)$$

En reprenant ces inégalités, il est possible de calculer une borne inférieure pour le critère $\hat{J}_2(u_2, y)$

$$2\hat{J}_2(u_2, y) \geq (C_6 - (C_4 + C_5) t_f^2) \left[\int_0^{t_f} \|u_2\|^2 ds + \int_0^{t_f} \|y\|^2 ds \right] \quad (5.156)$$

$$+ x^T(t_f) K_{2f} x(t_f) - C_3 \|x_0\|^2 - C_5 t_f. \quad (5.157)$$

Pour t_f assez petit

$$t_f \leq \sqrt{\frac{C_6}{C_4 + C_5}}, \quad (5.158)$$

Le critère $\hat{J}_2(u, y)$ admet une borne inférieure finie, et donc $0 < t_f < t_c$. $\square$

Remarque 5.26. *En outre, si $Q_2 \geq 0$, alors l'équation (5.150) admet une solution sur $[0, +\infty[$. Il n'existe pas de temps fini d'explosion pour cette équation, et donc il n'y a pas de premier temps focal ($t_c \rightarrow +\infty$).*

5.4.2 Conditions suffisantes pour le suiveur

Le problème d'optimisation pour le suiveur est

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2(t, x), & x(0) = x_0, \\ \hat{J}_1 = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q_1 x + u_2^T R_{12} u_2 + u_1^T R_{11} u_1) dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) K_{1f} x(t_f). \end{cases} \quad (5.159)$$

avec

$$u_1 = -R_{11}^{-1} B_1^T p_1^T, \quad (5.160)$$

où

$$\dot{p}_1 = -p_1 A - x^T Q_1 - (p_1 B_2 + u_2^T R_{12}) \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad p_1(t_f) = x^T(t_f) K_{1f}. \quad (5.161)$$

Le système variationnel, le long de la trajectoire $x(\cdot)$ est

$$\delta \dot{x} = A \delta x + B_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \delta x - B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \delta p_1^T, \quad (5.162)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{p}_1 = & -\delta p_1 A - \delta x^T Q_1 - (p_1 B_2 + u_2^T R_{12}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \delta x \\ & - \left(\delta p_1 B_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \delta x \right)^T R_{12} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.163)$$

avec $\delta x(0) = 0$ et $\delta p_1(t_f) = \delta x^T(t_f) K_{1f}$. Ici $u_2(t, x)$ est affine par rapport à l'état x , donc $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0$. L'équation (5.163) se réécrit alors en

$$\delta \dot{p}_1 = -\delta p_1 A - \delta x^T Q_1 - \left(\delta p_1 B_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \delta x \right)^T R_{12} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x}. \quad (5.164)$$

Un temps focal t'_c caractérise l'existence d'une solution $(\delta x, \delta p_1)$ telle que $\delta x(0) = 0$ et $\delta p_1(t'_c) = \delta x^T(t'_c) K_{1f}$. Pour chaque choix du terme $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, il existe un premier temps focal t'_c .

5.4.3 Conditions suffisantes pour la stratégie de Stackelberg

Les conditions suffisantes assurant l'existence d'une trajectoire optimale sont rassemblées dans le théorème suivant.

Théorème 5.27. *Supposons que*

- $x_0 \neq 0$,
- Q_i , R_{ij} et K_{if} sont symétriques,
- $R_{11} > 0$, $R_{22} > 0$, $R_{12} > 0$, et R_{21} inversible,
- la paire (Q_2, A) est observable,
- au moins l'une des paires (A, B_1) ou (A, B_2) est commandable,
- rang $B_1 = m_1$ (B_1 est de rang plein).

Soit w'_2 une fonction du temps t telle que $w'_2 \in (B_1^T)^\perp$, et soit

$$T^* = \min(t_c, t'_c) > 0. \quad (5.165)$$

Pour tout $t_f < T^*$, il existe une solution unique de l'équation différentielle de Riccati (5.135). Notons $x(t, x_0)$ la solution de l'équation (5.136), et soit

$$\mathcal{H} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid (B_1^T K_{2f} - R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T K_{1f}) x(t_f, x_0) = 0\}. \quad (5.166)$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathcal{H}$, il existe une unique solution optimale du problème d'optimisation sur $[0, t_f]$ associée à w'_2 . Les commandes optimales (u_1, u_2) associées vérifient (5.131) et de plus

$$u_1(t, x(t)) = -R_{22}^{-1} B_2^T K_2(t) x(t), \quad u_2(t, x(t)) = -R_{21}^{-1} B_1^T K_2(t) x(t). \quad (5.167)$$

En outre, pour tout $x_0 \notin \mathcal{H}$, il n'existe pas de solution optimale partant de x_0 .

Remarque 5.28. De ce fait, le théorème 5.27 offre un résultat d'existence de solutions optimales au sens d'une stratégie de Stackelberg, ce qui est nouveau.

Remarque 5.29. Les conditions suffisantes sont développées dans le cas linéaire-quadratique pur. Le résultat est global. Il est possible, de même, par un raisonnement similaire, d'exprimer des conditions suffisantes dans le cas général de critères non-linéaires (non limités au cas quadratique). Néanmoins elles ne sont pas développées ici, car leurs expressions sont plus techniques et aussi car elles ne mènent qu'à un résultat local [BFT06, chap. 9].

Remarque 5.30. Le fait que seuls les états initiaux $x_0 \in \mathcal{H}$ puissent générer une trajectoire optimale peut aussi se comprendre avec la contrainte que les commandes u_i soient continûment dérivables par rapport à l'état x . Le résultat aurait été différent en considérant des commandes qui puissent être discontinues en l'état. Hypothèse qui est faite dans les jeux utilisant la notion de représaille du leader sur le suiveur, si le suiveur n'agit pas comme le leader le souhaite.

5.4.4 Extension : pondération de $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ dans les critères

Le problème d'optimisation est dégénéré, car pour chaque $x_0 \in \mathcal{H}$, il peut exister une infinité de choix pour le terme $\frac{\partial u_2^{**}}{\partial x}$. Un moyen pour rendre unique ce choix est d'inclure une pondération sur le terme $\frac{\partial u_2^{**}}{\partial x}$ dans le critère J_2 du leader (ce n'est pas nécessaire dans le critère du suiveur). Alors le leader tient compte d'une restriction sur le Jacobien de sa commande. Le leader n'est plus omnipotent.

Le nouveau critère du leader est alors

$$\begin{aligned} J_2(u_1, u_2) = & \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[x^T Q_2 x + u_1^T R_{21} u_1 + u_2^T R_{22} u_2 + \sum_{j=1}^{m_1} \left(\frac{\partial u_2^j}{\partial x} \right) R_j \left(\frac{\partial u_2^j}{\partial x} \right)^T \right] dt \\ & + \frac{1}{2} x(t_f)^T K_{2f} x(t_f), \end{aligned} \quad (5.168)$$

où u_2^j sont les m_2 composantes de la commande, et $R_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $(\forall j = 1, \dots, m_2)$ sont des matrices symétriques et définies positives.

Il n'y a pas de changement pour le suiveur. Cependant les conditions nécessaires pour le leader sont modifiées comme suit

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 = \lambda_1 B_2 - \lambda_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^T R_{12} + \lambda_2^0 u_2^T R_{22}, \quad (5.169)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_{2,y}} = 0 = \left(\lambda_2 (B_2^T p_1^T + R_{12} u_2)_j + \frac{\partial u_2^j}{\partial x} R_j \right)_{j=1, \dots, m_2}. \quad (5.170)$$

Les autres conditions nécessaires (5.19) et (5.20) sont inchangées. Les équations (5.169) et (5.169) sont faciles à résoudre, sans considération de cas particuliers. Dans ce cadre de travail, λ_2 n'est plus

identiquement nul. On obtient un problème d'optimisation non-linéaire. Le calcul mène au résultat de [PC79a]. Plus précisément de (5.170), on tire

$$\frac{\partial u_2^{j,**}}{\partial x} = \left((B_2^T p_1^T + R_{12} u_2)_j \lambda_2 R_j^{-1} \right)_{j=1, \dots, m_2}. \quad (5.171)$$

Afin de simplifier comme dans [PC79a], il est supposé que $R_j = R > 0, \forall j = 1, \dots, m_2$. Alors

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = (B_2^T p_1^T + R_{12} u_2) \lambda_2 R^{-1}. \quad (5.172)$$

En réinjectant cette expression dans l'équation (5.169),

$$R_{22} u_2 = -B_2^T \lambda_1^T + R_{12} B_2^T p_1^T \lambda_2 R^{-1} \lambda_2^T + R_{12}^2 u_2 \lambda_2 R^{-1} \lambda_2^T, \quad (5.173)$$

ou bien

$$(R_{22} - \lambda_2 R^{-1} \lambda_2^T R_{12}^2) u_2 = -B_2^T \lambda_1^T + R_{12} B_2^T p_1^T \lambda_2 R^{-1} \lambda_2^T. \quad (5.174)$$

Remarque 5.31. Pour $t = 0$, $\lambda_2(0) = 0$, alors $R_{22} - \lambda_2 R^{-1} \lambda_2^T R_{12}^2 = R_{22} > 0$ est inversible. Pour $t \geq 0$ assez petit, la matrice $R_{22} - \lambda_2(t) R^{-1} \lambda_2^T(t) R_{12}^2$ est inversible.

Tant que $R_{22} - \lambda_2(t) R^{-1} \lambda_2^T(t) R_{12}^2$ est inversible, la commande optimale vérifie

$$u_2 = (R_{22} - \lambda_2 R^{-1} \lambda_2^T R_{12}^2)^{-1} (-B_2^T \lambda_1^T + R_{12} B_2^T p_1^T \lambda_2 R^{-1} \lambda_2^T) \quad (5.175)$$

Le problème d'optimisation non linéaire devient

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - B_1 R_{11}^{-1} B_1 p_1^T \\ &\quad + B_2 (R_{22} - \lambda_2 R^{-1} \lambda_2^T R_{12}^2)^{-1} (-B_2^T \lambda_1^T + R_{12} B_2^T p_1^T \lambda_2 R^{-1} \lambda_2^T), \end{aligned} \quad (5.176)$$

$$\dot{p}_1 = -p_1 A - x^T Q_1 - \|p_1 B_2 + u_2^T R_{12}\|^2 \lambda_2 R^{-1}, \quad (5.177)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 A + \lambda_2 Q_1 - x^T Q_2, \quad (5.178)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= \lambda_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T + \lambda_2 (A^T + R^{-1} \lambda_2^T (p_1 B_2 + u_2^T R_{12}) B_2^T) \\ &\quad - p_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T. \end{aligned} \quad (5.179)$$

avec les conditions aux limites

$$x(0) = x_0, \quad (5.180)$$

$$p_1(t_f) = x^T(t_f) K_{1f}, \quad (5.181)$$

$$\lambda_1(t_f) = x^T(t_f) K_{2f} - \lambda_2(t_f) K_{1f}, \quad (5.182)$$

$$\lambda_2(0) = 0. \quad (5.183)$$

Remarque 5.32. Si $R = \gamma I$ et $\gamma \rightarrow +\infty$, on obtient à la limite $\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$ et on reconnaît les conditions nécessaires pour une stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle ouverte. Notons que pour obtenir ce résultat, seul une pondération infinie sur $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ est nécessaire sur le critère du leader.

Ces conditions sont des conditions nécessaires. Comme précédemment, la théorie des temps focaux mène à des conditions suffisantes associées à la stratégie de Stackelberg en boucle fermée, incluant une pondération pour $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ dans le critère du leader à un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné. Pour t_f plus petit que le temps focal global du système, il existe seulement une trajectoire optimale partant de x_0 , solution de (5.176)-(5.183), associée à la commande optimale $\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)$ (5.175), (5.172).

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle fermée est étudiée en détail. Le cadre de travail est restreint aux jeux à deux joueurs. La présence du Jacobien de la commande du leader constitue une difficulté majeure pour résoudre ce problème d'optimisation. Les conditions nécessaires pour le suiveur et leader sont décrites. La stratégie de Stackelberg dégénère, avec une hypothèse supplémentaire faible, traduisant le fait que le leader est omnipotent par rapport au suiveur. La théorie des temps focaux permet de fournir des conditions suffisantes pour le problème d'optimisation à deux joueurs. Le cas linéaire-quadratique pur est utilisé pour illustrer ce résultat. Une extension est proposée pour permettre l'existence d'une trajectoire optimale partant de toute condition initiale, en incluant une pondération du Jacobien de la commande du leader dans son propre critère. Le chapitre suivant est une utilisation directe de ce chapitre dans le cas de la synthèse d'une commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$.

Chapitre 6

La commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ par la stratégie de Stackelberg

6 × 142857
= 857142

6.1 Introduction

Le problème de commande robuste a été intensivement étudié ces récentes années pour réaliser un compromis entre des spécifications traduites par des normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ [BH89, ZGBD94, DZGB94]. En fait, un niveau prédéterminé pour la norme $\mathcal{H}_\infty$ ne peut pas être garanti avec une commande purement $\mathcal{H}_2$ [Doy78]. Plusieurs approches ont été proposées pour résoudre ce problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$. Cela inclut les approches par les équations de Riccati de type non-standard [BH89], par la paramétrisation de Youla [Sch95], l'optimisation convexe [KR91], ou encore par une interprétation entropique [MGL91]... L'approche par retour d'état a été traitée dans [RK91], alors qu'un compromis entre les commandes purement $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ est proposé dans [HHK97].

Dans ce chapitre, le problème de commande robuste mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ est formulé comme un jeu différentiel de Stackelberg. Une approche par la théorie des jeux a déjà été proposée pour résoudre ce problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ [LAH94, FS97, CZ01] à l'aide de la stratégie de Nash. Néanmoins, à cause de la symétrie entre les joueurs dans la stratégie de Nash, un joueur cherche à minimiser la norme $\mathcal{H}_2$ et le deuxième joueur est associé à la perturbation dans le pire des cas en terme de norme $\mathcal{H}_\infty$. Il s'agit d'un compromis entre les normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ et non d'une d'optimisation sous contrainte.

Dans la stratégie de Stackelberg, la hiérarchie entre le leader et le suiveur conduit à la minimisation de la norme $\mathcal{H}_2$ par le leader sous une contrainte sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ associée au suiveur. Le biais d'information dans un tel jeu est approprié pour résoudre ce type de problème d'optimisation sous contrainte. Le modèle utilisé ici a été introduit dans [ZGBD94, DZGB94].

Ce chapitre, qui reprend les publications [JTAK06a, JTAK06b], est organisé de la façon suivante. Le problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ est tout d'abord formulé. Les conditions nécessaires pour déterminer une commande issue de la stratégie de Stackelberg dans ce cadre sont données. La théorie des temps focaux est utilisée pour obtenir les conditions suffisantes de l'existence de telles commandes. Un exemple illustre cette approche du problème pour terminer ce chapitre.

Afin de rendre plus claire la lecture de ce chapitre, qui utilise le même raisonnement que le chapitre précédent, certains éléments déjà définis ou utilisés pourront être reformulés ici.

6.2 Formulation du problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$

Pour la définition des normes des signaux et du système, il est possible de se reporter à [DFT90, ZDG96] par exemple.

Définition 6.1 (Norme $\mathcal{H}_2$ sur un horizon fini). Soit un signal $s(t) \in \mathcal{L}^2([t_0, t_f])$. Sa norme $\mathcal{H}_2$ est définie par

$$\|s\|_{2,[t_0,t_f]}^2 = \int_{t_0}^{t_f} s(t)^T s(t) dt. \quad (6.1)$$

En considérant un système Σ , d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, il est possible de définir la norme $\mathcal{H}_\infty$ sur un horizon fini.

Définition 6.2 (Norme $\mathcal{H}_\infty$ sur un horizon fini). La norme $\mathcal{H}_\infty$ induite par la norme $\mathcal{H}_2$, d'un système Σ sur un horizon fini $[t_0, t_f]$ est définie par

$$\|\Sigma\|_{\infty,[t_0,t_f]} = \sup_{e \in \mathcal{L}^2([t_0,t_f])} \frac{\|s\|_{2,[t_0,t_f]}}{\|e\|_{2,[t_0,t_f]}}. \quad (6.2)$$

Remarque 6.3. Soit $\gamma > 0$. Alors en posant

$$J_\infty = \int_{t_0}^{t_f} [\gamma^2 e(t)^T e(t) - s(t)^T s(t)] dt, \quad (6.3)$$

on établit que

$$\|\Sigma\|_{\infty,[t_0,t_f]} < \gamma \iff J_\infty > 0. \quad (6.4)$$

Considérons maintenant le système décrit par la figure 6.1

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_\infty w_\infty(t) + B_2 w_2(t) + Bu(t) = f(x, w_\infty, w_2, u), \\ z_\infty(t) &= C_\infty x(t) + D_\infty w_\infty(t) + D_{\infty u} u(t), \\ z_2(t) &= C_2 x(t) + D_{2u} u(t), \\ z(t) &= x(t), \end{cases} \quad (6.5)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $w_2(t) \in \mathbb{R}^{r_2}$, $w_\infty(t) \in \mathbb{R}^{r_\infty}$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$, et $z_\infty(t) \in \mathbb{R}^{m_\infty}$. Les matrices A , B_∞ , B_2 , B , C_∞ , C_2 , D_∞ , $D_{\infty u}$ et D_{2u} sont des matrices constantes, de dimensions appropriées. B_∞ est supposée de rang plein.

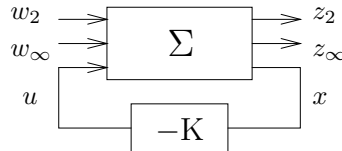


FIGURE 6.1 – Structure du système.

Par souci de simplicité la sortie z pour le retour de sortie est supposée égale à l'état x . A $w_\infty = 0$, l'entrée w_2 et la sortie z_2 correspondent à un canal et à $w_2 = 0$, l'entrée w_∞ et la sortie z_∞ correspondent à un autre canal. Ce dernier canal est utilisé pour définir la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système.

Définition 6.4 (Problème posé). *Le problème de synthèse, qui est proposé ici, est de déterminer, à une entrée $w_2(t)$ fixée, une commande par retour d'état $u(x, t)$ stabilisant le système (6.5) et minimisant l'énergie de la sortie z_2 sous la contrainte, que la norme $\mathcal{H}_\infty$ est inférieure à un niveau fixé γ , c'est-à-dire*

$$u(t) = u^*(x, t) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \inf_{u \in \mathcal{U}} \|z_2\|_{2, [t_0, t_f]} \\ \text{soumis à } \sup_{w_\infty \in \mathcal{W}_\infty} \frac{\|z_\infty\|_{2, [t_0, t_f]}}{\|w_\infty\|_{2, [t_0, t_f]}} < \gamma. \end{cases}$$

Les ensembles admissibles pour les entrées u , w_2 et w_∞ sont respectivement $\mathcal{U} = \mathcal{L}^2([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$, $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}^2([t_0, t_f], \mathbb{R}^{r_2})$, et $\mathcal{W}_\infty = \mathcal{L}^2([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{r_\infty})$.

6.3 Application de la stratégie de Stackelberg

6.3.1 Définition

Soit

$$J_2(u, w_\infty, w_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [z_2^T(t) z_2(t) + \alpha^2 w_\infty^T(t) R_\gamma w_\infty(t)] dt = \int_{t_0}^{t_f} L_2(x, u, w_\infty, w_2) dt, \quad (6.6)$$

avec

$$L_2 = \frac{1}{2} (x^T(t) C_2^T C_2 x(t) + 2x^T(t) C_2^T D_{2u} u(t) + u^T(t) D_{2u}^T D_{2u} u(t) + \alpha^2 w_\infty^T(t) R_\gamma w_\infty(t)), \quad (6.7)$$

$R_\gamma = \gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty > 0$, pour $\gamma > \bar{\sigma}(D_\infty)$, la plus grande valeur singulière de la matrice D_∞ , et

$$J_\infty(u, w_\infty, w_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [-z_\infty^T(t) z_\infty(t) + \gamma^2 w_\infty^T(t) w_\infty(t)] dt = \int_{t_0}^{t_f} L_\infty(x, u, w_\infty) dt, \quad (6.8)$$

avec

$$L_\infty = \frac{1}{2} (-x^T C_\infty^T C_\infty x + w_\infty^T (\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty) w_\infty - u^T D_{\infty u}^T D_{\infty u} u - x^T C_\infty^T D_{\infty} w_\infty - x^T C_\infty^T D_{\infty u} u - w_\infty^T D_{\infty}^T D_{\infty u} u), \quad (6.9)$$

où $x(\cdot)$, $z_\infty(\cdot)$ et $z_2(\cdot)$ sont les solutions de (6.5).

Le critère J_2 défini par (6.6) est, au terme correctif $\alpha^2 w_\infty^T(t) R_\gamma w_\infty(t)$ près, associé à l'énergie de la sortie z_2 du système (6.5). Pour $\alpha \neq 0$, J_2 est convexe par rapport à w_∞ .

Le critère J_∞ défini par (6.8) est associé à la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système (6.5), selon la remarque 6.3. La borne inférieure de J_∞ sur $w_\infty \in \mathcal{W}_\infty$ est soit finie (et atteinte) soit est égale à $-\infty$, en fonction des valeurs de γ et surtout du temps final t_f . En fait, en notant t_c le premier temps focal du système (voir la partie 6.4), alors $\inf J_\infty \geq 0$ si $t_f < t_c$, et $\inf J_\infty = -\infty$ si $t_f > t_c$.

La commande optimale $u = u^{**}$ minimise la norme $\mathcal{H}_2$, quand $w_\infty = w_\infty^{**}$, la pire des entrées au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$, est appliquée. La stratégie de Stackelberg est bien adaptée pour gérer ce type de problème de minimisation sous contrainte. Le leader agit en choisissant la commande u et le suiveur en choisissant la commande w_∞ .

A une commande $\tilde{u}$ du leader, il est possible de définir l'ensemble des réactions rationnelles du suiveur $\mathcal{R}_\infty(\tilde{u})$, qui est l'ensemble des entrées admissibles w_∞ , qui mènent à la borne inférieure de $J_\infty(\tilde{u}, w_\infty)$.

$$\mathcal{R}_\infty(\tilde{u}) = \left\{ w_\infty \mid w_\infty = \arg \inf_{w_\infty} J_\infty(\tilde{u}, w_\infty) \right\}. \quad (6.10)$$

L'équilibre de Stackelberg (u^{**}, w_∞^{**}) pour ce problème d'optimisation s'écrit donc

$$\begin{cases} w_\infty^* \in \mathcal{R}_\infty(u^{**}), \\ \max_{w_\infty \in \mathcal{R}_\infty(u^{**})} J_2(u^{**}, w_\infty) \leq \max_{w_\infty \in \mathcal{R}_\infty(u)} J_2(u, w_\infty), \quad \forall u \in \mathcal{L}^2([t_0, t_f], \mathbb{R}^r), \end{cases} \quad (6.11)$$

(voir [SC73b, SC73a] et chapitre 1).

Le système différentiel (6.5) possède trois entrées u , w_2 et w_∞ . u et w_∞ sont considérées comme les deux commandes des deux joueurs du jeu à somme non nulle. L'entrée w_2 n'est pas un joueur au sens strict, mais est considérée comme une perturbation. Le cadre de travail est la structure d'information en boucle fermée, à l'instar de [LAH94], $u^{**} = u^{**}(x, t) \in \mathcal{U}$ et $w_\infty^{**} = w_\infty^{**}(x, t) \in \mathcal{W}_\infty$ sont des fonctions implicites du temps t et de l'état x .

6.3.2 Conditions nécessaires pour le suiveur

Résoudre le problème du point de vue du suiveur correspond à déterminer l'ensemble des réactions rationnelles $\mathcal{R}_\infty(\cdot)$. Il s'agit d'un problème d'optimisation standard, qui peut être résolu par l'application du Principe du Minimum de Pontryagin. On définit l'Hamiltonien (voir [PBGM74, PBGM62]) $H_\infty = \psi_\infty^\circ L_\infty + \psi_\infty f$, où le vecteur ligne $\psi_\infty \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état adjoint associé à la contrainte dynamique (6.5) et le scalaire $\psi_\infty^\circ \geq 0$ à L_∞ , le coût instantané de J_∞ . Les conditions nécessaires qui doivent être satisfaites par le suiveur peuvent s'écrire le long de la solution

$$\frac{\partial H_\infty}{\partial w_\infty}(t) = \psi_\infty^\circ \frac{\partial L_\infty}{\partial w_\infty}(t) + \psi_\infty(t) \frac{\partial f}{\partial w_\infty}(t) = 0, \quad (6.12)$$

$$\dot{\psi}_\infty(t) = -\psi_\infty^\circ \left(\frac{\partial L_\infty}{\partial x}(t) + \frac{\partial L_\infty}{\partial u}(t) \frac{\partial u^{**}}{\partial x}(t) \right) - \psi_\infty(t) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t) \frac{\partial u^{**}}{\partial x}(t) \right). \quad (6.13)$$

De plus, comme l'état final est libre, la condition de transversalité donne $\psi_\infty(t_f) = 0$.

Cela implique que $\psi_\infty^\circ \neq 0$. Sans perte de généralité, et par souci de normalisation, on pose $\psi_\infty^\circ = 1$.

Les conditions (6.12) et $\gamma > \bar{\sigma}(D_\infty)$ impliquent, que R_γ est inversible et que l'entrée optimale w_∞^{**} (la pire des entrées au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$ pour une commande u) est donnée par

$$w_\infty^{**}(t) = -R_\gamma^{-1} [-D_\infty^T C_\infty x(t) - D_\infty^T D_{\infty u} u(t) + B_\infty^T \psi_\infty^T(t)] = S(x, u, \psi_\infty). \quad (6.14)$$

On introduit les notations suivantes

$$\begin{aligned}
W_\gamma &= I + D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T, \\
U &= D_{2u}^T D_{2u} + \alpha^2 D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T D_{\infty u}, \\
N &= R_\gamma + \alpha^2 D_\infty^T D_{\infty u} U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty, \\
\bar{B} &= B + B_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T D_{\infty u}, \\
\tilde{B} &= B_\infty + \alpha^2 \bar{B} U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty, \\
\bar{C}_u &= D_{2u}^T C_2 + \alpha^2 D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T C_\infty, \\
\bar{C}_\infty &= (D_\infty^T D_{\infty u} U^{-1} \bar{C}_u - D_\infty^T C_\infty), \\
\hat{S}_\lambda &= \bar{B} U^{-1} \bar{B}^T, \\
\hat{S}_\infty &= S_\infty + \alpha^2 \bar{B} U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} B_\infty^T, \\
S_\infty &= B_\infty R_\gamma^{-1} B_\infty^T, \\
\bar{S}_\infty &= S_\infty + \alpha^2 B_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T D_{\infty u} U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} B_\infty^T, \\
\tilde{S} &= \hat{S}_\lambda + \frac{1}{\alpha^2} \tilde{B} N^{-1} \tilde{B}^T, \\
Q &= C_2^T C_2 + \alpha^2 C_\infty^T D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T C_\infty - \bar{C}_u^T U^{-1} \bar{C}_u, \\
\tilde{Q} &= Q - \alpha^2 \bar{C}_\infty^T N^{-1} \bar{C}_\infty, \\
\bar{A} &= A + B_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T C_\infty, \\
\hat{A} &= \bar{A} - \bar{B} U^{-1} \bar{C}_u, \\
\tilde{A} &= \hat{A} - \hat{S}_\infty \bar{S}_\infty^{-1} B_\infty R_\gamma^{-1} \bar{C}_\infty,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_\infty^1(x, u, \psi_\infty) &= x^T C_\infty^T W_\gamma C_\infty + u^T D_{\infty u}^T W_\gamma C_\infty - \psi_\infty \bar{A}, \\
F_\infty^2(x, u, \psi_\infty) &= x^T C_\infty^T W_\gamma D_{\infty u} + u^T D_{\infty u}^T W_\gamma D_{\infty u} - \psi_\infty \bar{B}, \\
\tilde{f}(x(t), u(t), \psi_\infty(t), w_2(t)) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) - S_\infty \psi_\infty^T(t) + B_2 w_2(t)
\end{aligned}$$

Alors

$$\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t), u(t), \psi_\infty(t), w_2(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.15)$$

$$\dot{\psi}_\infty^T = \left(F_\infty^1(x, u, \psi_\infty) + F_\infty^2(x, u, \psi_\infty) \frac{\partial u^{**}}{\partial x} \right)^T, \quad \psi_\infty(t_f) = 0, \quad (6.16)$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_\infty(x, u, \psi_\infty) &= -\frac{1}{2} (C_\infty x + D_{\infty u} u)^T W_\gamma (C_\infty x + D_{\infty u} u) + \frac{1}{2} \psi_\infty S_\infty \psi_\infty^T, \\
\tilde{L}_2(x, u, \psi_\infty, w_2) &= L_2(x, u, S(x, u, \psi_\infty), w_2).
\end{aligned}$$

6.3.3 Principe du Minimum de Pontryagin pour une classe particulière

La minimisation de J_2 soumise à (6.15) et (6.16) n'est pas un problème d'optimisation standard. Par souci de lisibilité, dans la suite $\frac{\partial u^{**}}{\partial x}$, le Jacobien de $u(t, y)$ par rapport à la deuxième variable sera noté u_y . Pour résoudre ce type de problème, du point de vue du leader, l'état augmenté X est introduit. Cet état augmenté X comporte l'état x , le vecteur d'état adjoint ψ_∞^T , et le coût instantané x° , vérifiant $\dot{x}^\circ = \tilde{L}_2$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \psi_\infty^T \\ x^\circ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1}, \quad \dot{X} = F(t, X, u, u_y^T) = \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ F_\infty^{1T} + u_y^T F_\infty^{2T} \\ \tilde{L}_2 \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

avec les conditions aux limites

$$x(0) = x_0, \quad \psi_\infty(t_f) = 0, \quad x^\circ(0) = 0, \quad (6.18)$$

où $u = u(t, h(X)) = u(t, x)$, avec $h(X) = h \begin{pmatrix} x^T & \psi_\infty & x^{\circ T} \end{pmatrix}^T = x$.

Il est montré dans la suite que chaque commande optimale u^{**} pour le problème d'optimisation du leader (minimiser J_2 sous les contraintes (6.15) et (6.16)) est une commande singulière pour le système (6.17). Ce point crucial permet l'adaptation du Principe du Minimum de Pontryagin au problème (6.17).

On rappelle la définition de l'application entrée-sortie et d'une commande singulière (voir [LM67, Tre05, BC03]).

Définition 6.5. *L'application entrée-sortie au temps t_f du système (6.17) avec l'état initial X_0 est l'application*

$$\begin{aligned} E_{X_0, t_f} : \mathcal{U} = L^2([0, t_f] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r) &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \\ u &\longmapsto X_u(t_f), \end{aligned} \quad (6.19)$$

où $X_u(\cdot)$ désigne la trajectoire solution de (6.17) associée à la commande u tel que $X_u(t_0) = X_0$.

Si la fonction F dans (6.17) est de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$, alors l'application entrée-sortie E_{X_0, t_f} est aussi de classe $\mathcal{C}^p$.

Pour déterminer la dérivée de Fréchet de E_{X_0, t_f} , considérons la commande δu telle que $u + \delta u \in \mathcal{U}$. Soit X la trajectoire associée à u et $X + \delta X$ celle associée à $u + \delta u$. Par définition on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d(X + \delta X)}{dt} &= F(t, X + \delta X, u(t, h(X + \delta X)) + \delta u(t, h(X + \delta X)), \\ &\quad u_y(t, h(X + \delta X))^T + \delta u_y(t, h(X + \delta X))^T). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Un développement en série de Taylor donne

$$\frac{d(\delta X)}{dt} = \tilde{A}\delta X + \tilde{B}\delta u + \tilde{C}\delta u_y^T, \quad (6.21)$$

où $\tilde{A} = (F_X + F_u u_y h_X + F_{u_y} u_{yy} h_X)$, $\tilde{B} = F_u$ et $\tilde{C} = F_{u_y}$.

Soit $M(t)$, la matrice de transition liée à $\tilde{A}(t)$, c'est-à-dire la solution du problème de Cauchy

$$\dot{M}(t) = \tilde{A}(t)M(t), \quad M(0) = I. \quad (6.22)$$

Alors,

$$\delta X(t_f) = M(t_f) \int_0^{t_f} M^{-1}(s) \left(\tilde{B}(s)\delta u(s) + \tilde{C}(s)\delta u_y^T(s) \right) ds, \quad (6.23)$$

et le résultat suivant découle naturellement.

Lemme 6.6. *La dérivée de Fréchet de E_{X_0, t_f} au point $u \in \mathcal{U}$ est donnée par*

$$dE_{X_0, t_f}(u) \cdot \delta u = M(t_f) \int_0^{t_f} M^{-1}(s) \left(\tilde{B}(s)\delta u(s) + \tilde{C}(s)\delta u_y^T(s) \right) ds. \quad (6.24)$$

Définition 6.7. *Soit $u \in \mathcal{U}$, la commande u est dite singulière sur $[0, t_f]$ si la dérivée de Fréchet $dE_{X_0, t_f}(u)$ n'est pas surjective.*

Si la commande u est singulière, alors il existe un vecteur ligne $\varphi \in \mathbb{R}^{2n+1} / \{0\}$ tel que

$$\varphi \cdot dE_{X_0, t_f}(u) = 0. \quad (6.25)$$

Le vecteur ligne $p(t) = \varphi M(t_f) M^{-1}(t)$ vérifie alors

$$\dot{p}(t) = -p(t)\tilde{A}(t), \quad p(t_f) = \varphi. \quad (6.26)$$

A partir de (6.24), (6.25) et (6.26) il vient

$$\int_0^{t_f} p(t) \left(\tilde{B}(t) \delta u(t, h(X)) + \tilde{C}(t) \delta u_y^T(t, h(X)) \right) dt = 0, \quad (6.27)$$

pour chaque $\delta u(t, h(X))$. En particulier, considérant uniquement les commandes $\delta u(t)$, (6.27) devient

$$p(t)\tilde{B}(t) = 0, \quad \text{et} \quad p(t)\tilde{C}(t) = 0, \text{ presque partout sur } [t_0, t_f].$$

Définissons l'Hamiltonien $H_2(t, X, u, u_y, p) = pF(t, X, u, u_y)$. Alors la commande singulière $u(t, h(X))$ est caractérisée par

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\partial H_2}{\partial p}, & \dot{p} &= -p\tilde{A} = -\frac{dH_2}{dX}, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u} &= p(t)\tilde{B}(t) = 0, & \frac{\partial H_2}{\partial u_y} &= p(t)\tilde{C}(t) = 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Cette caractérisation Hamiltonienne est utilisée dans la suite pour déterminer les conditions nécessaires pour le leader.

6.3.4 Conditions nécessaire pour le leader

Lemme 6.8. *Si la commande u^{**} est optimale pour le problème défini par (6.15) - (6.16) et (6.6), alors elle est singulière sur $[0, t_f]$ pour le système augmenté (6.17).*

Démonstration. Soit X la trajectoire, solution du système (6.17), associée à la commande u et issue de $X_0 = (x_0^T, \psi_{\infty,0}^T, 0)^T$. Si u est optimale pour J_2 , l'état final $X(t_f)$ vit à la frontière de $E_{X_0, t_f}(\mathcal{U})$. Ainsi l'application entrée-sortie E_{X_0, t_f} n'est pas ouverte en u , et il vient grâce au Théorème des Fonctions Implicites que la commande u est singulière pour le système (6.17) sur $[0, t_f]$. $\square$

L'Hamiltonien H_2 associé à J_2 sous la contrainte (6.17) peut être réécrit en

$$H_2 = \lambda_1 \tilde{f} + \lambda_2 (F_\infty^1 + F_\infty^2 u_x)^T + \lambda^\circ \tilde{L}_2, \quad (6.29)$$

en posant $p(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda^\circ(t))$, avec les vecteurs lignes $\lambda_1(t) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_2(t) \in \mathbb{R}^n$ et le scalaire $\lambda^\circ(t) \in \mathbb{R}$. La caractérisation Hamiltonienne de la commande singulière mène à

$$\frac{\partial H_2}{\partial u} = \lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \lambda_2 \left(\frac{\partial F_\infty^1}{\partial u} + \frac{\partial F_\infty^2}{\partial u} u_y \right)^T + \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial u} = 0, \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_y} = \lambda_2^T F_\infty^2 = 0, \quad (6.31)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_\infty^1}{\partial x} + \frac{\partial F_\infty^2}{\partial x} u_y \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial x}, \quad (6.32)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi_\infty} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_\infty^1}{\partial \psi_\infty} + \frac{\partial F_\infty^2}{\partial \psi_\infty} u_y \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial \psi_\infty}, \quad (6.33)$$

$$\dot{\lambda}^\circ = 0. \quad (6.34)$$

De (6.34), on obtient que $\lambda^\circ(t) = \lambda^\circ$ est constant. D'après les conventions du Principe du Minimum de Pontryagin, on pose $\lambda^\circ \geq 0$.

6.3.5 Conditions de transversalité

Comme l'état initial $x(0) = x_0$ et de la valeur finale du vecteur d'état adjoint $\psi_\infty(t_f) = 0$ sont fixés, le vecteur d'état adjoint augmenté $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda^\circ)$ doit vérifier les conditions de transversalité

$$\lambda_2(0) = 0, \quad \lambda_1(t_f) = 0. \quad (6.35)$$

(voir par exemple [Tre05, page 104] pour plus de détails)

6.3.6 Dégénérescence de la stratégie de Stackelberg

La condition (6.31) implique que $\lambda_2 \equiv 0$, ou bien $F_\infty^2 \equiv 0$ (ou encore les deux).

Proposition 6.9. *Si la matrice*

$$\frac{\partial F_\infty^2}{\partial u} = D_{\infty u}^T (I + D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T) D_{\infty u} = D_{\infty u}^T W_\gamma D_{\infty u} \quad (6.36)$$

est inversible, alors $\lambda_2 \equiv 0$. Dans ce cas, la stratégie de Stackelberg dégénère, à cause de l'omnipotence du leader.

Démonstration. La preuve se fait par un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\lambda_2 \neq 0$. Alors $F_\infty^2 \equiv 0$. Comme $\frac{\partial F_\infty^2}{\partial u}$ est inversible, il s'ensuit grâce au Théorème des Fonctions Implicites que, localement autour de la trajectoire, $u = u(t, x, \psi_\infty)$.

Alors, le système (6.15) - (6.16) s'écrit

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, \psi_\infty, u(t, x, \psi_\infty)), \quad \dot{\psi}_\infty = F_\infty^1(x, \psi_\infty, u(t, x, \psi_\infty)). \quad (6.37)$$

Ces dynamiques et le critère J_2 sont tous les deux indépendants de u_y . De ce fait, toute commande u_y est optimale. Ce qui est contradictoire avec (6.30). $\square$

Le fait que $\lambda_2 \equiv 0$ signifie que le leader ne tient pas compte de la réponse rationnelle du suiveur, représentée par l'évolution du vecteur d'état adjoint ψ_∞ , pour minimiser son propre critère J_2 . La stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle fermée semble perdre globalement sa structure hiérarchique. En fait la condition (6.36) indique que, si le critère du suiveur dépend suffisamment de la commande u , alors le leader est capable d'imposer au suiveur la commande qu'il désire. Même si la hiérarchie semble disparaître, le leader est omnipotent par rapport au suiveur. Dans un certain sens, cela peut justifier l'approche par la stratégie de Nash de [LAH94] pour un problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$.

6.3.7 Calcul des commandes optimales

Comme le vecteur d'état adjoint $(\lambda_1(t_f), \lambda_2(t_f), \lambda^\circ) = (0, 0, \lambda^\circ)$ doit être non nul, à une normalisation près, il est supposé dans la suite que $\lambda^\circ = 1$.

De (6.30), il est possible de déduire l'expression des commandes optimales

$$u^{**} = -U^{-1} \bar{C}_u x - U^{-1} \bar{B}^T \lambda_1^T + \alpha^2 U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} B_\infty^T \psi_\infty^T. \quad (6.38)$$

Injectant cette expression dans les dynamiques (6.15), il vient

$$\tilde{f} = \hat{A}x - \hat{S}_\lambda \lambda_1^T - \hat{S}_\infty \psi_\infty^T + B_2 w_2. \quad (6.39)$$

Grâce à (6.32), on obtient

$$\dot{\lambda}_1^T = -\hat{A}^T \lambda_1^T - Qx - \alpha^2 \overline{C}_\infty^T R_\gamma^{-1} B_\infty^T \psi_\infty^T = g^T(x, \lambda_1, \psi_\infty). \quad (6.40)$$

L'évolution de ψ_∞ (6.16) donne désormais

$$\dot{\psi}_\infty = \tilde{F}_\infty^1(x, \lambda_1, \psi_\infty) + \tilde{F}_\infty^2(x, \lambda_1, \psi_\infty)u_y, \quad (6.41)$$

avec $\tilde{F}_\infty^1(x, \lambda_1, \psi_\infty) = F_\infty^1(x, u^{**}(x, \lambda_1, \psi_\infty), \psi_\infty)$, et $\tilde{F}_\infty^2(x, \lambda_1, \psi_\infty) = F_\infty^2(x, u^{**}(x, \lambda_1, \psi_\infty), \psi_\infty)$.

A partir de $\lambda_2 = 0$, la relation (6.33) se transforme en la contrainte

$$\hat{S}_\infty^T \lambda_1^T - \alpha^2 \overline{S}_\infty \psi_\infty^T - \alpha^2 B_\infty R_\gamma^{-1} \overline{C}_\infty x = 0. \quad (6.42)$$

Remarque 6.10. Si $\alpha = 0$, alors la condition nécessaire (6.42) devient $\lambda_1 \hat{S}_\infty = 0$. En particulier, en tenant compte de la condition de transversalité (6.35), la première et deuxième dérivée de cette relation donnent en $t = t_f$

$$x^T(t_f)Q\hat{S}_\infty = 0, \quad \text{et} \quad x^T(t_f)(Q\hat{A} - \hat{A}Q\hat{S}_\infty) = w_2^T(t_f)B_2Q\hat{S}_\infty. \quad (6.43)$$

Ces conditions sont des contraintes supplémentaires à respecter.

La relation (6.43) est une relation au temps t_f entre l'entrée w_2 et l'état x . Cette condition nécessaire n'est en général pas vérifiée, d'autant plus que w_2 est considérée comme une perturbation. Pour résumer, le cas $\alpha = 0$ ne mène pas à des solutions intéressantes pour le problème de commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Ce résultat justifie le terme correctif $\alpha^2 w_\infty^T R_\gamma w_\infty$ dans le critère J_2 associé à la norme $\mathcal{H}_2$, qui assure la convexité par rapport à la commande u pour $\alpha \neq 0$. Dans la suite, on suppose que $\alpha \neq 0$.

En dérivant la relation (6.42) par rapport au temps t , il est clair que (6.42) est équivalent aux relations suivantes

$$x^T(t_f)\overline{C}_\infty = 0, \quad (6.44)$$

$$\tilde{F}_\infty^2 \frac{\partial u^{**}}{\partial x} B_\infty R_\gamma^{-1} N R_\gamma^{-1} B_\infty^T = v = \left(\frac{1}{\alpha^2} g \hat{S}_\infty - \tilde{F}_\infty^1 - \tilde{f}^T \overline{C}_\infty^T \right). \quad (6.45)$$

La relation (6.44) implique que chaque valeur initiale x_0 n'est pas associée à un point de départ d'une trajectoire optimale. La condition initiale x_0 d'une trajectoire optimale doit appartenir à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de codimension r_∞ , où $r_\infty = \text{rang } \overline{C}_\infty$. La contrainte (6.45) mène à

$$\tilde{F}_\infty^2 \frac{\partial u^{**}}{\partial x} B_\infty = v B_\infty (B_\infty^T B_\infty)^{-1} R_\gamma N^{-1} R_\gamma, \quad (6.46)$$

et de plus

$$\tilde{F}_\infty^2 \frac{\partial u^{**}}{\partial x} \in v B_\infty (B_\infty^T B_\infty)^{-1} R_\gamma N^{-1} R_\gamma (B_\infty^T B_\infty)^{-1} B_\infty^T + (\text{Ker } B_\infty^T)^T. \quad (6.47)$$

Même si la trajectoire optimale est unique, l'expression du terme $\frac{\partial u^{**}}{\partial x}$ n'est pas unique.

Remarque 6.11. w_2 n'est pas l'action d'un joueur, mais une perturbation. Contrairement à $\frac{\partial u^{**}}{\partial x}$ et $\tilde{f}$, la commande $u^{**}(t, x)$ ne dépend pas de l'entrée instantanée $w_2(t)$, même si l'évolution de $u^{**}(t, x)$ dépend de $w_2(t)$.

Remarque 6.12. Une idée pour lever cette difficulté de détermination de la commande optimale est de considérer une seule entrée et une seule sortie, c'est-à-dire ne considérer qu'un seul canal de performance ($w_2 = w_\infty$ et $z_2 = z_\infty$) comme il est fait dans [LAH94]. Mais cette approche est beaucoup moins générale naturellement.

Remarque 6.13. Pour faciliter la recherche d'une commande optimale, une restriction de la classe des commandes optimales est imposée. En choisissant une représentation affine, comme dans [PC79a]) de $u^{**}(t, y)$

$$u^{**}(t, y) = u_y(y - x(t)) + u(t), \quad (6.48)$$

il est possible d'éviter la détermination exacte de $\frac{\partial u^{**}}{\partial x}$ le long de la trajectoire optimale $x(t)$.

6.3.8 Résolution par une équation de Riccati

De (6.42), et en supposant que B_∞ soit de rang plein,

$$\psi_\infty = \left(\frac{1}{\alpha^2} \lambda_1 \tilde{B} - x^T \tilde{C}_\infty^T \right) N^{-1} R_\gamma (B_\infty^T B_\infty)^{-1} B_\infty^T. \quad (6.49)$$

En injectant cette relation dans (6.39) et (6.40), on obtient

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(t)x(t) - \tilde{S}(t)\lambda_1^T(t) + B_2 w_2(t), \quad \dot{\lambda}_1^T(t) = -\tilde{Q}(t)x(t) - \tilde{A}^T(t)\lambda_1^T(t). \quad (6.50)$$

De la même façon que dans un problème Linéaire-Quadratique classique, il est possible d'exprimer $\lambda_1(t)$ sous la forme

$$\lambda_1^T(t) = K_1(t)x(t) + h_1(t). \quad (6.51)$$

Aussi, il est clair que si la matrice $K_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et le vecteur colonne $h_1(t) \in \mathbb{R}^n$ vérifient

$$\dot{K}_1(t) = -K_1(t)\tilde{A}(t) - \tilde{A}(t)^T K_1(t) - \tilde{Q}(t) + K_1(t)\tilde{S}(t)K_1(t), \quad (6.52)$$

$$\dot{h}_1(t) = -K_1(t)\tilde{S}(t)h_1(t) + \tilde{A}^T(t)h_1(t) + K_1(t)B_2 w_2(t), \quad (6.53)$$

avec les conditions terminales

$$K_1(t_f) = 0, \quad h_1(t_f) = 0, \quad (6.54)$$

alors $\lambda_1(t)$ défini par (6.51) est solution de l'équation différentielle (6.50) associée aux conditions aux limites (6.35).

L'équation (6.52) est une équation de Riccati standard, qui peut être linéarisée par le lemme de Radon (voir les lemmes 2.3 et 2.4). A une entrée w_2 donnée, les deux équations (6.52) et (6.53) peuvent être résolues par une intégration en temps rétrograde à partir des conditions finales (6.54).

6.4 Conditions suffisantes

Afin d'obtenir les conditions suffisantes de ce problème, des éléments de la théorie des temps focaux sont rappelés (voir par exemple [BFT06, chapitre 9] pour plus de détails).

Remarque 6.14. Les conditions de restriction sur l'ensemble des états initiaux x_0 engendrant des trajectoires optimales, vues au chapitre précédant ne tiennent plus, comme les critères J_2 et J_∞ ne comportent pas de critères terminaux.

Définition 6.15. *Le système variationnel*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \lambda_1^T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{S} \\ -\tilde{Q} & -\tilde{A}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \lambda_1^T \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

est appelé *équation de Jacobi*. Le champ de Jacobi, $J(t) = (\delta x^T(t), \delta \lambda_1(t))$, est une solution non-triviale de (6.55).

La matrice de transition associée à (6.55) est notée $\phi(t)$, et

$$\begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta \lambda_1^T(t) \end{pmatrix} = \phi(t) \begin{pmatrix} \delta x(0) \\ \delta \lambda_1^T(0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_3(t) & \phi_4(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x(0) \\ \delta \lambda_1^T(0) \end{pmatrix}. \quad (6.56)$$

Définition 6.16. *Le premier temps conjugué (ou focal, comme l'extrémité finale est libre) t_c est le premier temps positif pour lequel il existe un champ de Jacobi tel que $\delta x(0) = \delta x(t_c) = 0$.*

Il est équivalent de dire que $\text{rang } \phi_2(t_c) < n$.

Les résultats suivants sont standards en théorie Linéaire-Quadratique (voir [BFT06, chapitre 9]).

Proposition 6.17. *Le premier temps conjugué t_c correspond au premier temps fini d'explosion de l'équation de Riccati (6.52).*

Démonstration. La solution de l'équation de Riccati (6.52) est donnée par

$$K_1(t) = \phi_4(t)\phi_2^{-1}(t). \quad (6.57)$$

Le premier temps conjugué t_c est le premier temps auquel $\phi_2(t_c)$ n'est pas inversible, c'est-à-dire, $\|K_1(t)\| \rightarrow +\infty$, quand $t \rightarrow t_c$. $\square$

Proposition 6.18. *Les solutions du Principe du Minimum de Pontryagin sont optimales avant leur premier temps conjugué. La commande (6.38) avec $\lambda_1(t)$ donné par l'équation de Riccati (6.52) est optimale si et seulement si cette équation admet une solution définie sur $[0, t_f]$.*

Grâce à ces résultats, les conditions nécessaires sont aussi suffisantes. Avant le premier temps conjugué, la commande optimale -si elle existe- est unique.

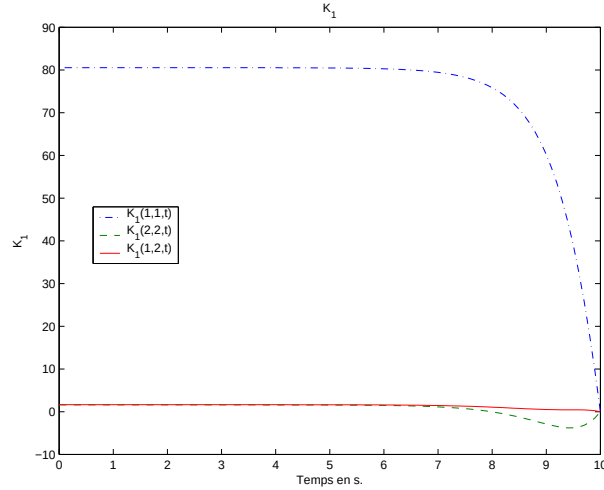
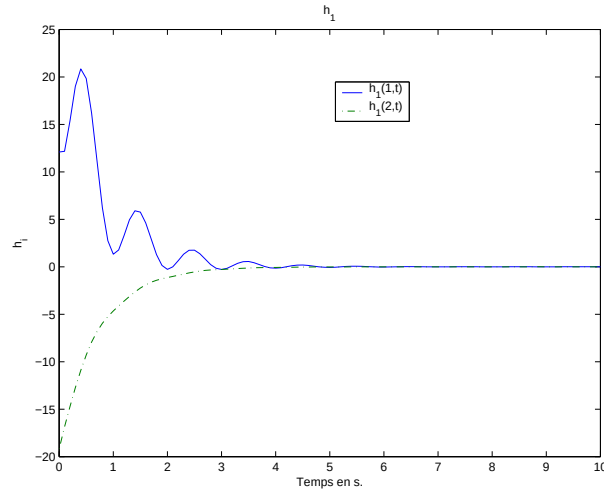
6.5 Exemple

Posons

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.6 & -1.4 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, & D_\infty &= \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, & D_{2u} &= \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}, \\ C_\infty &= \begin{bmatrix} 3 & -1.5 \end{bmatrix}, & B_\infty &= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, & D_{\infty u} &= \begin{bmatrix} 1.5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

avec les paramètres $\alpha = 1$, $\gamma = 15$, et $t_f = 10$.

Les coefficients de K_1 sont indiqués sur la figure 6.2.

FIGURE 6.2 – Coefficients de $K_1(t)$.FIGURE 6.3 – Coefficients de $h_1(t)$.

Connaissant K_1 et la perturbation $w_2(t)$, il est possible de calculer les composantes du vecteur $h_1(t)$, par intégration rétrograde. Pour

$$w_2(t) = \frac{1}{2} \sin \left(2\pi 10 \frac{t}{t_f} \right) \exp \left(-10 \frac{t}{t_f} \right),$$

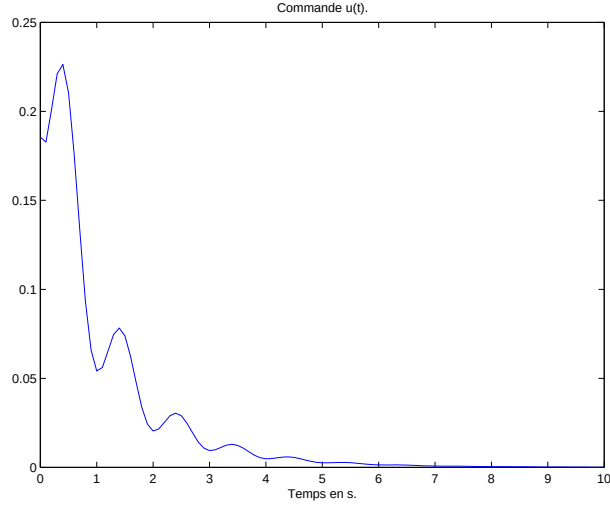
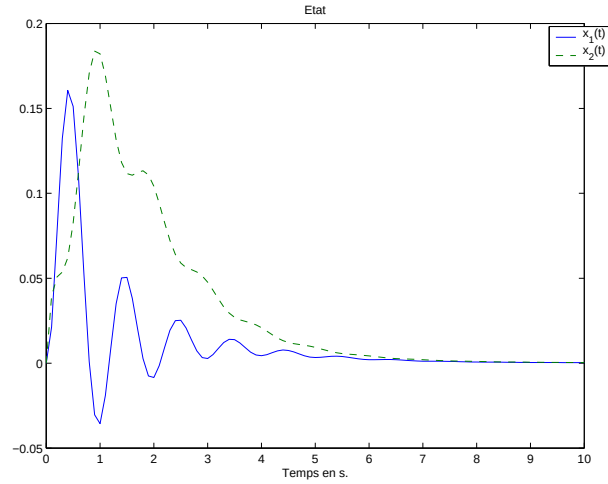
h_1 est représenté sur la figure 6.3.

La commande optimale $u^{**}(t)$ et l'état $x(t)$ sont représentés respectivement sur les figures 6.4 et 6.5.

Les critères optimaux sont alors

$$J_2 = 4, 2; \quad J_\infty = 89; \quad \frac{\|z_\infty\|_{2,[t_0,t_f]}}{\|w_\infty\|_{2,[t_0,t_f]}} = 81, 3 < \gamma^2 = 225.$$

De plus, si $\tilde{Q}$ est semi-définie positive, alors il est possible de démontrer des propriétés supplémentaires.

FIGURE 6.4 – Commande optimale $u^{**}(t)$.FIGURE 6.5 – Coefficients de $x(t)$.

Proposition 6.19. *Si $\tilde{Q} \geq 0$, alors la solution $K_1(t)$ de (6.52) est symétrique et semi-définie positive.*

Démonstration. Voir [AKFIJ03, Théorème 4.1.6], en observant que $K_1(t_f) = 0$, $\tilde{S} \geq 0$ et $\tilde{Q} \geq 0$. $\square$

Proposition 6.20. *Si $\tilde{Q} \geq 0$, alors $t_c = +\infty$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer [AKFIJ03, Corollaire 3.6.7, Exemple 3.6.8], en observant que $K_1(t_f) = 0$, $\tilde{Q} \geq 0$ et $\tilde{S} \geq 0$. $\square$

Proposition 6.21. *Si $\tilde{Q} \geq 0$, et si $K_1(t)$ converge vers une limite K_1^∞ quand $t \rightarrow +\infty$, alors $(\tilde{A} - \tilde{S}K_1^\infty)$ est stable.*

Démonstration. En prenant la limite de (6.52), on obtient une équation de Lyapunov

$$K_1^\infty(\tilde{A} - \tilde{S}K_1^\infty) + (\tilde{A} - \tilde{S}K_1^\infty)^T K_1^\infty = -\tilde{Q} - K_1^\infty \tilde{S} K_1^\infty < 0. \quad (6.58)$$

Le résultat provient du fait que K_1^∞ est symétrique et semi-définie positive. $\square$

Dans le cas où la matrice $\tilde{Q}$ est semi-définie positive et en raisonnant en temps rétrograde, il semble que $K_1(t)$ converge. La proposition 6.21 implique que $h_1(t)$ diverge exponentiellement (de façon rétrograde en temps). Comme l'horizon est fini, $h_1(t)$ reste borné, mais peut avoir des valeurs importantes. De ce fait les composantes de l'état x peuvent aussi être importantes. Il est à craindre ainsi des valeurs très importantes pour les critères J_2 et J_∞ .

De manière générale, on ne connaît pas de conditions pour assurer que $\tilde{Q}$ soit semi-définie positive, même si de forts soupçons pèsent, comme il est montré dans la suite.

Proposition 6.22. *La matrice $\tilde{Q}$ peut se mettre sous la forme*

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} C_2^T & C_\infty^T D_\infty R_\gamma^{-1} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} C_2 \\ R_\gamma^{-1} D_\infty^T C_\infty \end{bmatrix}, \quad (6.59)$$

où

$$\begin{cases} M_{11} &= I - D_{2u} U^{-1} [U + \alpha^2 D_{\infty u}^T D_\infty N^{-1} D_\infty^T D_{\infty u}] U^{-1} D_{2u}^T, \\ M_{12} &= -2 D_{2u} U^{-1} \alpha^2 D_{\infty u}^T D_\infty [R_\gamma^{-1} - N^{-1}] R_\gamma, \\ M_{22} &= 2 \alpha^2 (2 R_\gamma - N) [R_\gamma^{-1} - N^{-1}] R_\gamma. \end{cases} \quad (6.60)$$

Lemme 6.23. *La matrice N vérifie*

$$R_\gamma < N < 2 R_\gamma. \quad (6.61)$$

Démonstration. La première inégalité provient directement de la définition de la matrice N . La deuxième inégalité est donnée par Lemme d'Inversion Matricielle

$$\begin{aligned} 2 R_\gamma - N &= R_\gamma - \alpha^2 D_{\infty u}^T D_{\infty u} U^{-1} D_{\infty u} D_\infty \\ &= R_\gamma (R_\gamma + \alpha^2 D_{\infty u}^T D_{\infty u} (D_{2u}^T D_{2u})^{-1} D_{\infty u} D_\infty)^{-1} R_\gamma \\ &> 0. \end{aligned} \quad (6.62)$$

□

D'après le lemme 6.23, le terme M_{22} est défini positif. Pour l'instant, même si de forts soupçons portent sur le signe de $\tilde{Q}$, il n'a pu être prouvé que dans le cas scalaire que $\tilde{Q}$ est semi-définie positive.

Proposition 6.24. *Dans le cas particulier scalaire, $r = n = 1$, $m_\infty = m_2 = 1$ et $r_\infty = r_2 = 1$, M admet une valeur propre nulle et une positive.*

Démonstration. Posons $\beta = D_{\infty u}^T D_\infty$ et $\eta = D_{2u}$, la matrice M s'exprime alors par

$$\begin{cases} M_{11} &= \frac{2 \frac{\alpha^4 \beta^4}{R_\gamma^2}}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{R_\gamma}\right) \left(\eta^2 + 2 \frac{\alpha^2 \beta^2}{R_\gamma}\right)}, \\ M_{12} &= \frac{-2 \frac{\alpha^4 \beta^3 \eta}{R_\gamma}}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{R_\gamma}\right) \left(\eta^2 + 2 \frac{\alpha^2 \beta^2}{R_\gamma}\right)}, \\ M_{22} &= \frac{2 \alpha^4 \beta^2 \eta^2}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{R_\gamma}\right) \left(\eta^2 + 2 \frac{\alpha^2 \beta^2}{R_\gamma}\right)}. \end{cases} \quad (6.63)$$

Soit

$$M = \frac{2\alpha^4\beta^2}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)\left(\eta^2 + 2\frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)} \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{R_\gamma^2} & -\frac{\beta\eta}{R_\gamma} \\ -\frac{\beta\eta}{R_\gamma} & \eta^2 \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

$$= \frac{2\alpha^4\beta^2}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)\left(\eta^2 + 2\frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)} \begin{bmatrix} \frac{\beta}{R_\gamma} \\ -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta}{R_\gamma} & -\eta \end{bmatrix}. \quad (6.65)$$

La colonne $\begin{bmatrix} \frac{\beta}{R_\gamma} \\ -\eta \end{bmatrix}$ étant à coefficients réels, la matrice M possède 0 et un terme positif comme valeurs propres. $\square$

Proposition 6.25. *Dans le cas scalaire, $r = n = 1$, $m_\infty = m_2 = 1$ et $r_\infty = r_2 = 1$, $\tilde{Q}$ est semi-définie positive.*

6.6 Conclusion

Ce chapitre analyse le problème de commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ d'un système multicanaux. Le cadre utilisé est la stratégie de Stackelberg, munie d'une structure d'information en boucle fermée. Cette stratégie est bien adaptée pour gérer plusieurs critères, ayant des positions hiérarchiques différentes. Les conditions nécessaires sont proposées et mènent à une équation de Riccati différentielle. Il est mis en avant qu'une stratégie de Stackelberg dégénère globalement, à cause de l'omnipotence du leader sur le suiveur. Utilisant la théorie des temps focaux, les conditions suffisantes sont données en terme de temps fini d'explosion de la solution de l'équation de Riccati.

Chapitre 7

Stratégie de Nash pour les systèmes avec incertitudes paramétrées

7×142857
 $= 999999$

7.1 Introduction

Jusqu'à présent dans ce mémoire, les incertitudes ont été considérées comme des dynamiques négligées, ou des perturbations. L'équation dynamique représentant le modèle du système a, quant à elle, des coefficients constants. Un des points durs de la recherche en Automatique est la synthèse, qui ne soit pas trop contrainte, de commandes robustes pour des systèmes ayant des incertitudes structurées. Ce chapitre tente d'élargir le champ d'application de la commande par la théorie des jeux aux systèmes avec des incertitudes paramétriques. Plusieurs tentatives en ce sens sont à noter dans la littérature. Un moyen de traiter des incertitudes est d'interpréter l'écart au modèle nominal comme un joueur fictif supplémentaire [CSA97, vdBES03]. Cela ramène le problème à un jeu avec un joueur supplémentaire (que l'on peut appeler perturbation), dont le critère traduit le fait que l'écart à considérer est celui du pire des cas. Aussi dans [vdBES03], pour prendre en compte l'incertitude, deux extensions des définitions des équilibres sont proposées : une formulation de contrainte douce, en ajoutant une pondération sur le joueur fictif dans les critères, formulation inspirée de [BB73, BB95], et une formulation de contrainte forte qui considère seulement une énergie bornée pour l'entrée du joueur fictif.

Dans le cas des jeux linéaires-quadratiques à somme nulle, incluant des incertitudes structurées, des conditions suffisantes, garantissant pour chaque joueur une valeur donnée pour leur critère, sont proposées dans [AMP02]. Ces conditions sont fondées sur l'existence d'une solution à un ensemble d'équations de Riccati paramétrées de façon adéquate.

Une autre contribution provient d'une extension de l'équilibre de Nash [TY91] : l' ϵ -équilibre de Nash. En particulier pour des perturbations d'énergie finie, la valeur des critères s'éloigne de la valeur nominale d'une distance qui est croissante par rapport à l'énergie de cette perturbation [LP06]. Cependant les équations associées ne sont pas simples à résoudre et nécessitent la connaissance sur tout l'horizon de la perturbation.

L'idée principale ici est de reformuler les équations couplées de type Riccati associées à l'équilibre de Nash en boucle fermée en un ensemble de problèmes d'optimisation non convexes couplés. Cette formulation faisant intervenir des Inégalités Matricielles Linéaires (ou LMI pour Linear Matrix Inequalities) comme contraintes, facilite l'extension à une représentation polytopique des incertitudes

structurées. Cette extension mènera à l'obtention de bornes supérieures pour les critères aux équilibres.

Ainsi, après un rapide rappel de la stratégie de Nash en boucle fermée pour les systèmes certains, une nouvelle formulation de l'équilibre de Nash sous forme de problèmes d'optimisation non convexes couplés est proposée. Cette nouvelle formulation est alors étendue aux systèmes polytopiques incertains afin d'obtenir des bornes supérieures des équilibres. Un algorithme itératif est alors présenté pour synthétiser une commande vérifiant toutes les contraintes, liées à chaque sommet du polytope. Enfin un exemple illustre les résultats obtenus.

Ce chapitre reprend l'article [JCPAK06] soumis pour publication dans une revue.

7.2 Rappel : équilibre de Nash pour les systèmes certains

Considérons un jeu différentiel linéaire-quadratique à deux joueurs de somme non nulle, sur un horizon infini

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (7.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathcal{L}^2([t_0, +\infty[, \mathbb{R}^{r_i})$ ($i, j \in \{1, 2\}$ vérifiant $i \neq j$ et $n, r_i \in \mathbb{N}^*$) et avec les critères

$$J_i = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} (x^T Q_i x + u_1^T R_{i1} u_1 + u_2^T R_{i2} u_2) d\tau. \quad (7.2)$$

Toutes les matrices intervenant dans les critères sont constantes et symétriques avec $Q_i > 0$, $R_{ij} \geq 0$ et $R_{ii} = D_i^T D_i > 0$.

En supposant qu'il existe une symétrie entre les rôles des joueurs et que donc les joueurs ont le même niveau hiérarchique, un équilibre de Nash en boucle fermée est étudié ici. La paire (u_1^*, u_2^*) correspondant à un équilibre de Nash vérifie, pour toute commande (u_1, u_2) , selon les chapitres précédents

$$\begin{cases} J_1(u_1, u_2^*) \geq J_1(u_1^*, u_2^*), \\ J_2(u_1^*, u_2) \geq J_2(u_1^*, u_2^*). \end{cases} \quad (7.3)$$

Il est rappelé que les commandes u_i^* dans ce cadre sont données par

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T P_i x(t), \quad (7.4)$$

où (P_1, P_2) vérifie les équations couplées algébriques de type Riccati

$$0_n = \mathcal{N}_1(P_1, P_2), \quad (7.5)$$

$$0_n = \mathcal{N}_2(P_1, P_2), \quad (7.6)$$

où

$$\mathcal{N}_1(P_1, P_2) = -A^T P_1 - P_1 A - Q_1 - P_2 S_{12} P_2 + P_2 S_2 P_1 + P_1 S_2 P_2 + P_1 S_1 P_1, \quad (7.7)$$

$$\mathcal{N}_2(P_1, P_2) = -A^T P_2 - P_2 A - Q_2 - P_1 S_{21} P_1 + P_1 S_1 P_2 + P_2 S_1 P_1 + P_2 S_2 P_2, \quad (7.8)$$

où $S_{ij} = B_j R_{jj}^{-1} R_{ij} R_{jj}^{-1} B_j^T$, et $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$.

Les équations (7.5) et (7.6) sont très difficiles à résoudre comme il a été indiqué dans le chapitre 4. Pour plus de détails il est possible de se référer à [Eng05a]. La dynamique en boucle fermée est alors

$$\dot{x} = (A - S_1 P_1 - S_2 P_2) x. \quad (7.9)$$

La matrice $(A - S_1 P_1 - S_2 P_2)$ est stable si $P_1 > 0$ et $P_2 > 0$. Effectivement en rassemblant certains termes quadratiques dans les termes linéaires, on obtient les équations de Lyapounov suivantes.

$$(A - S_1 P_1 - S_2 P_2)^T P_1 + P_1 (A - S_1 P_1 - S_2 P_2) = -Q_1 - P_2 S_{12} P_2 - P_1 S_1 P_1 < 0, \quad (7.10)$$

$$(A - S_1 P_1 - S_2 P_2)^T P_2 + P_2 (A - S_1 P_1 - S_2 P_2) = -Q_2 - P_1 S_{21} P_1 - P_2 S_2 P_2 < 0. \quad (7.11)$$

La valeur des critères à l'équilibre est donnée par

$$J_i(u_1^*, u_2^*) = x_0^T P_i x_0. \quad (7.12)$$

7.3 Formulation d'un équilibre de Nash grâce à des problèmes couplés d'optimisation non convexes

Dans ce paragraphe, une nouvelle formulation des conditions suffisantes de l'équilibre de Nash est proposée sous la forme d'une association de problèmes couplés d'optimisation non convexes. Cette nouvelle formulation faisant intervenir des inégalités linéaires matricielles (LMI) au lieu d'équations couplées de type Riccati, elle est particulièrement intéressante pour étudier les systèmes incertains, comme il sera montré plus tard.

Théorème 7.1. *Si les problèmes couplés d'optimisation non-convexe Π_1 et Π_2 suivant admettent un couple de solution (W_1, W_2) tel que $W_1 > 0$ et $W_2 > 0$, alors (W_1^{-1}, W_2^{-1}) est solution des équations couplées de type Riccati (7.5) et (7.6).*

Π_1 (variables γ_1 , W_1 et Y_1 , à K_2 fixé) : Minimiser γ_1 , sous les contraintes

$$W_1 > 0, \quad (7.13)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & x_0^T \\ x_0 & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (7.14)$$

$$\mathcal{M}_{(A, B_1, B_2)}^{1,2}(Y_1, W_1, K_2) \leq 0, \quad (7.15)$$

$$(7.16)$$

Π_2 (variables γ_2 , W_2 et Y_2 , à K_1 fixé) : Minimiser γ_2 , sous les contraintes

$$W_2 > 0, \quad (7.17)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_2 & x_0^T \\ x_0 & W_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (7.18)$$

$$\mathcal{M}_{(A, B_1, B_2)}^{2,1}(Y_2, W_2, K_1) \leq 0, \quad (7.19)$$

sous les conditions de couplage

$$K_1 = Y_1 W_1^{-1}, \quad K_2 = Y_2 W_2^{-1}. \quad (7.20)$$

Les notations dans le théorème 7.1 sont, pour tout $i, j = 1, 2$, tel que $i \neq j$

$$C_{z_i} = \begin{bmatrix} (Q_i + K_j^T R_{ij} K_j)^{\frac{1}{2}} \\ 0_{r_i \times n} \end{bmatrix}, \quad D_{z_i} = \begin{bmatrix} 0_{n \times r_i} \\ D_i \end{bmatrix}, \quad (7.21)$$

$$\mathcal{M}_{(A, B_1, B_2)}^{i,j}(Y_i, W_i, K_j) = \begin{bmatrix} (B_i Y_i + Y_i^T B_i^T + W_i(A + B_j K_j)^T + (A + B_j K_j)W_i) & (C_{z_i} W_i + D_{z_i} Y_i)^T \\ C_{z_i} W_i + D_{z_i} Y_i & -I \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

La notation $(Q_i + K_j^T R_{ij} K_j)^{\frac{1}{2}}$ représentant la racine carrée matricielle de la matrice $(Q_i + K_j^T R_{ij} K_j)$

Démonstration. La preuve utilise les éléments de [BEFB94, section 6.2.1] et [BEFB94, section 7.4.1]. Les deux problèmes d'optimisation non convexes du Théorème 7.1 étant symétriques, seule la preuve pour le premier problème correspondant à la première inégalité de (7.3) est considérée. En posant

$$z_1 = C_{z_1}x + D_{z_1}u_1 \quad (7.23)$$

il est possible d'interpréter le critère $J_1(u_1, K_2x)$ comme l'énergie du vecteur z_1 , appelé sortie du système (7.1), quand la commande $u_2 = K_2x$, avec K_2 constant, est appliquée. On suit le raisonnement de [BEFB94, section 7.4.1], qui étudie le problème de borne supérieure de l'énergie de sortie d'un système linéaire incertain polytopique. Supposons qu'il existe une fonction quadratique $V_1(\xi) = \xi^T W_1^{-1} \xi$ telle que

$$W_1 > 0, \quad (7.24)$$

$$\frac{d}{dt}V_1(x(t)) \leq -z_1^T z_1, \quad (7.25)$$

pour chaque x et z_1 satisfaisant (7.1) et (7.23). On obtient que l'énergie de sortie n'excède pas

$$\gamma_1 = x_0^T W_1^{-1} x_0, \quad (7.26)$$

sous les contraintes $W_1 > 0$ et (7.15).

Cette borne est atteinte pour le retour d'état $u_1 = K_1x$, avec $K_1 = Y_1 W_1^{-1}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} J_1(u_1, K_2x) \leq \gamma_1, & \forall u_1 \in \mathcal{L}^2([t_0, +\infty), \mathbb{R}^{r_1}), \\ J_1(K_1x, K_2x) = \gamma_1. \end{cases} \quad (7.27)$$

En appliquant la commande $u_1 = K_1x$, la contrainte (7.25) est équivalente, en utilisant le lemme de Schur, aux BMI (7.15).

Chercher la borne supérieure en énergie consiste à minimiser $x_0^T W_1^{-1} x_0$ ou de façon équivalente [BEFB94, p.8] à minimiser γ_1 sous la condition (7.14). $\square$

Remarque 7.2. Comme pour les solutions des équations (7.5) et (7.6), les solutions des problèmes non convexes Π_1 et Π_2 sont difficiles à trouver. Cependant, si on considère que la matrice K_j est constante ($i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$), alors le problème Π_i devient un problème semidéfini (Semi-Definite Program SDP), que l'on sait résoudre. Cela peut induire un algorithme itératif, semblable à [AKFIJ03, p. 340], pour résoudre alternativement les problèmes Π_1 et Π_2 en actualisant les valeurs K_1 et K_2 . Notons qu'il n'existe pas à ce jour dans la littérature de preuve de convergence d'un tel algorithme.

Remarque 7.3. Les solutions du problème d'optimisation non-convexe associant Π_1 et Π_2 ne sont pas nécessairement uniques, de la même manière que les solutions des équations couplées de type Riccati (7.5) et (7.6).

Ce type de formulation est tout à fait adéquate pour étendre le cadre la stratégie de Nash aux systèmes présentant des incertitudes. C'est l'objet de la fin de ce chapitre.

7.4 Bornes supérieures des critères pour un système incertain

Considérons un système dynamique incertain linéaire, d'incertitude notée λ décrit par un modèle N -polytopique. Le système (7.1) devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\lambda)x(t) + B_1(\lambda)u_1(t) + B_2(\lambda)u_2(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (7.28)$$

L'état initial x_0 est supposé connu. On note alors

$$\begin{bmatrix} A(\lambda) & B_1(\lambda) & B_2(\lambda) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \begin{bmatrix} A_k & B_{1,k} & B_{2,k} \end{bmatrix}, \quad (7.29)$$

avec

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Lambda = \left\{ \lambda \mid \lambda_k \in [0, 1], \forall k \in \{1, \dots, N\}, \sum_{k=1}^N \lambda_k = 1 \right\}. \quad (7.30)$$

On pourra noter le système sous la forme

$$\begin{bmatrix} A(\lambda) \\ B_1(\lambda) \\ B_2(\lambda) \end{bmatrix} \in \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} A_1 \\ B_{1,1} \\ B_{2,1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A_N \\ B_{1,N} \\ B_{2,N} \end{bmatrix} \right\}, \quad (7.31)$$

où Co désigne l'ensemble convexe de N sommets.

Toutes les matrices de pondérations dans les critères J_i , définis par (7.2), sont connues. On étend la notation $J_i(u_1, u_2)$ en $J_i(u_1, u_2, \lambda)$, quand le paramètre λ est appliqué au système (7.28).

Pour chaque λ fixé, nous supposons qu'il est possible de trouver un équilibre (non nécessairement unique) de Nash comme défini dans le paragraphe 7.2, mais les commandes associées sont fonctions implicites du paramètre λ

$$\begin{cases} J_1(u_1, u_2^*(\lambda), \lambda) \geq J_1(u_1^*(\lambda), u_2^*(\lambda), \lambda), \\ J_2(u_1^*(\lambda), u_2, \lambda) \geq J_2(u_1^*(\lambda), u_2^*(\lambda), \lambda). \end{cases} \quad (7.32)$$

Il faut noter que, par définition, le vecteur de paramètre λ est inconnu. La modélisation utilisée ne contraint pas les paramètres λ_i à être constants. Ils peuvent donc varier en fonction du temps. Les matrices du système $A(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ et $B_2(\lambda)$ peuvent varier à l'intérieur du polytope (7.31) ou bien être égales à une valeur constante dans ce même polytope. Ainsi, l'objectif, ici, est de garantir que la valeur optimale des critères soit plus faible qu'une certaine borne supérieure et aussi proche que possible de l'optimum, même si le paramètre λ est inconnu. C'est-à-dire trouver $\tilde{u}_1^*$ et $\tilde{u}_2^*$, qui vérifient

$$\begin{cases} J_1(\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*, \lambda) \geq J_1(u_1^*(\lambda), u_2^*(\lambda), \lambda), \\ J_2(\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*, \lambda) \geq J_2(u_1^*(\lambda), u_2^*(\lambda), \lambda), \quad \forall \lambda \in \Lambda. \end{cases} \quad (7.33)$$

Remarque 7.4. Il faut noter que le couple $(\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*)$ ne correspond pas à un équilibre de Nash. Ce couple de commande permet d'obtenir des majorants des critères associés aux équilibres, indépendamment de la valeur de l'incertitude $\lambda \in \Lambda$. De plus cette borne supérieure est construite sur l'analyse des équations couplées de type Riccati (7.5) et (7.6) et non sur la valeur des critères. Cette borne supérieure est donc commune à tous les équilibres, s'il en existe plusieurs, alors même qu'il n'existe pas de relation d'ordre entre ces équilibres.

7.5 Algorithme itératif

La procédure itérative pour résoudre les problèmes Π_1 et Π_2 , est désormais adaptée pour traiter le cas des systèmes incertains. L'idée de base est de résoudre successivement chaque problème Π_i , en répétant dans les contraintes inégalités (7.15) et (7.19) pour chaque sommet du polytope $\text{Co}(A_k, B_{1,k}, B_{2,k})$, et en adaptant à chaque étape les matrices K_1 ou K_2 avec les conditions de couplage (7.20). L'algorithme est alors le suivant

Algorithme 5.

Initialisation : Poser $K_2 = 0_{r_2 \times n}$.

Etape 1 : Résoudre le SDP, de variables γ_1 , W_1 et Y_1

$\tilde{\Pi}_1$: Minimiser γ_1 , sous les contraintes

$$W_1 > 0, \quad (7.34)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & x_0^T \\ x_0 & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (7.35)$$

$$\mathcal{M}_{(A_1, B_{1,1}, B_{2,1})}^{1,2}(Y_1, W_1, K_2) \leq 0, \quad (7.36)$$

$\vdots$

$$\mathcal{M}_{(A_N, B_{1,N}, B_{2,N})}^{1,2}(Y_1, W_1, K_2) \leq 0. \quad (7.37)$$

Calculer $K_1 = Y_1 W_1^{-1}$.

Etape 2 : Résoudre le SDP, de variables γ_2 , W_2 et Y_2

$\tilde{\Pi}_2$: Minimiser γ_2 , sous les contraintes

$$W_2 > 0, \quad (7.38)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_2 & x_0^T \\ x_0 & W_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (7.39)$$

$$\mathcal{M}_{(A_1, B_{1,1}, B_{2,1})}^{2,1}(Y_2, W_2, K_1) \leq 0, \quad (7.40)$$

$\vdots$

$$\mathcal{M}_{(A_N, B_{1,N}, B_{2,N})}^{2,1}(Y_2, W_2, K_1) \leq 0. \quad (7.41)$$

Calculer $K_2 = Y_2 W_2^{-1}$.

Etape 3 : Répéter les étapes 1 et 2, tant que les LMI (7.34-7.41) ne sont pas simultanément vérifiées.

Quand l'algorithme s'arrête, les dernières variables sont notées γ_i^* , Y_i^* , W_i^* et K_i^* . Les commandes optimales $\tilde{u}_1^*$ et $\tilde{u}_2^*$ sont données alors par

$$\tilde{u}_i^*(t) = K_i^* x(t). \quad (7.42)$$

Remarque 7.5. Les valeurs obtenues par cet algorithme dépendent de la condition initiale K_2 choisie. En modifiant cette valeur initiale, l'algorithme peut ne pas sortir de la boucle ou bien fournir une nouvelle valeur. Dans ce chapitre cette dépendance n'est pas étudiée en détails et seule la valeur initiale $K_2 = 0_{r_2 \times n}$ est considérée.

Remarque 7.6. Pour un système certain (un seul sommet), l'algorithme est l'association de problèmes d'optimisation, dont la solution est donnée à chaque étape par une équation de Riccati simple. De plus, les variables optimales Y_i^* sont données par $Y_i^* = -R_{ii}^{-1} B_i^T$. Cet algorithme simplifié est une version de l'algorithme classique [AKFIJ03, p. 340], vu au chapitre 4, utilisant à chaque étape des SDP.

Remarque 7.7. Dans l'état actuel, aucune preuve de convergence de cet algorithme n'existe, même si des conditions de faisabilité pour les SDP à chaque étape peuvent être mises en avant.

7.6 Propriétés des solutions

Théorème 7.8 (Stabilité). *Quand les commandes $\tilde{u}_1^*$ et $\tilde{u}_2^*$ (7.42) sont appliquées, la matrice d'évolution*

$$A^*(\lambda) = A(\lambda) + B_1(\lambda)K_1^* + B_2(\lambda)K_2^* \quad (7.43)$$

est Hurwitz pour tout $\lambda \in \Lambda$. En outre, le système commandé en boucle fermée correspondant est stable.

Démonstration. En réarrangeant les inégalités (7.36-7.37) et en utilisant le lemme de Schur, on obtient une inégalité de Lyapunov

$$(A^*(\lambda))^T (W_i^*)^{-1} + (W_i^*)^{-1} (A^*(\lambda)) \leq -Q_i - (K_i^*)^T R_{ii} K_i^* - (K_j^*)^T R_{ij} K_j^* < 0. \quad (7.44)$$

Le résultat s'obtient alors par le fait que $(W_1^*)^{-1}$ est définie positive. Même si λ varie, la fonction de Lyapunov associée implique la stabilité du système. $\square$

Le théorème 7.8 garantit l'existence de J_1 et J_2 pour chaque vecteur λ en appliquant les commandes $\tilde{u}_i^*(t) = K_i^* x(t)$. C'est-à-dire que les valeurs de ces critères positifs sont finies.

Théorème 7.9 (Borne supérieure des critères). *Quand les commandes $\tilde{u}_i^*(t) = K_i^* x(t)$ sont appliquées*

$$\begin{cases} J_i(\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*, \lambda) = x_0^T G_i(\lambda) x_0, \\ J_i(u_1^*, u_2^*) \leq x_0^T G_i(\lambda) x_0 \leq \gamma_i^*, \end{cases} \quad (7.45)$$

où $G_i(\lambda)$ est obtenue par la résolution de l'équation algébrique de Riccati

$$A^*(\lambda)^T G_i(\lambda) + G_i(\lambda) A^*(\lambda) = -(Q_i + (K_i^*)^T R_{ii} K_i^* + (K_j^*)^T R_{ij} K_j^*). \quad (7.46)$$

Démonstration. En injectant cette dernière équation dans (7.44), on obtient

$$A^*(\lambda)^T ((W_i^*)^{-1} - G_i(\lambda)) + ((W_i^*)^{-1} - G_i(\lambda)) A^*(\lambda) \leq 0.$$

Comme la matrice $A^*(\lambda)$ est stable, on a alors

$$(W_i^*)^{-1} \geq G_i(\lambda),$$

ce qui implique

$$\gamma_i^* = x_0^T (W_i^*)^{-1} x_0 \geq x_0^T G_i(\lambda) x_0. \quad (7.47)$$

$\square$

On obtient alors les majorations suivantes

$$J_i(u_1^*(\lambda), u_2^*(\lambda), \delta) \leq J_i(\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*, \lambda) = x_0^T G_i(\lambda) x_0 \leq \gamma_i^*,$$

$\swarrow$
 λ connu

$\swarrow$
 Approximation supérieure

$\searrow$
 Borne supérieure

7.7 Illustration

Dans ce paragraphe, on considère comme exemple une extension de [AKFIJ03, p. 341] en incluant un modèle polytopique composé de trois sommets.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.0466 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0282 & -1.1100 & -0.0076 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.1855 & -0.7170 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.0266 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0682 & -0.9100 & 0.0124 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3855 & -0.6970 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.0366 & 0.1271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0582 & -1.0000 & 1.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.4855 & -0.6070 & 1.4229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} 0.3422 \\ 2.8447 \\ -5.0200 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{1,2} = \begin{pmatrix} 0.5422 \\ 3.2447 \\ -6.0200 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{1,3} = \begin{pmatrix} 4.4422 \\ 1.0447 \\ -4.5200 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{2,1} = \begin{pmatrix} 0.1761 \\ -7.6922 \\ 5.2900 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{2,2} = \begin{pmatrix} 0.1761 \\ -7.4922 \\ 4.6900 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{2,3} = \begin{pmatrix} 0.3761 \\ -7.5922 \\ 4.8900 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de pondération sont données par

$$Q_1 = \text{diag}(3.5; 2; 4; 5), \quad Q_2 = \text{diag}(1.5; 6; 3; 1),$$

$$R_{11} = 1; \quad R_{12} = 0.25; \quad R_{21} = 0.6; \quad R_{22} = 2,$$

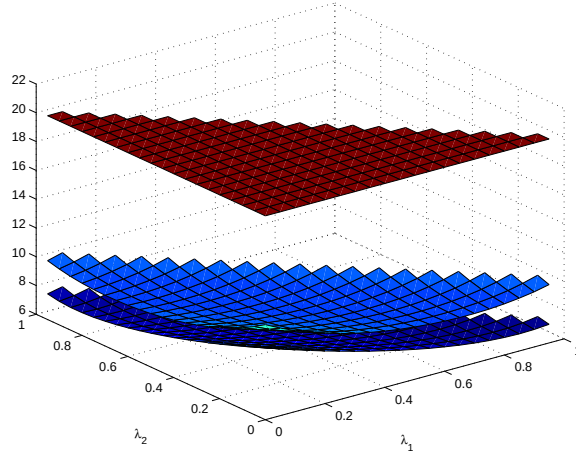
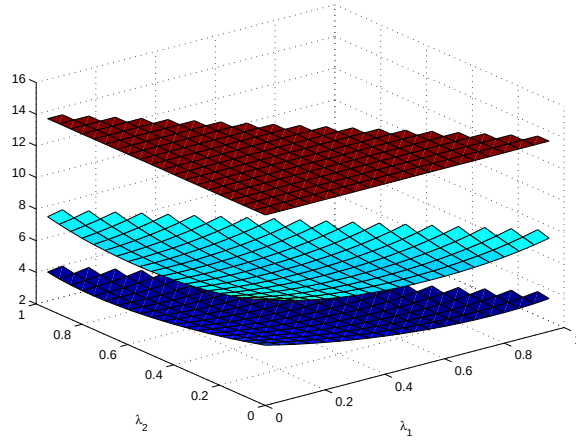
$$x_0 = (0 \ 0 \ 1 \ 1)^T.$$

L'algorithme s'arrête au bout de 4 itérations. On obtient

$$\begin{aligned} \gamma_1^* &= 20.1675, & \gamma_2^* &= 14.0375, \\ K_1^* &= \begin{pmatrix} -0.4031 & -0.0102 & 0.2365 & 0.4423 \end{pmatrix}, \\ K_2^* &= \begin{pmatrix} 0.7224 & 1.5634 & -0.4907 & -1.9850 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les performances des commandes $(\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*)$ sont mises en avant sur les figures 7.1 et 7.2. Sur ces figures sont représentées les surfaces des trois éléments des inégalités (7.45), pour chaque $\lambda \in \Lambda$. Les inégalités sont bien vérifiées.

Sur les figures 7.3 et 7.4 sont représentées les différences positives entre $J_i(\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*, \lambda)$ et $x_0^T G_i(\lambda) x_0$.

FIGURE 7.1 – Performances sur le critère J_1 .FIGURE 7.2 – Performances sur le critère J_2 .

7.8 Conclusion

Dans ce chapitre, la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle fermée est étendue au cas des systèmes incluant des incertitudes. Cette notion mène à des bornes supérieures des critères des équilibres de Nash. A partir de la reformulation d'un équilibre de Nash en terme de problèmes couplés d'optimisation non convexes, l'extension pour les systèmes incertains polytopiques correspond à vérifier les contraintes pour tous les sommets du polytope. Un algorithme itératif est proposé pour rechercher numériquement une solution à un tel problème. Cependant, les distances entre les deux surfaces sur les figures 7.1 et 7.2 ne peuvent pas encore être estimées (et donc réduites). Il s'agit ici d'une première tentative d'extension de la stratégie de Nash aux systèmes incertains. Une perspective est d'améliorer les contraintes LMI en évitant de rechercher un W_i^{-1} commun pour chaque sommet du polytope.

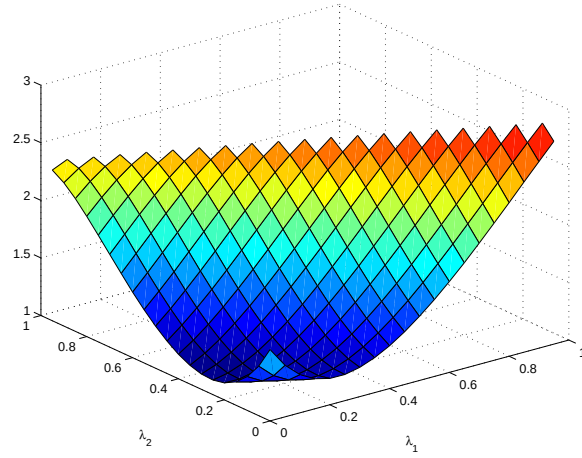


FIGURE 7.3 – $x_0^T G_1(\lambda) x_0 - J_1(\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*, \lambda)$.

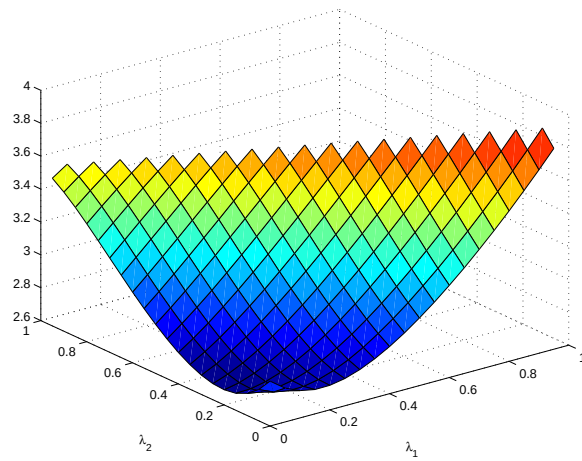


FIGURE 7.4 – $x_0^T G_2(\lambda) x_0 - J_2(\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*, \lambda)$.

Conclusion générale

1 Bilan des contributions

La théorie des jeux est un cadre souple et adapté pour gérer les systèmes multientrées, multiobjectifs. La richesse des stratégies utilisables est importante (stratégies de Nash, de Stackelberg, en boucle ouverte, en boucle fermée...). La question de la robustesse naturelle des commandes issues de la théorie des jeux se pose alors. Ce cadre de synthèse de commande mène-t-il à la résolution d'équations couplées de Riccati ou de type Riccati, qui peuvent admettre un nombre élevé de solutions. Des arguments sont alors nécessaires pour distinguer ces solutions. L'étude de la robustesse naturelle ou *a priori* des commandes issues de la théorie des jeux est donc une problématique décisive pour la validation de ce type de commande et le développement de ce cadre de travail.

Cette thèse propose d'établir les prémices du lien entre théorie des jeux et robustesse. Les différentes stratégies principales sont étudiées. Il est mis en avant, ici, qu'elles sont très inégales vis-à-vis de la robustesse.

Les stratégies en boucle ouverte, plus simples, peuvent être efficaces en pratique, comme le montrent les exemples de commandes de suspensions magnétiques. Elles présentent cependant certaines limitations. En particulier, des contre-exemples montrent que des conditions fortes sur le système ne suffisent pas pour assurer l'existence d'au moins une solution admissible aux équations algébriques couplées de Riccati. Néanmoins, il faut noter le cas intéressant en terme d' α -stabilité de la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte sur les systèmes de critères quadratiques incluant une pondération temporelle exponentielle.

A l'opposé des stratégies en boucle ouverte, les stratégies en boucle fermée, présentent plus de propriétés intéressantes. Elles sont cependant plus ardues à déterminer. Des algorithmes numériques performants (expérimentalement, vu qu'aucune démonstration de convergence n'est disponible, pour aucun des algorithmes), par rapport à ceux existants, sont proposés pour résoudre les équations couplées de type Riccati issues de la stratégie de Nash en boucle fermée.

Une part importante de la thèse s'attache à la stratégie de Stackelberg en boucle fermée. Ici les conditions nécessaires sont approfondies et des conditions suffisantes sont obtenues. Rassemblées, elles permettent d'offrir des conditions d'existence des solutions issues de cette stratégie. Le cas linéaire quadratique est tout particulièrement détaillé. Une application majeure de cette stratégie est la commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$.

Enfin le dernier chapitre propose une extension de la théorie des jeux aux systèmes présentant des incertitudes paramétrées. Dans les faits, une représentation polytopique de l'incertitude est choisie, afin d'établir des passerelles entre égalités de type Riccati du cas certain à une association de problèmes couplés d'optimisation non convexes, avec contraintes sous forme d'inégalités linéaires matricielles, dans le cas incertain. Un algorithme itératif est ici proposé pour déterminer numériquement une commande permettant un niveau garanti pour les différents critères.

Cette thèse a permis de défricher les enchevêtrements entre théorie des jeux et robustesse, en répondant à certaines des questions à l'origine de ce travail. Néanmoins le sujet reste encore très largement ouvert. Des perspectives de prolongement de ce travail sont déjà envisagées. Une liste loin d'être exhaustive est proposée dans le paragraphe suivant.

2 Perspectives

Les orientations possibles du futur travail de recherche peuvent être classées en deux catégories : les perspectives de prolongement et les perspectives d'ouverture. Les perspectives de prolongement correspondent aux tentatives de répondre aux questions ouvertes présentées dans tout le manuscrit, alors que les perspectives d'ouverture correspondent à l'étude de questions qui n'ont pas encore été abordées dans ce mémoire. Il est ainsi possible de citer les perspectives éventuelles suivantes.

Perspectives de prolongement :

- Un approfondissement des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'une solution admissible pour la stratégie de Nash en boucle ouverte est engagé.
- Dans la majorité des cas, plusieurs solutions sont issues des stratégies en boucle ouverte. La recherche d'une méthodologie pour effectuer un placement de pôles *a priori* est à considérer. L'idée étant, à partir d'une dynamique linéaire donnée, de choisir les matrices de pondérations dans l'ensemble des critères, afin de permettre un placement prédéfini de tous les pôles pour le système asservi, comme dans [MTP88].
- Un rapprochement entre les techniques de linéarisation robuste par bouclage [Fra06, FBPG06] et celles de la théorie des jeux est programmé.
- Les applications des résultats de la stratégie de Stackelberg à l'économie constituent un travail conséquent.
- Les algorithmes pour résoudre les équations couplées de type Riccati issues de la stratégie de Nash en boucle fermée, sont à perfectionner encore. Plusieurs aspects aussi sont à creuser, comme les preuves de convergence, ainsi que le développement des algorithmes pour atteindre les autres solutions non définies.
- Dans ce mémoire, seul le temps continu a été considéré. Un travail conséquent est possible en transposant les résultats aux systèmes à temps discret.

Perspectives d'ouverture :

- Un champ applicatif particulier, les systèmes linéaires positifs, semble très intéressant en terme de théorie des jeux. Certains résultats [PJ06] sont très prometteurs dans ce domaine.
- Même si le cadre des jeux différentiels de dynamique non linéaire a été abordé, un approfondissement est envisagé, par exemple, en tenant compte de saturations (approche polytopique ou de secteur).
- Une exploration détaillée du domaine des systèmes interconnectés présage de résultats motivants [RCL05].
- Enfin le travail qui semble le plus important maintenant est d'essayer d'appliquer le plus possible ces techniques de commandes et ces résultats à des systèmes réels, afin de convaincre les utilisateurs de leur pertinence. Et par là-même, de vulgariser la commande robuste des systèmes par la théorie des jeux.

3 Publications et communications présentées dans cette thèse

Les travaux effectués durant cette thèse ont donné lieu aux publications et communications suivantes :

Publications soumises à des revues :

1. **M. Jungers**, E. Trélat et H. Abou-Kandil. Commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$: une approche par la stratégie de Stackelberg. Soumis.
2. **M. Jungers**, E. Trélat et H. Abou-Kandil. *A Stackelberg Game Approach to mixed $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ control*. Soumis.
3. **M. Jungers**, E. Trélat and H. Abou-Kandil. *Stackelberg strategy with closed-loop information structure*. Soumis.
4. **M. Jungers**. *On Linear-Quadratic Stackelberg games with Time Preference Rate*. Soumis.
5. **M. Jungers**, E. B. Castelan, E.R. De Pieri and H. Abou-Kandil. *Bounded Nash Equilibrium for uncertain linear systems*. Soumis.

Chapitre de livre :

1. H. Abou-Kandil et **M. Jungers**. *Commande optimale*, chapitre *Commande optimale multicritère : introduction à la théorie des jeux*. Hermès, 2004.

Conférences avec actes :

1. **M. Jungers** et H. Abou-Kandil. Robustesse de différentes commandes issues de la stratégie de Nash. *Conférence Internationale Francophone en Automatique*, Douz, Tunisie, en français, Novembre 2004.
2. **M. Jungers** et H. Abou-Kandil. Properties of coupled Riccati equations in Stackelberg games with time preference rate. *IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Oaxaca, Mexico, December 2004.
3. **M. Jungers**, A.L.D. Franco, E.R. De Pieri and H. Abou-Kandil. Nash strategy applied to active magnetic bearing control. *16th IFAC World Congress*, Praha, Czech Republic, July 4-8 2005.
4. **M. Jungers** et E.R. De Pieri. Stratégie de Stackelberg appliquée à la commande d'une suspension magnétique 3 pôles. *Journées Doctorales Modélisation Analyse Commande des Systèmes*, Lyon, France, en français, Septembre 2005.
5. **M. Jungers**, E.R. De Pieri and H. Abou-Kandil. Solving coupled algebraic Riccati equations from closed-loop Nash strategy, by lack of trust approach. *13th IFAC Control Applications of Optimisation*, Cachan, France, April 26-28, 2006.
6. **M. Jungers**. Jeux différentiels LQ de Stackelberg avec une pondération temporelle commune. *Conférence Internationale Francophone en Automatique*, Bordeaux, France, en français, Mai 2006.

Portraits

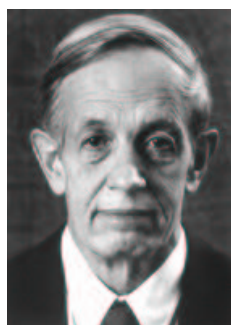
Comment résister et ne pas mettre une image sur les principaux noms de ce manuscrit ?



John VON NEUMANN
(né János Lajos NEUMANN)
(1903-1957)



**Heinrich Freiherr VON
STACKELBERG**
(1905-1946)



John Forbes NASH
(1928-)



**Jacopo Francesco
RICCATI**
(1676-1754)

Bibliographie

- [AH94] R.J. Aumann and S. Hart. *Handbook of game theory with economic applications II*. Elsevier, 1994.
- [AK86] H. Abou-Kandil. *Elaboration de structures de commande hiérarchisées : Approches mono-critère et multi-critères*. Thèse de doctorat d'état, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1986.
- [AKB85] H. Abou-Kandil and P. Bertrand. Analytical Solution for an Open-Loop Stackelberg Game. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(12) : 1222–1224, December 1985.
- [AKB86] H. Abou-Kandil and P. Bertrand. Analytical solution for a class of linear-quadratic Nash games. *International Journal of Control*, 43 : 997–1002, 1986.
- [AKFIJ03] H. Abou-Kandil, G. Freiling, V. Ionescu, and G. Jank. *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. Birkhäuser, 2003.
- [AKFJ93] H. Abou-Kandil, G. Freiling, and G. Jank. Necessary conditions for constant solutions of coupled Riccati equations in Nash games. *Systems and control letters*, 21 : 295–306, 1993.
- [AKJ03] H. Abou-Kandil and G. Jank. Open-loop Nash Riccati equations in games with discount rate. volume Proceedings of the IFAC Conference on Control Applications of Optimization, Hungary, 2003.
- [AKJ04] H. Abou-Kandil and M. Jungers. *Commande optimale*, chapitre Commande optimale multicritère : introduction à la théorie des jeux. Hermès, 2004.
- [AM89] B.D.O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal control : linear quadratic methods*. Prentice-Hall International Editions, 1989.
- [AMP02] F. Amato, M. Mattei, and A. Pironti. Guaranteeing cost strategies for linear quadratic differential games under uncertain dynamics. *Automatica*, 38 : 507–515, 2002.
- [Bag84] A. Bagchi. *Stackelberg Differential Games in Economic Models*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, June 1984.
- [Baş74] T. Başar. On the uniqueness of the Nash solution in linear-quadratic differential games. *International Journal of Game Theory*, 5(2/3) : 65–90, 1974.
- [Baş77] T. Başar. Informationally nonunique equilibrium solutions in differential games. *SIAM J. on Control and Opt.*, 15 : 636–660, 1977.
- [BB73] P. Bernhard and G. Bellec. On the evaluation of worst case design with an application to the quadratic synthesis technique. In *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on Sensitivity, Adaptivity and Optimality*, Ischia, Italy, 1973.
- [BB95] T. Başar and P. Bernhard. *$\mathcal{H}_\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems : A Dynamic Game Approach*. Birkhäuser, 1995.
- [BC03] B. Bonnard and M. Chyba. *The role of singular trajectories in control theory*. Math. & Appl. 40, Springer Verlag, 2003.

- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [Ben74] A. Bensoussan. Points de Nash dans le cas de fonctionnelles quadratiques et jeux différentiels linéaires à n personnes. *SIAM Journal Control*, 12(3) : 460–499, August 1974.
- [Ber83] P. Bernhard. *La théorie de la seconde variation et le problème linéaire-quadratique*. in Advances in Hamiltonian systems. Birkhäuser, 1983.
- [BFT06] B. Bonnard, L. Faubourg, and E. Trélat. *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*. Math. & Appl. 51, Springer Verlag, 2006.
- [BH89] D. S. Bernstein and W. M. Haddad. LQG control with an $\mathcal{H}_\infty$ performance bound : A Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-34(3) : 293–305, March 1989.
- [BO80] T. Başar and G. J. Olsder. Team-optimal closed-loop stackelberg strategies in hierarchical control problems. *Automatica*, 16 : 409–414, 1980.
- [BO95] T. Başar and G. J. Olsder. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. SIAM, 1995.
- [BS79] T. Başar and H. Selbuz. Closed-loop stackelberg strategies with applications in the optimal control of multilevel systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24 : 166–179, 1979.
- [Car99] C. Caratheodory. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*. Chelsea Pub Co., 3rd edition, 1999.
- [Cas69] J.H. Case. Towards a theory of many player differential games. *SIAM J. Control*, 7 : pp. 179–197, 1969.
- [CC71] J.B. Jr. Cruz and C.I. Chen. Series Nash solution of two person nonzero-sum linear-quadratic games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 7 : 240–257, 1971.
- [CC72] C. I. Chen and J. B. Cruz. Stackelberg solution for two-person games with biased information patterns. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-17(6) : 791–797, December 1972.
- [CCAK05] L. Cherfi, Y. Chitour, and H. Abou-Kandil. A new numerical algorithm for solving coupled algebraic Riccati equations. Vienna, Austria, 28-30 november 2005. CIMCA 2005.
- [CDS96] J.B. Cruz, S.V. Drakunov, and M.A. Sikora. Leader-follower strategy via a sliding mode approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 88(2) : 267–295, February 1996.
- [CH02] S.L. Chen and C.T. Hsu. Optimal design of a three-pole active magnetic bearing. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(5) : 3458–3466, September 2002.
- [Che84] C.T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Harcourt Brace College Publishers, 1984.
- [Che05] L. Cherfi. *Systèmes différentiels et algébriques du type Riccati issus de la théorie des jeux*. PhD thesis, ENS Cachan, France, Décembre 2005.
- [CKS93a] D. Cho, Y. Kato, and D. Spilman. Sliding mode and classical controllers in magnetic levitation systems. *IEEE Control Systems*, 13(1) : 42–48, 1993.
- [CKS93b] D. Cho, Y. Kato, and D. Spilman. Sliding mode and classical controllers in magnetic levitation systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 13(1) : 42–48, February 1993.
- [CL55] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [CSA97] H. Chen, C.W. Scherer, and F. Allgöwer. A game theoretic approach to nonlinear robust receding horizon control of constrained systems. volume 5, pages 3073–3077, Albuquerque, New Mexico, June 1997. Proceedings of the American Control Conference.

- [CW] S. Clemhout and H. Y. Wan. *Handbook of Game Theory*, volume 2, chapitre 23 - Differential Games - economic applications. Elsevier Science.
- [CZ01] X. Chen and K. Zhou. Multiobjective $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control design. *SIAM Journal Control Optimization*, 40(2) : 628–660, 2001.
- [DF99] G. Duc and S. Font. *Commande $\mathcal{H}_\infty$ et μ -analyse*. Hermès Sciences, 1999.
- [DFT90] J. Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co, 1990.
- [DGKF89] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis. State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-34(8) : 831–847, August 1989.
- [DJLS00] E. Dockner, S. Jørgensen, N. Van Long, and G. Sorger. *Differential games in economics and management science*. Cambridge University Press, 2000.
- [Doy78] J. Doyle. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(4) : 756–757, August 1978.
- [dQD96] M. S. de Queiroz and D. M. Dawson. Nonlinear control of active magnetic bearings : a backstepping approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5) : 545–552, 1996.
- [DS81] J.C. Doyle and G. Stein. Multivariable feedback design : Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(1) : 4–16, February 1981.
- [DZGB94] J. Doyle, K. Zhou, K. Glover, and B. Bodenheimer. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives II : optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8) : 1575–1587, 1994.
- [Eis82] T. Eisele. Nonexistence and nonuniqueness of open-loop equilibria in linear-quadratic differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 37(4) : 443–468, August 1982.
- [EK72] R. J. Elliott and N. Kalton. Differential games of pursuit and evasion. *Journal of Differential Equations*, 12 : 504–523, 1972.
- [Eng98a] J. C. Engwerda. Computational aspects of the open-loop Nash equilibrium in linear quadratic games. *Journal of Economic Dynamics and Control*, (22) : 1487–1506, 1998.
- [Eng98b] J. C. Engwerda. On the open-loop Nash equilibrium in LQ-games. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22 : 729–762, 1998.
- [Eng05a] J. C. Engwerda. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*. Wiley, 2005.
- [Eng05b] J. C. Engwerda. The open-loop linear quadratic differential game revisited. Technical Report 35, Center DP Tilburg University, The Netherlands, 2005.
- [FBPG06] A. L. D. Franco, H. Boursès, E. R. De Pieri, and H. Guillard. Robust nonlinear control associating robust feedback linearization and $\mathcal{H}_\infty$ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, To appear, July 2006.
- [Feu94] N. Feucht. *Linear-quadratische Differentialspiele und gekoppelte Riccatische Matrixdifferentialgleichungen*. PhD thesis, University ULM, 1994.
- [FJAK96] G. Freiling, G. Jank, and H. Abou-Kandil. On global existence of solutions to coupled matrix Riccati equations in closed-loop Nash games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(2) : 264–296, February 1996.
- [FJL01] G. Freiling, G. Jank, and S. R. Lee. Open-loop stackelberg equilibria in linear-quadratic differential games. *Journal of Optimisation Theory*, 110 : 515–544, 2001.
- [Fle61] W. H. Fleming. The convergence problem for differential games. *J. Math. Anal. and Appl.*, 3 : 102–116, 1961.

- [Fle64] W. H. Fleming. *The Convergence Problem for Differential Games, II.* in Advances in Game Theory. Princeton Univ. Press, 1964.
- [Fra06] A. L. Driemeyer Franco. *Commande non linéaire robuste : une approche fondée sur la linéarisation par bouclage.* PhD thesis, Universidade Federal De Santa Catarina (Brazil) - Ecole Normale Supérieure de Cachan (France), mars 2006.
- [Fre] G. Freiling. A survey of nonsymmetric Riccati equations.
- [Fri71] A. Friedman. *Differential Games.* Wiley Interscience, 1971.
- [FS71] M. H. Foley and W. E. Schmitendorf. On a class of nonzero-sum linear-quadratic differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 7(5) : 357–376, 1971.
- [FS97] H. O. Florentino and R. M. Sales. Nash game and mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. pages 3521–3525. Proceedings of the American Control Conference, Albuquerque, NM, USA, 1997.
- [Ger89] J.C. Geromel. Convex analysis and global optimization of joint actuator location and control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-34 : 711–720, July 1989.
- [GS93] Z. Gajic and S. Shen. *Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems.* Berlin, Heidelberg, Springer, 1993.
- [Hal90] S. A. Hall. Pulse-width-modulating control of a nonlinear electromagnetic actuator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 37(3) : 241–249, June 1990.
- [HBB65] Y. C. Ho, A. E. Bryson, and S. Baron. Differential games and optimal pursuit-evasion strategies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-10(4) : 385–389, 1965.
- [HC02] C. T. Hsu and S. L. Chen. Exact linearization of a voltage-controlled 3-pole active magnetic bearing system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(4) : 618–625, July 2002.
- [HC03] C. T. Hsu and S. L. Chen. Nonlinear control of a 3-pole active magnetic bearing system. *Automatica*, 39 : 291–298, 2003.
- [HHK97] B. Halder, B. Hassibi, and T. Kailath. Linearly combined suboptimal mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ controllers. volume Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, pages 434–439, San Diego CA, December 1997.
- [Ho70] Y. C. Ho. Survey paper : Differential games, dynamic optimization and generalized control theory. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 6(3) : 179–209, 1970.
- [Isa75] R. Isaacs. *Differential Games : A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization.* Krieger Publishing, 1975.
- [JAK04a] M. Jungers and H. Abou-Kandil. Properties of coupled Riccati equations in Stackelberg games with time preference rate. In *IFAC SSSC*, Oaxaca, Mexico, December 2004.
- [JAK04b] M. Jungers and H. Abou-Kandil. Robustesse de différentes commandes issues de la stratégie de Nash. In *CIFA '04*, Douz Tunisie, Novembre 2004.
- [JCPAK06] M. Jungers, E. B. Castelan, E. R. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Bounded Nash equilibrium for uncertain linear systems. *in revision for Automatica*, 2006.
- [JFPAK05] M. Jungers, A.L.D. Franco, E.R. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Nash strategy applied to active magnetic bearing control. In *16th IFAC World Congress*, Praha, Czech Republic, July 4-8 2005.
- [JK98] G. Jank and G. Kun. *Computational Methods and Function Theory*, chapitre Solutions of generalized Riccati differential equations and their approximation, pages 1–18. World Scientific Publishing Co., 1998.
- [JP05] M. Jungers and E.R. De Pieri. Stratégie de Stackelberg appliquée à la commande d'une suspension magnétique 3 pôles. In *Journées Doctorales Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes dynamiques JDMACS'05*, Lyon, France, Septembre 2005.

- [JPAK06] M. Jungers, E. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Solving coupled algebraic Riccati equations from closed-loop Nash strategy, by lack of trust approach. In *13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation, CAO'06*, Cachan, France, 26-28 Avril 2006.
- [JTAK06a] M. Jungers, E. Trélat, and H. Abou-Kandil. Commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: une approche par la stratégie de Stackelberg. *JESA accepté*, 2006.
- [JTAK06b] M. Jungers, E. Trélat, and H. Abou-Kandil. A stackelberg game approach to mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. *Submitted to IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006.
- [JTAK06c] M. Jungers, E. Trélat, and H. Abou-Kandil. Stackelberg strategy with closed-loop information structure. *Soumis*, 2006.
- [Jun06a] M. Jungers. Jeux différentiels LQ de Stackelberg avec une pondération temporelle commune. In *Conférence Internationale Francophone en Automatique CIFA'06*, Mai, Bordeaux, France 2006.
- [Jun06b] M. Jungers. On Stackelberg linear quadratic games with time preference rate. *Accepté avec modification mineure à IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006.
- [Kak41] S. Kakutani. Generalization of brouwer's fixed point theorem. *Duke Journal of Mathematics*, pages 457–459, 1941.
- [KR71] N.J. Krikelis and Z.V. Rekasius. On the solution of optimal linear control problems under conflict of interest. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(2) : 140–145, 1971.
- [KR91] P. Khargonekar and M. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control : a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7) : 823–837, 1991.
- [Kre03] D. Kremer. *Non-symmetric Riccati theory and noncooperative games*. PhD thesis, RWTH Aachen, 2003.
- [KS72] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear optimal control systems*. John Wiley and Sons, 1972.
- [Kuč72] V. Kučera. A contribution to matrix quadratic equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 344–347, June 1972.
- [LAH94] D.J.N. Limebeer, B.D.O. Anderson, and H. Hendel. A Nash game approach to mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(1) : 69–82, January 1994.
- [LLP96a] J. Lévine, J. Lottin, and J.-C. Ponsart. A nonlinear approach to the control of magnetic bearings. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5) : 524–544, September 1996.
- [LLP96b] J. Lévine, J. Lottin, and J.C. Ponsart. A nonlinear approach to the control of magnetic bearings. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5) : 524–544, September 1996.
- [LM67] E.B. Lee and L. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory*. New York : Wiley, 1967.
- [LP06] M. Jimenez Lizarraga and A. Poznyak. ϵ -equilibrium in LQ differential games with bounded uncertain disturbances. In *13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation*, Cachan, France, 26-28 April 2006.
- [LR71] D. L. Lukes and D. L. Russel. A global theory for linear-quadratic differential games. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 33(1) : 96–123, 1971.
- [LSC05] J. Lee, R.V. Sonalkar, and J.M. Cioffi. A multi-user power control algorithm for digital subscriber lines. *IEEE Communications Letters*, 9(3) : 193–195, March 2005.
- [ME93] A. M. Mohamed and F. P. Emad. Nonlinear oscillations in magnetic bearing systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(8) : 1242–1245, August 1993.

- [Med78] J. Medanic. Closed-loop stackelberg strategies in linear-quadratic problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(4) : 632–637, august 1978.
- [Meh82] A. Mehlmann. *Optimal control theory and economic analysis*, chapitre On relations between open-loop and closed-loop Nash solutions in deterministic games, pages 399–413. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [MGL91] D. Mustafa, K. Glover, and D.J.N. Limebeer. Solutions to the $\mathcal{H}_\infty$ general distance problem which minimizes an entropy integral. *Automatica*, vol 27(1) : 193–199, 1991.
- [MTP88] J. Medanic, H.S. Tharp, and W.R. Perkins. Pole placement by performance criterion modification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 33(5) : 469–472, mai 1988.
- [MW01] A. B. MacKenzie and S. B. Wicker. Game theory and the design of self-configuring, adaptive wireless networks. *IEEE Communications Magazine*, November 2001.
- [MY86] F. Matsumura and T. Yoshimoto. System modeling and control design of a horizontal-shaft magnetic-bearing system. *IEEE Transactions on Magnetics*, Mag 22(3) : 196–203, May 1986.
- [Nas50] J.F. Nash. Equilibrium points in N –person games. *Proceedings Nat. Acad. Science U.S.*, 36 : 48–49, 1950.
- [Nas51] J.F. Nash. Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, 54 : 286–296, 1951.
- [NM44] John Von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University press, 1944.
- [OP77] U. Özgüner and W.R. Perkins. A series solution to the Nash strategy for large scale interconnected systems. *Automatica*, 13 : 313–315, 1977.
- [Par96] V. Pareto. *Cours d'économie politique*, volume 1. F. Rouge et Cie, Lausanne, 1896.
- [PBGM62] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, and E. Michtchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, Wiley Interscience, 1962.
- [PBGM74] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, and E. Michtchenko. *Théorie mathématique des processus optimaux*. Editions Mir, Moscou, 1974.
- [PC67] E. Polak and N. O. Da Cunha. Constrained minimization under vector valued-criteria in finite dimensional spaces. *J. Math. Anal. & Appl.*, 19(1) : 103–124, 1967.
- [PC79a] G. P. Papavassilopoulos and J. B. Cruz. Nonclassical control problems and Stackelberg games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(2) : 155–166, April 1979.
- [PC79b] G. P. Papavassilopoulos and J. B. Cruz. On the existence of solutions to coupled matrix Riccati differential equations in linear quadratic Nash games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(1) : 127–129, February 1979.
- [PC80] G. P. Papavassilopoulos and J. B. Cruz. Sufficient conditions for stackelberg and Nash strategies with memory. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 31(2) : 233–259, June 1980.
- [Pet90] M.L. Petit. *Control theory and dynamics games in economic policy*. Cambridge, University Press, 1990.
- [Pin77] R.S. Pindyck. Optimal economic stabilization policies under decentralized control and conflicting objectives. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 : 517–530, 1977.
- [PJ06] T. P. Azevedo Perdicoulis and G. Jank. Linear quadratic Nash games on positive linear systems. *European Journal of Control*, 11(6) : 632–644, 2006.
- [PO84] G. P. Papavassilopoulos and G. J. Olsder. On the linear-quadratic, closed-loop, no-memory Nash game. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 42(4) : 551–560, April 1984.

- [Pon96] J.-C. Ponsart. *Asservissements numériques de paliers magnétiques. Application aux pompes à vide*. PhD thesis, Université de Savoie, France, décembre 1996.
- [RCL05] M. Rotkowitz, R. Cogill, and S. Lall. A simple condition for the convexity of optimal control over networks with delays. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, Seville, Spain, December 2005.
- [RDD96] A. E. Rundell, S. V. Drakunov, and R. A. DeCarlo. A sliding mode observer and controller for stabilization of rotational motion of a vertical shaft magnetic bearing. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5) : 598–608, September 1996.
- [RK91] M. A. Rotea and P. P. Khargonekar. $\mathcal{H}_2$ -optimal control with an $\mathcal{H}_\infty$ -constraint : the state feedback case. *Automatica*, 27(2) : 307–316, 1991.
- [San74] N.R. Jr. Sandell. On open-loop and closed-loop Nash strategies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 : 435–436, 1974.
- [SC73a] M. Simaan and J. B. Cruz. Additional aspects of the Stackelberg strategy in nonzero-sum games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 11(6) : 613–626, 1973.
- [SC73b] M. Simaan and J. B. Cruz. On the Stackelberg strategy in nonzero-sum games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 11(5) : 533–555, 1973.
- [SC75] M. Simaan and J. B. Cruz. Formulation of richardson’s model of arm race from a differential game viewpoint. *Review Economic Studies*, 42 : 67–77, 1975.
- [Sch95] C. Scherer. Multiobjective $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(6) : 1054–1063, 1995.
- [SH69a] A. W. Starr and Y. C. Ho. Further properties of nonzero-sum differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3(4) : 207–219, 1969.
- [SH69b] A. W. Starr and Y. C. Ho. Nonzero-sum differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3(3) : 184–206, 1969.
- [SL95] J. Shinar and Y. Lipman. *A linear pursuit-evasion game with state constraint of a highly maneuverable evader*, pages 143–164. in *New Trends in Dynamic Games and Applications*. Birkhäuser, Boston, 1995.
- [SNM⁺05] V. Srivastava, J. Neel, A. MacKenzie, J. Hicks, L.A. DaSilva, J.H. Reed, and R. Gilles. Using game theory to analyze wireless ad hoc networks. *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, 2005.
- [ST94] J. Shinar and R. Tabak. New results in optimal missile avoidance analysis. *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 17(5) : 897–902, 1994.
- [Tak06] A. Takayama. *Mathematical Economics*. Cambridge University Press, second edition, January 2006.
- [Tol81] B. Tolwinski. Closed-loop Stackelberg solution to a multistage linear-quadratic game. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 34(4) : 485–501, August 1981.
- [Tre05] E. Trélat. *Contrôle optimal : théorie et applications*. Vuibert, 2005.
- [TY91] K. Tanaka and K. Yokoyama. On ϵ -equilibrium point in a noncooperative N-person game. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 160 : 413–423, 1991.
- [vdBES03] W.A. van den Broek, J.C. Engwerda, and J.M. Schumacher. Robust equilibria in indefinite linear-quadratic differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 119(3) : 565–595, 2003.
- [VL69] P. Varaiya and J. Lin. Existence of saddle points in differential games. *SIAM J. Control*, 7(1) : 142–157, 1969.
- [vS34] H. von Stackelberg. *Marktform und Gleichgewicht*. Springer, 1934.
- [vS52] H. von Stackelberg. *The Theory of market economy*. Oxford University Press, 1952.

- [WC79] P.M. Walsh and J.B.Jr. Cruz. An example of the impact of information structure on decentralized multicriterion control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24 : 978–980, 1979.
- [Wit71] H. S. Witsenhausen. On the relations between the values of a game and its information structure. *Information and Control*, 19(3) : 204–215, 1971.
- [WSE95] A.J.T.M. Weeren, J.M. Schumacher, and J.C. Engwerda. Asymptotic analysis of Nash equilibrium in nonzero-sum linear-quadratic differential games. *Research Memorandum FEW 634*, 1995.
- [Zad63] L. A. Zadeh. Optimality and non-scalar valued performance criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 8(1) : 59–60, January 1963.
- [ZDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [ZGBD94] K. Zhou, K. Glover, B. Bodenheimer, and J. Doyle. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives I : robust performance analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8) : 1564–1574, 1994.
- [Zhu00] Y. N. Zhuravlyov. On LQ-control of magnetic bearing. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(2) : 344–350, March 2000.