

Contributions aux équations généralisées de Riccati et systèmes à commutations.

Mémoire de recherche

présenté et soutenu publiquement le 3 juin 2013, en vue de l'obtention de

l'Habilitation à Diriger les Recherches de l'Université de Lorraine

Spécialité Automatique

par

Marc JUNGERS

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan
Professeur agrégé de physique, option physique appliquée
Docteur en automatique de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan
Chargé de Recherches CNRS

Composition du jury

<i>Président :</i>	Pierre ROUCHON	Professeur, MinesParisTech
<i>Rapporteurs :</i>	Patrizio COLANERI Germain GARCIA Daniel LIBERZON	Professor, Politecnico di Milano Professeur des Universités, INSA de Toulouse Professor, University of Illinois at Urbana-Champaign
<i>Examineurs :</i>	Hisham ABOU-KANDIL Jamal DAAFOUZ Alain RICHARD Sophie TARBOURIECH Emmanuel TRÉLAT	Professeur des Universités, ENS de Cachan Professeur des Universités, Université de Lorraine et membre junior de l'Institut Universitaire de France Professeur des Universités, Université de Lorraine Directrice de Recherches CNRS, LAAS-CNRS, Toulouse Professeur des Universités, Université Pierre et Marie Curie et membre junior de l'Institut Universitaire de France

Mis en page avec la classe thloria adaptée par Marc JUNGERS.

Remerciements

Loin d'être une formalité, les remerciements ci-dessous reflètent les liens forts tant au niveau professionnel que personnel établis durant ces longues années.

Avant tout, je tiens à remercier Alain Richard non seulement pour son chaleureux accueil au CRAN depuis 2007 mais aussi pour avoir accepté d'être examinateur. Merci pour ton soutien et nos nombreuses discussions. J'en garde une tout particulièrement en mémoire.

Je ne saurais mesurer ma reconnaissance et mon amitié pour Hisham Abou-Kandil et Jamal Daafouz, qui furent étroitement liés aux deux fils conducteurs de mon activité de recherche. Merci d'avoir cru en moi avec autant de patience (ce qui était loin d'être évident), de toujours avoir été à mon écoute et de nos stimulantes discussions.

Je remercie respectueusement Pierre Rouchon d'avoir accepté de présider mon jury ainsi que Patrizio Colaneri, Germain Garcia et Daniel Liberzon d'avoir accepté le lourd travail de rapporteur. Leur présence au jury fut pour moi un honneur. Un grand merci à Sophie Tarbouriech et Emmanuel Trélat pour leur amitié et complicité et d'avoir été examinateurs dans mon jury.

Par certains aspects, la recherche est un long chemin solitaire, mais je ne la conçois pas sans fortes collaborations. Ces années furent l'occasion de belles rencontres amicales qui m'apportent encore beaucoup. Merci à Isabelle Queinnec, Mirko Fiacchini, Laurentiu Hetel, aux amis brésiliens, Eugênio Castelan, Edson De Pieri, Ubirajara Moreno, et roumains, Cristian Oară et Radu Ștefan. Un grand merci à Constantin, Romain, Samson, Lucian, Jean-Philippe, Valérie, Ernest, Steven, Radu, Nicolae, Benoît, José, Charles, mais aussi et surtout à Carole d'avoir fait du laboratoire un lieu d'échanges stimulants et de convivialité. Par nature, cette habilitation n'aurait pas pu être possible sans co-direction de thèses. J'ai une pensée pour Julie Melin et Carlos C. A. Gonzaga qui ont déjà soutenu leur thèse de doctorat mais aussi pour Julien Louis qui la prépare actuellement, sans oublier Ebrahim S. El Youssef, Vanessa Dilda et Vitor M. Moraes qui ont effectué leur stage doctoral sandwich au CRAN sous ma direction. Merci à tout ceux qui ont assisté à ma soutenance.

Ma chaleureuse reconnaissance va aux inaltérables amitiés d'une précédente vie parisienne : Julien, Olivier, Pierre, Romain, mais aussi Pascal et Cécile. Merci à tous pour votre soutien depuis tant d'années. Mes amitiés nancéiennes bien que plus récentes, n'en sont pas moins fortes. Je reste sensible à votre accueil, votre présence, votre confiance qui m'aident à me sentir tout simplement bien. Un grand merci à Jérôme, Stéphane, Lucie, Greg, Marine, Antho, Justine et les autres. Merci à ceux qui ont bien voulu jouer aux goûteurs de mes envolées culinaires. Ces repas étaient mes bouffées d'oxygène.

Mes derniers remerciements vont naturellement à ma famille, notamment à mes parents à qui cette habilitation est dédiée. Un immense merci à vous deux pour votre présence de chaque instant et pour tout ce que je vous dois.

Enfin, ces remerciements perdraient en saveur et en puissance s'ils étaient destinés à tout le monde. Même si j'ai oublié quelques personnes, je ne peux malheureusement remercier celle et ceux qui nous ont quittés, celui qui est absent, ceux qui sont partis et toi qui n'es pas là. Vous restez présents dans mon cœur.

A mes deux parents, qui comptent tant pour moi.

Table des matières

Prolégomènes	1
1 Des origines avec les équations de Riccati scalaires...	1
2 ... aux équations de type Riccati pour l'automatique	5
3 A propos des systèmes commutés	7
4 A propos de ce mémoire	9
Chapitre 1 Contributions aux équations de Riccati généralisées	11
1.1 Equations de Riccati généralisées et théorie des jeux différentiels	11
1.1.1 Stratégie de Nash en boucle ouverte	15
1.1.2 Stratégie de Stackelberg en boucle ouverte	16
1.1.3 Stratégie de Nash en boucle fermée	16
1.2 Résultats sur les équations couplées de Riccati avec une structure d'information en boucle ouverte	18
1.2.1 Stratégie de Stackelberg avec critères présentant une pondération temporelle exponentielle	18
1.2.2 Stratégie de Nash avec critères présentant une pondération temporelle exponentielle: application à la translation non-uniforme de dynamique	19
1.2.3 Résolution des équations algébriques de Riccati rectangulaires à l'aide de faisceaux matriciels	22
1.2.4 Le mystère de la matrice caractéristique de Nash en boucle ouverte	24
1.3 Jeux différentiels avec une structure d'information en boucle fermée sans mémoire.	25
1.3.1 Algorithmes pour résoudre les équations algébriques couplées de type Riccati	25
1.3.2 Stratégie de type feedback pour les jeux descripteurs à temps discret.	29
1.3.3 Stratégie de Stackelberg en boucle fermée	30
1.4 Conclusion	33
Chapitre 2 Contributions aux systèmes commutés	35
2.1 Certification de performances pour les systèmes commutés	35
2.1.1 Recherche d'un majorant	36

2.1.2	Recherche d'un minorant	38
2.2	Les problèmes de Lur'e commutés	40
2.2.1	Introduction d'une nouvelle fonction de Lyapunov Lur'e adaptée au temps discret	41
2.2.2	Etude des systèmes de Lur'e commutés avec une loi de commutation arbitraire	46
2.2.3	Stratégie de min-switching pour les systèmes de Lur'e commutés	49
2.3	La stratégie anti-windup pour les systèmes commutés	53
2.4	Une approche par la théorie des ensembles invariants pour stabiliser les systèmes commutés	60
2.5	Conclusion	64
Chapitre 3 Perspectives		67
3.1	Extensions des travaux sur la fonction de Lyapunov Lur'e à temps discret	67
3.1.1	Etude des systèmes de Lur'e à temps continu à partir de leur discrétisation	67
3.1.2	Fonction de Lyapunov Lur'e avec non-linéarité de type secteur local.	70
3.2	Les inégalités de Lyapunov-Metzler	71
3.2.1	Linéarisation des inégalités de Lyapunov-Metzler	72
3.2.2	Discussion sur les possibles développements de cette linéarisation	73
3.3	Inégalités de type Riccati avec structure Laplacienne	74
3.4	Equations généralisées de Riccati de grandes dimensions	75
3.4.1	Espaces de Krylov pour les équations généralisées de Riccati	75
3.4.2	Parcimonie des équations généralisées de Riccati	75
Bibliographie		77
	Listes des publications de Marc Jungers	77
	Autres références	82

Prolégomènes

Suspikor, alios non dari separabilitatis casus, quam quos per di versas vias deteximus; solutionem addo, ne tamen aliis idem tentandi occasionem adimam, illam characteribus occultis involvo, revelaturus significationem, quando tempus postulaverit. Solutio problematis ab Ill. Riccati propositi characteribus occultis involuta :

(Je soupçonne que ne sont pas permis d'autres cas de résolution que ceux que nous avons découverts par des voies diverses ; je donne la solution, afin cependant de ne pas enlever à d'autres la même possibilité d'essayer, je la voile sous des termes cachés et j'en révélerai la signification quand le moment le réclamera. La solution du problème posé par Riccati sous une forme déguisée est) :

24a, 6b, 6c, 8d, 33e, 5f, 2g, 4h, 33i, 6l, 21m, 26n, 16o, 8p, 5q, 17r, 16s, 25t, 32u, 5x, 3y, +, -, -, ±, =, 4, 2, 1.

D. Bernoulli [Ber1724a]

1 Des origines avec les équations de Riccati scalaires...

Que ce soit pour une équation ou une inégalité, qu'elle soit algébrique, différentielle ou bien encore aux différences, le qualificatif *de Riccati* signifie qu'en plus d'un terme constant et linéaire, il existe un terme quadratique en les variables dans ces objets mathématiques. Ce nom a été choisi en l'honneur du Comte Jacopo Francesco Riccati (1676–1754), qui fut le premier à proposer l'étude de deux formes restreintes d'une telle équation dans une lettre datée de 1720 [Bit1991], destinée à Giovanni Rizzetti (1675–1751) :

$$\dot{x}(t) = \alpha x^2(t) + \beta t^m, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = \alpha x^2(t) + \beta t + \gamma t^2. \quad (2)$$

Ces formes particulières ont été résolues partiellement par Riccati grâce à des techniques de séparation des variables et de réduction de l'ordre. Une large contribution à ce travail fut apportée par la famille Bernoulli. Par des échanges de lettres, Nicolas III Bernoulli (1695–1726) encouragea Riccati à publier ses résultats dans l'article [Ric1724] ; Daniel Bernoulli (1700–1782), avec l'aide de Christian Goldbach (1690–1764) et de son frère Nicolas I Bernoulli (1687–1759)

publia en réponse l'article [Ber1724b], où en particulier il propose la solution déguisée par un anagramme célèbre (indiqué ci-dessus), qui jusqu'à présent reste incompréhensible ! Ce sont les premiers à proposer une intégration par quadrature pour les équations de la forme

$$\dot{x}(t) = q_0(t) + q_1(t)x(t) + q_2(t)x^2(t). \quad (3)$$

Cette méthode part d'une solution particulière $x_{\text{part}}(t)$ de l'équation (3) et cherche ses solutions générales sous la forme $x(t) = x_{\text{part}}(t) + u(t)$. On obtient alors que $u(t)$ est solution de l'équation

$$\dot{u}(t) = (q_1(t) + 2q_2(t)x_{\text{part}}(t))u(t) + q_2(t)u^2(t). \quad (4)$$

Cette équation (4) est une équation de Riccati, mais sans terme constant par rapport à la variable : il s'agit d'une équation dite de *Bernoulli*. Elle se résout à l'aide du changement de variable $z(t) = \frac{1}{u(t)}$. La substitution mène à l'équation de Riccati linéaire suivante que l'on sait résoudre :

$$\dot{z}(t) = (q_1(t) + 2q_2(t)x_{\text{part}}(t))z(t) - q_2(t). \quad (5)$$

Leonhard Euler (1707–1783), dans sa lettre du 25 novembre 1731 à Christian Goldbach [Fus1843] observe que l'équation séparable de Riccati (je reprends ici les notations originales)

$$adq = q^2 dp - dp \quad (6)$$

peut se transformer en l'équation

$$ady = y^2 dx - x^{-\frac{4n}{2n+1}} dx, \quad (7)$$

en posant $p = (2n + 1)x^{\frac{1}{2n+1}}$. L'utilisation de la puissance de x déjà mentionnée par Riccati avait été complétée par Daniel Bernoulli dans un autre article [Ber1725] en précisant la valeur de l'exposant q par la fraction continue :

$$q = -\frac{a}{p} + \frac{1}{\frac{-3a}{p} + \frac{1}{\frac{-5a}{p} + \frac{1}{\frac{7a}{p} + \frac{1}{\dots + \frac{-2(n-1)a}{p} + \frac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}} y}}}}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Euler montre aussi la correspondance inverse (7)→(6), en proposant la substitution $x = (\frac{p}{2n+1})^{2n+1}$. La forme de la fraction continue (8) suggère alors de poser

$$y = x^{\frac{-2n}{2n+1}} z. \quad (9)$$

Cela implique l'équation

$$adz - \frac{2nazdp}{p} + dp = z^2 dp. \quad (10)$$

Alors le changement de variable $\frac{1}{z} = w + \frac{(2n-1)a}{p}$ donne

$$adw - \frac{2(n-1)awdp}{p} + dp = w^2 dp, \quad (11)$$

qui n'est autre que l'équation (10) où n est remplacé par $(n - 1)$. Par récurrence on arrive à résoudre l'équation pour $n = 0$ qui est l'équation séparable recherchée (6).

Ce n'est pas la seule approche que propose Euler pour résoudre une équation différentielle de Riccati. En effet, il est inspiré par le mouvement tractionnel (à direction fixe) inventé par Gottfried Wilhem Leibniz (1646–1716) et par les travaux du Marquis Giovanni Poleni (1683–1761) qui fabrique les premiers instruments tractionnels réellement opérationnels, les *intégrophes*. Dans une lettre qu'il envoie à Poleni en juin 1735, Euler imagine un instrument permettant de tracer *facilement* une tractoire à base curviligne quelconque et par là même résoudre certaines équations de Riccati. Plusieurs lettres seront échangées jusqu'à 1739 et mèneront à la présentation de ces résultats à l'Académie de Saint Pétersbourg le 17 mars 1735 et à leur publication (uniquement) en 1741 [Eul1741] et qu'il complètera en 1764 [Eul1764].

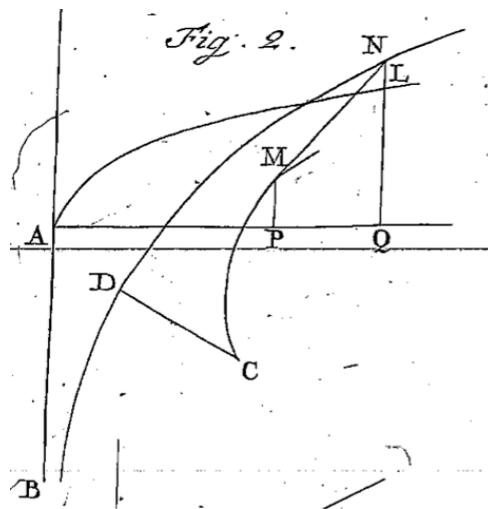


FIGURE 1 – Tractoire de L. Euler.

Vincenzo Riccati (1707–1775), l'un des fils du Comte Jacopo Francesco Riccati, proposa en 1752 une méthode géométrique de résolution par tractoire ayant une directrice variable pour résoudre les équations introduites par son père [Ric1752], en particulier celles qui ne sont pas intégrables par quadrature. Il complète ainsi les travaux d'Euler en rendant la directrice variable.

Une tractoire, ou courbe équitangentielle se construit de la manière suivante. Prendre une courbe, appelée base et un point initial A sur cette courbe. Choisir un point initial B (ce point pourra appartenir à une courbe particulière (une hyperbole donnée dans le cas qui nous intéressera). L'idée est de considérer le segment [AB] comme un fil et de tirer sur l'extrémité A le long de la base. La tractoire est alors le lieu de l'extrémité B. Par définition, la tractoire admet donc toujours au point B la droite (AB) comme tangente. Dans le cas où la longueur du segment est constante, si on déplace légèrement le point A en A', le nouveau point B' est défini comme l'intersection de la droite (AB) et du cercle de rayon AB (ce cercle est alors appelé directrice constante). C'est le cas étudié par Euler. En revanche, dans le cas où la longueur du segment n'est pas constante, il faut définir le nouveau point B' comme l'intersection de la droite (AB) et d'une directrice variable, qui pour les équations de Riccati sera une hyperbole paramétrée par la position du point A.

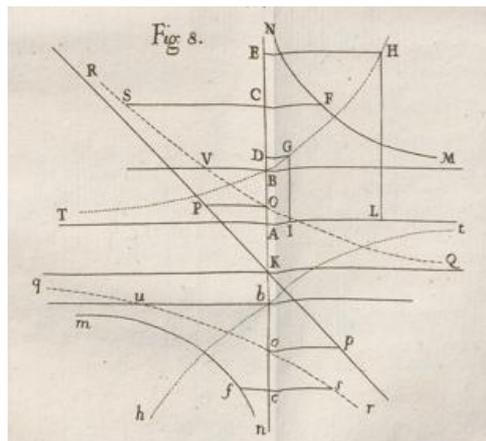


FIGURE 2 – Tractoire de V. Riccati.

Le comte Joseph Louis de de Lagrange (1736–1813) proposa en 1776 la solution générale dans le cas d’une équation de Riccati scalaire à temps variable [ddL1776]. Pour cela, comme Euler, il utilise la propriété qu’une équation de Riccati se transforme en une autre équation de Riccati à l’aide d’une solution d’une fonction homographique dont les coefficients dépendent de la variable et en utilisant aussi une méthode des fractions continues. En 1777, l’article [Con1777], signé par le Marquis de Condorcet de sa marque « (o) » fait le point sur la recherche de l’époque sur l’équation de Riccati. (On notera que c’est la première fois que l’orthographe de Riccati est écorchée dans la littérature) :

RICATI (équation de). Algèbre. Calcul intégral. On appelle ainsi une équation différentielle du premier ordre à deux variables que le comte Riccati proposa aux géomètres vers 1720, & dont personne n’a encore donné de solution générale. Peut-être n’est-elle pas susceptible d’en avoir une en termes finis.

Cette équation est de la forme

$$dy + y^2 dx + ax^m dx = 0.$$

On a trouvé que toutes les fois $m = \frac{-4h}{2h \pm 1}$, h étant un nombre entier positif, la proposée se réduisoit à $dy' + y'^2 dx' + a' dx' = 0$, d’où l’on tire $a' dx' = -\frac{\int dy'}{1 + y'^2}$, pour le prouver il suffit de faire y égal à $y'x'^p + cx'^a + e'^r \dots$ & $x = a'x'^n$, & on trouvera des valeurs de q, r , & c . telles que la réduction ait lieu, la valeur de y en y' & x' n’étant qu’un nombre fini de termes.

M. de la Grange a trouvé cette même solution par une méthode particulière, & a donné de plus une série très commode pour représenter la valeur de y dans tous les cas où l’on n’a pas l’intégrale.

Si l’on vouloit résoudre cette équation quelle que fût m , on la rappelleroit d’abord à une équation linéaire du second ordre, en faisant, comme M de la Grange, $x = x'^p$ & $y = \frac{dy'x'^2}{y'dx'}$, & déterminant q & p , en sorte qu’on ait $y'x' + b\frac{dy'}{dx'} + cx'\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, on aura ensuite l’intégrale de cette transformée, en supposant que multipliée par A , fonction de x' elle devienne une différentielle exacte, en faisant dans l’équation en A , $dA = ZA$, & $BZ^2 + CZ + D = 0$, B, C, D étant des fonctions algébriques rationnelles & entières

de x , & la forme de $B C D$ étant données, on en déterminera les coefficients. Enfin tout cela étant connu, si on a une valeur de Z , on aura par les quadratures une intégrale qui contiendra $x'y'$ & $\frac{y'}{x}$, on mettra dans cette intégrale pour x' & $\frac{y'}{x}$ leurs valeurs en y & x , & on aura une intégrale en xy' & y ; on la différentiera en substituant encore pour $\frac{dy'}{dx'}$ leurs valeurs, & pour $\frac{y}{x}$ sa valeur tirée de la proposée, on aura une fonction algébrique de x, y' et y égale à zéro, substituant dans l'intégrale ci-dessus en x, y & y' la valeur de y' tirée de l'équation algébrique, on aura l'intégrale cherchée.

Ainsi l'équation de Riccati ne sera intégrale en termes finis que toutes les fois que B, C, D pourront être des fonctions finies & rationnelles; & toutes les fois qu'elles pourront l'être, on intégrera par notre méthode. (o).

L'engouement des mathématiciens est tout aussi marqué au XIXe siècle pour les équations de Riccati. Joseph Liouville (1809–1882) étudia dans son article [Lio1839] l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = P(x)y(x), \quad (12)$$

où $P(x)$ est un polynôme en x . Il prouve que si l'équation (12) possède une intégrale exprimable en fonction finie explicite de x , alors on devra pouvoir l'exprimer comme

$$y = e^{\int g dx}, \quad (13)$$

où g est une fonction de x algébrique et rationnelle déterminée par l'équation

$$\frac{dg(x)}{dx} + t^2(x) = P(x). \quad (14)$$

Des contraintes apparaissent alors pour l'existence d'une solution à une telle équation. Ce résultat est alors utilisé dans son article [Lio1841] dans le cadre des équations de Riccati. Effectivement il montre que l'équation de Riccati (1) peut se ramener à une équation différentielle de la forme (12), avec un polynôme $P(x)$ qui est le monôme x^m . Les seules valeurs possibles pour l'exposant m , appelé *module* sont de la forme $m = \frac{-4h}{2h \pm 1}$, où h est un entier positif. Cette restriction avait déjà été notée précédemment comme condition suffisante mais pas nécessaire.

On notera aussi la discussion menée dans l'article [Gla1881], qui constitue l'un des premiers *articles de survie* sur les équations de Riccati. Louis Raffy de l'École Normale Supérieure, propose une reformulation du résultat de Liouville dans ses leçons (et épreuves au concours d'entrée à l'École Polytechnique et à l'École Normale Supérieure) [Raf1902].

René Lagrange, quant à lui, étend en 1938 des critères d'intégrabilité [Lag1938]. Jusqu'à présent ces critères étaient donnés en considérant que l'équation transformée possède une intégrale particulière connue. Dans son article, il étudie systématiquement les covariances présentées par les coefficients et leurs dérivées relativement à la transformation homographique à coefficients constants de l'inconnue. Il en déduit alors un critère d'intégrabilité assez général, et comme il le précise lui-même, « dont l'intérêt théorique n'est peut-être pas négligeable ».

2 ... aux équations de type Riccati pour l'automatique

La section précédente a mis en valeur que les équations de Riccati scalaires sont des équations non-linéaires avec un terme quadratique. Bien que cette non-linéarité, qui est polynomiale, soit l'une des plus simples, elle représente un écart crucial avec les équations linéaires.

Effectivement les solutions des équations différentielles de Riccati peuvent – si elles existent – éventuellement exploser en temps fini (c’est typiquement le cas de la fonction tangente, solution d’une équation différentielle de Riccati). Les solutions des équations algébriques de Riccati peuvent ne pas exister, ou bien si elles existent être uniques ou en nombre fini. Cette richesse de propriétés est une des principales raisons de son succès et son omniprésence en automatique et plus généralement en optimisation.

Une large variété de problèmes en automatique et de leurs applications peut être formulée comme un problème d’optimisation comportant un coût à optimiser qui soit quadratique et avec une contrainte dynamique qui soit linéaire. Ce type de problème est appelé *problème d’optimisation LQ* pour linéaire-quadratique. Des conditions nécessaires d’optimalité sont données par le principe du minimum de Pontryagin [PBG1962] et des conditions suffisantes d’optimalité par la programmation dynamique [Bel1957]. Une propriété cruciale d’un problème d’optimisation LQ est que ses conditions nécessaires et aussi suffisantes mènent à une équation de Riccati matricielle hermitienne, dont la variable est une matrice carrée et symétrique. Le problème d’optimisation admet alors une solution si et seulement si l’équation de Riccati hermitienne obtenue admet une solution (semi-définie positive). Le coût optimal et la loi de commande de type retour d’état sont alors des fonctions explicites de cette solution. On pourra trouver plus de détails sur ce point dans les ouvrages [Ber1987, Tré2005, Lib2012].

Johann Radon dans ses articles [Rad1927, Rad1928] étudie le problème de Lagrange. A partir de l’équation différentielle (appelée plus tard) d’Euler–Lagrange, de méthodes variationnelles et en manipulant la transformation de Clebsch, il propose une équation matricielle, de variable symétrique $W = W'$, sous la forme :

$$\frac{dW}{dx} + \Gamma W + BW + WB' + A = 0. \quad (15)$$

Il indique lui même que cela peut être *considéré* comme une équation de Riccati (« Das kann als Riccatische Gleichung des matrizen kalküls angesehen werden »). L’équation de Riccati matricielle est née ! Dans le même article, il propose une méthode pour résoudre cette équation différentielle matricielle en proposant le changement de variable $W = \Pi H^{-1}$, où H est inversible. Les deux variables Π et H sont solutions du système suivant de deux équations différentielles linéaires couplées :

$$\frac{d\Pi}{dx} + AH + B\Pi = 0, \quad (16)$$

$$\frac{dH}{dx} - B'H - \Gamma\Pi = 0. \quad (17)$$

On voit alors apparaître une matrice caractéristique de ce système linéaire :

$$\begin{bmatrix} B & A \\ -\Gamma & -B' \end{bmatrix}, \quad (18)$$

qui possède une symétrie Hamiltonienne [LM1974] et sera particulièrement utilisée dans la suite.

William M. Whyburn traite dans son article [Why1934] l’équation, de variable carrée $Y(x)$,

$$\frac{dY}{dx}(x) + Y(x)Y(x) = R(x) \quad (19)$$

et montre, à l’aide du système adjoint, que la solution générale peut être donnée comme une fonction d’un nombre fini de solutions particulières qui vérifient que le déterminant de leur différence deux à deux est non nul sur l’ensemble de l’intervalle d’intégration. William T. Reid

proposera le même résultat en 1939 [Rei1939] en relaxant l'hypothèse et en supposant uniquement que ces déterminants deux à deux ne sont pas nuls en un point. Il généralisera son résultat à toute équation de Riccati matricielle symétrique dans son article [Rei1946].

Les premières équations de Riccati non symétriques, c'est-à-dire ici de variable matricielle rectangulaire apparaissent dans l'article de Coles [Col1955], comme une variable colonne. Le cas général d'une variable rectangulaire sera étudié dans l'article [Lev1959] de J. J. Levin (système linéaire couplé, matrice caractéristique, relation entre les solutions particulières en nombre fini). D'autres manipulations sont proposées par William E. Roth [Rot1950] pour rendre les équations de Riccati symétriques monolatérales.

Pour les résolutions numériques directes, qui ne passent pas par des solutions particulières, on peut citer les travaux de Alan J. Laub [Lau1979] qui utilise les espaces invariants de la matrice caractéristique et une décomposition de Schur de celle-ci. D'autres méthodes sont itératives, comme la méthode de David L. Kleinman [Kle1968, San1974, Mag1977], qui à chaque étape résout une équation de Lyapunov dont le terme constant contient le terme quadratique de l'itération précédente. On peut aussi citer la méthode itérative par la fonction signe [Bye1987] qui utilise la symétrie de la matrice Hamiltonienne et la complémentarité des espaces invariants stables et instables.

Vladimir Kučera propose quelques domaines clés en automatique utilisant les équations de Riccati dans sa review [Kuč1973] : en commande optimale [Kal1960a, AEBH1975], ou commande \mathcal{H}_2 [Wil1971, ZDG1996], mais aussi en théorie du filtrage avec le filtre de Kalman-Bucy [Kal1960b], qui a été rendu célèbre en estimant correctement la trajectoire de la navette Appolo [GA2010]. Désormais l'équation de Riccati est aussi au cœur de la commande \mathcal{H}_∞ [Fra1987, Sto1992, BH1989, GL1995, ZDG1996, Bur1998] (qui peut être interprétée comme un jeu à somme nulle [BB1995], mais aussi du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov, plus connu sous le nom de lemme réel borné [Ran1996]). Les équations de Riccati généralisées apparaissent aussi dans le cadre de la commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [LAH1994, CZ2001]. Les équations de Riccati non symétriques apparaissent quant à elles dans le cadre de la théorie des jeux, notamment pour les jeux linéaires quadratiques associés aux stratégies de Nash et de Stackelberg [BO1995, AKFIJ2003, Eng2005].

Depuis, plusieurs ouvrages de référence sont dédiés aux équations de Riccati, chacun avec sa spécificité. Citons en particulier pour les équations différentielles [Rei1972], pour les équations algébriques [LR1995], pour les équations non symétriques [AKFIJ2003], pour les thématiques spécifiques à l'automatique [BLW1991], ou bien encore pour la théorie des jeux [BO1995, AKFIJ2003, Eng2005], avec une approche par opérateur de Popov [IOW1999] et finalement pour les aspects numériques [Ben1997, BIM2012].

Bien que nous ayons mis l'accent sur les équations de Riccati, les inégalités de Riccati jouent un rôle tout aussi important. Afin de voir un aperçu des résultats relatifs aux inégalités de Riccati, on pourra se référer à [Fai1987, ST1990, Sch1991, Sch1995].

3 A propos des systèmes commutés

Un bref historique des équations de Riccati s'étale dans le temps depuis leur introduction par Riccati et est bien établi. En revanche, bien que plus récent, il est moins évident d'établir celui des systèmes commutés et l'enchaînement qui a permis à ce vaste domaine de prendre la place qu'il occupe actuellement.

Les premiers exemples de systèmes commutés à modes affines, sans s'appeler ainsi, étaient les systèmes à relais qui ont été étudiés à partir des années 1930–1940 dans la communauté russe (voir [Tsy1955, Fil1988, UGS2009] pour quelques références surtout en russe). Ces systèmes peuvent être catalogués dans la classe des *systèmes à structure variable* qui est formalisée

notamment dans les références [Eme1970, Utk1977] et [DZM1988]. Ce sont surtout des systèmes présentant un caractère *tout ou rien*, ou *bang-bang* [Ham1949, MPG1970], c'est-à-dire que la dynamique est généralement discontinue en fonction du temps. Une technique bien adaptée à ce type de problème est celle dite des modes glissants (voir [Utk1992] pour plus de détails). Le terme de commutations commence à apparaître pour désigner le comportement autour de la surface de glissement.

La nécessité de faire appel à des lois de commandes qui ne soient pas continues est mise clairement en évidence pour certains exemples (voir [Cla2001] et ses références) et est soulignée par la condition de Brockett [Bro1983]. Cette condition est une condition nécessaire que doit satisfaire toute loi de commande stabilisante sous forme de retour d'état continu et stationnaire : si un système admet une commande stabilisante par retour d'état continu et stationnaire, alors tout voisinage de l'origine a une image par la dynamique du système qui est aussi un voisinage de l'origine. La notion de commande par retour discontinu fait son apparition, mais cette notion pose naturellement la question du sens à donner à la notion de solution d'un système régi par une inclusion différentielle [AC1984, Fil1988, Kis1991].

Différents concepts de solutions aux systèmes régis par une inclusion différentielle sont possibles. Parmi les plus connus, nous pouvons citer de manière non exhaustive : la solution de Caratheodory, la solution d'Hermès [Her1967] (voir aussi [Háj1979]), la solution de Kravovskii [Kra1963], la solution d'Euler [CLSW1998] et la solution au sens de Filippov [Fil1988]. On pourra se reporter à [Cla2001, SGT2006, Cor2008] mais aussi à [Rif2001, Rif2002, Rif2000] pour des discussions et comparaisons entre ces concepts. La condition de Brockett a été étendue au cadre de l'étude par un retour d'état discontinu en considérant les solutions de Filippov [Rya1990]. C'est une motivation supplémentaire pour l'introduction d'une commande de type hybride pour stabiliser certains systèmes de dynamique discontinue.

Les systèmes dynamiques hybrides, dont l'appellation apparaît pour la première fois en 1966 dans l'article [Wit1966], se formalisent rapidement au début des années 90 [Bro1993, Bra1995], voir aussi [HLLS2009] et plus généralement [LLL2009, GST2012]). Les systèmes dynamiques hybrides sont définis par une interaction hétérogène entre des phénomènes dynamiques de variables continues (généralement modélisés par des équations différentielles ou aux différences) et d'autres de variables discrètes (modélisés par des systèmes événementiels) [Zay2001, DG2007].

Le comportement complexe de cette interaction hétérogène est naturel et provient d'une combinaison d'outils de disciplines différentes comme par exemple l'automatique continue, l'automatique discrète, l'informatique et les mathématiques. Chaque discipline a son propre point de vue ou sa propre formalisation essayant de décrire autant que possible le système hybride dans son cadre. Avec l'avènement des calculateurs, les systèmes embarqués sont une application omniprésente des systèmes dynamiques hybrides. Les applications pratiques en communication, en gestion de l'énergie, en biologie contribuent fortement au succès du formalisme des systèmes dynamiques hybrides. Le problème de la stabilité des systèmes hybrides est rapidement discuté et formalisé [Bra1998, YMH1998, DBPL2000] ainsi que leur robustesse [PL1996].

Une classe particulière, mais très répandue, de systèmes hybrides cristallise l'attention de la communauté internationale : les *systèmes commutés*. Il s'agit d'un système dont l'état est régi sur un intervalle de temps par une équation différentielle (ou aux différences) qui appartient à un ensemble fini de dynamiques, puis selon une autre qui appartient toujours au même ensemble fini de dynamiques (appelées *modes*) sur un autre intervalle de temps, et cetera. Seule une dynamique parmi l'ensemble fini de modes est active à chaque instant. L'activation se fait par un signal appelé *loi de commutation*. L'idée est de masquer la modélisation de l'automate, c'est-à-dire du système événementiel, du système dynamique hybride derrière la valeur de la loi de commutation.

Différents cadres de travail peuvent se dessiner en fonction des hypothèses faites sur la loi de commutation. La loi de commutation peut être autonome ou contrôlée, dépendante ou non du temps, dépendante ou non de l'état. Elle peut aussi être soumise à des contraintes (répandues en pratique), comme le temps de maintien, ou bien l'interdiction de certaines transitions. L'article [LM1999] constitue avec l'ouvrage [Lib2003] une véritable fondation de l'étude des systèmes commutés. En particulier cet article explique soigneusement les principaux phénomènes complexes des systèmes commutés. Il pose clairement les principales problématiques portant sur les systèmes commutés.

L'étude des systèmes commutés linéaires, c'est-à-dire dont les modes sont linéaires a généré une large littérature. Plusieurs solutions ont été apportées pour l'étude de leur stabilité notamment. On peut citer le résultat présenté dans [MP1986] sur la stabilité des inclusions linéaires. Ce résultat a été étendu aux systèmes commutés [LM1999, DM1999]. L'algèbre de Lie est aussi étudiée dans ce cadre [Gur1994, LHM1999, AL2001b, ML2006]. Shorten et Narendra [SN1999] donnent une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune pour une paire de matrices de dimension deux.

Une autre approche possible est d'utiliser le rayon spectral joint de l'inclusion linéaire. Le système commuté est asymptotiquement uniformément et globalement stable si et seulement si le rayon spectral joint est strictement inférieur à 1. La principale difficulté réside dans le calcul du rayon spectral joint, qui est un problème de complexité non-polynomiale [TB1997]. Il est cependant possible, dans certains cas, d'obtenir des approximations du rayon spectral joint [BNT2004, BN2005, Jun2009].

L'utilisation d'une fonction de Lyapunov commune est dépassée à l'aide de fonctions de Lyapunov multiples, qui permettent l'introduction adaptée d'une seule fonction de Lyapunov concaténée et commune, mais non quadratique. Parmi ces fonctions de Lyapunov multiples, on peut citer les fonctions de Lyapunov poly-quadratiques introduites par [PD1991], puis développées dans [Bra1994, DBPL2000]. Dans le cadre du temps discret, les conditions sont obtenues par Daafouz dans [DRI2002] à partir du résultat développé pour les systèmes linéairement dépendant d'un paramètre variant dans le temps [DB2001]. On notera aussi le lien fort avec la représentation affine par morceaux proposée dans [JR1998, Joh2002], où l'activation est dépendante de la partition d'état. Cette fonction de Lyapunov poly-quadratique peut s'étendre au cas d'une dépendance sur un chemin en suivant les résultats de Lee et Dullerud [LD2006, LD2007].

En ce qui concerne la stabilisation par la loi de commutation, le premier résultat a été introduit dans [WPD1994, WD1997] en utilisant une partition d'état associée à la S -procédure (voir aussi [Lib2003]). Cette approche mène à des équations de Lyapunov-Metzler (étudiées plus en détails dans la suite du document) qui ont été développées par Geromel et Colaneri [GC2006b, GC2006a]. La fonction de Lyapunov commutée obtenue peut être alors interprétée comme une fonction de Lyapunov composite étudiée par Hu *et al.* dans [Hu2007].

Cette présentation est naturellement incomplète au vu de la large gamme des approches, outils et résultats portant sur les systèmes commutés. On pourra néanmoins consulter les contributions effectuant le point sur certains aspects de ce domaine : [LA2005, SWM⁺2007, SG2011, Zua2011, DTS2013].

4 A propos de ce mémoire

Mes activités de recherche s'inscrivent principalement dans les deux thématiques, présentées ci-dessus, que sont l'étude des équations généralisées de Riccati et l'étude des systèmes commutés à temps discret. J'ai débuté ma recherche sur la première thématique au laboratoire SATIE, UMR 8029 CNRS – ENS de Cachan avec mon stage de DEA en 2003 et ma thèse de

doctorat 2003–2006 et la seconde depuis mon affectation en 2007 comme chargé de recherches CNRS au CRAN, UMR 7039 CNRS – Université de Lorraine.

Ce mémoire s’attache à présenter ces activités de recherche, de manière non exhaustive, mais surtout le fil conducteur et la cohérence qui les lient. En conséquence le document est organisé de la manière suivante : il est composé, en plus de ces prolégomènes, de 3 chapitres.

- Le chapitre 1 présente mes contributions de recherche consacrées aux équations algébriques généralisées de Riccati.
- Le chapitre 2 s’intéresse aux résultats obtenus à propos des systèmes commutés.
- Le chapitre 3 développe les perspectives de recherches qui me tiennent à cœur et constitueront le squelette de mes activités de recherche pour les quelques années à venir.

Je dois souligner que le choix de mettre en avant ces deux principales thématiques induit nécessairement de faire l’impasse sur diverses collaborations et plusieurs sujets que j’ai abordés dans ma recherche. Il ne faut pas y voir une réduction de la valeur de ces contributions dans le cadre de ma recherche : ces travaux ont permis des contacts humains et scientifiques qui sont importants pour moi et ont contribué à ma culture scientifique. De plus, il existe une cohérence naturelle entre ces sujets de recherche et mes deux principales thématiques :

- Avec Laurentiu Hetel, nous avons abordé certains problèmes portant sur les systèmes à retards, représentés soit par des systèmes LPV soit par des systèmes commutés [MJ-CI22, MJ-JI9, MJ-CI21]. Le formalisme des outils utilisés est très proche de ceux de la thématique des systèmes commutés.
- Avec Samson Lasaulce nous avons étudié des points techniques en théorie des jeux et aussi un ensemble de problématiques liées au domaine des télécommunications, en particulier l’allocation de puissance [MJ-JI5, MJ-JN3, MJ-CI19, MJ-JI6].
- Avec Irinel-Constantin Morărescu, nous avons étudié des couplages entre systèmes non-linéaires couplés à l’aide de retards distribués [MJ-E5, MJ-JI19, MJ-CI30]. Il s’agit d’un autre point de vue que la théorie des jeux pour les systèmes composés de plusieurs sous-systèmes (identiques).
- Avec Pedro L. D. Peres, nous avons étudié principalement des systèmes LPV, dont le paramètre variant dans le temps a des contraintes sur sa variation. Des résultats pour la commande prédictive, d’autant meilleure que le paramètre varie peu, ont été proposés [MJ-CI10, MJ-CN6, MJ-JI8, MJ-CI5].
- La collaboration avec Edson R. De Pieri s’est notamment focalisée sur des applications dans le cadre LPV, la commande par modes glissants d’ordres supérieurs et de la théorie de jeux. Citons en particulier les suspensions magnétiques, pour lesquelles nous avons pu illustrer nos résultats de la théorie des jeux et les robots non-holonomes [MJ-CI18, MJ-CI2, MJ-CN8, MJ-CI27, MJ-CN2]. La commande par modes glissants est très proche dans son formalisme des systèmes commutés.
- La récente collaboration avec George P. Papavassilopoulos mène à considérer des jeux dont les critères ont des horizons dépendant des joueurs [MJ-CS2, MJ-CI28].

La liste complète de mes publications est disponible page 77 et est codifiée différemment des autres références listées page 82. Les preuves des théorèmes et propositions présentés dans ce mémoire sont omises dans un objectif de clarté, mais les articles qui les contiennent sont indiqués.

Chapitre 1

Contributions aux équations de Riccati généralisées

Ce chapitre propose une synthèse de mes travaux de recherches portant sur les équations généralisées de Riccati. Depuis ma thèse [MJ-PhD], sous la direction d'Hisham Abou-Kandil, je traite des équations généralisées de Riccati, principalement rencontrées dans le cadre de la théorie des jeux [BO1995, NM1944] et plus particulièrement les jeux différentiels [DJLS2000, Isa1975]. La structure du chapitre se décompose en trois sections :

- Tout d'abord un rappel du cadre et des principales définitions liées à la théorie des jeux est donné afin de situer au mieux mes travaux associés.
- Une section regroupant les résultats obtenus à propos des équations de Riccati généralisées de type rectangulaire.
- Une section regroupant les résultats obtenus à propos des jeux différentiels avec une structure d'information en boucle fermée sans mémoire.

1.1 Equations de Riccati généralisées et théorie des jeux différentiels

Cette section propose de donner des éléments pour le cadre de la théorie des jeux différentiels qui permettront de situer clairement les travaux présentés dans le reste de ce chapitre. Pour plus de détails, il sera possible de consulter les ouvrages de référence comme [BO1995, NM1944], ainsi que les articles [SH1969b, SH1969a, Ho1970], mais aussi les notes de cours [Bre2010, Hes2011] et [MJ-Ch1, MJ-PhD].

Définition 1 (Théorie des jeux) *La théorie des jeux est l'étude formelle des interactions entre plusieurs décideurs qui peuvent avoir des intérêts conflictuels ou communs et dont chaque coût peut dépendre de l'action d'autres joueurs, voire de tous.*

On définit tout d'abord la classe des jeux différentiels que nous allons étudier [Fri1994, Ho1970] :

Définition 2 (Jeu différentiel) *Soit N un entier positif. L'objet suivant*

$$\Gamma_N : (\mathcal{T}, \mathcal{X}, U_i, \mathcal{U}_i, \Phi_i, f, x_0, \eta_i, J_i)_{i=1, \dots, N} \quad (1.1)$$

est appelé un jeu différentiel déterministe, non-coopératif avec information complète, si pour tout $i = 1, \dots, N$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- \mathcal{T} est un intervalle réel,
- \mathcal{X} et U_i sont des espaces euclidiens de dimensions finies,

- f est une application définie sur $\mathcal{X} \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N \times \mathcal{T}$ à valeur dans \mathcal{X} définissant l'équation différentielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{X}, \quad (1.2)$$

- Φ_i est un sous-ensemble de l'ensemble des applications $\{\varphi_i | \varphi_i : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow U_i\}$,
- η_i est une application $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}$, avec la propriété

$$\eta_i(t) \subset \{x(s) | s \in \mathcal{T}, s \leq t\}, \quad (1.3)$$

- $\mathcal{U}_i = \{\varphi_i(\cdot, \eta_i(\cdot)) | \varphi_i \in \Phi_i\}$,
- J_i est une fonction à valeur réelle $\mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_N \rightarrow \mathbb{R}$.

$\mathcal{X}, \mathcal{T}, U_i, \mathcal{U}_i, \Phi_i, \eta_i$ et J_i sont respectivement désignés comme l'espace d'état, l'espace des temps (ou horizon temporel), l'espace des valeurs de commande, l'espace de commande, l'ensemble des stratégies de commandes possibles, la structure d'information et le critère. Nous appellerons action du joueur i la commande $u_i(t) = \varphi_i(t, \eta_i(t))$.

Définition 3 (Commande admissible) Une commande $u_i \in \mathcal{U}_i$ est dite admissible, si u_i est une commande mesurable de $[t_0, t_f] \rightarrow U_i$.

Le théorème suivant offre des conditions suffisantes permettant d'assurer que les commandes continues sont admissibles pour un jeu différentiel et l'unicité de la trajectoire associée. Dans des cas très particuliers, ces hypothèses peuvent être trop restrictives [Bag1984, CL1955], mais on évitera soigneusement ces cas ici.

Théorème 4 Soit Γ_N un jeu différentiel à N joueurs. Si la fonction f vérifie les hypothèses suivantes

- $f(x, u_1, \dots, u_N, t)$ est continue sur $\mathcal{X} \times U_1 \times \cdots \times U_N \times \mathcal{T}$.
- Il existe $k > 0$, tel que

$$|f(x, u_1, \dots, u_N, t)| \leq k(1 + |x|), \quad (1.4)$$

pour tout $(x, u_1, \dots, u_N, t) \in \mathcal{X} \times U_1 \times \cdots \times U_N \times \mathcal{T}$,

- La fonction f est Lipschitz continue par rapport aux variables x, u_1, \dots, u_N .
- $\varphi_i(t, x)$ est continue par rapport à t et uniformément Lipschitzienne par rapport à x .

Alors il existe un horizon temporel non vide $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ tel que toute commande continue par morceaux $u_i(\cdot), i = 1, \dots, N$ soit admissible et génère une trajectoire unique.

Définition 5 En posant l'horizon temporel $\mathcal{T} = [t_0, t_f]$, le critère associé au joueur « i » est de la forme

$$J_i : \begin{cases} \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_N \times \mathcal{X} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi_1, \dots, \varphi_N, x_0) & \longmapsto K_{if}(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) dt, \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x_f = x(t_f)$ et $u_i(t) = \varphi_i(t, \eta_i(t))$. Le critère représente l'intérêt du joueur. La fonction $L_i : \mathcal{X} \times U_1 \times \cdots \times U_N \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ correspond au critère instantané, alors que la fonction $K_{if} : \mathcal{X} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ correspond au critère terminal. On supposera que L_i a la même régularité que la dynamique f et que K_{if} est continûment dérivable par rapport à toutes ses variables.

Remarque 6 Par abus de notation, on pourra noter le critère $J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_N, x_0)$ ou $J_i(u_1, \dots, u_N, x_0)$, ou bien encore supprimer la dépendance en l'état initial x_0 , voir [Eng2005]. Le critère J_i est donné comme un problème de Bolza combinant les problèmes de Lagrange ($K_{if} = 0$) et de Mayer ($L_i = 0$).

Dans le cadre des problèmes de contrôle optimal (jeux à un seul joueur), l'optimalité se définit sans ambiguïté, car \mathbb{R} est muni d'une relation d'ordre. En revanche, dans le cadre des jeux (notamment non-coopératifs) avec plusieurs joueurs, ce n'est plus le cas et la notion d'optimalité n'est pas bien définie. D'autres raisons, que nous ne détaillerons pas ici, mènent au même constat [LT2011]. Il est alors nécessaire de poser des concepts de compromis ou d'équilibres. Nous ne traiterons pas ici les points *selle* des jeux à somme nulle [BB1995, NM1944], ni l'optimalité dans le sens de Pareto [Par1896, Eng2010]. Grâce à la réponse rationnelle, il est possible de définir les stratégies de Nash (dus à John Forbes Nash Jr (né en 1928) [Nas1950, Nas1951]) et de Stackelberg (en l'honneur de Heinrich von Stackelberg (1905–1946) [vS1934, vS1952, SC1973b, SC1973a, Lei1978]).

Définition 7 (Réponse rationnelle ou meilleure réponse) Soit un jeu différentiel Γ_N à N joueurs. On note

$$\varphi_{(-i)} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_N) \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_{i-1} \times \Phi_{i+1} \times \dots \times \Phi_N. \quad (1.6)$$

La stratégie $\tilde{\varphi}_i \in \Phi_i$ du joueur i est dite une réponse rationnelle contre les stratégies $\varphi_{(-i)}$ si

$$J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \tilde{\varphi}_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_N) = J_i(\varphi_{(-i)}, \tilde{\varphi}_i) \leq J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = J_i(\varphi_{(-i)}, \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \Phi_i. \quad (1.7)$$

On note $\mathcal{R}_i(\varphi_{(-i)})$ l'ensemble des réponses rationnelles du joueur i contre les stratégies $\varphi_{(-i)}$.

Définition 8 (Stratégie de Nash) Soit Γ_N un jeu différentiel à N joueurs. Un N -uplet de stratégies $(\varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*) \in \Phi_1 \times \dots \times \Phi_N$ est dit de Nash, si

$$\varphi_i^* \in \mathcal{R}_i(\varphi_{(-i)}^*), \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

En d'autres termes,

$$J_i(\varphi_{(-i)}^*, \varphi_i^*) \leq J_i(\varphi_{(-i)}^*, \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in \Phi_i. \quad (1.9)$$

Le mot équilibre est utilisé pour indiquer que les joueurs en choisissant $(\varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*)$ n'ont plus intérêt à modifier leur stratégie de manière unilatérale. Une visualisation graphique (souvent reprise) des stratégies de Nash peut se trouver dans l'article [Ho1970, page 183].

Définition 9 (Stratégie de Stackelberg) Soit un jeu différentiel Γ_2 , à 2 joueurs. Le meneur ou leader est le joueur 2 et le suiveur ou poursuivant est le joueur 1. En reprenant la définition 7 de l'ensemble des réactions rationnelles du suiveur \mathcal{R}_1 . La stratégie (min-max) de Stackelberg notée $(\varphi_1^{**}, \varphi_2^{**})$ est définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1^{**} \in \mathcal{R}_1(\varphi_2^{**}) \\ \text{et} \\ \max_{\varphi_1 \in \mathcal{R}_1(\varphi_2^{**})} J_2(\varphi_1, \varphi_2^{**}) \leq \max_{\varphi_1 \in \mathcal{R}_1(\varphi_2)} J_2(\varphi_1, \varphi_2), \quad \forall \varphi_2 \in \Phi_2. \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Notons une autre variante (min-min) de la stratégie de Stackelberg que nous détaillerons par la suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1^{**} \in \mathcal{R}_1(\varphi_2^{**}) \\ \text{et} \\ \min_{\varphi_1 \in \mathcal{R}_1(\varphi_2^{**})} J_2(\varphi_1, \varphi_2^{**}) \leq \min_{\varphi_1 \in \mathcal{R}_1(\varphi_2)} J_2(\varphi_1, \varphi_2), \quad \forall \varphi_2 \in \Phi_2. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

La stratégie de Stackelberg consiste à résoudre un problème d'optimisation sous contrainte d'un autre problème d'optimisation, qui peut être appelé dans la littérature problème d'optimisation bi-niveau [DDL2006]. Une visualisation graphique (souvent reprise) des stratégies de Stackelberg peut se trouver dans l'ouvrage [BO1995, page 184].

Il est évident que notre capacité à contrôler un système dépend de la qualité et de la forme des informations disponibles sur ce système. Effectivement, dans le cas de la commande optimale (jeu à un seul joueur), considérer une commande en boucle ouverte $u = u(t, x_0, t_0)$ et une commande en boucle fermée $u = k(x, t)$ mène au même résultat en termes de trajectoire et de coût. Néanmoins cela n'est plus ainsi quand plusieurs joueurs agissent sur un même système. La détermination des stratégies dépend alors intimement de la structure d'information considérée. La structure d'information est l'ensemble des informations accessibles au joueur i . Chaque joueur dispose au minimum de la connaissance de la dynamique du système et de la condition initiale du système. Le joueur i connaît, à l'instant $t \in \mathcal{T}$, un certain nombre de mesures de l'état du système, notées $\eta_i(t)$. On définit alors, entre autres, les structures d'information en boucle ouverte et en boucle fermée.

Définition 10 (Structure d'information sur l'état) Dans un jeu différentiel Γ_N à N joueurs, sur un horizon temporel \mathcal{T} , la structure d'information est dite en

– en boucle ouverte si

$$\eta_i(t) = \{x_0\}, \quad t \in \mathcal{T}, \quad (1.12)$$

– en boucle fermée sans mémoire, (ou encore feedback) si

$$\eta_i(t) = \{x_0, x(t)\}, \quad t \in \mathcal{T}, \quad (1.13)$$

– en boucle fermée avec mémoire si

$$\eta_i(t) = \{x(s) | s \in \mathcal{T}, s \leq t\}, \quad t \in \mathcal{T}, \quad (1.14)$$

Ici nous ne considérons que les jeux linéaires quadratiques, extensions du problème linéaire-quadratique classique [AM1989].

Définition 11 (Jeux différentiels linéaires quadratiques) Un jeu différentiel Γ_N est dit linéaire-quadratique si sa dynamique f est linéaire par rapport à ses variables

$$f(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^N B_j u_j(t) \quad (1.15)$$

et si les coûts terminaux $K_{i,f}$ et instantanés L_i sont des formes quadratiques

$$J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_N, x_0) = \frac{1}{2} x'_f K_{i,f} x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(x'(t) Q_i x(t) + \sum_{j=1}^N u'_j(t) R_{ij} u_j(t) \right) dt. \quad (1.16)$$

Les pondérations pourront dépendre du temps sans perte de généralité, en particulier avec une dépendance exponentielle.

Avec une structure en boucle ouverte, il est possible d'obtenir des conditions nécessaires en appliquant le principe du minimum de Pontryagin [PBG1962, LM1967, Tré2005, Lib2012]. En revanche, avec une structure d'information en boucle fermée, il est possible d'obtenir des conditions suffisantes en appliquant la programmation dynamique (voir [Ber1987, Tré2005, Lib2012] et [BCD1997]).

1.1.1 Stratégie de Nash en boucle ouverte

Pour la stratégie de Nash en boucle ouverte, on pose un Hamiltonien associé à chaque joueur i (on ne considèrera que le cas normal [MJ-PhD] : $\psi^\circ = 1$), avec $\psi_i(t)$, le vecteur d'état adjoint du joueur i :

$$H_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), \psi_i(t), t) = L_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) + \psi_i' f(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t). \quad (1.17)$$

Les conditions nécessaires sont données par le principe du minimum de Pontryagin (voir [Cas1969, Ho1970]) :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial x}, \quad u_i^*(t) \in \arg \min_{u_i \in U_i} H_i(x(t), u_i^*(t), u_i(t), \psi_i(t), t), \quad (1.18)$$

avec comme condition de transversalité $\psi_i(t_f) = \frac{\partial K_{if}(x_f, t_f)}{\partial x_f}$. On obtient $u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i' \psi_i(t)$ et le problème aux deux bouts, en notant $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i'$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S_1 & \cdots & -S_N \\ -Q_1 & -A' & & 0_n \\ \vdots & & \ddots & \\ -Q_N & 0_n & & -A' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{N,BO} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

et

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ \psi_1(t_f) \\ \vdots \\ \psi_N(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ K_{1f} x_f \\ \vdots \\ K_{Nf} x_f \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Une méthode pour résoudre ce problème aux deux bouts est alors de poser : $\psi_i(t) = K_i(t)x(t)$. Cela implique que les matrices $K_i(t)$ doivent vérifier les équations différentielles matricielles couplées de Riccati :

$$\frac{dK_i(t)}{dt} = -A'K_i(t) - K_i(t)A - Q_i + K_i(t) \sum_{j=1}^N S_j K_j(t), \quad K_i(t_f) = K_{if}. \quad (1.21)$$

Ces équations peuvent se réécrire sous la forme d'une seule équation différentielle rectangulaire de Riccati, dont les matrices de pondérations sont les blocs de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ définie dans l'équation (1.19) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} -A' & & 0_n \\ & \ddots & \\ 0_n & & -A' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} A - \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} [S_1 \quad \cdots \quad S_N] \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} K_1(t_f) \\ \vdots \\ K_N(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1f} \\ \vdots \\ K_{Nf} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Comme il a été mentionné lors de l'introduction, les équations rectangulaires de Riccati peuvent se résoudre à l'aide d'une linéarisation due à Radon [Rad1928] (voir [AKFIJ2003] pour plus de détails). Quand l'horizon temporel est infini ($t_f \rightarrow +\infty$), l'équation (1.22) devient algébrique. Une solution possible de résolution consiste à rechercher les espaces invariants de

dimension n de la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{N,BO}$ (voir de même [AKFJ1993]). On a alors la relation

$$\mathcal{M}_{N,BO} \begin{pmatrix} I_n \\ K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} \left(A - \sum_{j=1}^N S_j K_j \right). \quad (1.23)$$

1.1.2 Stratégie de Stackelberg en boucle ouverte

La stratégie de Stackelberg en boucle ouverte a été traitée dans [CC1972] et [SC1973b, SC1973a] pour les jeux à deux joueurs comprenant un leader et un suiveur. La méthode consiste tout d'abord à déterminer les conditions nécessaires du suiveur (joueur 1), puis celles du leader (joueur 2), tenant compte en plus de la dynamique du système de la contrainte du suiveur (voir [MJ-PhD] pour les développements). On a ainsi $u_i^{**}(t) = -R_{ii}^{-1} B_i' \psi_i(t)$, ($i \in \{1, 2\}$) et le problème aux deux bouts suivant :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{S,BO} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \psi_1(t_f) \\ \psi_2(t_f) \\ \gamma(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ K_{1f} x_f \\ K_{2f} x_f - K_{1f} \gamma(t_f) \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

où $S_{ij} = B_j R_{jj}^{-1} R_{ij} R_{jj}^{-1} B_j'$ et $S_i = S_{ii} = B_i R_{ii}^{-1} B_i'$, ($(i, j) \in \{1, 2\}$). La matrice caractéristique $\mathcal{M}_{S,BO}$ est donnée avec deux découpages en matrices blocs :

$$\mathcal{M}_{S,BO} = \left[\begin{array}{c|ccc} A & -S_1 & -S_2 & 0_n \\ \hline -Q_1 & -A' & 0_n & 0_n \\ -Q_2 & 0_n & -A' & Q_1 \\ \hline 0_n & -S_{21} & S_1 & A \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A & -S_1 & -S_2 & 0_n \\ \hline -Q_1 & -A' & 0_n & 0_n \\ \hline -Q_2 & 0_n & -A' & Q_1 \\ \hline 0_n & -S_{21} & S_1 & A \end{array} \right]. \quad (1.25)$$

La première décomposition est liée à l'écriture sous forme d'équation de Riccati rectangulaire comme dans le cas de la stratégie de Nash. La seconde décomposition met en avant la symétrie Hamiltonienne de la matrice $\mathcal{M}_{S,BO}$ [AKB1985]. En posant $\psi_i(t) = K_i(t)x(t)$ et $\gamma(t) = P(t)x(t)$, on obtient

$$\dot{K}_1(t) = -A' K_1(t) - K_1(t) A - Q_1 + K_1(t) S_1 K_1(t) + K_1(t) S_2 K_2(t), \quad (1.26)$$

$$\dot{K}_2(t) = -A' K_2(t) - K_2(t) A - Q_2 + Q_1 P(t) + K_2(t) S_1 K_1(t) + K_2(t) S_2 K_2(t), \quad (1.27)$$

$$\dot{P}(t) = AP(t) - P(t)A + P(t)S_1 K_1(t) + P(t)S_2 K_2(t) - S_{21} K_1(t) + S_1 K_2(t). \quad (1.28)$$

Dans le cas de critères à horizon infini ($t_f \rightarrow +\infty$), les équations (1.26)–(1.28) deviennent algébriques et on a la relation (voir [AKB1985]) :

$$\mathcal{M}_{S,BO} \begin{pmatrix} I_n \\ K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ K_1 \\ K_2 \\ P \end{pmatrix} (A - S_1 K_1 - S_2 K_2). \quad (1.29)$$

1.1.3 Stratégie de Nash en boucle fermée

La stratégie de Nash en boucle fermée a été traitée dans les articles [FS1971, LR1971] et plus particulièrement pour les jeux différentiels dans [KR1971]. Dans ce cadre, les conditions

suffisantes pour obtenir la stratégie de Nash sont données par la programmation dynamique et des équations couplées d'Hamilton–Jacobi–Bellman (voir par exemple [Bre2010]).

La stratégie $\varphi_i^*(t, x(t))$ du joueur i en boucle fermée est une commande par retour d'état associée au problème d'optimisation

$$\min_{\varphi_i \in \Phi_i} K_{if}(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), \varphi_i(t, x(t)), \varphi_{(-i)}^*(t, x(t)), t) dt, \quad (1.30)$$

sous la contrainte dynamique

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \varphi_i(t, x(t)), \varphi_{(-i)}^*(t, x(t)), t). \quad (1.31)$$

On introduit alors la fonction *valeur* de chaque joueur i définie par

$$V_i(\tau, x(\tau)) = K_{if}(x^*(t_f), t_f) + \int_{\tau}^{t_f} L_i(x^*(t), \varphi_1^*(t, x^*(t)), \dots, \varphi_N^*(t, x^*(t)), t) dt, \quad (1.32)$$

où $x^*(t)$ est la trajectoire issue du point $x(\tau)$ en $t = \tau$ et vérifiant l'équation différentielle

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), \varphi_1^*(t, x^*(t)), \dots, \varphi_N^*(t, x^*(t)), t), \quad (1.33)$$

et où $V_i(t_f, x(t_f)) = K_{if}(x(t_f), t_f)$.

Les équations d'Hamilton–Jacobi–Bellman couplées sont alors

$$-\frac{\partial V_i(t, x(t))}{\partial t} = \frac{\partial V_i(t, x(t))'}{\partial x} f(x(t), \varphi_1^*(t, x(t)), \dots, \varphi_N^*(t, x(t)), t) + L_i(x(t), \varphi_1^*(t, x(t)), \dots, \varphi_N^*(t, x(t)), t), \quad (1.34)$$

où $\varphi_i^*(t, x(t))$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial V_i(t, x(t))'}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x(t), \varphi_{(-i)}^*(t, x(t)), u_i, t) + \frac{\partial L_i}{\partial u_i}(x(t), \varphi_{(-i)}^*(t, x(t)), u_i, t) = 0. \quad (1.35)$$

Pour les jeux différentiels linéaires quadratiques, on peut poser $V_i(t, x(t)) = \frac{1}{2}x'(t)P_i(t)x(t)$. Alors l'équation (1.35) donne

$$\varphi_i^*(t, x(t)) = -R_{ii}^{-1}B_i' \frac{\partial V_i(t, x(t))}{\partial x} = -R_{ii}^{-1}B_i'P_i(t)x(t). \quad (1.36)$$

L'équation (1.34) devient

$$-x(t) \frac{\partial P_i(t)}{\partial t} x(t) = 2x'(t)P_i(t) \left[A - \sum_{j=1}^N S_j P_j(t) \right] x(t) + x'(t) \left[Q_i + \sum_{j=1}^N P_j(t) S_{ij} P_j(t) \right] x(t). \quad (1.37)$$

Cette dernière équation étant vraie pour tout $x(t)$, on obtient alors des équations couplées de type Riccati

$$-\frac{\partial P_i(t)}{\partial t} = P_i(t)A + A'P_i(t) + \sum_{j=1}^N \left(P_j(t)S_{ij}P_j(t) - P_i(t)S_jP_j(t) - P_j(t)S_jP_i(t) \right) + Q_i, \quad (1.38)$$

associées aux conditions aux limites $P_i(t_f) = K_{if}$. Il est crucial de remarquer que dans le cas général (à l'exception de cas dégénérés comme les jeux à somme nulle) les équations couplées (1.38) ne peuvent pas se mettre sous la forme d'une seule équation de Riccati rectangulaire.

Les sections suivantes présentent les résultats de mes recherches qui s'inscrivent dans ces cadres.

1.2 Résultats sur les équations couplées de Riccati avec une structure d'information en boucle ouverte

Dans cette section, je détaille quatre sujets relatifs aux équations couplées de Riccati avec une structure d'information en boucle ouverte.

1.2.1 Stratégie de Stackelberg avec critères présentant une pondération temporelle exponentielle

Durant ma thèse je me suis intéressé à la stratégie de Stackelberg pour les jeux différentiels linéaires quadratiques avec des critères présentant des pondérations temporelles exponentielles. Il s'agit des critères de la forme

$$J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_N, x_0) = \frac{1}{2} x_f' e^{2\alpha_i t_f} K_{if} x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} e^{2\alpha_i t} (x'(t) Q_i x(t) + u_1'(t) R_{i1} u_1(t) + u_2'(t) R_{i2} u_2(t)) dt \quad (1.39)$$

Il s'agit d'une extension au cadre multi joueurs de critères rencontrés étudiés dans [AM1989]. Les interprétations en automatique correspondent à l' α -stabilité et en économie au taux d'es-compte [CW1994, DJLS2000].

J'ai pu montrer qu'avec un changement de variable approprié sur les vecteurs d'état adjoints (voir [MJ-CN3, MJ-JN2, MJ-CI1]), la matrice caractéristique de Stackelberg en boucle ouverte est invariante dans le temps et donnée par

$$\mathcal{M}_{S,BO}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 & 0_n \\ -Q_1 & -A' - 2\alpha_1 I_n & 0_n & 0_n \\ -Q_2 & 0_n & -A' - 2\alpha_2 I_n & Q_1 \\ 0_n & -S_{21} & S_1 & A - 2(\alpha_2 - \alpha_1) I_n \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

On a alors le théorème suivant généralisant le résultat de [AKB1985] :

Théorème 12 (Voir [MJ-JI2]) *La matrice $(\mathcal{M}_{S,BO}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2 I_{4n})$ est une matrice Hamiltonienne. \square*

Il est important de noter que cette symétrie ne dépend que de la valeur α_2 qui est le taux de pondération temporelle du leader. Elle est indépendante de la valeur α_1 . La structure hiérarchique du jeu autorise le leader à imposer son taux de pondération temporelle au système. En notant λ_ℓ ($\ell \in \{1, \dots, 4n\}$) les $4n$ valeurs propres de $\mathcal{M}_{S,BO}(\alpha_1, \alpha_2)$, à une permutation près, nous avons

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda_{2n}) \leq -\alpha_2 \leq \operatorname{Re}(\lambda_{2n+1}) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda_{4n}). \quad (1.41)$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 13 (Voir [MJ-JI2]) *Pour tout couple $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, si*

- i. $m_1 \leq r_2$,
- ii. la paire $(C_1, A + (2\alpha_1 - \alpha_2)I_n)$ n'admet pas de mode inobservable imaginaire,
- iii. la paire $(C_2, A + \alpha_2 I_n)$ n'admet pas de mode inobservable imaginaire,
- iv. la paire $(A + (2\alpha_1 - \alpha_2)I_n, B_1)$ n'admet pas de mode incommandable imaginaire,
- v. et de plus, si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ le triplet $(A + \alpha_2 I_n, B_2, C_1)$ n'admet pas de zéro de transmission imaginaire.

alors

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda_{2n}) < -\alpha_2 < \operatorname{Re}(\lambda_{2n+1}) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda_{4n}). \quad (1.42)$$

□

Ce résultat est utile pour l'étude de la stricte α_2 -stabilité. Le cas discret a aussi été étudié avec un résultat similaire (voir [MJ-CI6]).

1.2.2 Stratégie de Nash avec critères présentant une pondération temporelle exponentielle : application à la translation non-uniforme de dynamique

Dans le cadre des jeux différentiels linéaires quadratiques dont les critères quadratiques présentent une pondération temporelle exponentielle, la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle ouverte a été mise en équation dans l'article [AKJ2003].

$$\mathcal{M}_{\text{N,BO}}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \begin{bmatrix} A & -S_1 & \dots & -S_N \\ -Q_1 & -A' - 2\alpha_1 I_n & & 0_n \\ \vdots & & \ddots & \\ -Q_N & 0_n & & -A' - 2\alpha_N I_n \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

Contrairement au cas de la stratégie de Stackelberg, il n'a pas été possible de mettre en évidence une quelconque symétrie. Néanmoins l'équation de Riccati rectangulaire associée a permis de formaliser le problème de translation non-uniforme de pôles en temps continu (et aussi le problème d'homothétie non-uniforme de pôles en temps discret).

On considère ici un système multivariable $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, où la paire (A, B) est supposée commandable. Le nombre de valeurs propres réelles de A est noté \tilde{n}_r et le nombre de paires de valeurs propres complexes conjuguées de A est noté \tilde{n}_c ($\tilde{n}_r + 2\tilde{n}_c = n$). Le problème de translation non-uniforme des pôles en temps continu est le suivant. Il s'agit de déterminer un gain G à valeurs réelles pour le retour d'état $u(t) = Gx(t)$ translatant $n_r \leq \tilde{n}_r$ valeurs propres réelles de A et $n_c \leq \tilde{n}_c$ paires de valeurs propres complexes conjuguées en des lieux prédéfinis dans l'espace complexe. Ce problème est schématisé sur la figure 1.1, tandis que la figure 1.2 donne le principe de l'homothétie non-uniforme en temps discret.

L'idée majeure, proposée dans les articles [MJ-CI23] et [MJ-JI17], consiste à représenter le système comme un jeu différentiel avec des joueurs additionnels fictifs, qui sont au nombre de $N = n_r + n_c$. On pose alors $B_i = B, \forall i \in \{1, \dots, N\}$ et $u(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t)$. Le critère associé à chaque joueur fictif est alors uniquement une pondération de son énergie, c'est-à-dire

$$J_i(\varphi_1, \dots, \varphi_N, x_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} u_i'(\tau) (e^{\beta_i \tau} R_{ii}) u_i(\tau) d\tau. \quad (1.44)$$

Les matrices Q_i étant nulles, la matrice caractéristique $\mathcal{M}_{\text{N,BO}}(\frac{\beta_1}{2}, \dots, \frac{\beta_N}{2})$ permet l'inclusion suivante

$$\Lambda_{\text{desire}} = \Lambda(A - \sum_{i=1}^N S_i K_i) \subset \Lambda(A) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \Lambda(-A' - \beta_i I_n) \right). \quad (1.45)$$

En posant $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mathcal{Q}_i = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid \operatorname{Im}(\lambda_{\text{desired}, i}) = \operatorname{Im}(\lambda_j(A))\}, \quad (1.46)$$

il est possible d'effectuer une translation non-uniforme de pôles si, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{Q}_i \neq \emptyset$. Il suffit alors de poser, avec $j_0 \in \mathcal{I}_i$

$$\beta_i = -\operatorname{Re}(\lambda_{i, \text{desired}} + \lambda_{j_0}(A)). \quad (1.47)$$

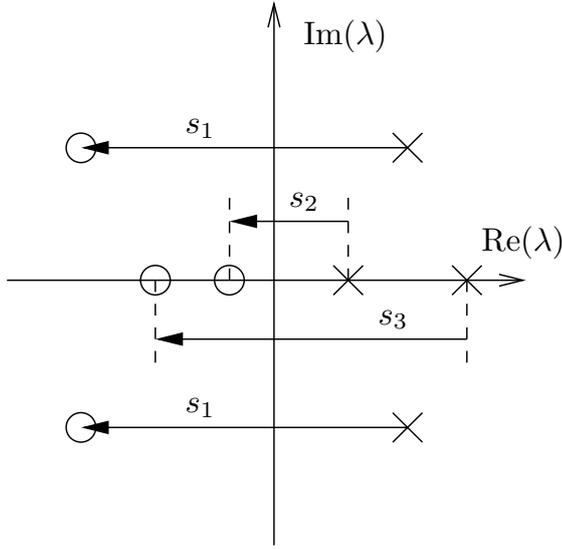


FIGURE 1.1 – Principe de la translation non-uniforme des pôles. \times représente les valeurs propres de A et \circ les valeurs propres en boucle fermée.

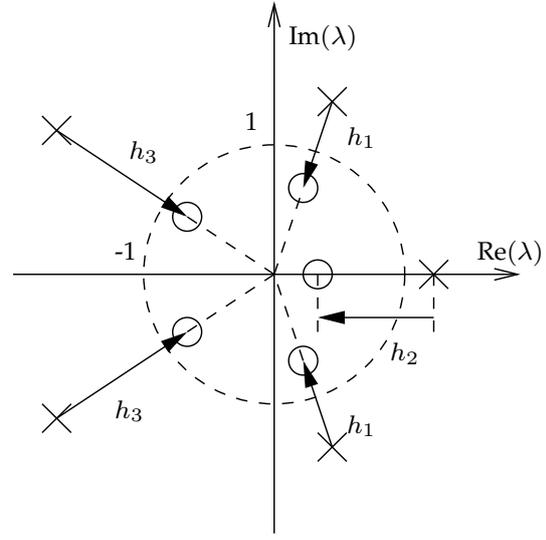


FIGURE 1.2 – Principe de l'homothétie non-uniforme des pôles. \times représente les valeurs propres de A et \circ les valeurs propres en boucle fermée.

Quand les matrices R_{ii} sont imposées, il peut y avoir plusieurs choix possibles. Leur nombre est fonction de la cardinalité des ensembles \mathcal{Q}_i , de \tilde{n}_r , \tilde{n}_c , n_r et enfin n_c . Le gain G est alors donné par

$$G = - \sum_{i=1}^N R_{ii}^{-1} B' K_i, \quad (1.48)$$

où les matrices K_i sont les solutions des équations de Riccati

$$0_n = -K_i A - (A' + \beta_i I_n) K_i + K_i \sum_{j=1}^N S_j K_j, \quad (1.49)$$

en sélectionnant l'espace invariant de $\mathcal{M}_{N,BO}(\frac{\beta_1}{2}, \dots, \frac{\beta_N}{2})$ associé au spectre Λ_{desire} .

Afin d'illustrer ce résultat, l'exemple suivant est considéré, avec $n = 4$ à partir de l'exemple 6.6.9 de [AKFIJ2003] :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.707 & 1.329 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.99 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Les valeurs propres de A sont $0.2823 + 0.0853i$, $0.2823 - 0.0853i$, -0.3359 et -1.9823 . Ainsi $\tilde{n}_c = 1$ et $\tilde{n}_r = 2$. Nous voulons maintenir la valeur propre réelle -1.9823 et traduire les autres de manière à avoir le spectre $\Lambda_{\text{desire}} = \{-1 + 0.0853i; -1 - 0.0853i; -3; -1.9823\}$. Cela implique $n_r = 1$; $n_c = 1$ et $N = 2$. On choisit alors arbitrairement $R_{11} = I_2$ et $R_{22} = \text{diag}(1; 2)$.

Parmi les solutions possibles, on considère $\beta_1 = -(0.2823 + (-1)) = 0.7177$, afin de traduire la paire complexe conjuguée et $\beta_2 = -(-1.9823 + (-3)) = 4.9823$, afin de traduire la

valeur propre réelle désirée non valeur propre de A . En sélectionner l'espace invariant associé, on obtient

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0465 & 0.0034 & -0.0007 & -0.0064 \\ 0.0552 & 0.0045 & -0.0006 & -0.0307 \\ 0.3863 & 0.0234 & -0.0031 & -0.1783 \\ 0.5470 & 0.0270 & -0.0034 & -0.2253 \end{bmatrix};$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.0259 & 0.0011 & -0.0037 & -0.0170 \\ 0.1712 & 0.0073 & -0.0245 & -0.1124 \\ -0.5855 & -0.0251 & 0.0838 & 0.3845 \\ 0.7458 & 0.0320 & -0.1068 & -0.4898 \end{bmatrix}.$$

Le retour d'état est alors

$$u(t) = \begin{bmatrix} -1.7795 & -0.0477 & 0.5242 & 1.5846 \\ 0.6077 & 0.0075 & -0.2912 & -0.7271 \end{bmatrix} x(t).$$

Le résultat est alors indiqué sur la Figure 1.3.

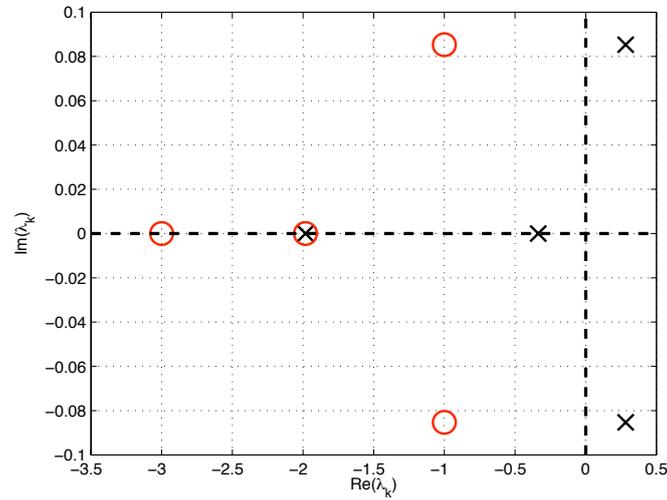


FIGURE 1.3 – Spectres de l'exemple numérique. \times représente les valeurs propres de A et \circ celles en boucle fermée.

La solution au problème n'est pas unique. En posant $\beta_1 = 0.7177$ et $\beta_2 = 3.3359$, alors

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0286 & 0.0042 & -0.0032 & -0.0182 \\ 0.0527 & 0.0044 & -0.0003 & -0.0291 \\ 0.3510 & 0.0219 & 0.0019 & -0.1551 \\ 0.4838 & 0.0243 & 0.0057 & -0.1838 \end{bmatrix};$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.3823 & 0.0164 & -0.0548 & -0.2511 \\ -0.3891 & -0.0167 & 0.0557 & 0.2555 \\ -0.9549 & -0.0410 & 0.1367 & 0.6272 \\ -0.3606 & -0.0155 & 0.0516 & 0.2368 \end{bmatrix}.$$

La solution induite est alors

$$G = \begin{bmatrix} -2.4656 & -0.0772 & 0.6224 & 2.0352 \\ -0.4747 & -0.0389 & -0.1362 & -0.0162 \end{bmatrix}.$$

1.2.3 Résolution des équations algébriques de Riccati rectangulaires à l'aide de faisceaux matriciels

Comme il a été indiqué précédemment, une technique s'est imposée pour résoudre les équations algébriques de Riccati rectangulaires : elle est fondée sur la détermination des espaces invariants des matrices caractéristiques [AKFIJ2003] (par exemple $\mathcal{M}_{N,BO}$ pour la stratégie de Nash en boucle ouverte [AKB1986, AKFJ1993, Eng1998b, Eng1998a] et $\mathcal{M}_{S,BO}$ pour la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte [AKB1985]). Cette technique est une extension du cas à un seul joueur portant sur les espaces invariants des matrices Hamiltonienne en temps continu et symplectique en temps discret.

En revanche, l'écriture de ces matrices caractéristiques nécessite des hypothèses, naturelles mais fortes : en particulier il faut que les matrices de pondérations R_{ii} , ($i \in \{1, \dots, N\}$) soient inversibles afin de pouvoir poser $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i'$. Dans le cas d'un seul joueur, ces hypothèses ont pu être levées en utilisant les faisceaux matriciels [IOW1999]. Dans cette approche, les solutions des équations de Riccati hermitiennes sont données par les espaces déflatants de faisceaux matriciels caractéristiques.

Lors d'une visite en 2007 à l'University Politehnica Bucharest, j'ai proposé à Cristian Oară et Radu Ștefan d'étudier une généralisation de l'approche par faisceaux matriciels pour résoudre les équations algébriques de Riccati rectangulaires. Cette collaboration a permis d'aboutir aux articles suivants pour le temps continu [MJ-JI13], pour le temps discret [MJ-JI4], mais aussi pour des études de cas particuliers : [MJ-CI12, MJ-CI13, MJ-CI17] et la mise en évidence d'une symétrie anti-palindromique du faisceau matriciel [MJ-CI20].

On introduit alors un système de Popov à temps continu (voir [KŞ2002, Kre2003a] pour plus de détails) :

Définition 14 (Système non symétrique de Popov) *Le système différentiel*

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} &= A_1 x & & + B_1 u, \\ \dot{\lambda} &= -Qx & -A_2' \lambda & -L_1 u, \\ \nu &= L_2' x & + B_2' \lambda & + R u, \end{cases} \quad (1.50)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $\lambda(t) \in \mathbb{R}^\ell$ l'état adjoint, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $\nu(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement l'entrée et la sortie au temps $t \in \mathbb{R}^+$ est appelé système non symétrique de Popov à temps continu.

Définition 15 (Système algébrique de Riccati non symétrique à temps continu) *Le système*

$$\begin{bmatrix} A_2' X + X A_1 + Q & X B_1 + L_1 \\ B_2' X + L_2' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ F \end{bmatrix} = 0 \quad (1.51)$$

d'inconnues $X \in \mathbb{C}^{\ell \times n}$ et $F \in \mathbb{C}^{m \times n}$ est appelé le système algébrique de Riccati non symétrique à temps continu, associé au système de Popov \mathcal{P} . Une solution (X, F) de (1.51) est appelée stabilisante si $\Lambda(A_1 + B_1 F) \subset \mathbb{C}^-$.

On remarque qu'en supposant que R est inversible, la paire (X, F) solution de (1.51) vérifie

$$F = -R^{-1}(B_2' X + L_2') \quad (1.52)$$

et

$$A_2' X + X A_1 + Q - (L_1 + X B_1) R^{-1} (B_2' X + L_2') = 0. \quad (1.53)$$

Le faisceau matriciel associé au système de Popov non symétrique est alors défini par ($s \in \mathbb{C}$) :

$$sM_{\mathcal{P}} - N_{\mathcal{P}} := s \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ -Q & -A_2' & -L_1 \\ L_2' & B_2' & R \end{bmatrix}, \quad (1.54)$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 16 (Voir [MJ-JI4, MJ-JI13]) Soit \mathcal{P} le système non symétrique de Popov défini par (1.56). Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. Le système algébrique de Riccati non symétrique à temps continu (1.51) a une solution stabilisante (X, F) .
2. Le faisceau matriciel associé au système non symétrique de Popov \mathcal{P} a un sous espace déflatant déconjugué \mathcal{V} de dimension n .

En posant

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} \ell \\ \} m \end{matrix} \in \mathbb{C}^{(n+\ell+m) \times n} \quad (1.55)$$

une base de \mathcal{V} , la solution stabilisante est donnée par $X = V_2 V_1^{-1}$, $F = V_3 V_1^{-1}$. \square

Dans le but de rendre utilisable en pratique le théorème 16, nous avons proposé des algorithmes numériques pour construire la base souhaitée de l'espace déflatant déconjugué du faisceau matriciel associé à \mathcal{P} . Cet algorithme utilise la décomposition de Kronecker d'un faisceau rectangulaire d'un point de vue théorique [Var1996] et une forme de Schur généralisée [DK1993a, DK1993b] d'un point de vue numérique car elle est plus robuste numériquement [BDD⁺2000].

De manière plus détaillée, la décomposition de Kronecker et plus particulièrement ses indices associés, permettent de déterminer s'il existe une solution et dans ce cas leur nombre (voir [MJ-JI13, Theorem 5.1] notamment, mais aussi [OD1997]).

Il est crucial ici de mettre en avant que les systèmes algébriques non-symétriques de Riccati sont traités et non plus simplement des équations associées. Cette généralisation nous permet de relaxer les hypothèses fortes de la littérature et de traiter l'ensemble des cas dégénérés qu'elle ne peut pas résoudre. Ainsi en prenant l'exemple des stratégies de Nash [MJ-CI13] et Stackelberg [MJ-CI12] avec une structure d'information en boucle ouverte pour des jeux linéaires-quadratiques, nous pouvons traiter le cas de critères qui ne sont pas nécessairement convexes ; ce que la littérature classique ne peut pas faire.

Pour le cas du temps discret, notons que le système non symétrique de Popov s'écrit :

$$\begin{cases} x(k+1) &= A_1 x(k) & & + B_1 u(k), \\ \lambda(k) &= Q x(k) & + A_2' \lambda(k+1) & + L_1 u(k), \\ \nu(k) &= L_2' x(k) & + B_2' \lambda(k+1) & + R u(k), \end{cases} \quad (1.56)$$

et est associé au système non symétrique de Riccati d'inconnues (X, F) :

$$\begin{bmatrix} A_2' X A_1 - X + Q & A_2' X B_1 + L_1 \\ B_2' X A_1 + L_2' & R + B_2' X B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ F \end{bmatrix} = 0. \quad (1.57)$$

Afin de résoudre le système (1.57), on recherche les espaces déflatants déconjugués du faisceau matriciel donné par ($s \in \mathbb{C}$) :

$$s \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ A_2' & 0 & 0 \\ B_2' & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A_1 & B_1 \\ I_\ell & -Q & -L_1 \\ 0 & -L_2' & -R \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Notons que pour le cas discret, il n'est pas non plus nécessaire d'imposer que A_1 ou A_2 soient inversibles, contrairement à la littérature portant sur les équations non symétriques de Riccati résolues à l'aide d'un espace invariant d'une matrice symplectique étendue.

Un exemple académique (extrait de [MJ-JI4]) est présenté ici, avec les matrices A_1, A_2 et R qui sont singulières :

$$A_1 = [0], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = [0 \quad 0.1], \\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le faisceau (1.58) est strictement équivalent à (voir [MJ-JI4]) :

$$\begin{bmatrix} s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}, \quad \text{avec } Z = \begin{bmatrix} -0.9901 & 0.0000 & & & \\ -0.9901 & -0.0000 & & & \\ -2.9704 & -0.0990 & \bullet & & \\ 0 & 0.0990 & & & \\ 0.0000 & -9.9015 & & & \end{bmatrix},$$

avec Z la matrice de passage à droite. Ce faisceau possède un espace singulier à droite de dimension 1. Il est possible d'obtenir une solution réelle stabilisante. Afin d'obtenir la valeur propre γ en boucle fermée, comme le premier bloc de $Z \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}$ est toujours inversible, on a

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 + 0.1\gamma \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -0.1\gamma \\ 10\gamma \end{bmatrix}, \quad A_1 + B_1 F = \gamma.$$

Dans le cas particulier d'une stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle ouverte, il est intéressant de noter que l'utilisation d'un faisceau matriciel fait apparaître une symétrie généralisant celle de la matrice Hamiltonienne [Sch2008] : le faisceau est un anti-palindrome [HMM2004, LCCL2010, BMMX2008]. Effectivement, dans ce cadre, L_1 et L_2 sont nulles ; $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$. On alors en posant $\mu(k) = \lambda(k) - \lambda(k + 1)$ et la représentation par faisceau devient :

$$s \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ A' & -Q & 0 \\ B' & 0 & -R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A & B \\ I_n & -Q & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ A' & -Q & 0 \\ B' & 0 & -R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ A' & -Q & 0 \\ B' & 0 & -R \end{bmatrix}' \quad (1.59)$$

On note une structure anti-palindromique de ce faisceau [MJ-CI20].

1.2.4 Le mystère de la matrice caractéristique de Nash en boucle ouverte

La matrice $\mathcal{M}_{N,BO}$ présentée à l'équation (1.19) a une structure tout à fait intrigante. Elle est nulle, sauf sur la première ligne, la première colonne et sa diagonale principale. Dans le cas où $N = 1$, c'est une matrice Hamiltonienne. Elle peut être de même vue comme une sous matrice de la matrice caractéristique de Stackelberg $\mathcal{M}_{S,BO}$ qui est aussi Hamiltonienne. Pourtant la matrice $\mathcal{M}_{N,BO}$ n'est pas Hamiltonienne. La répartition de son spectre est un mystère. Par simplicité, prenons le cas d'un jeu différentiel à 2 joueurs.

Dans plusieurs cas particuliers, notamment dans le cas de la quasi-coopération [AK1986, AKB1986], c'est-à-dire pour lesquels il existe des scalaires μ_1 et μ_2 (non simultanément nuls) tels que $\mu_1 Q_1 = \mu_2 Q_2$, il a été montré qu'il existe au moins une solution réelle et stabilisante. En d'autres termes parmi les $3n$ valeurs propres de $\mathcal{M}_{N,BO}$, au moins n sont stables. La quasi-coopération regroupe plusieurs spécificités comme les jeux à somme nulle ou encore les systèmes scalaires. En revanche, il n'y a pas de résultat dans le cas général. J'ai même pu montrer

une série d'exemples numériques [MJ-CN4] pour lesquels des hypothèses classiques en automatique sont vérifiées, mais pourtant il n'existe pas assez de valeurs propres stables. Prenons $n = 2$ et

$$A = \begin{bmatrix} -0.3997 & -0.0323 \\ -0.4706 & -0.4124 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.6097 \\ -1.7334 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.4350 \\ 0.5334 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 3.5775 & -0.3547 \\ -0.3547 & 0.7385 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1.0661 & 1.6755 \\ 1.6755 & 4.1314 \end{bmatrix}, \quad R_{11} = R_{22} = 1 > 0.$$

Ce système a les propriétés suivantes :

- les paires (A, B_1) et (A, B_2) sont commandables,
- les paires (Q_1, A) et (Q_2, A) sont observables,
- les matrices Q_1 et Q_2 sont définies positives,
- les matrices R_1 et R_2 sont définies positives.

Pourtant le spectre de $\mathcal{M}_{N,BO}$ ne possède qu'une seule valeur propre stable :

$$\Lambda(\mathcal{M}_{N,BO}) = \{-2.3422; 2.3558; 0.1643 + 0.3802i; 0.1643 - 0.3802i; 0.0393; 0.4306\}$$

Ce contre-exemple est d'autant plus surprenant que les hypothèses présentées permettent de montrer l'existence d'un équilibre pour un tel jeu, mais sur un horizon fini. Le passage à la limite de l'horizon infini et la structure de cette matrice n'ont toujours pas livré tous leurs secrets.

Depuis la publication de l'article [MJ-CN4] présentant différents contre-exemples, j'ai toujours conservé ce problème en tête et tenté différentes approches numériques, afin de mieux comprendre cette structure. J'aimerais compléter cette étude et regrouper l'ensemble des résultats sur ce type de structure. Une motivation supplémentaire pour étudier cette structure est qu'elle est finalement courante. On la rencontre aussi dans l'étude des systèmes cyber-physiques, pour représenter les systèmes interconnectés selon un graphe étoilé [AMYZZ2012]. La répartition des valeurs singulières d'une telle matrice intervient alors dans les conditions suffisantes pour assurer la dissipativité du système interconnecté.

1.3 Jeux différentiels avec une structure d'information en boucle fermée sans mémoire.

Dans cette section, trois axes de recherche portant sur les jeux différentiels avec une structure d'information en boucle fermée sont présentés. Tout d'abord quelques algorithmes de résolution numérique des équations algébriques couplées de type Riccati seront détaillés, puis une approche par formulation par blocs qui est valide pour les jeux différentiels descripteur en temps discret. Et enfin la résolution du problème de la stratégie de Stackelberg en boucle fermée sera développée.

1.3.1 Algorithmes pour résoudre les équations algébriques couplées de type Riccati

On s'intéresse ici à la résolution des équations algébriques couplées de type Riccati associées à (1.38), c'est-à-dire, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$P_i(t)A + A'P_i(t) + \sum_{j=1}^N \left(P_j(t)S_{ij}P_j(t) - P_i(t)S_jP_j(t) - P_j(t)S_jP_i(t) \right) + Q_i = 0, \quad (1.60)$$

Dans la littérature, différentes méthodes itératives de résolution ont déjà été proposées. On peut notamment citer

- L’algorithme de Gajic et Shen [GS1993]. Il consiste à insérer à chaque itération tous les termes quadratiques (calculés avec les valeurs de l’itération précédente) dans le terme constant. A chaque étape il faut alors résoudre un ensemble d’équations de Lyapunov découplées.
- L’algorithme proposé par Freiling, Jank et Abou-Kandil [FJAK1996b]. Cet algorithme est un raffinement de l’algorithme de Gajic et Shen. Un terme quadratique n’est pas injecté dans la constante et il faut alors résoudre une équation de Riccati hermitienne à chaque itération. La méthode de résolution de l’équation de Riccati hermitienne n’est pas imposée. Une variante possible est proposée dans [MJ-JI3].
- La méthode proposée dans [CCAK2005] est un raffinement de la précédente et propose simplement de résoudre séquentiellement avec une mise à jour les équations de Riccati à chaque étape au lieu de les résoudre en parallèle.
- La dernière méthode est proposée dans [MJ-CI3, MJ-JI1, MJ-CI8] que nous détaillons dans la suite. Elle est fondée sur la notion baptisée *manque de confiance*.

L’idée fondatrice de l’algorithme par la notion de manque de confiance est de résoudre une équation de Riccati rectangulaire à chaque itération afin de converger vers une solution des équations (1.60). Le point essentiel de cette méthode est de pouvoir conserver le couplage entre les différentes matrices variables, ce qui n’était pas proposé par les méthodes précédentes. Comme on le verra, c’est un élément majeur de l’accélération de la convergence de l’algorithme par rapport aux autres méthodes.

Le principe de la méthode est le suivant. A chaque étape, un joueur ne possède qu’une information partielle sur le retour d’état appliqué par les autres joueurs. Prenons le cas d’un jeu à deux joueurs pour simplifier l’explication. Le joueur i pense que l’autre joueur ($j = 3 - i$) utilise le gain $-G_j$, comme indiqué sur les figures 1.4 et 1.5. On peut aussi interpréter ce gain comme celui qui est annoncé par l’autre joueur, mais qui peut mentir et donc être réévalué à chaque étape (d’où le nom *manque de confiance*). N’ayant que peu d’information sur le système, la structure d’information en boucle ouverte est tout indiquée. Ainsi le problème d’optimisation est le suivant.

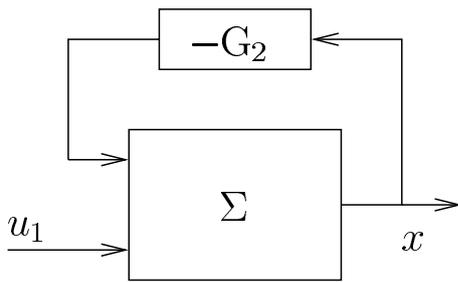


FIGURE 1.4 – Structure vue par le joueur 1.

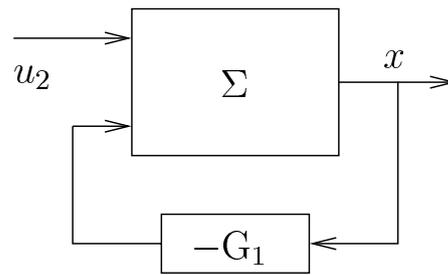


FIGURE 1.5 – Structure vue par le joueur 2.

Le critère du joueur 1 devient alors

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} (x'(\tau) [Q_1 + G_2' R_{12} G_2] x(\tau) + u_1'(\tau) R_{11} u_1(\tau)) d\tau, \quad (1.61)$$

avec la contrainte dynamique associée

$$\dot{x}(t) = (A - B_2 G_2) x(t) + B_1 u_1(t). \quad (1.62)$$

Le critère du joueur 2 devient alors

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{+\infty} (x'(\tau) [Q_2 + G_1' R_{21} G_1] x(\tau) + u_2'(\tau) R_{22} u_2(\tau)) d\tau, \quad (1.63)$$

avec la contrainte dynamique associée

$$\dot{x}(t) = (A - B_1 G_1) x(t) + B_2 u_2(t). \quad (1.64)$$

La structure d'information étant en boucle ouverte, on obtient une équation de Riccati rectangulaire associée à la matrice caractéristique

$$\tilde{\mathcal{M}}_{N,BO}(G_1, G_2) = \left[\begin{array}{c|cc} A & -S_1 & -S_2 \\ \hline -Q_1 - G_2' R_{12} G_2 & (B_2 G_2 - A)' & 0 \\ -Q_2 - G_1' R_{21} G_1 & 0 & (B_1 G_1 - A)' \end{array} \right]. \quad (1.65)$$

En notant P_1 et P_2 les solutions de

$$\tilde{\mathcal{M}}_{N,BO}(G_1, G_2) \begin{bmatrix} I_n \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} (A - S_1 P_1 - S_2 P_2), \quad (1.66)$$

on remarque qu'en posant $G_i = R_{ii}^{-1} B_i' P_i$, on a une représentation implicite des équations (1.60). Ce qui permet de construire l'algorithme suivant :

Algorithme 17 (Manque de Confiance)

- Fixer un niveau d'erreur maximale ϵ .
- Sélectionner les valeurs initiales $P_1^{(0)} = P_2^{(0)}$.
- A chaque itération $c \in \mathbb{N}^*$, effectuer la mise à jour

$$G_i^{(c-1)} = R_{ii}^{-1} B_i' P_i^{(c-1)}. \quad (1.67)$$

- Résoudre l'équation de Riccati rectangulaire associée à $\tilde{\mathcal{M}}_{N,BO}(G_1^{(c-1)}, G_2^{(c-1)})$.
- Le calcul de l'erreur $\epsilon^{(c)}$ se fait à chaque itérée c en évaluant la norme infinie du premier membre de l'équation (1.60). L'algorithme s'arrête à la condition $\epsilon^{(c)} \leq \epsilon$.

Une variante de l'algorithme peut être de résoudre à chaque étape séquentiellement les variables $P_i^{(c)}$ avec les autres valeurs actualisées. On parlera de manque de confiance accéléré. L'efficacité de cet algorithme est illustrée par l'exemple suivant, tiré de [AKFI]2003, p. 342].

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 50 \\ -25 & 15 \end{pmatrix}; S_{12} = S_{21} = 0; S_1 = \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{pmatrix}; S_2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}; \\ Q_1 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; Q_2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Il est particulièrement atypique. Les équations algébriques couplées de type Riccati associées à la stratégie de Nash en boucle fermée admettent plusieurs couples de solutions. Quatre couples de solutions ont été obtenus par Jank et Kun [JK1998], par une méthode d'optimisation.

$$P_{1,a}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 2.0139 & 0.0704 \\ 0.0704 & 1.4959 \end{bmatrix}, \quad P_{2,a}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0.6342 & -0.1188 \\ -0.1188 & 0.2994 \end{bmatrix}; \quad (1.68)$$

$$P_{1,b}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0.2989 & 0.06868 \\ 0.06868 & 0.1362 \end{bmatrix}, \quad P_{2,b}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 3.1659 & 0.43560 \\ 0.43560 & 2.3835 \end{bmatrix}; \quad (1.69)$$

$$P_{1,c}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} -1.4501 & 0.037882 \\ 0.037882 & 0.13624 \end{bmatrix}, \quad P_{2,c}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} -0.1793 & -1.817 \times 10^{-4} \\ -1.817 \times 10^{-4} & -0.3435 \end{bmatrix}; \quad (1.70)$$

$$P_{1,d}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} -0.11991 & -0.1311 \times 10^{-2} \\ -0.1311 \times 10^{-2} & 2.6932 \end{bmatrix}, \quad P_{2,d}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} -0.60076 & -1.2321 \\ -1.2321 & 0.084834 \end{bmatrix}; \quad (1.71)$$

En initialisant les matrices $P_1^{(0)}$ et $P_2^{(0)}$ à la matrice nulle, on obtient le comparatif des vitesses de convergence des différents algorithmes sur la figure 1.6.

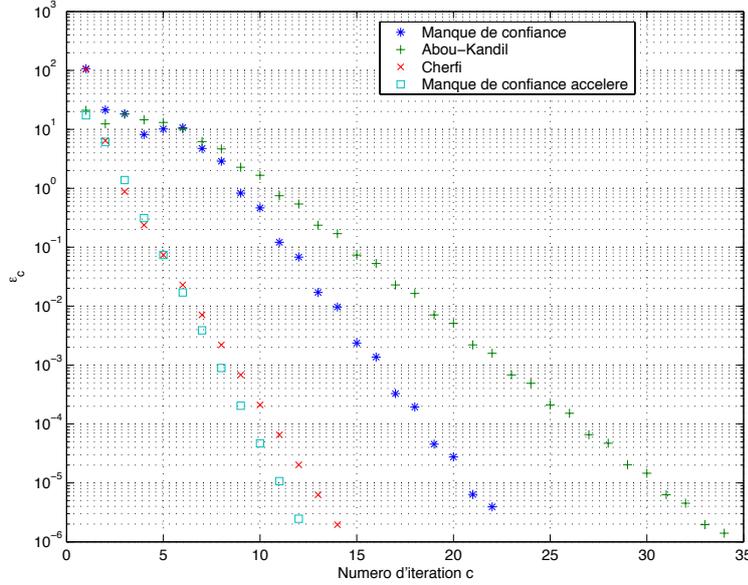


FIGURE 1.6 – Erreur $\epsilon^{(c)}$ par itération c .

D'autres approches sont possibles afin de construire un algorithme. Citons par exemple la technique fondée sur un développement en série de Taylor que j'ai proposée avec Ana Lúcia Driemeyer Franco dans l'article [MJ-CI4], qui s'inspire de la technique pour les équations couplées différentielles de Riccati [CC1971, ÖP1977]. L'idée sous-jacente est de construire une solution dans un cas général à partir d'un cas dégénéré pour lequel les équations couplées algébriques de Riccati se reformulent en une seule équation hermitienne. La dynamique est la même, mais les nouveaux critères sont les suivants :

$$\tilde{J}_1(\epsilon) = \frac{1}{2}(J_1 - J_2) + \frac{1}{2}\epsilon(J_1 + J_2), \quad (1.72)$$

$$\tilde{J}_2(\epsilon) = \frac{1}{2}(J_2 - J_1) + \frac{1}{2}\epsilon(J_1 + J_2). \quad (1.73)$$

Pour $\epsilon = 0$, on a un jeu à somme nulle, dont la résolution s'effectue avec l'équation de Riccati hermitienne :

$$-A'P - PA - \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2) + \frac{1}{2}P(S_1 - S_2 - S_{21} + S_{12})P = 0. \quad (1.74)$$

Pour $\epsilon = 1$, on obtient les solutions recherchées. On peut alors les écrire sous la forme d'un développement en série de Taylor en posant :

$$P_i(\epsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta P_i^{(k)} \epsilon^k. \quad (1.75)$$

Les termes $\Delta P_1^{(0)} = -\Delta P_2^{(0)}$ sont solutions de l'équation (1.74). Les termes suivants sont solutions d'équations algébriques de Lyapunov, fonctions des termes précédents. On pourra voir l'article [MJ-CI4] pour quelques illustrations sur des exemples standards et une comparaison par rapport aux autres méthodes. Cette méthode peut s'améliorer en considérant toujours un développement en série de Taylor mais en partant d'une équation non-dégénérée.

1.3.2 Stratégie de type feedback pour les jeux descripteurs à temps discret.

Dans cette section, je présente une nouvelle résolution numérique des stratégies de type feedback pour les jeux descripteurs (ou implicites) linéaires quadratiques à temps discret. Cette résolution utilise une formulation par bloc [MJ-JS1]. L'étude des jeux explicites a été proposée dans les articles [MJ-CI9, MJ-CI11].

Cette technique utilisant une formulation par bloc est initialement apparue pour le cas à un seul joueur dans l'article [BGW1990] qui recourt pleinement aux propriétés de symétrie d'une matrice Hamiltonienne fonction de la matrice singulière E . La commande optimale des systèmes descripteurs a généré une large littérature. Citons notamment [Ber1982, BL1987b, BL1987a, BGBMN1999] et les références citées dans [MJ-JS1]. L'objectif est ici de déterminer des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une tri-trajectoire $(x_k, u_{1,k}, u_{2,k})$ atteignant un équilibre de Nash ou de Stackelberg sous la contrainte du système descripteur.

La dynamique linéaire est ici de la forme [Dai1989] :

$$Ex_{k+1} = Ax_k + B_1u_{1,k} + B_2u_{2,k}, \quad k \in \{0, \dots, K-1\}, \quad (1.76)$$

avec des critères quadratiques de la forme :

$$J_i = \frac{1}{2}x'_K Q_{iK} x_K + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K-1} (x'_k Q_{ik} x_k + u'_{1,k} R_{i1} u_{1,k} + u'_{2,k} R_{i2} u_{2,k}). \quad (1.77)$$

Théorème 18 (Voir Theorem 1 de [MJ-JS1]) Soit le jeu différentiel à deux joueurs (1.76), associé aux critères quadratiques (1.77). Il existe une et uniquement une tri-trajectoire (composée de la trajectoire de l'état et des commandes de chaque joueur) associée à une stratégie de Nash avec structure d'information feedback si la récurrence suivante génère des matrices \mathcal{M}_{k+1} , définies par (1.80), qui soient inversibles à chaque itération.

$$P_{i,K} = Q_{iK}, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (1.78)$$

$$P_{i,k} = Q_i + \begin{bmatrix} A \\ 0_n \\ 0_n \end{bmatrix}' (\mathcal{M}_{k+1}^{-1})' Q_{i,k+1} \mathcal{M}_{k+1}^{-1} \begin{bmatrix} A \\ 0_n \\ 0_n \end{bmatrix}, \quad \forall (i, k) \in \{1, 2\} \times \{0; \dots; K-1\} \quad (1.79)$$

où

$$\mathcal{M}_{k+1} = \begin{bmatrix} E & S_1 & S_2 \\ P_{1,k+1} & -E' & 0_n \\ P_{2,k+1} & 0_n & -E' \end{bmatrix}, \quad Q_{i,k+1} = \begin{bmatrix} P_{i,k+1} & 0_n & 0_n \\ 0_n & S_{i1} & 0_n \\ 0_n & 0_n & S_{i2} \end{bmatrix}. \quad (1.80)$$

□

Le théorème 18 appelle différents commentaires.

- La matrice \mathcal{M}_{k+1} a sur sa diagonale uniquement des matrices singulières. Cela empêche alors l'utilisation du complément de Schur pour calculer son inverse, bien qu'elle puisse néanmoins être inversible.
- La matrice E n'a pas à être décomposée (sous la forme canonique de Weierstrass par exemple) pour obtenir le résultat.

- La matrice \mathcal{M}_{k+1} a la structure de la matrice $\mathcal{M}_{N,BO}$ introduite ci-dessus et présente peu de propriétés sur sa répartition spectrale.
- En posant $E = I_n$ on peut à l'aide d'un complément de Schur retrouver les équations algébriques de type Riccati en temps discret [MJ-CI11].

En considérant la stratégie de Stackelberg, on obtient le théorème suivant.

Théorème 19 (Voir Theorem 2 de [MJ-JS1]) *Soit le jeu différentiel à deux joueurs (1.76), associé aux critères quadratiques (1.77). Il existe une et uniquement une tri-trajectoire (composée de la trajectoire de l'état et des commandes de chaque joueur) associée à une stratégie de Stackelberg avec structure d'information feedback si la récurrence suivante génère des matrices \mathcal{T}_{k+1} , définies par (1.83), qui soient inversibles à chaque itération.*

$$P_{i,K} = Q_{iK}, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (1.81)$$

$$P_{i,k} = Q_i + \begin{bmatrix} A \\ 0_{q \times n} \\ 0_n \\ 0_n \end{bmatrix}' (\mathcal{T}_{k+1}^{-1})' \mathcal{U}_{i,k+1} \mathcal{T}_{k+1}^{-1} \begin{bmatrix} A \\ 0_{q \times n} \\ 0_n \\ 0_n \end{bmatrix}, \quad \forall (i, k) \in \{1, 2\} \times \{0; \dots; K-1\} \quad (1.82)$$

où

$$\mathcal{T}_{k+1} = \begin{bmatrix} E & 0_{q \times n} & S_2 & S_1 \\ 0_{q \times n} & E & S_1 & -S_{21} \\ P_{2,k+1} & P_{1,k+1} & -E' & 0_{n \times q} \\ P_{1,k+1} & 0_{n \times n} & 0_{n \times q} & -E' \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}_{i,k+1} = \begin{bmatrix} P_{i,k+1} & 0_n & 0_{n \times q} & 0_{n \times q} \\ 0_n & 0_n & 0_{n \times q} & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times n} & S_{i2} & 0_q \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times n} & 0_q & S_{i1} \end{bmatrix}. \quad (1.83)$$

□

On reconnaît aisément que la matrice \mathcal{T}_{k+1} a une symétrie Hamiltonienne. Il est alors possible de proposer des conditions suffisantes pour assurer son inversibilité à partir des deux lemmes suivants.

Lemme 20 (Voir Lemma 3 de [MJ-JS1]) *Si $\begin{pmatrix} E & B_1 \end{pmatrix}$ est surjective, et si $\begin{pmatrix} E \\ P_{1,k+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} E \\ P_{2,k+1} \end{pmatrix}$ sont injectives, $R_{21} > 0$, alors la matrice \mathcal{T}_{k+1} est inversible.*

Lemme 21 (Voir Lemma 4 de [MJ-JS1]) *Supposons $R_{21} > 0$ et que $\begin{pmatrix} E \\ Q_{iK} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} E \\ Q_i \end{pmatrix}$ ($i \in \{1, 2\}$) sont injectives et que $\begin{pmatrix} E & B_1 \end{pmatrix}$ soit surjective, alors pour tout $k \in \{0, \dots, K\}$, $P_{1,k}$ et $P_{2,k}$ existent, sont symétriques et définies positives. Et de plus les paires $\begin{pmatrix} E \\ P_{i,k} \end{pmatrix}$, ($i \in \{1, 2\}$) sont injectives.*

1.3.3 Stratégie de Stackelberg en boucle fermée

La stratégie de Stackelberg se formalise comme un problème d'optimisation qui a comme contrainte un autre problème d'optimisation portant sur le même système dynamique [Ye1997, Dem2005]. Deux difficultés majeures apparaissent en traitant ce type de problème.

La première difficulté est liée au fait que la réaction rationnelle du décideur du problème d'optimisation de bas niveau peut ne pas être réduite à un singleton, comme dans [Tol1981]. Différentes variantes de stratégies de Stackelberg ont été introduites par Leitman [Lei1978] avec une formulation faible ou forte [BAH1988] ou bien pessimiste et optimiste [AL2001a] : nous utiliserons les termes min–min et min–max dans la suite. Cela rend possible différentes techniques

comme l'approche par équipe, où le leader et le suiveur choisissent leurs commandes pour minimiser ensemble le critère du leader [BO1980, BS1979], ou bien encore l'omnipotence et la rétorsion du leader vis-à-vis du suiveur [Tol1983, Tol1981]. Notons que les deux formulations sont importantes en automatique. Le cas min–min correspond bien à un équilibre dans le sens où il est stable à une déviation des commandes et permet au leader d'atteindre la plus petite valeur possible de son critère. Le cas min–max correspond au choix du leader dans le pire cas des choix du suiveur. Une interprétation de robustesse peut être mise en avant, ainsi qu'une application à la commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

La seconde difficulté est induite par la structure d'information. Effectivement en boucle fermée (avec mémoire en particulier), les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème d'optimisation de bas niveau font intervenir le Jacobien de la commande du leader par rapport à l'état. Une approche variationnelle a été proposée dans l'article [PC1979] sans traiter tous les cas. Suite à ma rencontre avec Emmanuel Trélat lors du congrès CIFA 2004, nous avons étudié ce sujet, tout d'abord à travers l'application à la commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [MJ-JN1, MJ-CI7] puis dans le cadre théorique général [MJ-JI12].

Notre approche est la suivante. Nous déterminons tout d'abord la réaction rationnelle du suiveur et les conditions nécessaires pour le leader optimisant un problème dynamique sur un espace de stratégies de dimension infinie, soumis à des contraintes dynamiques (l'évolution du système et l'ensemble de réaction rationnelle du suiveur). Ces conditions nécessaires sont obtenues par le principe du minimum de Pontryagin et les valeurs des commandes $\varphi_i^*(t, x(t))$ sont obtenues *le long des trajectoires* et non pas pour tout état hors de la trajectoire $\varphi_i^*(t, x)$. Les conditions suffisantes (locales dans le cas général et globales dans le cas LQ) sont alors obtenues par la théorie des points focaux. On note dans cette partie le leader comme le joueur 1 et le suiveur comme le joueur 2. On note aussi les ensembles admissibles :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{u_1(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{T} \times \mathcal{X}, \mathbb{R}^{m_1}), \text{ tel que } \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, x(t)) = u_{1,x}(t, x(t)) \text{ existe et} \\ &\quad u_1(t, x(t)) \text{ comme } u_{1,x}(t, x(t)) \text{ sont continues en } x(t) \text{ et continues par mor-} \\ &\quad \text{ceaux en } t\} \\ \mathcal{U}_2 &= \{v(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{T} \times \mathcal{X}, \mathbb{R}^{m_2}), \text{ tel que } u_2(t, x(t)) \text{ est continue en } x(t) \text{ et continue} \\ &\quad \text{par morceaux en } t\} \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires pour le suiveur sont données par la proposition suivante.

Proposition 22 (Voir [MJ-JI12]) *Soit une paire (u_1^{**}, u_2^{**}) de stratégies de Stackelberg (min–max ou min–min), associée à la trajectoire $x(\cdot)$, alors il existe une application absolument continue $p_2 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$, sous la forme d'un vecteur ligne non nul, tel que*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H_2}{\partial u_2}(t, x(t), u_1^{**}(t, x(t)), u_2(t, x(t))) \\ &= p_2(t) \frac{\partial f}{\partial u_2}(t, x(t), u_1^{**}(t, x(t)), u_2(t, x(t))) + \frac{\partial L_2}{\partial u_2}(t, x(t), u_1^{**}(t, x(t)), u_2(t, x(t))), \end{aligned} \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2(t) &= -\frac{dH_2}{dx}(t, x(t), u_1^{**}(t, x(t)), u_2(t, x(t)), p_2(t)) \\ &= -p_2(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u_1^{**}(t, x(t)), u_2(t, x(t))) - \frac{\partial L_2}{\partial x}(t, x(t), u_1^{**}(t, x(t)), u_2(t, x(t))) \\ &\quad - p_2(t) \frac{\partial f}{\partial u_1}(t, x(t), u_1^{**}(t, x(t)), u_2(t, x(t))) \frac{\partial u_1^{**}}{\partial x}(t, x(t)) \\ &\quad - \frac{\partial L_2}{\partial u_1}(t, x(t), u_1^{**}(t, x(t)), u_2(t, x(t))) \frac{\partial u_1^{**}}{\partial x}(t, x(t)), \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$p_2(t_f) = \frac{\partial K_{2f}(x(t_f), t_f)}{\partial x}, \quad (1.86)$$

où H_2 est l'Hamiltonien du suiveur $H_2(t, x, u_1, u_2, p_2) = p_2 f(t, x, u_1, u_2) + L_2(t, x, u_1, u_2)$. Toutes les solutions u_2 des équations (1.84)-(1.86) sont rassemblées par l'application $\tilde{\mathcal{R}}_2 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$. \square

Pour les conditions nécessaires du leader, nous distinguons deux hypothèses selon la stratégie de Stackelberg min–min ou min–max.

Hypothèse 23

$$J_1(u_1, u'_2) \leq J_1(u_1, u_2), \quad \forall u'_2 \in \tilde{\mathcal{R}}_2(u_1), u_2 \in \mathcal{R}_2(u_1), u_1 \in \mathcal{U}^{**}_{\text{vois},1}, \quad (1.87)$$

où $\mathcal{U}^{**}_{\text{vois},1}$ est le voisinage de u_1^{**} dans \mathcal{U}_1 . \square

Hypothèse 24

$$J_1(u_1, u'_2) \geq J_1(u_1, u_2), \quad \forall u'_2 \in \tilde{\mathcal{R}}_2(u_1), u_2 \in \mathcal{R}_2(u_1), u_1 \in \mathcal{U}^{**}_{\text{vois},1}, \quad (1.88)$$

où $\mathcal{U}^{**}_{\text{vois},1}$ est le voisinage de u_1^{**} dans \mathcal{U}_1 . \square

Alors on peut reformuler le problème d'optimisation du leader sous la forme donnée par la proposition suivante.

Proposition 25 (Voir [MJ-JI12]) Soit une paire (u_1^{**}, u_2^{**}) associée à la solution min–max de Stackelberg. La commande u_1^{**} est donnée par

$$u_1^{**} \in \arg \min_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \max_{u_2 \in \mathcal{R}_2(u_1)} J_1(u_1, u_2). \quad (1.89)$$

Sous l'hypothèse 23, il vient

$$u_1^{**} \in \arg \min_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \max_{u_2 \in \tilde{\mathcal{R}}_2(u_1)} J_1(u_1, u_2). \quad (1.90)$$

\square

Le même résultat est donné pour la stratégie de min–min de Stackelberg sous l'hypothèse 24. Ainsi sous ces hypothèses il est possible de remplacer les contraintes du problème d'optimisation du leader par les conditions nécessaires du suiveur. De plus, à l'aide d'un argument utilisant le théorème des fonctions implicites, si $\frac{\partial^2 H_2}{\partial u_2^2}$ est définie positive, il est possible d'exprimer u_2^{**} de la manière suivante :

$$u_2^{**}(t, x(t)) = \mathcal{S}(t, x(t), p_2(t), u_1^{**}(t, x(t))) \in \tilde{\mathcal{R}}_2(u_1^{**}). \quad (1.91)$$

On note alors $\tilde{L}_1(t, x, p_2, u_2) = L_1(x, u_2, \mathcal{S}(t, x(t), p_2(t), u_1^{**}(t, x(t))), t)$. Les conditions nécessaires pour le leader sont rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 26 (Voir [MJ-JI12]) Si la trajectoire $x(\cdot)$, associée à la paire (u_1^{**}, u_2^{**}) de la stratégie de Stackelberg, est solution du problème d'optimisation de Stackelberg, alors il existe des applications

absolument continues $\lambda_1, \lambda_2 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$, appelées vecteurs adjoints (sous forme ligne) et un scalaire $\lambda^0 \geq 0$, tels que

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_2(t) \left(\frac{\partial F_{22}}{\partial u_1}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t)))u_{1,x} + \frac{\partial F_{21}}{\partial u_1}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))) \right)' \\
&\quad + \lambda_1(t) \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))) + \lambda^0 \frac{\partial \tilde{L}_1}{\partial u_1}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))), \\
0 &= \lambda_2'(t) F_{22}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))), \\
&= \lambda_2'(t) \left(p_2(t) \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))) + \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial u_1}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))) \right), \\
\dot{\lambda}_1(t) &= -\lambda_2(t) \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial x}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))) + \frac{\partial F_{22}}{\partial x}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t)))u_{1,x} \right)' \\
&\quad - \lambda_1(t) \frac{\partial F_1}{\partial x}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))) - \lambda^0 \frac{\partial \tilde{L}_1}{\partial x}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))), \\
\dot{\lambda}_2(t) &= -\lambda_2(t) \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial p_2}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))) + \frac{\partial F_{22}}{\partial p_2}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t)))u_{1,x} \right)' \\
&\quad - \lambda_1(t) \frac{\partial F_1}{\partial p_2}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))) - \lambda^0 \frac{\partial \tilde{L}_1}{\partial p_2}(t, x(t), p_2(t), u_1(t, x(t))),
\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in \mathcal{T}$. De plus on a les conditions de transversalité :

$$\lambda_2(0) = 0, \quad \lambda_1(t_f) - \lambda^0 \frac{\partial K_{1f}}{\partial x}(x(t_f), t_f) + \lambda_2(t_f) \frac{\partial^2 K_{2f}}{\partial x^2}(x(t_f), t_f) = 0. \quad (1.92)$$

□

Il est intéressant de mettre en lumière une propriété d'omnipotence du leader qui se formalise de la manière suivante :

Proposition 27 (Voir [MJ-JI12]) *Sous l'hypothèse que la matrice de dimension $m_1 \times m_1$*

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(p_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial L_2}{\partial u_1} \right)' \quad (1.93)$$

soit inversible, alors $\lambda_2 \equiv 0$.

□

Dans ce cas, le leader ne prend pas en compte la réaction rationnelle du suiveur. Pour les conditions suffisantes, utilisant la théorie des points focaux, dans le cas général et leur formulation particulière dans le cas des jeux différentiels linéaires quadratiques, on se reportera à la référence [MJ-JI12].

1.4 Conclusion

Mes activités de recherche en lien avec les équations généralisées de Riccati ont ainsi porté sur un large spectre de problématiques au niveau théorique, mais aussi au niveau numérique et applicatif (voir entre autres [MJ-CI2, MJ-CI19, MJ-CI27]). Une large gamme d'outils mathématiques en analyse et en algèbre, mais aussi en optimisation a été utilisée. Cette expertise me permettra d'aborder différents problèmes relativement nouveaux, avec différents points de vue. Notamment on pourra citer les jeux pour lesquels les horizons temporels dépendent des joueurs [MJ-CI28, MJ-CS2], mais aussi les jeux pour lesquels les joueurs n'ont pas la même structure d'information.

Chapitre 2

Contributions aux systèmes commutés

Ce chapitre est consacré à la présentation du cadre de mes recherches sur les systèmes commutés à temps discret que j'ai débuté en 2007 à mon arrivée au CRAN. Je me suis particulièrement investi sur ce sujet par goût (il s'agissait du cœur de mon projet de recherche en vue de ma candidature au CNRS en 2007) et aussi pour consolider mon intégration dans le projet Systèmes dynamiques Hybrides (SdH) 2007–2012 du groupe thématique Automatique, Commande et Observation des Systèmes (ACOS) dirigé par Jamal Daafouz. Depuis la réorganisation du laboratoire en janvier 2013, ma recherche se situe dans le projet Contrôle et OPTimisation des systèmes HYbrides (COPHY) du département Contrôle Identification et Diagnostic (CID).

C'est sur ce thème que j'ai co-dirigé avec Jamal Daafouz deux thèses déjà soutenues : celle de Julie Melin [Mel2011] et celle de Carlos Alberto Cavichioli Gonzaga [Gon2012]. Mes recherches sur les systèmes commutés peuvent être regroupées en quatre grandes directions qui seront les sections de ce chapitre :

- La certification de performances des systèmes commutés,
- Les problèmes de Lur'e commutés,
- La stratégie anti-windup pour les systèmes commutés,
- L'étude de la stabilisabilité des systèmes commutés avec la théorie des ensembles invariants.

2.1 Certification de performances pour les systèmes commutés

Dès mon arrivée au CRAN en octobre 2007, Jamal Daafouz et Claude Jung m'ont fait la confiance et l'honneur de me proposer de participer à l'encadrement de la thèse de Julie Melin qui débuta aussi en octobre 2007. Je profite de ce bilan pour les remercier, encore une fois, de leur geste.

Le principe à l'origine du sujet de cette thèse était de concilier au mieux les expertises de chacun, à savoir les systèmes commutés à temps discret et la commande des systèmes en tenant compte des performances à l'aide d'équations (ou d'inégalités) de Riccati. Le questionnement de cette thèse est le suivant. On considère un système commuté à temps discret comportant $N \in \mathbb{N}^*$ modes

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + B_{\sigma(k)}u_k, \quad (2.1)$$

$$z_k = C_{\sigma(k)}x_k, \quad (2.2)$$

avec à chaque instant $k \in \mathbb{N}$, l'état $x_k \in \mathbb{R}^n$, l'entrée de commande $u_k \in \mathbb{R}^r$ et la sortie $z_k \in \mathbb{R}^m$ et où la loi de commutation $\sigma(\cdot) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}_N = \{1, \dots, N\}$ est supposée arbitraire. A ce système

est associé un critère quadratique défini par

$$J(\sigma, \{u_k\}, x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} (z'_k z_k + u'_k R u_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x'_k C'_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)} x_k + u'_k R u_k), \quad (2.3)$$

qui est une fonction de la loi de commutation et pour lequel on a la matrice de pondération $R = R' > 0$.

On suppose que le choix de la structure de la loi de commande u_k mènera, en boucle fermée, à un système linéaire autonome à commutations. Dans le cas où le système (2.1) est stable, quelle que soit la loi de commutation, la stabilité sera exponentielle et il est possible d'introduire ce que nous appellerons par la suite, le *coût garanti*, qui est alors une grandeur finie :

$$\hat{J}(\{u_k\}, x_0) = \sup_{\{\sigma(k) \in \mathcal{I}_N\}_{k \in \mathbb{N}}} J(\sigma, \{u_k\}, x_0). \quad (2.4)$$

Remarque 28 Notons que si les paires (A_i, C_i) sont observables, le fait que le critère J soit fini pour toute loi de commutation implique que le système en boucle fermée est stable.

Déterminer une structure de loi de commande u_k qui minimise ce coût garanti est un problème largement ouvert et difficile. Cela tient en grande partie au fait que la détermination exacte du coût garanti (2.4) est extrêmement ardue. Un positionnement vis-à-vis de la littérature peut se faire selon les hypothèses sur la loi de commutation :

- Dans le cas où la loi de commutation est connue, le système peut se représenter uniquement comme un système à temps variant [HI1994] et on obtient alors, via le principe du maximum de Pontryagin, une équation de Riccati dépendante du temps qu'il est possible de résoudre par intégration numérique.
- Si la loi de commutation est inconnue (comme ici), le système peut se représenter comme un système linéaire en un paramètre dépendant du temps mais inconnu. Il est alors possible de se rapprocher des travaux [AG1995, SGC1997, AA1998].
- Quand la loi de commutation fait partie des entrées de commande du système, le problème devient plus compliqué encore. Citons alors les travaux [Sus2000, PS2000, RIK2003, AAN⁺2003] proposant une écriture du principe du maximum de Pontryagin pour les systèmes commutés et [BBBM2005, AGE2009] proposant une version de la programmation dynamique pour les systèmes commutés.

Comme l'horizon temporel du critère (2.4) est infini et que les coûts instantanés dépendent du temps par la loi de commutation, il est particulièrement difficile d'utiliser ces approches en pratique. Notre démarche consiste donc à proposer une *certification* du coût garanti (2.4). Le principe de la certification, proposé dans [GK2008] pour les systèmes à incertitude polytopique consiste à déterminer, pour une classe de lois de commande donnée, un majorant et un mino- rant du coût garanti et réduire le plus possible l'écart entre eux, afin d'avoir l'information la plus précise possible sur le coût garanti. Néanmoins la technique utilisée dans [GK2008] n'est pas adaptée aux incertitudes dépendantes du temps. Nous proposons les outils suivants.

2.1.1 Recherche d'un majorant

Nous avons considéré deux classes de lois de commande : le retour commuté d'état [MJ-CN5] et le retour commuté de sortie [MJ-CI15, MJ-CN7, MJ-JI11], avec une illustration de notre approche aux systèmes commandés en réseau avec retard commensurable [MJ-CN5, MJ-CI14, MJ-CI15]. Pour déterminer un majorant du coût garanti, nous avons choisi une classe de fonctions de Lyapunov quadratiques commutées permettant d'une part de prouver la stabilité exponentielle (et donc prouver que le coût garanti est fini) et d'autre part de majorer le coût garanti par la valeur initiale de cette fonction de Lyapunov. Pour le cas du retour d'état commuté,

on obtient :

$$\hat{J}(\{K_{\sigma(k)}x_k\}, x_0) \leq V(\sigma(0), x_0). \quad (2.5)$$

On pourra affiner le majorant en introduisant la fonction

$$\bar{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x_0 & \longmapsto \bar{V}(x_0) = \max_{i \in \mathcal{I}_N} V(i, x_0). \end{cases} \quad (2.6)$$

Afin d'éviter la dépendance en la direction de l'état initial et la dépendance en le mode initial, on propose un majorant plus grand de la forme

$$\hat{J}(\{K_{\sigma(k)}x_k\}, x_0) \leq V(\sigma(0), x_0) \leq \bar{V}(x_0) \leq \beta \|x_0\|_2^2. \quad (2.7)$$

Pour l'analyse à une loi de commande par retour d'état commutée fixée, on obtient le théorème suivant.

Théorème 29 (Théorème 12, [Mel2011]) *Soit le système défini par (2.1), avec $u_k = K_{\sigma(k)}x_k$. Pour tout $i \in \mathcal{I}_N$, s'il existe des matrices $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices symétriques définies positives $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un scalaire β , tels que les LMI*

$$\begin{bmatrix} G_i + G'_i - S_i & \star & \star \\ (A_i + B_i K_i)G_i & S_j & \star \\ \hline \begin{bmatrix} C_i \\ R^{\frac{1}{2}} K_i \end{bmatrix} G_i & 0_{(m+r) \times n} & I_{m+r} \end{bmatrix} > 0_{2n+m}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2 \quad (2.8)$$

et

$$\begin{bmatrix} \beta I_n & \star \\ I_n & S_i \end{bmatrix} > 0_{2n}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (2.9)$$

soient faisables alors le majorant recherché est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ & G_i, S_i, \beta, \\ & \text{sous les contraintes (2.8) et (2.9)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

et l'inégalité (2.7) est vérifiée avec $V(\sigma(0), x_0) = x'_0 S_{\sigma(0)}^{-1} x_0$. \square

On remarque bien que le premier bloc délimité par des pointillés dans la LMI (2.8) correspond à l'analyse de la stabilité du système à commutations (2.1) en boucle fermée [DRI2002].

Pour la synthèse du retour d'état commuté qui minimise β , on a le théorème suivant

Théorème 30 (Théorème 14, [Mel2011]) *Soit le système défini par (2.1). Pour tout $i \in \mathcal{I}_N$, s'il existe des matrices $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_i \in \mathbb{R}^{r \times n}$, des matrices symétriques définies positives $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un scalaire β , tels que le majorant du coût garanti soit solution du problème d'optimisation :*

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ & G_i, S_i, Y_i, \beta, \\ & \text{sous les contraintes :} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} G_i + G'_i - S_i & \star & \star & \star \\ A_i G_i + B_i Y_i & S_j & \star & \star \\ C_i G_i & 0_{m \times n} & I_m & \star \\ R^{1/2} Y_i & 0_{r \times n} & 0_{r \times m} & I_r \end{bmatrix} > 0_{2n+r+m}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2 \quad (2.12)$$

et

$$\begin{bmatrix} \beta I_n & \star \\ I_n & S_i \end{bmatrix} > 0_{2n}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (2.13)$$

alors les gains du retour d'état $K_i = Y_i G_i^{-1}$ stabilisent le système et vérifient les inégalités (2.7). \square

De la même manière, le cadre des lois de commande comme retour commuté de sortie dynamique a été traité dans [MJ-CN7, MJ-JI11]. On a ainsi déterminé un majorant aussi petit que possible du coût garanti dans la classe de fonctions de Lyapunov considérée et non pas la valeur de ce coût garanti. Cependant, on ne sait pas si ce majorant et ce coût garanti sont proches ou non. En effet, nous avons déterminé des fonctions de Lyapunov qui appartiennent à une classe particulière puisqu'elles étaient choisies sous forme quadratique avec les matrices de Lyapunov dépendantes du paramètre de commutation. Cette restriction peut donc être la cause d'un certain conservatisme et les valeurs du majorant $\beta \|x_0\|_2^2$ et du coût garanti $\hat{J}(x_0)$ peuvent ne pas être proches l'une de l'autre. Il est donc pertinent de s'intéresser à l'écart existant entre le majorant obtenu par le théorème 29 et le coût garanti $\hat{J}(x_0)$. L'option choisie est d'étudier un minorant du coût garanti.

2.1.2 Recherche d'un minorant

Le coût garanti défini par (2.4) correspond à la plus grande valeur des critères (2.3) pour toute séquence de commutations. Chaque critère obtenu par une séquence de commutations donnée constitue donc un minorant. On a donc l'inégalité suivante, pour des gains K_i fixés :

$$J(\sigma, \{K_{\sigma(k)}x_k\}, x_0) \leq \hat{J}(\{K_{\sigma(k)}x_k\}, x_0), \quad \forall \sigma(k) \in \mathcal{I}_N. \quad (2.14)$$

Cependant, il est difficile de déterminer la valeur exacte du critère (2.3) pour une séquence quelconque de commutations. L'idée est alors de choisir une séquence de commutations particulière qui mène à la détermination de la valeur exacte du critère. La qualité de la certification est intimement liée à la richesse de la classe des lois de commutation choisie.

Dans un premier temps, nous avons considéré une séquence de commutations à un seul mode actif, qui se ramène au cas des systèmes linéaires à temps invariant [MJ-CI14, MJ-JI11]. La valeur exacte du critère est alors obtenue par la solution d'une équation de Lyapunov

$$C_i' C_i - W_i^* + A_i' W_i^* A_i = 0_n, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (2.15)$$

où, comme la paire (C_i, A_i) est observable et A_i est stable, il existe une et une seule solution, $W_i^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique et positive définie. On définit alors

$$\bar{W} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x_0 & \longmapsto \max_{i \in \mathcal{I}_N} x_0' W_i^* x_0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Ainsi,

$$x_0' W_i^* x_0 \leq \bar{W}(x_0) \leq \hat{J}(\{K_{\sigma(k)}x_k\}, x_0), \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \quad (2.17)$$

Afin d'affiner les interprétations sur ces bornes, on introduit les scalaires δ_m et δ_M

$$\delta_m = \max_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_{\min}(W_i^*), \quad (2.18)$$

$$\delta_M = \max_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_{\max}(W_i^*). \quad (2.19)$$

Par définition nous avons alors

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \delta_m \leq \frac{\hat{J}(\{K_{\sigma(k)}x_k\}, x_0)}{\|x_0\|_2^2} \leq \beta, \quad (2.20)$$

et

$$\exists x_{\max} \in \mathbb{R}^n, \quad \delta_M \leq \frac{\hat{J}(\{K_{\sigma(k)}x_k\}, x_{\max})}{\|x_{\max}\|_2^2} \leq \beta. \quad (2.21)$$

L'écart $\beta - \delta_m$ nous renseigne sur l'écart pour toute valeur de l'état initial et $\beta - \delta_M$ sur l'écart pour une valeur initiale particulière. Afin de visualiser ces résultats, considérons un exemple comprenant trois modes et R fixé à l'identité, $N = 3$, $n = 2$:

$$A_1 + B_1 K_1 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,3 & -0,2 \end{bmatrix}, \quad A_2 + B_2 K_2 = \begin{bmatrix} 0,07 & -0,2 \\ -1 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad A_3 + B_3 K_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,02 \\ -0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \ 0], \quad C_2 = [1 \ 2], \quad C_3 = [1 \ 1].$$

On obtient alors $\beta = 7,14$, $\delta_m = 0,013$ et $\delta_M = 6,16$. Afin de représenter la dépendance en la direction de la condition initiale, on pose $x_0 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0, \pi]$. Les résultats sont affichés sur la figure 2.1. On peut valider notre certification dans le cas où $\bar{V}(x_0)$ et $\bar{W}(x_0)$ sont proches uniquement. La richesse des systèmes commutés ici n'est pas suffisamment traduite par les minorants issus de modèles invariants dans le temps.

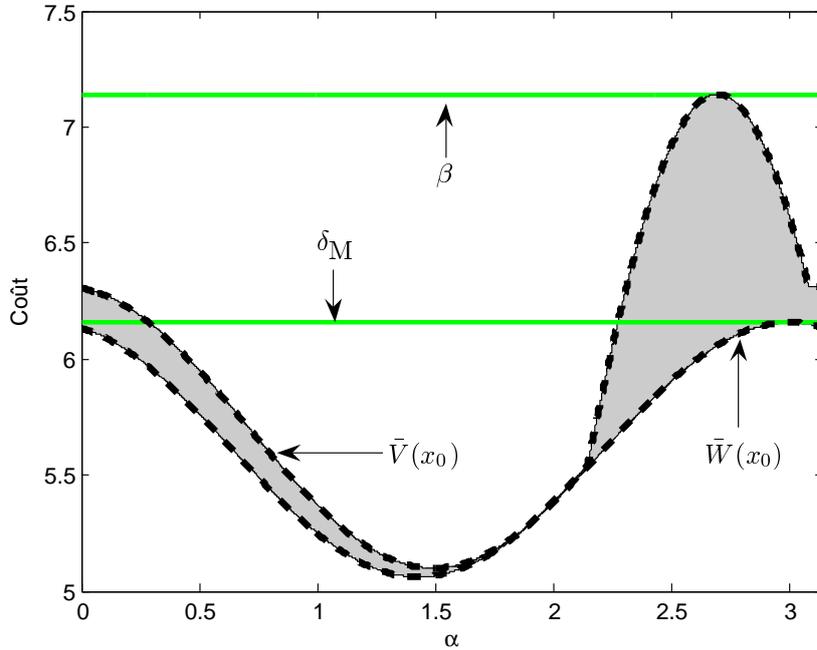


FIGURE 2.1 – Valeurs du majorant β , du minorant δ_M pour une condition initiale particulière, des fonctions $\bar{V}(x_0)$ et $\bar{W}(x_0)$ en fonction de la direction α de la condition initiale x_0 .

Nous avons proposé une extension de la recherche d'un minorant en tenant compte de lois de commutation périodiques [MJ-JI16]. La valeur exacte du coût associé à une telle loi de commutation est donnée par la solution d'une équation de Lyapunov périodique. Ces équations ont déjà été particulièrement étudiées [BC2009], tant pour les aspects théoriques (voir par exemple [BC1986, BC1988, BCN1991, Kre2003b]) et pour les aspects numériques [PV1989, Fla1990, Fla1991].

Nous avons aussi intégré la contrainte d'un temps de maintien dans le cadre de l'article [MJ-JI16]. De ce fait les bornes dépendent du temps de maintien $\Delta \in \mathbb{N}^*$ et on les note β_Δ , $\bar{V}_\Delta(\cdot)$ et $\bar{W}_{\Delta,d}(\cdot)$. Ce dernier minorant est associé à une loi de commutation vérifiant le temps de maintien Δ et est périodique de période $d\Delta$, avec $d \in \mathbb{N}^*$. En augmentant la valeur de d , on se rapproche du comportement commuté arbitraire (avec temps de maintien). Afin de visualiser

la technique, l'exemple numérique suivant est considéré, $N = 2$, $n = 2$, R est l'identité et

$$A_1 + B_1K_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}, A_2 + B_2K_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}, C_1 = I_2, C_2 = 0,5I_2.$$

On obtient ainsi la figure 2.2, sur laquelle on voit l'amélioration due à l'introduction de minorants associés à des lois de commutations périodiques.

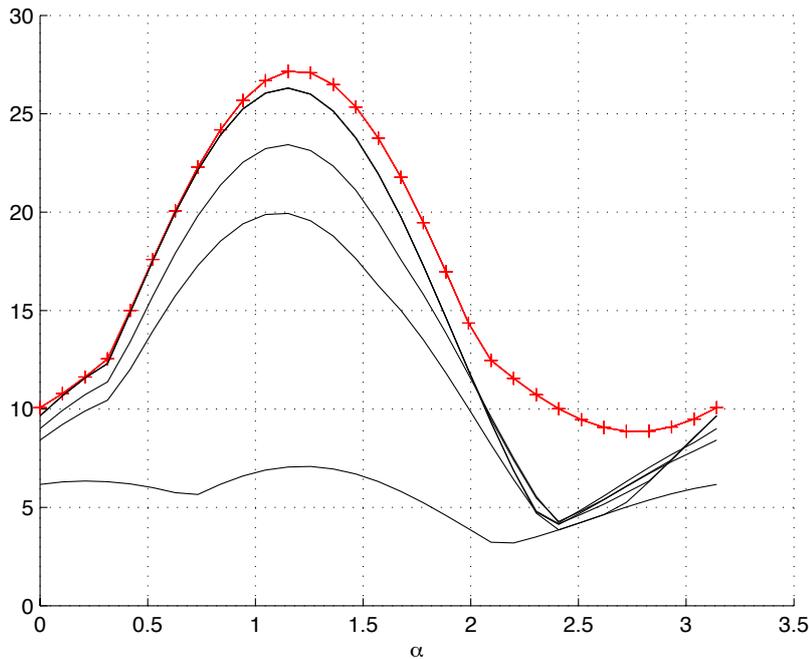


FIGURE 2.2 – Pour $\Delta = 4$, on représente le majorant $\bar{V}(x_0)$ (représenté par '+' rouge) et la collection de minorants $\bar{W}_{\Delta,d}(x_0)$ ($d \in \{1, \dots, 9\}$), représentée par des lignes pleines noires) en fonction de l'angle α .

2.2 Les problèmes de Lur'e commutés

Dans le cadre de programmes de collaboration franco-brésilienne (CAPES-COFECUB et PICS CNRS–CNPq), Eugênio B. Castelan et moi avons travaillé sur les systèmes LPV comprenant une saturation. Cet échange a abouti à l'article [MJ-JI10] portant sur la commande par retour de sortie dynamique dépendante du paramètre. Eugênio B. Castelan, Jamal Daafouz, Sophie Tarbouriech et moi avons alors posé le problème de la stabilité des systèmes commutés comprenant une non linéarité modale [MJ-CI16], puis des aspects de performances comme le gain induit \mathcal{L}_2 et la λ -contractivité [MJ-JI7]. Le principal outil pour cela fut de considérer une fonction de Lyapunov quadratique commutée. En prenant connaissance de la littérature sur les problèmes de Lur'e [Kha2002, RŞ2007], c'est-à-dire l'étude de la stabilité (absolue) pour des interconnexions d'un système linéaire et une non linéarité vérifiant une condition de type secteur borné conique, j'ai eu l'idée d'appliquer une fonction de Lyapunov de type Lur'e, contenant une intégrale de la non linéarité à notre problème (appelé les systèmes de Lur'e à commutations dans la suite). Cependant un tel rapprochement se heurte à une *incompatibilité majeure* :

l'utilisation d'une fonction de Lyapunov du type Lur'e avec terme intégral suppose que la non linéarité est invariante par rapport au temps. Les non linéarités dépendantes du mode empêchent donc l'approche classique de Lur'e pour les systèmes de Lur'e commutés.

Jamal Daafouz et moi avons proposé un sujet de thèse sur ce problème dans le cadre du projet ANR Architectures Hybrides et Contraintes (ArHyCo) à Carlos Alberto Cavichioli Gonzaga.

2.2.1 Introduction d'une nouvelle fonction de Lyapunov Lur'e adaptée au temps discret

En gardant à l'esprit notre objectif de considérer les systèmes de Lur'e commutés, nous avons d'abord tenté de proposer une nouvelle fonction de Lyapunov incluant une dépendance explicite en la non linéarité qui évite l'utilisation d'une intégrale pour les systèmes classiques de Lur'e (donc non commutés). Pour cela nous avons étudié en détails la large littérature du problème de Lur'e tant en temps continu qu'en temps discret.

Pour les systèmes de Lur'e à temps continu, le *critère du cercle* [Kha2002] s'applique en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique et autorise la dépendance en temps de la non linéarité. Cette solution est associée aussi à une interprétation fréquentielle proposée par Popov [Pop1961], Yakubovich [Yak1962] et Kalman [Kal1963] et sa formulation en termes de LMI grâce au lemme de Kalman-Yakubovich-Popov.

Toujours pour les systèmes de Lur'e à temps continu, Lur'e et Positknov ont imaginé de trouver une réponse au problème de stabilité absolue avec des non-linéarités $\varphi(\cdot)$ (scalaires ici pour plus de simplicité dans les notations intégrales) vérifiant la condition de secteur [LP1944, LR1960, Kal1963]

$$y\varphi(y) \geq 0, \quad (2.22)$$

et en utilisant la fonction de Lyapunov Lur'e suivante :

$$v(x) = x'Px + 2\eta \int_0^{Cx} \varphi(s)ds, \quad (2.23)$$

où $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive et η est un scalaire positif. Cette pondération du terme intégral est appelée dans la littérature multiplieur de Popov, [HHHB1994]. Le terme intégral induit la présence de la non linéarité $\varphi(\cdot)$ dans la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov, traitable avec la condition de secteur $y\varphi(y) \geq 0$. On obtient ainsi le *critère de Popov*, applicable uniquement pour les non linéarités invariantes dans le temps [Kha2002].

Pour les systèmes de Lur'e à temps discret, le pendant du critère du cercle est le *critère de Tsypkin* [Tsy1962, PJ1994]. Certaines adaptations ont été proposées pour étendre le critère de Popov en temps discret, comme par exemple celle étudiée dans [PG1964]. Néanmoins ces techniques requièrent une hypothèse supplémentaire sur la variation de la non linéarité afin de majorer la différence d'intégrales $\int_{y_k}^{y_{k+1}} \varphi(s)ds$. Cette hypothèse prend différentes expressions et mène à un nombre important de critères [Sze1963, SS1981, HB1994b, HB1994a, KH1996].

Pour le système de Lur'e à temps discret

$$x_{k+1} = Ax_k + F\varphi(y_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.24)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (2.25)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$ sont le vecteur d'état et la sortie du système (2.24)-(2.25) à l'instant k . Les matrices A , F et C sont des matrices réelles de dimensions appropriées. Ce système vérifiera l'hypothèse suivante :

Hypothèse 31 La non-linéarité $\varphi(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ vérifie la condition de secteur et est supposée être décentralisée [Kha2002].

Cette hypothèse implique pour toute matrice diagonale semidéfinie positive $\Lambda \in \mathbb{R}^{p \times p}$:

$$\varphi'(y)\Lambda(\varphi(y) - \Omega y) \leq 0. \quad (2.26)$$

Ce qui a pour conséquence les inégalités

$$0 \leq \varphi'(y)\Lambda\varphi(y) \leq \varphi'(y)\Lambda\Omega y \leq y'\Omega'\Lambda\Omega y, \forall y \in \mathbb{R}^p. \quad (2.27)$$

Nous avons alors proposé une nouvelle fonction de Lyapunov candidate composée d'un terme quadratique en l'état et d'un terme croisé entre l'état et la non-linéarité [MJ-CI24, MJ-JI15] :

$$V : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x; \varphi(Cx)) & \longmapsto x'Px + 2\varphi(Cx)'\Delta\Omega Cx, \end{cases} \quad (2.28)$$

où la matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique définie positive et la matrice $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$ est diagonale semi-définie positive. La fonction $V(x; \varphi(Cx))$ peut être considérée comme une fonction candidate parce qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

- $V(x; \varphi(Cx)) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, grâce à (2.27) ;
- $V(x; \varphi(Cx)) = 0$, si et seulement si $x = 0$, à cause de l'inégalité (2.27) et $P > 0$.
- $V(x; \varphi(Cx))$ est radialement non bornée.

De plus, grâce aux inégalités (2.27), on a l'encadrement

$$0 \leq x'Px \leq V(x; \varphi(Cx)) \leq x'(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C)x. \quad (2.29)$$

La ligne de niveau associée à la fonction $V(x; \varphi(Cx))$ et au scalaire $\gamma \geq 0$ est définie par

$$L_V(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x; \varphi(Cx)) \leq \gamma\}, \quad (2.30)$$

qui est, naturellement, liée aux deux ellipsoïdes

$$\mathcal{E}(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C, \gamma) \subseteq L_V(\gamma) \subseteq \mathcal{E}(P, \gamma). \quad (2.31)$$

Le théorème suivant propose des conditions suffisantes pour assurer la stabilité globale du système (2.24) pour toute non linéarité $\varphi(\cdot)$ vérifiant l'hypothèse 31.

Théorème 32 ([MJ-JI15]) Pour la classe des systèmes définis par (2.24)-(2.25), s'il existe une matrice $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice diagonale semi-définie positive $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et des matrices diagonales définies positives $T, W \in \mathbb{R}^{p \times p}$, telles que la LMI suivante

$$\begin{bmatrix} P - G' - G & G'A & G'F & 0_{n \times p} \\ \star & -P & \Pi_1 & A'\Pi_2 \\ \star & \star & -2T & F'\Pi_2 \\ \star & \star & \star & -2W \end{bmatrix} < 0_{2n+2p}, \quad (2.32)$$

est vérifiée, où $\Pi_1 = C'\Omega[T - \Delta]$; $\Pi_2 = C'\Omega[W + \Delta]$, alors, la fonction $V(x; \varphi(Cx))$ est une fonction de Lyapunov et l'origine du système (2.24)-(2.25) est globalement asymptotiquement stable. \square

Il est possible dans ce cas de proposer une interprétation fréquentielle en mettant en avant une fonction de transfert auxiliaire en posant

$$\mathcal{A} = A; \mathcal{B}' = \begin{bmatrix} F' \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}; \mathcal{C} = \begin{bmatrix} (\Delta - T)\Omega C \\ -(\Delta + W)\Omega CA \end{bmatrix}; \mathcal{D} = \begin{bmatrix} T & -(\Delta + W)\Omega CF \\ 0_p & W \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Le théorème suivant propose un résultat concernant la connexion entre le cadre fréquentiel et notre condition sur la stabilité globale d'un système Lur'e (théorème 32). Voir aussi la thèse [Gon2012, MJ-Ch2].

Théorème 33 ([MJ-JI15]) *S'il existe une matrice diagonale semi-définie positive $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$, et des matrices diagonales définies positives $T, W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ telles que l'inégalité (2.32) est satisfaite, alors la matrice de transfert $\mathcal{G}(z) = \mathcal{C}(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$ est strictement positive réelle.* \square

La même fonction de Lyapunov, définie par la relation (2.28) peut aussi s'utiliser pour les systèmes de Lur'e comportant de manière additionnelle une saturation :

$$x_{k+1} = Ax_k + F\varphi(y_k) + B\text{sat}(u_k); \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.34)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (2.35)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement, le vecteur d'état, l'entrée de commande et la sortie du système (2.34)-(2.35) à l'instant k . Les matrices A, B, F et C sont des matrices réelles de dimensions appropriées. L'entrée de commande u_k est contrainte par la fonction saturation normalisée définie par :

Définition 34 *La fonction saturation normalisée est définie par*

$$\text{sat}(u)_{(\ell)} = \text{sign}(u_{(\ell)}) \min(\rho_{(\ell)}, |u_{(\ell)}|), \quad \forall \ell = 1, \dots, m. \quad (2.36)$$

Le scalaire $\rho_{(\ell)} > 0$ est la limite de saturation symétrique de la ℓ -ème composante de l'entrée de commande. Le vecteur $\rho \in \mathbb{R}^m$ est supposé connu.

La classe de commande choisie est un retour d'état et un retour de non linéarité :

$$u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(y_k). \quad (2.37)$$

En posant la non linéarité duale de la saturation, on obtient la zone morte

$$\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k). \quad (2.38)$$

Le modèle en boucle fermée est alors

$$x_{k+1} = A_{\text{cl}}x_k + F_{\text{cl}}\varphi(y_k) - B\Psi(u_k), \quad (2.39)$$

où $A_{\text{cl}} = A + BK$ et $F_{\text{cl}} = F + B\Gamma$. On définit aussi l'ensemble suivant associé à la zone morte, qui vérifie une condition de secteur généralisée locale. Pour une matrice $L \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ donnée, l'ensemble $\mathcal{S}(L, \rho)$ est défini par :

$$\mathcal{S}(L, \rho) = \{\phi \in \mathbb{R}^{n+p}; -\rho \leq L\phi \leq \rho\}. \quad (2.40)$$

Lemme 35 (Voir [TPG2006] et [MJ-JI15]) *Notons les matrices $\hat{K} = [K \ \Gamma] \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ et $\hat{J} = [J_1 \ J_2]$, avec $J_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $J_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Si le vecteur $\hat{x}_k = (x_k' \ \varphi'(y_k))'$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}(\hat{K} - \hat{J}, \rho)$, alors la non-linéarité $\Psi(u_k)$ satisfait la condition de secteur suivante :*

$$SC_{u_k, (\ell)} = \Psi'_{(\ell)}(u_k) [\Psi(u_k) - J_1x_k - J_2\varphi(y_k)]_{(\ell)} \leq 0, \quad \forall \ell \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.41)$$

avec u_k donnée par l'équation (2.37). \square

Le théorème suivant permet alors de donner des conditions suffisantes, fondées sur notre fonction de Lyapunov, pour assurer la stabilité locale du système (2.34), avec une loi de commande donnée de la forme (2.37).

Théorème 36 ([MJ-JI15]) *Soient des matrices $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times p}$ données. Considérons comme variables d'optimisation, les matrices $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $J_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $J_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$, une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice diagonale semi-définie positive $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et des matrices diagonales définies positives $Q, R, T, W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et un scalaire μ . Si le problème d'optimisation suivant*

$$\min_{\mu, G, P, J_1, J_2, Q, R, T, W, \Delta} \mu$$

sous des contraintes LMI :

$$\begin{bmatrix} P - G' - G & G' A_{cl} & G' F_{cl} & -G' B & 0_{n \times p} \\ \star & -P & \Pi_1 & J'_1 & A'_{cl} \Pi_2 \\ \star & \star & -2T & J'_2 & F'_{cl} \Pi_2 \\ \star & \star & \star & -2I_m & -B' \Pi_2 \\ \star & \star & \star & \star & -2W \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}, \quad (2.42)$$

$$\begin{bmatrix} P & \Pi_3 & (K - J_1)'_{(\ell)} \\ \star & 2Q & (\Gamma - J_2)'_{(\ell)} \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0_{2n+p+1}, \quad (2.43)$$

$\forall \ell = 1, \dots, m$, et

$$\begin{bmatrix} \mu I_n - P & -\Pi_4 \\ \star & 2R \end{bmatrix} > 0_{n+p}, \quad (2.44)$$

où

$$\Pi_1 = C' \Omega [T - \Delta]; \quad \Pi_2 = C' \Omega [W + \Delta], \quad (2.45)$$

$$\Pi_3 = C' \Omega [\Delta - Q]; \quad \Pi_4 = C' \Omega [R + \Delta], \quad (2.46)$$

admet une solution, alors une estimation du bassin d'attraction \mathcal{B}_0 est donnée par la ligne de niveau $L_V(1)$ de la fonction de Lyapunov (2.28). \square

Afin de souligner l'intérêt et l'avantage de notre résultat, nous considérons un exemple tiré de l'article [MJ-JI15]. Considérons le système (2.34)-(2.35) contrôlé par un retour d'état linéaire $n = 2; p = m = 1; \rho = 1.5, \Omega = 0.9$, où $\varphi(y) = \Omega \frac{y(1+\cos(20y))}{2}$. Les matrices sont :

$$A = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.4 \\ 0.6 & 0.95 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}; \quad C = [-0.5 \quad 0.9].$$

L'ensemble des LMIs de [CMdP2006] fournissent $K = [-0.3324 \quad -1.0006]$ et nous désirons estimer le bassin d'attraction. L'estimation est alors réalisée en considérant d'une part la méthode fondée sur la fonction quadratique [CMdP2006], et d'autre part en appliquant le théorème 36 qui génère les résultats numériques suivants : $\mu = 0.2810, \Delta = W = R = 0.0381; T = 0.2424; Q = 0.2323; J_2 = 0.5188$:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0418 & 0.0173 \\ 0.0173 & 0.2305 \end{bmatrix}; \quad J_1 = [-0.0804 \quad -0.6335].$$

A propos de l'estimation du bassin d'attraction \mathcal{B}_0 , nous pouvons voir, dans la Figure 2.3, que notre estimation présente des ensembles non-connexes (ligne pleine). On reporte aussi sur cette figure l'estimation donnée par la fonction quadratique de [CMdP2006] (ligne tirets points en trait forcé) et la plus grande boule $\mathcal{E}(\mu I_n)$ (ligne tirets). Pour cet exemple, on remarque que l'ellipsoïde liée à la méthode de [CMdP2006] est incluse dans notre estimation, l'ensemble $L_V(1)$. Si nous calculons l'aire des régions données par les deux méthodes, nous obtenons $\mathcal{A} = 17.0252$ pour la méthode de [CMdP2006] et $\mathcal{A}_{L_V(1)} = 28.3666$ pour la nôtre, c'est-à-dire, une amélioration de 67.34% pour l'estimation du bassin d'attraction.

Deux conditions initiales, $x_0^1 = (4; -1.45)'$ et $x_0^2 = (-2.55; 1.88)'$, sont indiquées sur la Figure 2.3. Les deux sont placées dans des sous-ensembles de $L_V(1)$ ne contenant pas l'origine.

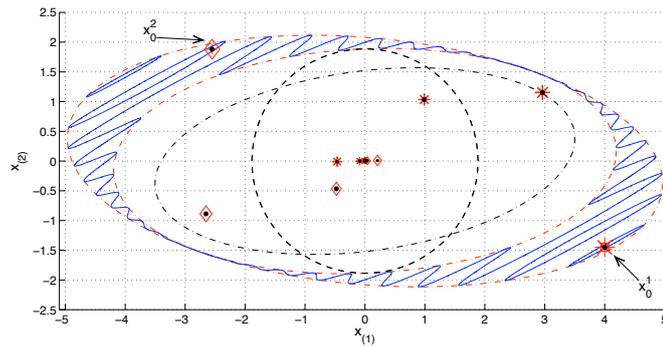


FIGURE 2.3 – L'estimation non-connexe $L_V(1)$ (ligne pleine) donnée par théorème 36. Ellipsoïde liée à [CMdP2006] (ligne tirets points en trait forcé). Deux trajectoires pour deux différentes conditions initiales dans l'ensemble $L_V(1)$: x_0^1 et x_0^2 . La plus grande boule $\mathcal{E}(\mu I_n)$ est en ligne tirets points en trait clair.

Les trajectoires associées sont représentées par des points-étoiles et points-diamants respectivement. Nous signalons que les deux trajectoires sont asymptotiquement stables et que l'ensemble des points de la trajectoire appartient à un des ensembles de $L_V(1)$.

Le théorème 36 établit des conditions suffisantes pour la stabilité. La question de l'écart entre l'estimation donnée par $L_V(1)$ et le bassin d'attraction \mathcal{B}_0 se pose. En d'autres termes, existe-t-il une meilleure estimation (par exemple, l'ellipsoïde extérieure $\mathcal{E}(P)$) ? Pour tenter une réponse à cette question, nous avons analysé différentes trajectoires issues de conditions initiales x_0 sur une grille de pas 0.01. Les conditions initiales associées à des trajectoires instables sont représentées par des marqueurs '+' sur la Figure 2.4. De points $x_0 \in \mathcal{E}(P)/L_V(1)$ engendrent une trajectoire instable. L'ensemble $\mathcal{E}(P)$ n'est donc pas une estimation du bassin d'attraction pour cette non-linéarité $\varphi(\cdot)$. De plus on voit bien que l'ensemble $L_V(1)$ entoure de façon adaptée ces états initiaux générant des trajectoires instables.

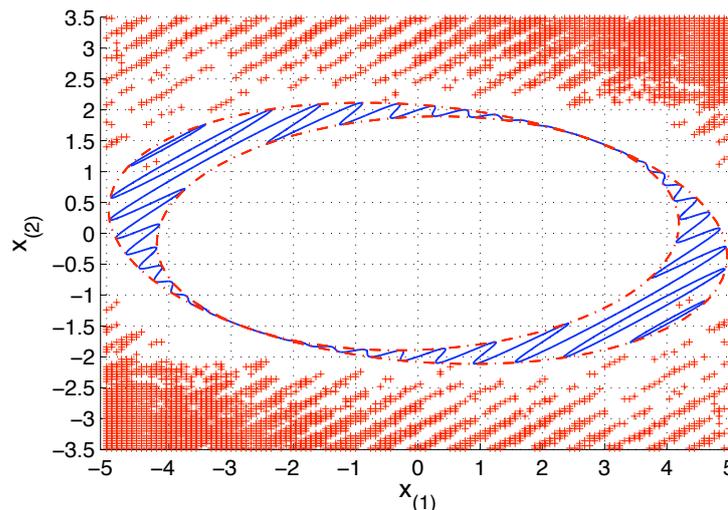


FIGURE 2.4 – $L_V(1)$ et des conditions initiales menant à des trajectoires instables.

Les aspects de synthèse de commande ont été étudiés mais ne sont pas présentés ici. On se reportera à la thèse et aux articles [MJ-CI24, MJ-JI15] pour ce cadre.

2.2.2 Etude des systèmes de Lur'e commutés avec une loi de commutation arbitraire

Dans cette section on étudie les systèmes de Lur'e commutés avec une loi de commutation arbitraire, de la forme

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k), \quad (2.47)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k, \quad (2.48)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état et la sortie du système (2.47)-(2.48) à l'instant $k \in \mathbb{N}$. Ce système à commutations satisfera ici l'hypothèse suivante :

Hypothèse 37 La loi de commutation $\sigma(\cdot)$ est définie de la forme suivante :

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathcal{I}_N = \{1, \dots, N\}, \\ k & \longmapsto \sigma(k). \end{cases} \quad (2.49)$$

Cette fonction $\sigma(\cdot)$ est supposée inconnue, a priori, mais sa valeur actuelle $\sigma(k)$ est disponible en temps réel.

Nous supposons que les non-linéarités $\varphi_i(\cdot)$, ($i \in \mathcal{I}_N$), satisfont l'hypothèse suivante :

Hypothèse 38 Les N non-linéarités $\varphi_i(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ associées aux modes $i \in \mathcal{I}_N$ vérifient chacune sa propre condition de secteur $[0_p; \Omega_i]$ et elles sont décentralisées [Kha2002].

Il est alors possible de reprendre notre fonction de Lyapunov et de l'adapter au cadre des systèmes de Lur'e commutés :

$$V : \begin{cases} \mathcal{I}_N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (i; x; \varphi_i(C_i x)) & \longmapsto x' P_i x + 2\varphi_i'(C_i x) \Delta_i \Omega_i C_i x, \end{cases} \quad (2.50)$$

où les matrices $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont symétriques définies positives et $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ sont des matrices diagonales semi-définies positives ($i \in \mathcal{I}_N$). En suivant les raisonnements précédents, avec la ligne de niveau

$$\begin{aligned} L_{V_{\max}}(\gamma) &= \{x \in \mathbb{R}^n; V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq \gamma, \forall i \in \mathcal{I}_N\} \\ &= \bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n; V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq \gamma\}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

on a l'encadrement par des intersections d'ellipsoïdes

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(P_i, \gamma) \supseteq L_{V_{\max}}(\gamma) \supseteq \bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(P_i + 2C_i' \Omega_i' \Delta_i \Omega_i C_i, \gamma). \quad (2.52)$$

Pour la stabilité globale du système de Lur'e commuté, avec une loi de commutation arbitraire (2.48), nous avons proposé le théorème suivant.

Théorème 39 (Voir [MJ-CI25]) Considérons le système Lur'e à commutations en temps discret. S'il existe des matrices $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices symétriques définies positives $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices diagonales semi-définies positives $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et des matrices diagonales définies positives $T_i, W_i, \in \mathbb{R}^{p \times p}$ qui vérifient les LMIs :

$$\begin{bmatrix} P_j - G_j' - G_j & G_j' A_i & G_j' F_i & 0_{n \times p} \\ \star & -P_i & C_i' \Omega_i [T_i - \Delta_i] & A_i' C_j' \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & -2T_i & F_i' C_j' \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & -2W_j \end{bmatrix} < 0_{2n+2p}, \quad (2.53)$$

$\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$, alors, la fonction (2.50) est une fonction de Lyapunov pour le système (2.47)-(2.48) et l'origine est globalement asymptotiquement stable pour toute séquence de commutation σ et pour toutes les non-linéarités $\varphi_i(\cdot)$, $i \in \mathcal{I}_N$, qui vérifient la condition de secteur, $\varphi_i(\cdot) \in [0, \Omega_i]$. \square

Ces résultats peuvent être étendus au cas des systèmes de Lur'e commutés munis d'une saturation additionnelle définis par :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) + B_{\sigma(k)}\text{sat}(u_k), \quad (2.54)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k, \quad (2.55)$$

et pour lesquels on considère comme loi de commande commutée

$$u_k = K_{\sigma(k)}x_k + \Gamma_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k). \quad (2.56)$$

C'est-à-dire que l'on a en boucle fermée

$$x_{k+1} = A_{\text{cl},\sigma(k)}x_k + F_{\text{cl},\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) - B_{\sigma(k)}\Psi(u_k), \quad (2.57)$$

où $A_{\text{cl},i} = A_i + B_iK_i$ et $F_{\text{cl},i} = F_i + B_i\Gamma_i$, $\forall i \in \mathcal{I}_N$. Ces systèmes sont une extension des systèmes commutés saturés proposés dans [Ben2012]. Des conditions suffisantes pour la stabilité locale du système commuté (2.54) ainsi qu'une optimisation de la *taille* du bassin d'attraction de l'origine sont données au théorème suivant.

Théorème 40 ([MJ-JI14]) *Pour des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$, les gains de la loi de commande (2.56), et pour des matrices diagonales définies positives $D_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ données ($\forall i \in \mathcal{I}_N$), considérons comme variables : les matrices $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $J_{1,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $J_{2,i} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, les matrices symétriques définies positives $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les matrices diagonales semi-définies positives $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, les matrices diagonales définies positives $R_i, Q_i, T_i, W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, et un scalaire μ . Si le problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{\mu, G_i, P_i, J_{1,i}, J_{2,i}, Q_i, R_i, T_i, W_i, \Delta_i} \mu$$

sous les contraintes LMIs :

$$\begin{bmatrix} P_j - G'_j - G_j & G'_j A_{\text{cl},i} & G'_j F_{\text{cl},i} & -G'_j B_i & 0_{n \times p} \\ \star & -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & J'_{1,i} D_i & A'_{\text{cl},i} C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & -2T_i & J'_{2,i} D_i & F'_{\text{cl},i} C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & -2D_i & -B'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & \star & -2W_j \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}, \quad (2.58)$$

$\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$,

$$\begin{bmatrix} P_i & C'_i \Omega_i [\Delta_i - Q_i] & (K_i - J_{1,i})'_{(\ell)} \\ \star & 2Q_i & (\Gamma_i - J_{2,i})'_{(\ell)} \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0_{n+p+1}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N; \forall \ell = 1, \dots, m; \quad (2.59)$$

$$\begin{bmatrix} \mu I_n - P_i & -C'_i \Omega_i [R_i + \Delta_i] \\ \star & 2R_i \end{bmatrix} > 0_{n+p}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (2.60)$$

admet une solution, alors, le système (2.57) est localement asymptotiquement stable pour toutes les séquences de commutations et une estimation du bassin d'attraction \mathcal{B}_0 du système (2.57) est donnée par l'ensemble $L_{V_{\max}}(1)$. \square

La synthèse de loi de commande dans ce même cadre est proposée dans le même article et on a le théorème suivant, dont les inégalités sont linéarisées grâce au lemme de Finsler (voir [Gon2012]).

Théorème 41 ([MJ-J14]) *S'il existe des matrices $\mathcal{F}_{G,i}, X_{G,i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_i, J_{1,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Gamma_i, J_{2,i} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, des matrices symétriques définies positives $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices diagonales semi-définies positives $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$; des matrices diagonales définies positives $X_{\Theta,i}, \mathcal{F}_{\Theta,i}, R_i, Q_i, T_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $U_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\forall i \in \mathcal{I}_N$, et un scalaire μ solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min_{\mu, \mathcal{F}_{G,i}, X_{G,i}, P_i, K_i, J_{1,i}, \Gamma_i, J_{2,i}, Q_i, R_i, T_i, U_i, \mathcal{F}_{\Theta,i}, X_{\Theta,i}, \Delta_i} \mu$$

sous les contraintes LMIs : (2.59), (2.60) et

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{0,i,j} - \mathbf{He}(\text{diag}[X_{G,j}; 0_{(n+p+m)}; X_{\Theta,j}]) & \star & \star \\ \mathcal{M}'_{1,i} - (X_{G,j} + \mathcal{F}'_{G,j}) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (n+2p+m)} \end{bmatrix} & -\mathbf{He}(\mathcal{F}_{G,j}) & \star \\ \mathcal{M}'_{2,i,j} - (X_{\Theta,j} + \mathcal{F}'_{\Theta,j}) \begin{bmatrix} 0_{(2n+2p+m) \times p} & I_p \end{bmatrix} & 0_{p \times n} & -\mathbf{He}(\mathcal{F}_{\Theta,j}) \end{bmatrix} < 0_{3n+3p+m}, \quad (2.61)$$

$\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$, avec

$$\mathcal{M}'_{2,i,j} = \begin{bmatrix} 0_{p \times n} & -\Omega_j C_j (A_i + B_i K_i) & -\Omega_j C_j (F_i + B_i \Gamma_i) & \Omega_j C_j B_i U_i & I_p \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\mathcal{M}_{0,i,j} = \begin{bmatrix} P_j & 0_n & 0_{n \times p} & 0_{n \times m} & 0_{n \times p} \\ \star & -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & J'_{1,i} & 0_{n \times p} \\ \star & \star & -2T_i & J'_{2,i} & 0_p \\ \star & \star & \star & -2U_i & 0_{m \times p} \\ \star & \star & \star & \star & 2\Delta_j \end{bmatrix}; \mathcal{M}_{1,i} = \begin{bmatrix} I_n \\ -(A_i + B_i K_i)' \\ -(F_i + B_i \Gamma_i)' \\ U'_i B'_i \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

alors les gains de la loi de commande (2.56) sont directement déterminés, et l'ensemble $L_{V_{\max}}(1)$ est une estimation du bassin d'attraction \mathcal{B}_0 en assurant la stabilité locale asymptotique pour toutes lois de commutations possibles. \square

Afin d'illustrer la synthèse de commande pour les systèmes de Lur'e commutés, prenons l'exemple suivant, avec deux modes et $n = 2$; $p = m = 1$; $\rho = 1.5$; $\Omega_1 = 0.7$; $\Omega_2 = 1.3$;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}; C_1 = [0.9 \quad 0.5];$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1 \end{bmatrix}; C_2 = [1 \quad -0.7].$$

On obtient alors pour l'ensemble $L_{V_{\max}}(1)$ l'intersection représentée sur la figure 2.5.

En reprenant la même intuition pour avoir une idée graphique de l'allure du bassin d'attraction du système commuté et de la comparer à celle de notre estimée $L_{V_{\max}}(1)$, nous représentons les conditions initiales de trajectoires instables obtenues sur une grille. Evidemment la trajectoire dépendant de la loi de commutation, nous considérons pour cela différentes lois de commutations particulières :

- 1) $\sigma(2k) = 1$; $\sigma(2k + 1) = 2$; $\forall k \in \mathbb{N}$, une commutation périodique qui commence par le mode 1;

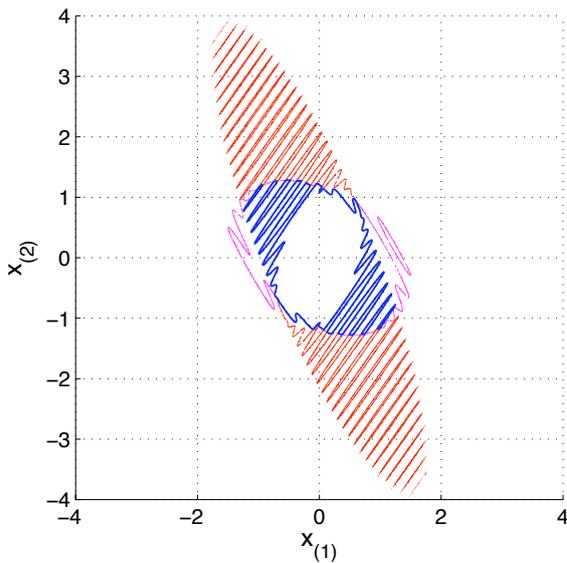


FIGURE 2.5 – L'ensemble $L_{V_{\max}}(1)$ (trait forcé) résultant de l'intersection des deux lignes de niveau : $\{x \in \mathbb{R}^n; V(1; x; \varphi_1(C_1x) \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n; V(2; x; \varphi_2(C_2x) \leq 1\}$.

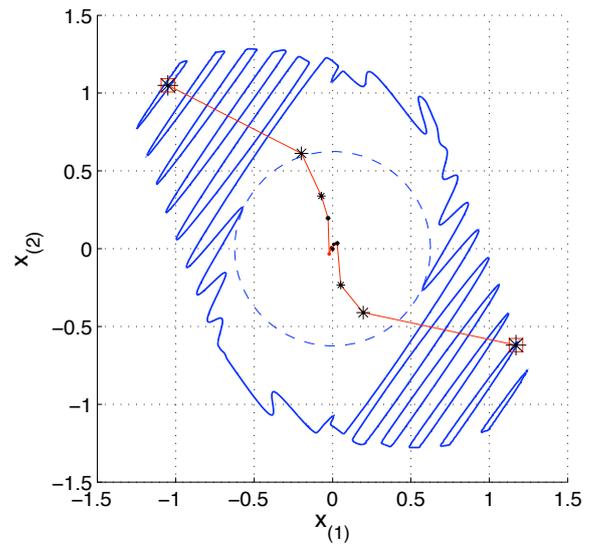


FIGURE 2.6 – L'ensemble $L_{V_{\max}}(1)$ déterminé dans la méthode du théorème 41. Deux trajectoires asymptotiquement stables sous deux réalisations de commutation arbitraire.

- 2) $\sigma(k) = 1 \forall k \in \mathbb{N}$, une situation dans laquelle seulement le mode 1 reste actif ;
- 3) $\sigma(2k) = 2; \sigma(2k + 1) = 1; \forall k \in \mathbb{N}$, une commutation périodique qui débute par le mode 2 ;
- 4) $\sigma(k) = 2 \forall k \in \mathbb{N}$, où nous n'avons que le mode 2 actif.

Les résultats sont représentés sur les figures 2.7 et 2.8. On peut clairement voir que l'estimée s'adapte parfaitement aux conditions initiales de trajectoires instables, malgré le nombre limité de réalisations de loi de commutation. Il apparaît encore une fois de façon flagrante la propriété de non connexité du bassin d'attraction de l'origine.

2.2.3 Stratégie de min-switching pour les systèmes de Lur'e commutés

La thèse de Carlos A. C. Gonzaga s'est terminée en traitant le cas des systèmes de Lur'e commutés mais avec une autre hypothèse sur la loi de commutation, en supposant qu'elle fait partie des variables de commande du système. L'objectif étant alors de trouver la loi de commutation

$$\sigma(k) = g(x_k) \quad (2.64)$$

pour stabiliser asymptotiquement le système de Lur'e commuté.

La technique du *min-switching* a été introduite en 1997 par Mark Wicks et Raymond DeCarlo [WD1997] (voir aussi [Lib2003]). Elle consiste à assurer que le minimum des fonctions de Lyapunov modales est une fonction décroissante. Des conditions suffisantes peuvent être exprimées à l'aide de la *S*-procédure (dont l'intuition remonte à l'article [LP1944] et qui a été formalisée par Yakubovich [Yak1971]; voir aussi [BEFB1994]). On obtient alors pour des inégalités de Lyapunov-Metzler (voir les articles [GC2006b, GC2006a, Ger2010] pour plus de développements sur leurs manipulations et résolutions par recherche en ligne). On peut aussi voir le minimum des fonctions de Lyapunov modales comme une fonction de Lyapunov dite

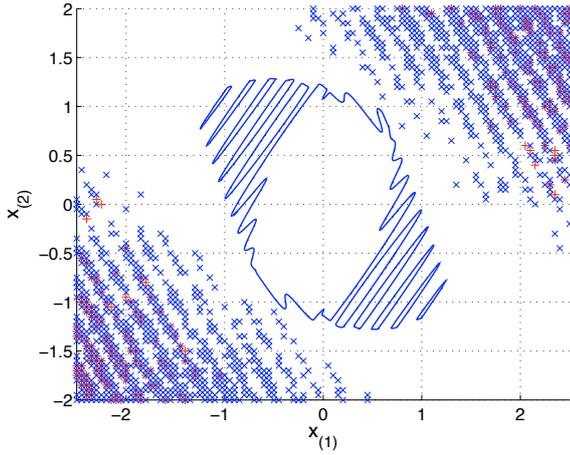


FIGURE 2.7 – L'ensemble $L_{V_{\max}}(1)$ (trait forcé) et conditions initiales de trajectoires instables pour les lois de commutations **1** ('+') et **2** ('x').

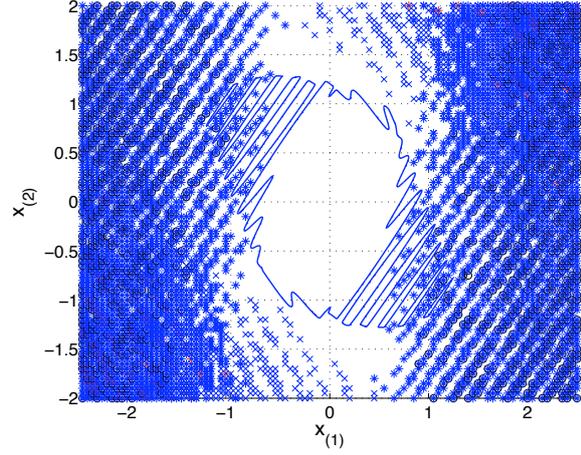


FIGURE 2.8 – L'ensemble $L_{V_{\max}}(1)$ (trait forcé) et conditions initiales de trajectoires instables pour les lois de commutations **1** ('+'); **2** ('x'); **3** ('o') et **4** (étoile).

composite développée dans les articles [HL2003, Hu2007]. La définition suivante est proposée :

$$V_{\min} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i; x; \varphi_i(C_i x)). \end{cases} \quad (2.65)$$

Comme le nombre de modes est fini, la fonction $V_{\min}(\cdot)$ hérite des propriétés d'une fonction de Lyapunov candidate de chacun des modes. Les lignes de niveaux de $V_{\max}(\cdot)$ sont définies par

$$L_{V_{\min}}(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; V_{\min}(x) \leq \gamma\}, \quad (2.66)$$

$$= \bigcup_{j \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n; V(j; x; \varphi_j(C_j x)) \leq \gamma\}. \quad (2.67)$$

Les matrices de Metzler en temps discret appartiennent par définition à l'ensemble

$$\mathcal{M}_d = \left\{ \Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}, \pi_{ji} \geq 0, \sum_{\ell \in \mathcal{I}_N} \pi_{\ell i} = 1, \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2 \right\}. \quad (2.68)$$

Nous utiliserons la notation suivante $(P)_{p,i} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_N} \pi_{\ell i} P_\ell$, pour la combinaison convexe des matrices définies positives P_i où les pondérations sont des éléments de la matrice de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$.

Pour le système de Lur'e commuté (2.47)-(2.48) on a le théorème suivant portant sur la stabilité globale asymptotique.

Théorème 42 (voir [MJ-CI26]) *Considérons le système (2.47)-(2.48) et supposons qu'il existe une matrice de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$; des matrices symétriques définies positives $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices diagonales semi-définies positives $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et des matrices diagonales définies positives $T_i, W_i \in$*

$\mathbb{R}^{p \times p}$, ($i \in \mathcal{I}_N$), telles que les inégalités de Lyapunov-Metzler

$$\begin{aligned} \mathbb{A}'_i(P)_{p,i} \mathbb{A}_i + \mathbf{He}(\mathbb{A}'_i(C' \Omega \Delta \mathbb{E})_{p,i}) - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left(2\mathbb{E}'_q W_q \mathbb{E}_q - \mathbf{He}(\mathbb{E}'_q W_q \Omega_q C_q \mathbb{A}_i) \right) \\ - \begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ (\Delta_i - T_i) \Omega_i C_i & 2T_i & \star \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np} \end{bmatrix} < 0_{n+(N+1)p}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

sont satisfaites $\forall i \in \mathcal{I}_N$, avec les notations suivantes :

$$\mathbb{A}_i = [A_i \quad F_i \quad 0_{n \times Np}]; \quad (2.70)$$

$$\mathbb{E}_i = [0_{p \times (n+ip)} \quad I_p \quad 0_{p \times (N-i)p}]; \quad (2.71)$$

alors la fonction V_{\min} est une fonction de Lyapunov pour le système Lur'e à commutations (2.47)-(2.48) et la stratégie de commutation du type :

$$\sigma(k) \in \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i; x_k; \varphi_i(C_i x_k)) \quad (2.72)$$

garantit que l'origine est globalement asymptotiquement stable. \square

Une recherche en ligne pour déterminer une matrice de Metzler est alors possible. L'exemple suivant, tiré de [MJ-CI26] illustre notre approche : $N = 2$, $n = 2$, $p = 1$: $\Omega_1 = 0.6$; $\Omega_2 = 0.4$;

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.08 & 0 \\ 0 & -0.72 \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.20 \end{bmatrix}; C_1 = [1.00 \quad 0.40]; \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -0.48 & 0.80 \\ 0 & 0.80 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.50 \end{bmatrix}; C_2 = [0.40 \quad 1.10]. \end{aligned}$$

Les non-linéarités $\varphi_i(y)$ sont définies, $\forall y \in \mathbb{R}$, par

$$\varphi_1(y) = \Omega_1 y \left(\frac{1 + \cos(2y)}{2} \right); \quad \varphi_2(y) = \Omega_2 y \left(\frac{1 - \sin(2.5y)}{2} \right).$$

Une solution au théorème 42 donne les figures 2.9 et 2.10. La loi de commande (2.72) mène à une partition de l'espace d'état qui n'est pas conique comme elle dépend des non-linéarités. A cause de l'encadrement (2.31), on a un encadrement conique des limites des partitions d'état.

Pour les systèmes de Lur'e commutés avec une saturation additionnelle (2.54)-(2.55), le théorème suivant propose des conditions suffisantes de stabilité asymptotique locale maximisant la *taille* du bassin d'attraction.

Théorème 43 (Voir [MJ-JI20]) *Considérons le système à commutations en boucle fermée (2.57). Supposons l'existence d'une matrice $\Pi \in \mathcal{M}_d$; des matrices symétriques définies positives $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices diagonales définies positives $Q_i, T_i, W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $U_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, des matrices diagonales semi-définies positives $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et des matrices $J_{1,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $J_{2,i} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ($i \in \mathcal{I}_N$), telles que les inégalités de Lyapunov-Metzler sont satisfaites $\forall i \in \mathcal{I}_N$:*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{A}}'_i(P)_{p,i} \tilde{\mathbb{A}}_i + \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{A}}'_i(C' \Omega \Delta)_{p,i} \tilde{\mathbb{E}}_i) - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left(2\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \tilde{\mathbb{E}}_q - \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \Omega_q C_q \tilde{\mathbb{A}}_i) \right) \\ - \begin{bmatrix} P_i & \star & \star & \star \\ (\Delta_i - T_i) \Omega_i C_i & 2T_i & \star & \star \\ -U_i^{-1} J_{1,i} & -U_i^{-1} J_{2,i} & 2U_i^{-1} & \star \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np \times m} & 0_{Np} \end{bmatrix} < 0_{\hat{n}}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

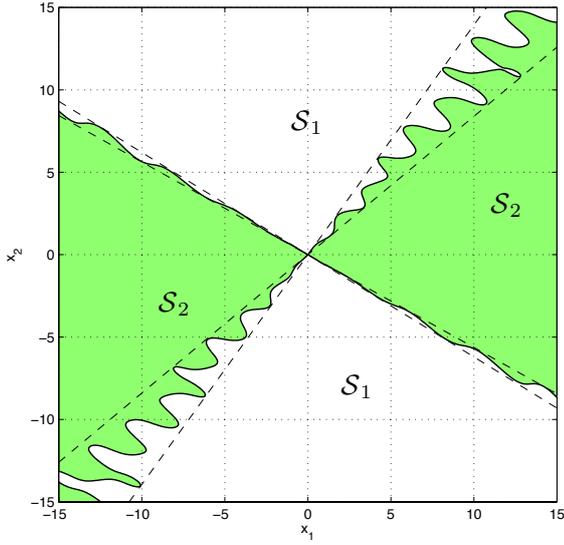


FIGURE 2.9 – Partition non conique de l'espace d'état pour la détermination de la loi de commutation. Les limites des partitions sont encadrées de partitions coniques.

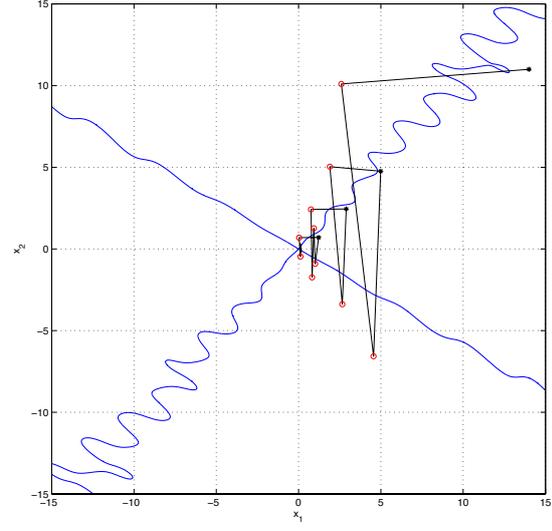


FIGURE 2.10 – Partition non conique et trajectoire issue de $x_0 = (14; 11)'$. A chaque état x_k , un cercle (resp. une étoile noire) représente que le mode 1 (resp. 2) est choisi..

et les LMIs, $\forall (i, \ell) \in \mathcal{I}_N \times \{1, \dots, m\}$,

$$\begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ (\Delta_i - Q_i)\Omega_i C_i & 2Q_i & \star \\ (K_i - J_{1,i})(\ell) & (\Gamma_i - J_{2,i})(\ell) & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0_{n+p+1} \quad (2.74)$$

où $\forall i \in \mathcal{I}_N$, nous considérons les matrices auxiliaires suivantes

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_{cl,i} & F_{cl,i} & -B_i & 0_{n \times Np} \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

$$\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} 0_{p \times (n+p+m)} & 0_{p \times ip} & I_p & 0_{p \times (N-i-1)p} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

et avec $\hat{n} = n + m + (N + 1)p$, alors la loi de commutation

$$\sigma(k) \in \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i; x_k; \varphi_i(C_i x_k)) \quad (2.77)$$

assure la stabilité locale asymptotique de l'origine du système (2.54)-(2.55) dans l'ensemble $L_{V_{\min}}(1)$. \square

Pour de plus amples discussions, il est possible de consulter l'article [MJ-JI20] ou bien le chapitre [MJ-Ch2]. Nous allons considérer le système (2.54)-(2.55) décrit par 2 modes, $N = 2$, $n = 2$, $m = p = 1$, $\rho = 5$ et les paramètres :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.4 & 0.4 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}; C_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \end{bmatrix}; \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1.1 & 0.6 \\ 0.3 & 1.5 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les bornes des conditions de secteur modales sont $\Omega_1 = 0.7$ et $\Omega_2 = 0.5$, et les deux non-linéarités sont données par :

$$\varphi_1(y) = \Omega_1 \frac{y(1 - \sin(25y))}{2}; \quad \varphi_2(y) = \Omega_2 \frac{y(1 + \cos(\frac{100}{3}y))}{2},$$

avec

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -0.7168 & -1.0136 \end{bmatrix}; & \Gamma_1 &= -1.2923; \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -1.2581 & -0.7326 \end{bmatrix}; & \Gamma_2 &= -1.4650. \end{aligned}$$

On obtient alors le bassin d'attraction de l'origine donné par la figure 2.11. La nature non connexe de l'estimée du bassin d'attraction et sa partition d'espace d'état, locale et non conique apparaissent clairement.

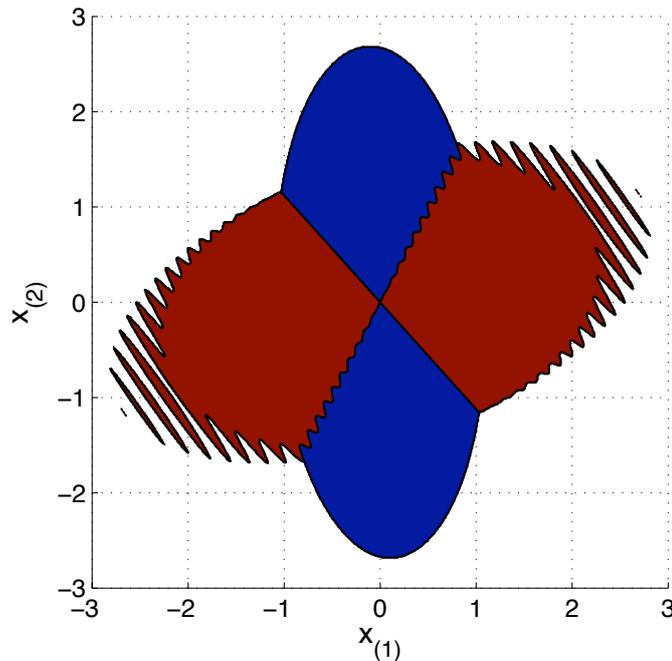


FIGURE 2.11 – La partition de l'espace d'état relative à l'activation des modes dans $L_{V_{\min}}(1)$. La région bleue connexe concerne le mode 1 et les régions rouges non connexes concernent le mode 2.

Afin de conclure cette partie, j'aimerais mentionner succinctement un axe de recherche possible s'inspirant de l'ensemble des contributions de la thèse de Carlos A. C. Gonzaga. Je souhaite étudier la possibilité de faire apparaître la non linéarité du problème de Lur'e dans une fonction de Lyapunov polyédrale, au lieu d'une fonction de Lyapunov commutée. Cette idée a été inspirée par les travaux [MP1986] et [Pol2000] sur l'utilisation des fonctions polyédrales pour les systèmes de Lur'e, mais reste encore largement ouverte et à travailler.

2.3 La stratégie anti-windup pour les systèmes commutés

A travers le projet ANR Architectures Hybrides et Contraintes (ArHyCo), j'ai débuté une collaboration avec Sophie Tarbouriech sur les systèmes non linéaires commutés. Cette collaboration s'est concrétisée par les articles [MJ-CI16, MJ-JI7]. Nous avons eu l'occasion de constater qu'une importante branche de recherche sur les systèmes non linéaires, la stratégie anti-windup, ne traitait quasiment pas des systèmes commutés. L'idée est alors venue naturellement de proposer un article conséquent couvrant plusieurs cas de figures [MJ-JS3] : stratégie anti-windup statique et dynamique, pour des lois de commutation arbitraires ou faisant partie des variables de commande.

La stratégie anti-windup pour les systèmes saturés consiste en l'introduction de modifications de la loi de commande afin de retrouver, autant que possible, les performances induites par une synthèse initiale de commande qui ne tient pas compte de la présence de la saturation. La littérature associée est particulièrement riche et diverse, comme l'attestent les références [HL2001, KG2002, TE2006, TGE2007, GTTZ2009a, GTTZ2009b, TGGQ2011] et leurs citations. Plus précisément pour les systèmes à temps discret, on peut mettre en avant les articles suivants [GPC2001, HTP2003, THP2003, GT2006, GTZ2008]. En lien avec le premier chapitre sur les équations de Riccati, on notera l'ouvrage [Sof2009].

L'étude des systèmes présentant d'une part une saturation et d'autre part faisant apparaître des commutations est relativement récente. Le problème n'est cependant pas traité dans sa généralité. Par exemple, dans [LL2009, LL2010, BGR2010], seul le gain statique anti-windup commute et non le système. Plusieurs approches sont néanmoins utilisées comme les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux [MK2000, TMK2007]. Les contributions [SCM⁺2009] et [Sch2000] sont notables respectivement pour une classe particulière de systèmes non linéaires et pour la commande optimale des systèmes hybrides linéaires. Notons aussi les contributions [ZWZ2012, ZZ2012, CFZF2012] dédiées au cas du temps discret et focalisées sur la présence d'incertitudes.

Le système commuté considéré est ici :

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k), \quad x(0) = x_0, \quad (2.78)$$

$$y(k) = C_{\sigma(k)}x(k), \quad (2.79)$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^{n_p}$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$. La loi de commutation $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathcal{I}_N$ sera supposée soit arbitraire, soit faisant partie des commandes. Le système est complété par un contrôleur dynamique de sortie :

$$x_c(k+1) = A_{c,\sigma(k)}x_c(k) + B_{c,\sigma(k)}u_c(k), \quad (2.80)$$

$$v_c(k) = C_{c,\sigma(k)}x_c(k) + D_{c,\sigma(k)}u_c(k), \quad (2.81)$$

où $x_c(k) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(k) = y(k) \in \mathbb{R}^p$ et $v_c(k) \in \mathbb{R}^m$. Ce contrôleur (2.80)-(2.81) a été obtenu par une méthode de synthèse (non précisée) ne tenant pas compte de la présence de la saturation, c'est-à-dire $u(k) = v_c(k)$. Il est important de noter que les propriétés de ce contrôleur dépendent fortement de l'hypothèse faite sur la loi de commutation. Si la loi de commutation est arbitraire, le contrôleur stabilise le système en boucle fermée pour toute loi de commutation. L'ensemble des modes est donc stable. En revanche, si la loi de commutation est une partie des commandes, alors le contrôleur peut ne pas stabiliser le système : le contrôleur permet uniquement l'existence d'une loi de commutation particulière (donnée ou non) qui stabilise le système en boucle fermée. Les modes peuvent ne pas être stables. En tenant compte de la saturation, on obtient le système complet, avec les notations précédemment vues :

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}\text{sat}(v_c(k)), \quad (2.82)$$

$$y(k) = C_{\sigma(k)}x(k), \quad (2.83)$$

$$x_c(k+1) = A_{c,\sigma(k)}x_c(k) + B_{c,\sigma(k)}C_{\sigma(k)}x(k) + y_{\text{aw},x}(k), \quad (2.84)$$

$$v_c(k) = C_{c,\sigma(k)}x_c(k) + D_{c,\sigma(k)}C_{\sigma(k)}x(k) + y_{\text{aw},v}(k), \quad (2.85)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\xi(k+1) = \mathbf{A}_{\sigma(k)}\xi(k) + \mathbf{B}_{\sigma(k)}\Psi(v_c(k)) + \mathbf{R}_{\sigma(k)}y_{\text{aw}}(k), \quad (2.86)$$

$$v_c(k) = \mathbf{K}_{\sigma(k)}\xi(k) + \mathbf{F}y_{\text{aw}}(k), \quad (2.87)$$

en posant

$$\xi(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y_{aw}(k) = \begin{pmatrix} y_{aw,x}(k) \\ y_{aw,v}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_c+m}, \quad (2.88)$$

où $n = n_p + n_c$ et avec $\forall i \in \mathcal{I}_N$,

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{c,i} C_i & B_i C_{c,i} \\ B_{c,i} C_i & A_{c,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{n_c \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}; \quad (2.89)$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} 0_{n_p \times n_c} & B_i \\ I_{n_c} & 0_{n_c \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n_c+m)}; \quad \mathbf{K}_i = [D_{c,i} C_i \quad C_{c,i}] \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad (2.90)$$

$$\mathbf{F} = [0_{m \times n_c} \quad I_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n_c+m)}. \quad (2.91)$$

Dans la suite, seule la structure statique commutée du contrôleur anti-windup sera présentée :

$$y_{aw}(k) = \mathbf{E}_{aw,\sigma(k)} \Psi(v_c(k)). \quad (2.92)$$

Pour la structure par retour dynamique de sortie commuté, les résultats sont détaillés dans [MJ-JS3]. L'injection de la loi de commande (2.92) dans le système (2.86) mène au système en boucle fermée :

$$\xi(k+1) = \mathbf{A}_{\sigma(k)} \xi(k) + (\mathbf{B}_{\sigma(k)} + \mathbf{R}_{\sigma(k)} \mathbf{E}_{aw,\sigma(k)}) \Psi(v_c(k)), \quad (2.93)$$

$$v_c(k) = \mathbf{K}_{\sigma(k)} \xi(k) + \mathbf{F} \mathbf{E}_{aw,\sigma(k)} \Psi(v_c(k)). \quad (2.94)$$

Les fonctions quadratiques commutées suivantes sont introduites pour l'étude de stabilité

$$V : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathcal{I}_N & \longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ (\xi, i) & \longmapsto V(\xi, i) = \xi' P_i \xi, \end{cases} \quad (2.95)$$

avec $\{P_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}$ un ensemble de matrices symétriques et définies positives appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$. On introduit aussi

$$V_{\max} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ \xi & \longmapsto \max_{i \in \mathcal{I}_N} V(\xi, i), \end{cases} \quad V_{\min} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ \xi & \longmapsto \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(\xi, i). \end{cases} \quad (2.96)$$

Pour une loi de commutation arbitraire, on a le théorème suivant, qui donne des conditions suffisantes sous forme de LMI pour assurer la stabilité locale du système (2.93).

Théorème 44 (Théorème 2.3 de [MJ-JS3]) *S'il existe un ensemble de matrices symétriques et définies positives $W_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{(m+n_c) \times m}$, et des matrices diagonales définies positives $S_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i \in \mathcal{I}_N$ qui satisfont les LMI :*

$$\begin{bmatrix} W_j & \star & \star \\ W_i \mathbf{A}'_i & W_i & \star \\ S_i \mathbf{B}'_i + Z'_i \mathbf{R}'_i & \mathbf{K}_i W_i + Y_i & 2S_i + \mathbf{F} Z_i + Z'_i \mathbf{F}' \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2; \quad (2.97)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \star \\ Y_{i,(\ell)} & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, \ell) \in \mathcal{I}_N \times \{1, \dots, m\} \quad (2.98)$$

alors pour le gain anti-windup $\mathbf{E}_{aw,i} = Z_i S_i^{-1}$, la ligne de niveau $L_{V_{\max}}(1) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(P_i)$ est une région de stabilité exponentielle du système (2.93), avec $P_i = W_i^{-1}$. \square

De manière à obtenir le plus grand bassin d'attraction $L_{V_{\max}}(1)$, le problème d'optimisation suivant est proposé.

Problème d'optimisation 45

$$\min_{W_i, Y_i, Z_i, S_i, \beta} \beta$$
 sous les contraintes (2.97)-(2.98) et

$$\begin{bmatrix} \beta I_n & I_n \\ I_n & W_i \end{bmatrix} > 0_{2n}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \quad (2.99)$$

Analysons ce résultat avec l'exemple suivant dont le premier mode est tiré de [GT2006, Exemple 1], avec $n_p = n_c = 1, N = 2, \rho = 1$ et

$$A_1 = [1.2]; A_2 = [1.5]; B_1 = B_2 = [1]; C_1 = [1]; C_2 = [0.5].$$

Le contrôleur par retour de sortie dynamique (2.80)-(2.81) est donné par

$$\begin{aligned} A_{c,1} &= [1]; A_{c,2} = [0.5]; B_{c,1} = [-0.05]; B_{c,2} = [-0.01]; \\ C_{c,1} &= [1]; C_{c,2} = [0.2]; D_{c,1} = [-1]; D_{c,2} = [-1]. \end{aligned}$$

Comme le souligne [MJ-JS3], l'inclusion $\{A_1, A_2\}$ est stable, avec $A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.05 & 1 \end{bmatrix}$ and $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.005 & 0.5 \end{bmatrix}$. Les résultats du problème d'optimisation 45 sont représentés sur la figure 2.12, en les comparant au cas sans stratégie anti-windup ($E_{aw,i} = 0$).

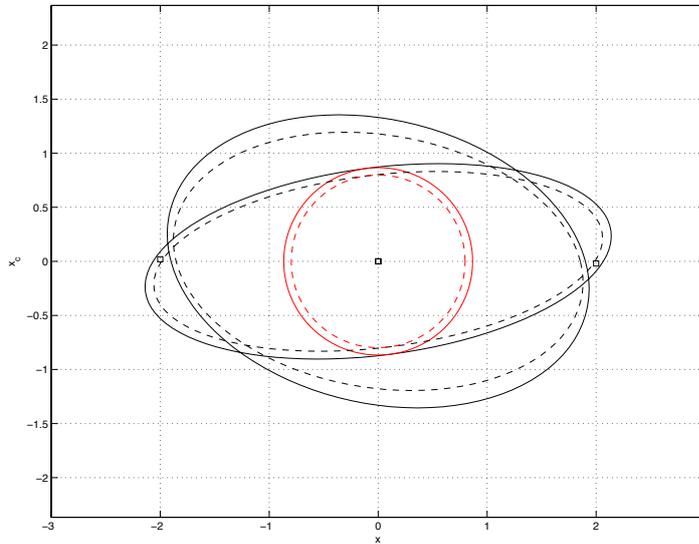


FIGURE 2.12 – Ellipsoïdes $\mathcal{E}(P_1)$ et $\mathcal{E}(P_2)$ en lignes noires, ellipsoïdes relatives au cas ($E_{aw,i} = 0$) en tirets noirs. Boules $\mathcal{E}(\beta I_2)$ dans les deux cas en rouge. Les carrés représentent les points d'équilibre du second mode pour $E_{aw,i} = 0$.

Tout d'abord on peut remarquer que sans gain anti-windup, il existe deux points d'équilibre instables $\pm \begin{pmatrix} -2 \\ 0.02 \end{pmatrix}$ pour le second mode qui limite le bassin d'attraction. Le paramètre β a été réduit de 18% en utilisant ce gain. La figure 2.13 représente diverses trajectoires ainsi que les zones de nullité de la zone morte : $\mathcal{S}(\{K_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \rho)$, de validité de la condition de

secteur modifiée par les gains $G_i : \mathcal{S}(\{G_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \rho)$. Deux familles de trajectoires sont proposées : elles partent de deux conditions initiales (indiquées par des \circ) $\xi(0) = \xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.35 \end{pmatrix}$ et $\xi(0) = \xi_2 = \begin{pmatrix} 1.926 \\ -0.16 \end{pmatrix}$. Deux trajectoires stables partant de ξ_2 , associées aux lois de commutation $\{1; 1; 1; 1; \dots\}$ et $\{2; 1; 2; 1; 2; 2; 1; \dots\}$, sont représentées. Cependant en partant de $\xi_1 \notin L_{V_{\max}}(1)$, la trajectoire générée par la loi de commutation $\{2; 1; 2; 1; 2; 2; 1; \dots\}$ est instable contrairement à celle engendrée par la loi $\{2; 2; 2; 2; \dots\}$.

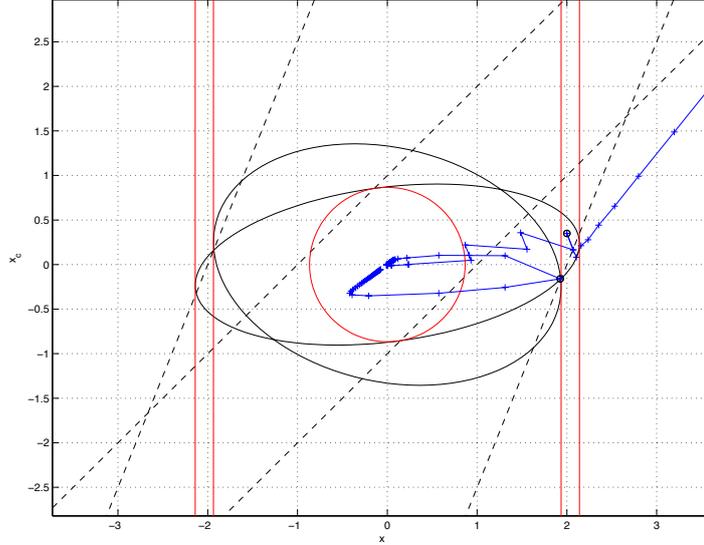


FIGURE 2.13 – $\mathcal{S}(\{G_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \rho)$ en lignes rouges. $\mathcal{S}(\{K_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \rho)$ en tirets noirs. Ellipsoïdes $\mathcal{E}(P_i)$, $i \in \mathcal{I}_N$ en lignes noires et la boule $\mathcal{E}(\beta I_2)$ en ligne rouge. Deux familles de trajectoires sont tracées en bleu.

Pour les lois de commutations faisant partie des commandes du système, on a le théorème 46 ainsi que le problème d'optimisation 47.

Théorème 46 (Voir [MJ-JS3]) *Supposons qu'il existe, pour tout $(i, j) \in \mathcal{I}_N^2$, des matrices $Z_i \in \mathbb{R}^{(m+nc) \times m}$, $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $J_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices symétriques définies positives $\Upsilon_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices diagonales définies positives $S_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et une matrice de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfaisant les inégalités bilinéaires*

$$\begin{bmatrix} J_i + J'_i - \sum_{j \in \mathcal{I}} \pi_{ji} \Upsilon_{ij} & \star & \star \\ W_i A'_i & W_i & \star \\ S_i B'_i + Z'_i R'_i & K_i W_i + Y_i & 2S_i + \text{He}(F Z_i) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (2.100)$$

et les inégalités linéaires

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{ij} & \star \\ J_i & W_j \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2, \quad (2.101)$$

et enfin les inégalités (2.98), alors le contrôleur conjoint anti-windup composé du gain commuté $E_{aw,i} = Z_i S_i^{-1}$ et de la loi de commutation

$$\sigma(k) = \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(\xi(k), i) \quad (2.102)$$

stabilise exponentiellement de manière locale le système (2.93) sur l'ensemble $L_{V_{\min}}(1) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(P_i)$, avec $P_i = W_i^{-1}$. \square

Problème d'optimisation 47

$\min_{W_i, Y_i, Z_i, S_i, J_i, \Upsilon_{ij}, \Pi, \beta_i} \sum_{j \in \mathcal{I}_N} \beta_j$
soumis aux contraintes (2.98)-(2.100)-(2.101) et

$$\begin{bmatrix} \beta_i I_n & I_n \\ I_n & W_i \end{bmatrix} > 0_{2n}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \quad (2.103)$$

Comme indiqué précédemment, une solution pour relaxer les BMI (2.100) est de faire une recherche en ligne sur un paramètre $1 > \gamma \geq 0$ et adapter la technique présentée dans [GC2006b]. Ainsi les BMI (2.100) sont à remplacer par les LMIs

$$\begin{bmatrix} J_i + J'_i - (\gamma \Upsilon_{ii} + (1 - \gamma) \Upsilon_{ij}) & \star & \star \\ W_i A'_i & W_i & \star \\ S_i B'_i + Z'_i R'_i & K_i W_i + Y_i & 2S_i + \text{He}(FZ_i) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2, \quad (2.104)$$

On reprend le même exemple que précédemment. Le cas où $E_{aw,i} = 0$ est représenté sur la figure 2.14 et le cas avec gain anti-windup commuté sur la figure 2.15.

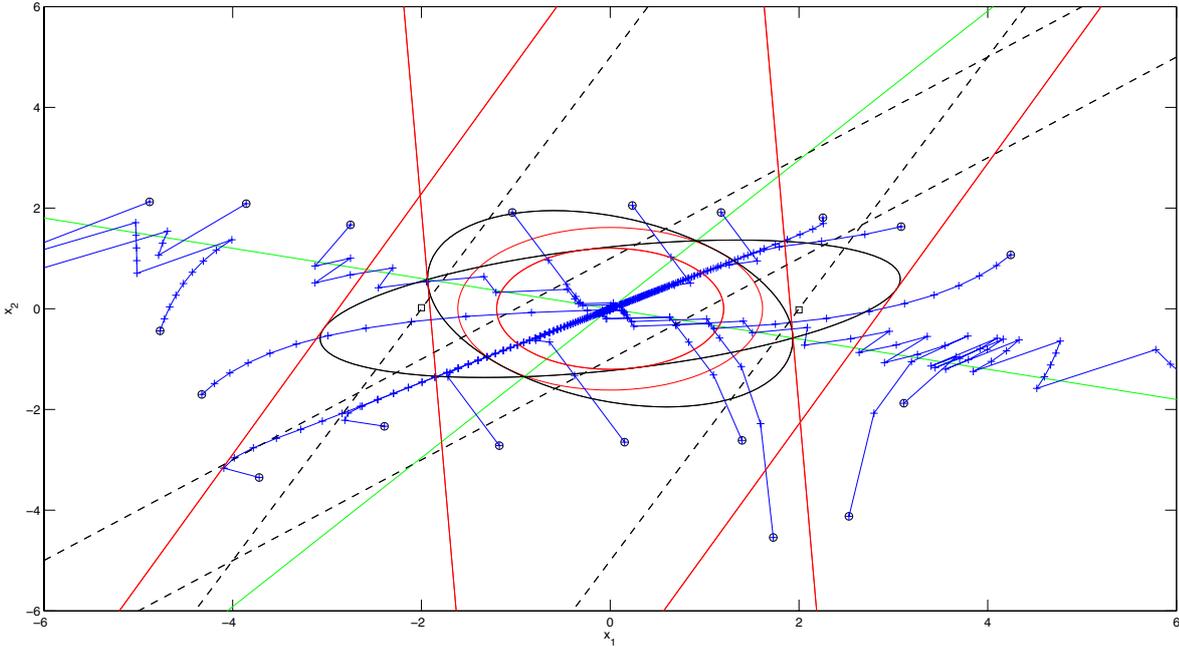


FIGURE 2.14 – $\mathcal{S}(\{G_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \rho)$ en lignes rouges. $\mathcal{S}(\{K_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \rho)$ en tirets noirs. Partition conique de l'espace d'état en vert. Ellipsoïdes $\mathcal{E}(P_i)$, $i \in \mathcal{I}_N$ en lignes noires et les boules $\mathcal{E}(\beta_i I_2)$ en lignes rouges. Les carrés représentent les points d'équilibre.

Analysons le cas de la figure 2.14. Il existe trois points d'équilibre : l'origine qui est stable et les points $\xi = \pm \begin{pmatrix} -2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ qui sont instables et associés au mode 2. On peut voir que les points d'équilibre instables appartiennent à la partition conique activant le mode 1. Ce ne sont donc

pas des points instables pour le système avec la loi de commutation imposée. Néanmoins cela limite l'ellipsoïde relative au mode 2. Plusieurs trajectoires sont tracées pour tenter d'avoir une allure du bassin d'attraction de l'origine.

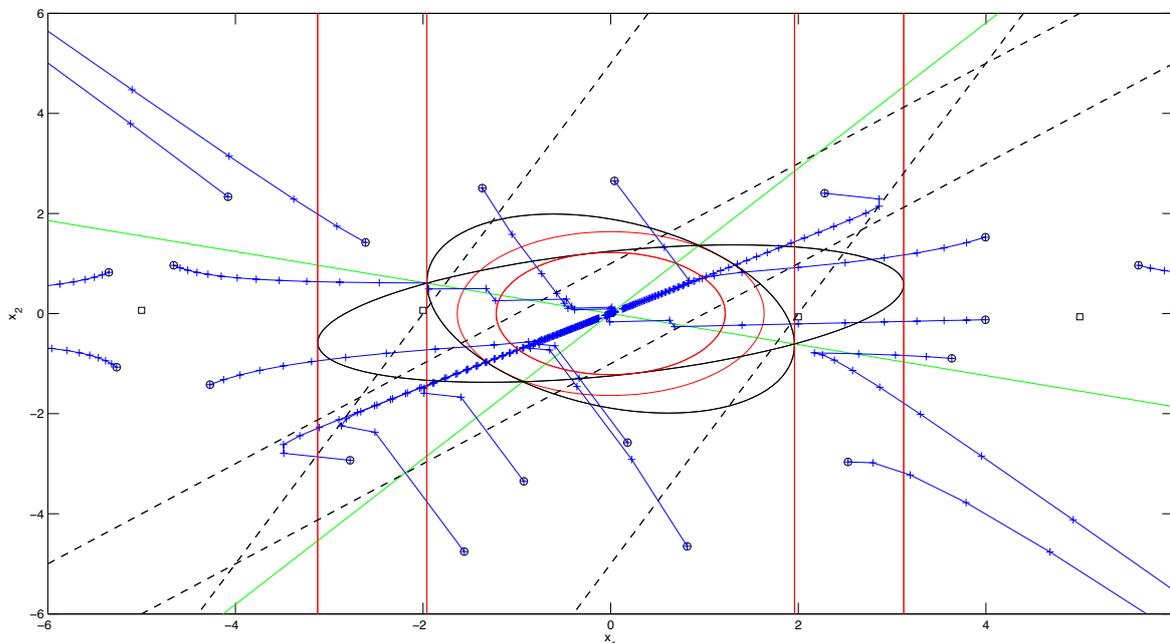


FIGURE 2.15 – $\mathcal{S}(\{G_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \rho)$ en lignes rouges. $\mathcal{S}(\{K_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \rho)$ en tirets noirs. Partition conique de l'espace d'état en vert. Ellipsoïdes $\mathcal{E}(P_i)$, $i \in \mathcal{I}_N$ en lignes noires et les boules $\mathcal{E}(\beta_i I_2)$ en lignes rouges. Les carrés représentent les points d'équilibre.

Sur la figure 2.15 où les gains commutés $E_{aw,i}$ sont donnés par le problème d'optimisation 47, on a cinq points d'équilibre. L'origine est stable. Le mode 2 a comme points d'équilibre $\xi = \pm \begin{pmatrix} -2 \\ 0.065 \end{pmatrix}$, qui appartiennent à la zone d'activation du mode 1 et donc ne sont pas points d'équilibre pour le système piloté par la loi de commutation. Les points d'équilibre du mode 1 sont $\xi = \pm \begin{pmatrix} -5 \\ 0.0636 \end{pmatrix}$ et appartiennent à la partition de leur activation. Ce sont des points d'équilibres instables pour le système piloté par la loi de commutation. L'amélioration due à l'introduction du gain commuté en terme de coût à minimiser n'est que de 3% car limitée par la présence des points d'équilibre du mode 2.

Désormais, si l'on change le contrôleur en choisissant

$$A_{c,1} = [1.1]; A_{c,2} = [-0.5]; B_{c,1} = [-0.05]; B_{c,2} = [-0.01];$$

$$C_{c,1} = [1]; C_{c,2} = [0.5]; D_{c,1} = [-1]; D_{c,2} = [-0.9],$$

qui implique que ni $A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.05 & 1.1 \end{bmatrix}$, ni $A_2 = \begin{bmatrix} 1.05 & 0.5 \\ -0.005 & -0.5 \end{bmatrix}$ ne sont de type Schur, l'amélioration du coût à minimiser $\beta_1 + \beta_2$ est de l'ordre de 92% avec l'introduction d'un gain anti-windup commuté.

2.4 Une approche par la théorie des ensembles invariants pour stabiliser les systèmes commutés

J'ai pu travailler avec Mirko Fiacchini depuis son séjour post-doctoral au CRAN. Nous avons utilisé l'approche par la théorie des ensembles pour étudier la stabilisabilité des systèmes commutés autonomes à temps discret. Les résultats ont mené aux articles [MJ-CI29] et [MJ-JI21].

La théorie des ensembles et l'invariance en contrôle et analyse des systèmes [BM2008] sont en grande partie fondées sur les prémices dues à l'article [Ber1972] et sur les fondements de la discipline proposés dans [GT1991, KG1998, Bla1999]. La relation entre contractivité et fonctions de Lyapunov polyédrales a été mise en valeur dans [Bla1994]. Les articles [MP1986, Bla1995] ont alors montré que l'existence d'une fonction de Lyapunov polyédrale est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle des systèmes.

Diverses définitions liées à la théorie des ensembles sont rappelés comme préliminaires, avec les notations usuelles de ce domaine. Soit $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$ et $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on note $D + E = \{z = x + y \in \mathbb{R}^n : x \in D, y \in E\}$, $D - E = \{x \in \mathbb{R}^n : x + E \subseteq D\}$, $\alpha D = \{\alpha x \in \mathbb{R}^n : x \in D\}$ et $MD = \{Mx \in \mathbb{R}^m : x \in D\}$. Pour un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\text{co}(D)$ représente l'enveloppe convexe de D , $\text{int}(D)$ son intérieur et ∂D sa frontière. L'ensemble \mathbb{B}^n est la sphère unitaire appartenant à \mathbb{R}^n .

Définition 48 Un ensemble- C est un ensemble compact et convexe qui contient l'origine dans son intérieur. Un ensemble Ω est un étoilé s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que toute combinaison convexe de x et x_0 appartient à Ω pour tout $x \in \Omega$. Un ensemble Ω est un ensemble- C^* s'il est compact et étoilé par rapport à l'origine appartenant à l'intérieur de Ω .

Définition 49 Pour un ensemble- C^* noté Ω , on définit la fonction gauge par

$$\Psi_{\Omega}(x) = \min_{\alpha} \{\alpha \in \mathbb{R} : x \in \alpha\Omega\}, \quad (2.105)$$

que l'on appelle fonction de Minkowski de Ω appliquée en x . [BM2008, Roc1970, Sch1993].

On considère le système autonome commuté à N modes

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k, \quad (2.106)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ et sans perte de généralité A_i ($i \in \mathcal{I}_N$) non singulière [MJ-CI29].

La question que nous avons étudiée est de savoir si le système (2.106) est stabilisable par un choix de la loi de commutation. Comme nous l'avons abordé ci-dessus, ce problème a trouvé plusieurs conditions suffisantes, avec la stratégie du min-switching [WD1997] ou encore [LA2003]. Nous proposons d'une part des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisabilité et d'autre part des conditions nécessaires pour sa non stabilisabilité. Ces conditions sont fondées sur deux algorithmes que l'on présente désormais.

Algorithme 50 Détermination d'un ensemble C^* contractif pour le système (2.106).

- **Initialisation** : Soit un ensemble C^* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, posons $\Omega_0 = \Omega$ et $k = 0$;
- **Itération** pour $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Omega_{k+1}^i &= A_i^{-1}\Omega_k, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \\ \Omega_{k+1} &= \bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} \Omega_{k+1}^i; \end{aligned} \quad (2.107)$$

– **Stop** si $\Omega \subseteq \text{int}\left(\bigcup_{j \in \mathcal{I}_{k+1}} \Omega_j\right)$; notons $\check{n} = k + 1$ et

$$\check{\Omega} = \bigcup_{j \in \mathcal{I}_{\check{n}}} \Omega_j. \quad (2.108)$$

Des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisabilité du système (2.106) sont proposées dans le théorème suivant

Théorème 51 (Voir [MJ-JI21] et [MJ-CI29]) *Il existe une fonction de Lyapunov pour le système commuté (2.106) si et seulement si l'algorithme 50 se termine en un nombre fini d'itérations \check{n} .* \square

Remarque 52 *Il faut bien noter qu'à proprement parler, la fonction de Lyapunov n'est pas strictement décroissante. En fait elle est non croissante sur les $\check{n} - 1$ premiers pas et strictement décroissante au \check{n} -ième pas. Voir pour plus de détails la preuve dans les articles [MJ-JI21] et [MJ-CI29].*

Ce théorème admet la variante suivante.

Théorème 53 (Voir [MJ-JI21] et [MJ-CI29]) *Il existe une fonction de Lyapunov pour le système (2.106) si et seulement s'il existe un ensemble- C^* dont la fonction de Minkowski est une fonction de Lyapunov pour le système.* \square

Le théorème 51 associé à l'algorithme 50 en plus de répondre à la question de la stabilisabilité du système (2.106) permet aussi d'exhiber une loi de commutation permettant de stabiliser ce système. Ce résultat est indiqué à la proposition 54.

Proposition 54 *Si l'algorithme 50 se termine en un temps fini \check{n} alors $\Psi_{\check{\Omega}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour le système commuté (2.106). En posant*

$$\check{\Sigma}(x) = \arg \min_{(i,k)} \{\Psi_{\Omega_k^i}(x) : i \in \mathcal{I}_N, k \in \mathcal{I}_{\check{n}}\} \subseteq \mathcal{I}_N \times \mathcal{I}_{\check{n}}, \quad (2.109)$$

toute loi de commutation définie par

$$(\check{\sigma}(x), \check{k}(x)) \in \check{\Sigma}(x), \quad (2.110)$$

stabilise le système et

$$\begin{aligned} \Psi_{\check{\Omega}}(x_{\check{k}(x)}^{\check{\sigma}}(x)) &\leq \check{\lambda} \Psi_{\check{\Omega}}(x), \\ \Psi_{\check{\Omega}}(x_j^{\check{\sigma}}(x)) &\leq \Psi_{\check{\Omega}}(x), \quad \forall j \in \mathcal{I}_{\check{k}(x)}, \end{aligned}$$

avec $\check{\lambda} = \check{\lambda}(\Omega) = \min_{\lambda} \{\lambda \geq 0 : \Omega \subseteq \lambda \check{\Omega}\}$.

La condition proposée dans le théorème 51 fait intervenir un nombre fini d'itérations \check{n} . Cependant ce nombre peut être extrêmement grand. Il peut être utile de tester la non stabilisabilité. Le second algorithme donné est une procédure cherchant à déterminer s'il n'existe pas de loi de commutation stabilisant le système (2.106).

Algorithme 55 *Test de non stabilisabilité du système (2.106)*

- **Initialisation** : soit un ensemble- C^* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, posons $\Omega_0 = \hat{\Omega}_0 = \Omega$ et $k = 0$;
- **Itération** pour $k \geq 0$ calculer Ω_{k+1}^i et Ω_{k+1} comme dans la relation (2.107) et définissons

$$\hat{\Omega}_{k+1} = \left(\bigcup_{j \in \mathcal{I}_{k+1}} \Omega_j \right) \cup \Omega. \quad (2.111)$$

– **Stop** si $\Omega_{k+1} \subseteq \hat{\Omega}_k$; posons $\hat{n} = k$ et $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_{\hat{n}}$.

On a alors le théorème.

Théorème 56 (Voir [MJ-JI21]) *Si l’algorithme 55 se termine avec \hat{n} fini, alors il n’existe pas de loi de commutation stabilisant le système (2.106).* \square

Afin d’illustrer ces résultats, prenons différents exemples numériques académiques. Soit le système avec $N = n = 2$ et

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ -1 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & -2 \\ 0 & -1.2 \end{bmatrix}.$$

Ni A_1 , ni A_2 ne sont de type Schur. Il n’existe donc pas de loi de commutation constante qui stabilise le système. Si on applique l’algorithme 50 à cet exemple, en prenant $\Omega = \mathbb{B}^2$ la boule unité, on obtient : Ω_1 l’union de ellipses $A_1^{-1}\mathbb{B}^2$ et $A_2^{-1}\mathbb{B}^2$ représentée sur la figure 2.16. On voit clairement que $\mathbb{B}^2 \not\subseteq \Omega_1$ et on passe à l’étape suivante. On a alors l’ensemble $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_2} \Omega_k$ donné par l’union de six ellipsoïdes ($A_i^{-1}\mathbb{B}^2$ et $A_j^{-1}A_i^{-1}\mathbb{B}^2, \forall (i, j) \in \mathcal{I}_2 \times \mathcal{I}_2$) et représenté figure 2.16. Encore une fois, $\mathbb{B}^2 \not\subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{I}_2} \Omega_k$. Ainsi de suite, jusqu’à l’itération 4. La figure 2.17 représente le résultat de cette itération et on visualise bien que $\mathbb{B}^2 \subset \bigcup_{k \in \mathcal{I}_4} \Omega_k$. La trajectoire tracée sur la figure 2.17 est bien associée à une fonction de Lyapunov décroissante (au moins tous les 4 pas), voir figure 2.18.

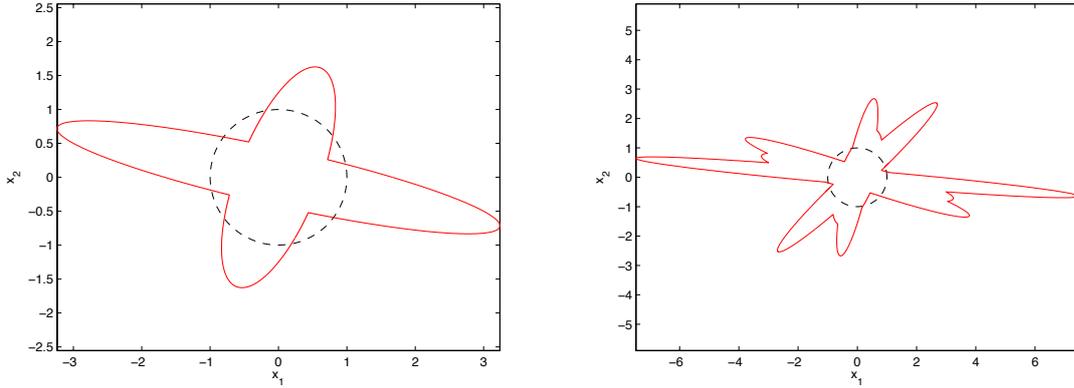


FIGURE 2.16 – La boule \mathbb{B}^2 en pointillés noirs et les espaces Ω_1 (en rouge à gauche) et $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_2} \Omega_k$ (en rouge à droite).

Il est aussi possible de considérer un autre ensemble pour l’initialisation de l’algorithme. Si l’on prend un carré, on obtient la figure 2.19, qui donne un résultat similaire.

Il est aussi intéressant de comparer notre méthode à la méthode de stabilisation fondée sur des inégalités de Lyapunov-Metzler, qui sont des conditions suffisantes de stabilisation. On considère l’exemple $N = n = 2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1.01 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1.01 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Pour cet exemple, nous avons testé avec un pas de grille fin qu’il n’existe pas numériquement de solution aux inégalités de Lyapunov-Metzler. La technique fondée sur ces inégalités ne peut pas aboutir. Pourtant notre approche fonctionne sur cet exemple et l’algorithme 50 s’arrête

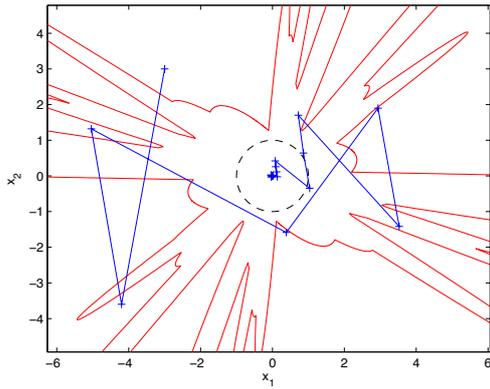


FIGURE 2.17 – La boule \mathbb{B}^2 en tirets et $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_4} \Omega_k$ en trait plein. La trajectoire partant de $x_0 = (-3, 3)^T$ en ligne étoilée.

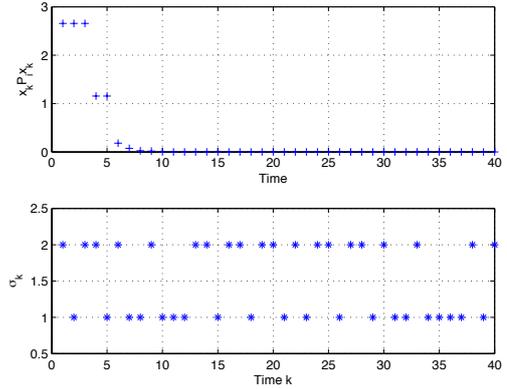


FIGURE 2.18 – Fonction de Lyapunov (décroissante tous les 4 instants au moins) et loi de commutation en fonction du temps.

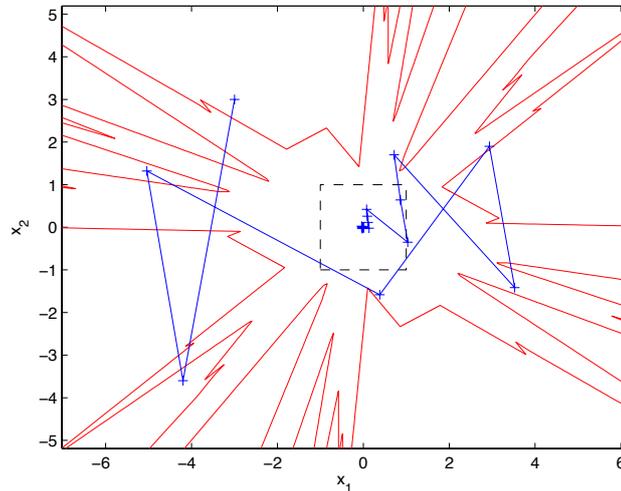


FIGURE 2.19 – Carré unité en tirets et $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_4} \Omega_k$ en ligne pleine. La trajectoire partant de $x_0 = (-3, 3)^T$ est en ligne étoilée.

à la troisième itération, comme le montre la figure 2.20. La trajectoire (voir figures 2.20 et 2.21) tend bien vers l'origine.

D'autres exemples en dimension 2 sont donnés dans l'article [MJ-JI21]. Nous présentons ici rapidement un exemple en dimension $n = 3$, avec $N = 2$ et dont aucun mode n'est de type Schur :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ -1 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & -2 \\ 0 & 0 & -1.2 \end{bmatrix}.$$

On représente en 3 dimensions les espaces Ω_1 , $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_2} \Omega_k$ et $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_3} \Omega_k$ respectivement sur les figures 2.22, 2.23 et 2.24. On voit bien apparaître la boule unité noire \mathbb{B}^2 sur les deux figures 2.22 et 2.23. La boule unité n'est incluse ni dans Ω_1 , ni dans $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_2} \Omega_k$. Il faut atteindre l'étape 3 pour que la boule noire disparaisse.

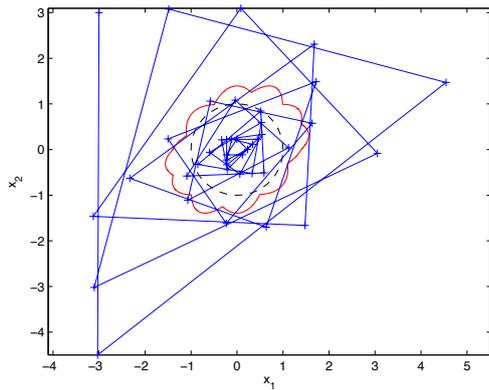


FIGURE 2.20 – La boule \mathbb{B}^2 en tirets et $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_3} \Omega_k$ en ligne pleine. La trajectoire partant de $x_0 = (-3, 3)'$ est en ligne étoilée.

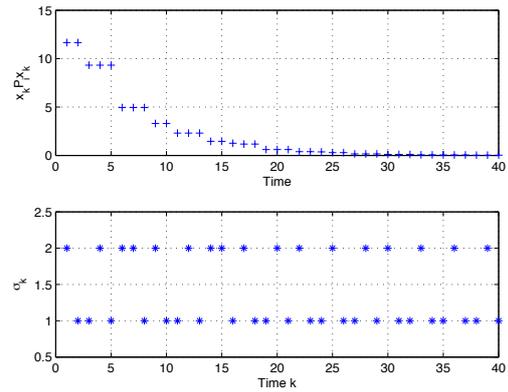


FIGURE 2.21 – Fonction de Lyapunov (décroissante tous les 3 instants au moins) et loi de commutation en fonction du temps.

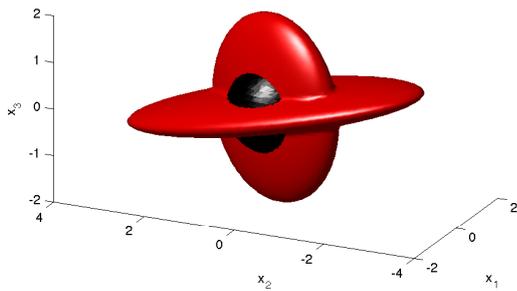


FIGURE 2.22 – Ensemble Ω_1 en rouge et boule unité \mathbb{B}^2 en noire.

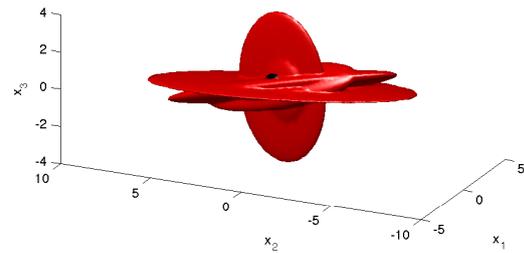


FIGURE 2.23 – Ensemble $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_2} \Omega_k$ en rouge et boule unité \mathbb{B}^2 en noire.

Pour conclure cette partie, j'indique que les travaux portant sur la synthèse conjointe de la commande linéaire et de la loi de commutation sont en cours afin de compléter ces résultats.

2.5 Conclusion

La recherche sur les systèmes commutés a atteint un degré de maturité avancé. Je me suis cependant toujours attaché à aborder ce domaine avec des points de vue relativement originaux. Cet état d'esprit m'a permis d'obtenir quelques résultats, présentés ci-dessus, qui consolident la connaissance et la maîtrise de ces systèmes. Il ressort clairement que je souhaite continuer mon travail sur cette thématique en me focalisant de plus en plus sur les systèmes commutés à modes non linéaires.

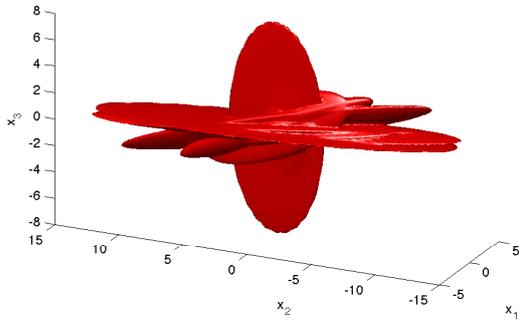


FIGURE 2.24 – Ensemble $\bigcup_{k \in \mathcal{I}_3} \Omega_k$ en rouge et boule unité \mathbb{B}^2 en noire.

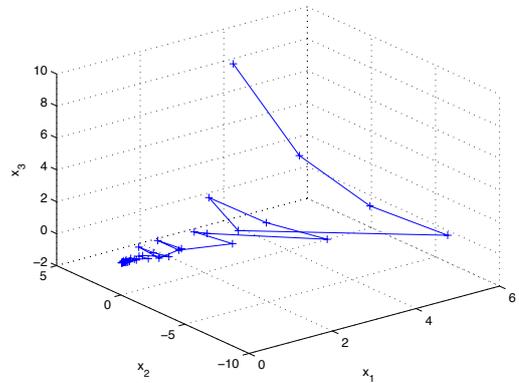


FIGURE 2.25 – Trajectoire partant du point $x_0 = (3, 1, 10)'$.

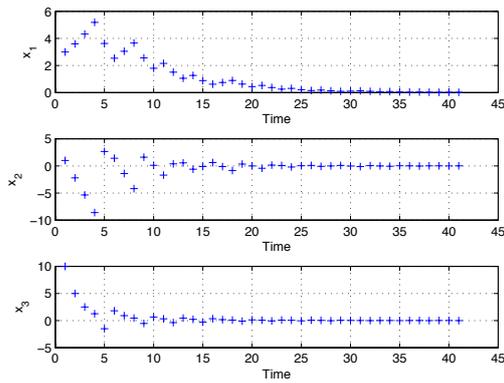


FIGURE 2.26 – Composantes de la trajectoire partant du point $x_0 = (3, 1, 10)'$ en fonction du temps.

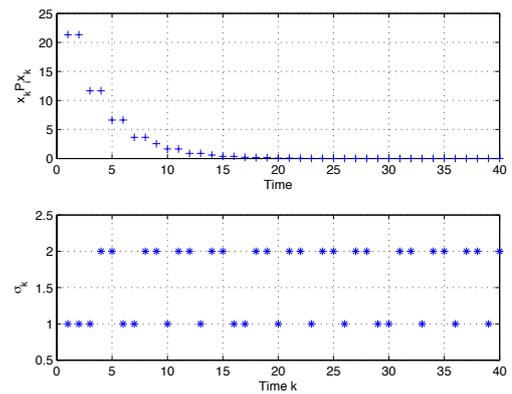


FIGURE 2.27 – Fonction de Lyapunov et loi de commutation en fonction du temps.

Chapitre 3

Perspectives

Les chapitres précédents ont présenté les principaux résultats obtenus dans ma recherche ainsi que plusieurs extensions possibles. Ce chapitre s'attache à formaliser les principales directions de recherche des quelques années à venir. Elles s'appuient naturellement sur l'expertise acquise sur les sujets abordés jusqu'à présent. Il est possible de regrouper ces sujets dans différentes grandes familles, qui constitueront les sections de ce chapitre :

- Extensions des travaux sur la fonction de Lyapunov Lur'e à temps discret ;
- Les inégalités de Lyapunov-Metzler ;
- Les équations généralisées de Riccati de grandes dimensions.

3.1 Extensions des travaux sur la fonction de Lyapunov Lur'e à temps discret

3.1.1 Etude des systèmes de Lur'e à temps continu à partir de leur discrétisation

La première perspective porte sur une question ouverte qui est induite des travaux menés lors de la thèse de Carlos Alberto Cavichioli Gonzaga [Gon2012]. Effectivement dans cette thèse, il a été montré que, pour un problème de Lur'e à temps discret, l'introduction d'une nouvelle fonction de Lyapunov dépendante de la non-linéarité de type secteur permet de travailler avec des lignes de niveau qui peuvent être non connexes et non convexes. Dans le cas des systèmes de Lur'e avec des saturations additionnelles, la ligne de niveau unitaire donne une estimée du bassin d'attraction de l'origine. La non connexité du bassin d'attraction de l'origine pour les systèmes non-linéaires est une particularité notable dans le cadre du temps discret, étant donné que la trajectoire en temps discret est composée d'un ensemble de points et non d'une courbe continue. On effectue des sauts d'un état au suivant, ce qui permet de passer d'un sous-ensemble à un autre bien qu'ils ne soient pas connexes. Cela n'est évidemment pas le cas en temps continu, cadre dans lequel il doit exister une trajectoire continue reliant n'importe quel point du bassin d'attraction et l'origine. Cela génère ainsi la question de l'utilisation de ces résultats valides pour le temps discret pour des systèmes continus qui sont discrétisés.

En pratique, les systèmes étudiés sont issus de processus physiques à temps continu qui sont discrétisés pour obtenir une modélisation sous la forme d'un système à temps discret, sur lequel il est possible d'utiliser les outils cités précédemment. L'intérêt de notre recherche n'est pas de proposer une n -ième approche pour l'étude des systèmes continus discrétisés, mais de mieux comprendre les conséquences d'une estimée non connexe du bassin d'attraction de l'origine du système discrétisé en termes de bassin d'attraction de l'origine pour le système continu associé.

Bien que les littératures des systèmes non-linéaires en temps continu et en temps discret soient matures, il existe peu de contributions sur la prise en compte de cette discrétisation, principalement en raison au fait que les phénomènes en jeu sont difficiles et délicats à traiter. On notera cependant les contributions [NTS1999, NTK1999, LNA2006] qui utilisent une fonction de Lyapunov lipschitzienne. Ces résultats ont été utilisés pour la commande robuste dans [PAABLL2008]. La relation de passage entre le domaine du temps continu et le domaine du temps discret est déjà difficile. Effectivement, elle fait intervenir une exponentielle complexe et il n'est pas possible de l'exploiter directement. Plusieurs approximations sont possibles pour cette exponentielle : chacune étant dédiée à la *conservation* ou à l'*invariance d'une propriété ou d'une caractéristique*. On peut citer l'approximation rectangulaire de l'intégrale (ou méthode d'Euler), l'approximation trapézoïdale de l'intégrale (ou méthode de Tustin, approximation de Padé d'ordre 1, transformation bilinéaire) qui conserve la stabilité des systèmes ; mais aussi les techniques d'invariance de la réponse impulsionnelle, de la réponse indicielle, ou bien encore des pôles et zéros. Dans le cas des systèmes non-linéaires, ces approximations ne sont plus valides. Cela rend le problème encore plus difficile.

Se pose alors la question suivante. En considérant un système de Lur'e à temps continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(y(t)), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

que l'on discrétise avec une période d'échantillonnage fixe T , on obtient le système discrétisé exact

$$x_{k+1} = F_T^e(x_k) = x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} (Ax(\tau) + B\varphi(Cx(\tau))) d\tau, \quad (3.2)$$

dont on ne peut pas avoir – généralement – d'expression analytique exacte. Une discrétisation approchée en appliquant, par exemple, la méthode d'Euler mène à

$$x_{k+1} = F_T^a(x_k) = A_d x_k + B_d \varphi_d(C_d x_k), \quad (3.3)$$

avec $A_d = I_n + TA$, $B_d = B$, $C_d = C$ et $\varphi_d(\cdot) = T\varphi(\cdot)$ (C 'est un choix qui n'est pas unique). Il est alors possible d'utiliser les résultats de la thèse [Gon2012] afin de garantir la stabilité (globale ou locale) de ce système à temps discret. Mais comment faire pour obtenir de l'information sur la stabilité (globale ou locale) et éventuellement une estimée du bassin d'attraction à partir de l'estimée non-connexe du temps discret ? L'objectif de la thèse de Julien Louis, que je co-dirige est de proposer des réponses rigoureuses à cette question.

Afin d'expliquer le principe de notre approche et situer les prémices de nos réflexions sur le sujet [Lou2013, MJ-CS1], nous rappelons un résultat mentionné dans [LNA2006].

Proposition 57 *Soit le système discret (3.2), la période d'échantillonnage $T > 0$, et $x_k = x(kT) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$.*

– Si $\exists \tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$ tel que les trajectoires du système discrétisé exact (3.2) vérifient :

$$\|x_k\| \leq \tilde{\beta}(\|x_0\|, kT), \quad (3.4)$$

– Si $\exists \kappa \in \mathcal{K}_\infty$ tel que la solution du système en temps continu (3.1) vérifie :

$$\|x(t) - x_k\| \leq \kappa(\|x_k\|), \quad \forall t \in [kT; (k+1)T], \quad (3.5)$$

Alors il existe $\beta \in \mathcal{KL}$ tel que les trajectoires du système à temps continu vérifient $\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t)$, $\forall t \geq 0$. \square

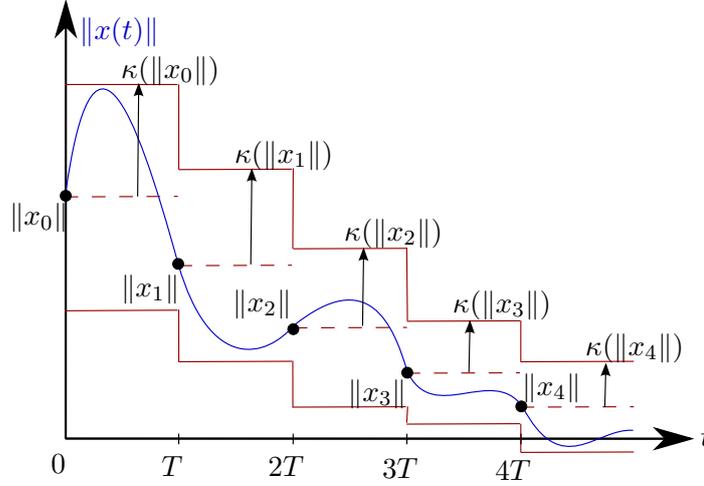


FIGURE 3.1 – Principe de la proposition 57.

Le principe de la proposition 57 est représenté sur la figure 3.1. L'idée est alors d'appliquer les résultats sur la stabilité du système de Lur'e discrétisé approché, d'assurer la stabilité du système de Lur'e discrétisé exact par un argument de faible écart entre les modèles discrétisés (validant la notion d'approximation d'Euler) et enfin de maîtriser l'écart entre modèle discrétisé exact et modèle continu à l'aide du Lemme de Gronwall.

Nous définissons alors différents ensembles.

Définition 58 Le domaine où vit la trajectoire en temps continu entre deux échantillons x_k et x_{k+1} est défini par : $\mathcal{B}(x_k) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \|\tilde{x} - x_k\| \leq \kappa(\|x_k\|)\}$.

Définition 59 Le domaine où vivent toutes les trajectoires en temps continu dont la condition initiale x_k appartient à une ligne de niveau $L_V(\cdot)$ est définie par : $\mathcal{A}(\gamma) = \bigcup_{y \in L_V(\gamma)} \mathcal{B}(y)$.

Pour le système de Lur'e discrétisé approché, la valeur de la fonction de Lyapunov décroissant avec le temps, les lignes de niveau $L_V(\cdot)$ forment une suite d'inclusion d'ensembles tendant vers le singleton origine. La suite d'ensembles $\mathcal{A}(\cdot)$, construite à partir des approximations de modèle et des limites de leur validité assure la convergence à l'origine du système de Lur'e à temps continu, comme le formalise la proposition suivante et dont une illustration est présentée à la figure 3.2.

Proposition 60 Soit la période d'échantillonnage $T > 0$ et $L_V(V(x_k; \varphi_d(C_d x_k)))$ la ligne de niveau déterminée pour le système de Lur'e discrétisé approché. Le domaine $\mathcal{A}(V(x_k; \varphi_d(C_d x_k)))$ vérifie les propriétés suivantes :

- $L_V(V(x_k; \varphi_d(C_d x_k))) \subset \mathcal{A}(V(x_k; \varphi_d(C_d x_k)))$;
- $\mathcal{A}(\cdot)$ est bornée, car $\kappa(\cdot)$ est radialement non bornée ;
- $x(t) \in \mathcal{A}(V(x_k; \varphi_d(C_d x_k))), \forall t \geq kT$;
- $\mathcal{A}(V(x_{k+1}; \varphi_d(C_d x_{k+1}))) \subset \mathcal{A}(V(x_k; \varphi_d(C_d x_k)))$;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(V(x_k; \varphi_d(C_d x_k))) = \{0\}$. □

Ce début de solution doit être précisé et complété. En particulier l'influence de la méthode de discrétisation sur l'écart entre modèle discret approché et modèle discret exact est encore

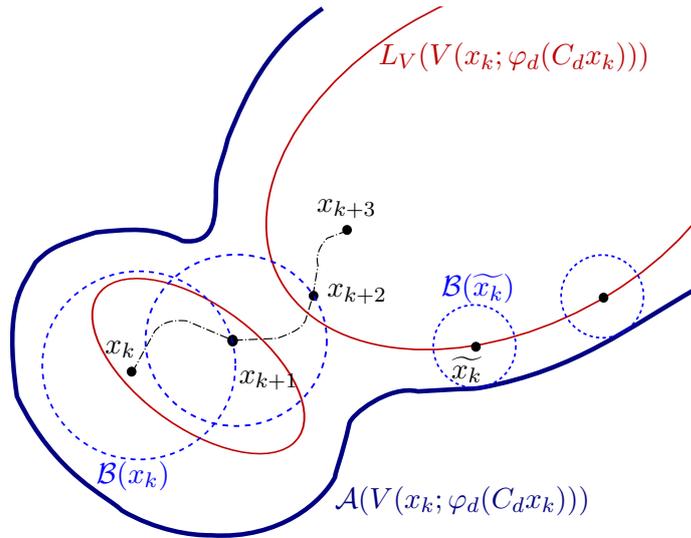


FIGURE 3.2 – Illustration du comportement d’une trajectoire continue et de son échantillonnée en fonction des différents ensembles $L_V(\cdot)$ et $\mathcal{A}(\dots)$.

un problème largement ouvert. L’approximation effectuée permettant d’obtenir un problème de Lur’e à temps discret est la méthode d’Euler explicite. Il faut encore étudier des méthodes comme la méthode d’Euler implicite, ou la méthode de Runge-Kutta.

Evidemment le descriptif de notre approche porte sur l’étude de la stabilité comme premier élément et il faudra aussi considérer, une fois cette étape mûre, les aspects de commande pour l’optimisation comme par exemple augmenter la taille du bassin d’attraction dans le cas de la stabilité locale. Notamment il faudra proposer de nouvelles classes de commande.

Nous aimerions aussi adapter ces résultats au cas de la discrétisation des systèmes continus commutés. La commutation rend encore plus complexe la question. Notons aussi que même dans le cas des systèmes commutés linéaires, l’invariance de certaines propriétés n’est pas si évidente. Notamment, la méthode de Tustin appliquée sur chaque mode continu ne permet plus l’invariance de la stabilité pour le système commuté en temps discret. Par exemple discrétiser un système commuté stable en temps continu peut mener à un système commuté à temps discret instable [The2005, Section 3.5]. Certains résultats récents proposent une invariance de stabilité par l’approximation de Padé pour des fonctions de Lyapunov quadratiques (non-commutées) [RCS2011, SCSS2011, SRCS2013] mais qui sont conservatives à cause de la classe réduite des fonctions de Lyapunov considérées. De la même manière, l’invariance des performances formulées comme un critère quadratique, ou une norme de la sortie peuvent être réalisées pour un système linéaire invariant en temps continu [CF1995, Chapitre 12], mais il n’existe pas de résultat dans le cas d’un système commuté discrétisé.

3.1.2 Fonction de Lyapunov Lur’e avec non-linéarité de type secteur local.

Dans la thèse de Julien Louis, nous souhaitons aussi étendre les résultats de la thèse de Carlos Alberto Cavichioli Gonzaga sur un autre aspect. Mise à part la saturation additionnelle, les problèmes de Lur’e à temps discret que nous traitons jusqu’à présent comportaient uniquement des non-linéarités vérifiant *globalement* une condition de type secteur conique. Ce point est important dans l’établissement de la candidature de la fonction proposée comme fonction de Lyapunov. De manière technique, la présence de la non-linéarité dans la fonction de Lyapunov

implique l'apparition des valeurs de la non-linéarité en deux états consécutifs dans la différence des fonctions de Lyapunov. Selon l'approche considérée avec l'utilisation des conditions de type secteur, il faut alors exprimer les conditions de type secteur pour les non-linéarités aux deux états consécutifs. Dans le cas où la non-linéarité vérifie globalement la condition de secteur conique, elles sont vérifiées pour toutes les valeurs de l'état. Néanmoins ce n'est clairement pas le cas quand la non-linéarité ne vérifie que localement la condition de secteur conique. Il faut s'assurer que la dynamique non-linéaire mènera à partir d'un état donné à un état suivant qui appartient à la zone où la condition de secteur locale est vérifiée.

Si l'on prend en compte un support polyédral du type [TPG2006, Lemma 1] pour assurer une condition de secteur local, les outils devront faire intervenir de savantes contraintes couplées sur des polyèdres et des lignes de niveau.

Un défi de la thèse de Julien Louis sera de relever cette contrainte et obtenir une fonction de Lyapunov, localement candidate, qui soit fonction d'une non-linéarité vérifiant *localement* une condition de type secteur conique. Typiquement ce serait le cas d'un problème où la non-linéarité serait une saturation ou une zone morte. Excepté les travaux [CL2003, HTZ2006], qui utilisent une représentation polytopique de la saturation et une fonction de Lyapunov quadratique mais paramétrée par la partition d'état liée à cette expression polytopique, seule la contribution [DHTZ2009] utilise une quadratique sur un état augmenté contenant l'état et la non-linéarité en utilisant la monotonie de la saturation ou zone morte.

Une telle avancée permettra d'ouvrir tout un champ de recherche dépassant les fonctions de Lyapunov quadratiques pour les systèmes linéaires à temps discret avec des non-linéarités non nécessairement monotones vérifiant uniquement localement une condition de type secteur conique.

Un axe important sera d'étendre ce résultat à propos de la stabilité (globale ou locale) à des problèmes de performance. En pratique, les problèmes d'optimisation de performance se modélisent par un critère à minimiser et généralement une fonction de Lyapunov est utilisée pour fournir un majorant de ce critère : plus précisément c'est la valeur initiale de la fonction de Lyapunov qui majore ce critère. C'est vrai tant pour la commande linéaire quadratique, la commande prédictive, la commande associée à un gain \mathcal{L}_2 induit. Étendre la classe des fonctions de Lyapunov en intégrant cette non-linéarité pourra plus que certainement améliorer les résultats. Par exemple, il serait intéressant de comparer un tel résultat avec ceux proposés dans [Goe2005], où le problème de la commande linéaire quadratique pour les systèmes saturés est étudié, que le critère comporte la saturation ou non.

3.2 Les inégalités de Lyapunov-Metzler

L'étude des inégalités de Lyapunov-Metzler est pour moi la concrétisation du rapprochement entre les deux piliers de mon activité de recherche que sont les inégalités généralisées de Riccati et les systèmes commutés. Cette étude constitue en ce qui me concerne une priorité essentielle dans mon activité de recherche dans les prochaines années. Nous rappelons ici que les inégalités de Lyapunov-Metzler font apparaître les composantes d'une matrice de Metzler $\Pi = [\pi_{ij}]_{i,j \in \{1, \dots, N\}^2} \in \mathcal{M}$, où $\mathcal{M} = \{\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}, \pi_{ij} \geq 0, \forall i \neq j\}$, dont les termes hors diagonaux sont positifs ou nuls.

Pour le temps continu, on ajoute la contrainte

$$\mathcal{M}_c = \left\{ \Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}, \pi_{ij} \geq 0, \forall i \neq j; \sum_{i \in \{1, \dots, N\}} \pi_{ij} = 0, \forall j \in \{1, \dots, N\} \right\}, \quad (3.6)$$

et l'inégalité de Lyapunov-Metzler est de la forme (avec $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ($i \in \{1, \dots, N\}$))

$$A'_i P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \{1, \dots, N\}} \pi_{ji} P_j < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.7)$$

Pour le temps discret, on ajoute la contrainte

$$\mathcal{M}_d = \left\{ \Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}, \pi_{ij} \geq 0, \forall i \neq j; \sum_{i \in \{1, \dots, N\}} \pi_{ij} = 1, \forall j \in \{1, \dots, N\} \right\}, \quad (3.8)$$

et l'inégalité de Lyapunov-Metzler est de la forme (toujours avec $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ($i \in \{1, \dots, N\}$))

$$A'_i \left(\sum_{j \in \{1, \dots, N\}} \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.9)$$

Plusieurs directions sont développées.

3.2.1 Linéarisation des inégalités de Lyapunov-Metzler

Il est important de noter que les équations de Lyapunov-Metzler proviennent de la littérature des systèmes stochastiques (plus exactement des systèmes à sauts Markoviens) qui semble avoir été introduite dans l'article [KL1961]. La matrice de Metzler est la matrice de probabilité des transitions d'un mode à l'autre. Cela explique les différences de contraintes sur la somme des termes d'une colonne. On pourra voir les références suivantes pour plus de détails sur ce domaine non traité ici : [Won1968, Won1970, MB1985, Mar1990, AKFJ1994, AKFJ1995, FJAK1996a, CFM2005, DMS2006, DMS2010, CFT2013]. Dans ce cadre-là, la matrice de Metzler est fixe et les couplages sont uniquement linéaires entre les matrices P_i . La résolution des inégalités de Lyapunov-Metzler est alors aisée avec différentes méthodes numériques.

En revanche, tout se complique lorsque l'on rencontre les inégalités de Lyapunov-Metzler dans le cas de la stabilisation des systèmes commutés à l'aide de la loi de commutation [GC2006a, GC2006b, Ger2010]. Dans ce cadre, la stabilisabilité par la loi de commutation est assurée s'il existe une matrice de Metzler et une collection de matrices définies positives vérifiant les inégalités de Lyapunov-Metzler. La matrice de Metzler est alors une variable et non plus une donnée. Cela engendre des termes quadratiques en les variables et ces inégalités deviennent des inégalités de type Riccati ! Elles présentent cependant un exotisme tout particulier, puisque le couplage quadratique se fait entre des scalaires (coefficients de la matrice de Metzler) et des matrices définies positives. Elles rentrent aussi dans la catégorie des inégalités matricielles bilinéaires (BMI).

A ma connaissance il n'existe pas de méthode dans la littérature pour résoudre ce type d'inégalité dans sa généralité. Citons néanmoins une approche par *recherche en ligne* proposée initialement dans [GC2006a, GC2006b]. La méthode consiste en un nombre augmenté d'inégalités linéaires, qui ne font intervenir que deux matrices P_i (et non toutes) et un seul scalaire fixé $\gamma \geq 0$. Si ces inégalités admettent une solution, alors il est possible de construire une matrice de Metzler avec ce scalaire γ , dans le cas contraire, il faut modifier la valeur fixée de γ . Bien que cette méthode permette de trouver généralement des solutions numériques : c'est d'ailleurs cette méthode que nous utilisons dans nos contributions [MJ-CI26, MJ-JI20], elle est conservative. L'objectif ici est de mettre à profit mon expertise sur les équations de Riccati afin de proposer une linéarisation des inégalités de Lyapunov-Metzler, qui bien qu'elle ne soit pas équivalente à la forme bilinéaire, permette de considérer l'ensemble de la classe des matrices de Metzler et non une restriction dépendant d'un faible nombre de paramètres.

Le principe de linéarisation que je voudrais proposer est fondé sur une reformulation des inégalités de Lyapunov-Metzler en une forme traitable avec le lemme de Finsler [dOS2001]. Ce lemme permettra de séparer les variables de natures différentes (coefficients de la matrice de Metzler et matrices de Lyapunov) par l'introduction de nouvelles matrices, qui sont des multiplieurs. La linéarisation sera alors possible en choisissant judicieusement ces multiplieurs en association avec des changements de variables.

Les premiers tests numériques sont particulièrement encourageants vis-à-vis des exemples de la littérature.

3.2.2 Discussion sur les possibles développements de cette linéarisation

L'esquisse de résultat de linéarisation proposé au paragraphe 3.2.1 permet d'ouvrir tout un vaste domaine de recherche pour un outil fondamental dans le domaine de la stabilisation des systèmes commutés, mais appelle avant tout une discussion.

Comme il a été précisé précédemment, la technique de linéarisation à l'aide du lemme de Finsler doit encore être raffinée afin d'être optimisée et éviter une recherche en ligne des paramètres de la matrice constante des multiplieurs considérés. Il est intéressant de remarquer pour cela que la structure de matrices auxiliaires engendrées par la linéarisation est de type *étoile* : seule la première ligne, la première colonne et la diagonale principale comportent des coefficients non nuls. Cette structure clé est à rapprocher de la structure de la matrice caractéristique d'une stratégie de Nash en boucle ouverte, qui fait partie des perspectives d'études liées aux équations de Riccati rectangulaires.

Il faut aussi noter que cette technique présente aussi des difficultés en étant transposée directement au cas discret. Effectivement, l'élimination des variables qui sont les composantes sur la diagonale de la matrice de Metzler pose plus de problèmes dans le cas discret, car la contrainte apparaissant dans la relation (3.8) fait intervenir la constante 1, qu'il faut rendre compatible avec le changement de variable linéarisant. Cette technique doit être adaptée en temps discret.

Malgré ces difficultés techniques, qui seront surmontées, une linéarisation des inégalités de Lyapunov-Metzler et une meilleure compréhension de leurs structures ouvriront diverses possibilités. Quelques-unes sont listées :

- Une amélioration substantielle des techniques de résolution des inégalités de Lyapunov-Metzler, liées à l'étude de la stabilisation d'un système commuté permettra de traiter des inégalités de type Riccati-Metzler. Ce nouveau type d'inégalités comportera des couplages entre matrices P_i et des couplages scalaire-matrice π_{ij} et P_i . Il s'agirait en fait des inégalités rencontrées dans [AKFJ1994, AKFJ1995] mais pour le cadre des systèmes commutés. Ces inégalités seront fortement adaptées aux problèmes de type commande optimale pour les problèmes d'optimisation linéaire quadratique, où le critère quadratique ferait intervenir une commande linéaire et dont les actions possibles seraient le choix de la commande linéaire et de la loi de commutation. Ce type de problème est à rapprocher des problèmes à long terme mentionnés dans mon projet de recherche pour ma candidature au CRAN comme chargé de recherche CNRS en 2007 : il s'agit des problèmes pour lesquels les actions possibles sur un même système sont de natures différentes (commande linéaire et loi de commutation), que j'envisage de traiter dans le cadre de la théorie des jeux.
- Les inégalités de Lyapunov-Metzler fournissent par la même occasion les valeurs possibles des modes à activer, sous la forme (pour le temps discret)

$$\sigma(k) = \sigma(x_k) \in \arg \min_{i \in \{1, \dots, N\}} x_k' P_i x_k. \quad (3.10)$$

Cette relation suppose différentes hypothèses : la première est qu'à chaque instant, toute transition de mode est possible, la seconde est qu'elle ne dépend que de l'état courant x_k . Une extension importante serait de relever chacune de ces hypothèses et d'intégrer ces nouvelles spécificités dans la synthèse de commande. Dans cette perspective, on peut en particulier se poser les questions suivantes : si toutes les transitions de mode ne sont pas possibles, peut-on conserver comme fonction de Lyapunov le minimum de (toutes les) fonctions de Lyapunov modales ? Si des contraintes existent sur les lois de commutations éligibles, comme par exemple un temps de maintien, comment adapter la loi de type (3.10) ?

Une idée possible serait d'adapter des fonctions de Lyapunov dites *dépendantes du chemin*, comme dans l'article [LD2007], que nous avons déjà mis à profit afin de traiter des problèmes LPV avec des contraintes de variations des paramètres [MJ-JI8]. Ainsi la loi de commutation serait choisie sur plusieurs instants et non à chaque instant.

3.3 Inégalités de type Riccati avec structure Laplacienne

Les équations généralisées de Riccati que j'avais étudiées principalement durant ma thèse [MJ-PhD] proviennent de la théorie des jeux [BO1995]. Une large littérature de la théorie des jeux est consacrée aux applications des systèmes multi-agents (voir [Mor2005, MAS2009, SKK2009a], pour ne citer que ces références). Une autre discipline phare pour traiter des systèmes multi-agents est la théorie des graphes. Je souhaite travailler sur un rapprochement entre les deux disciplines pour le cadre des systèmes multi-agents.

Dans le cadre des systèmes multi-agents, une des principales spécificités est que chaque agent a accès uniquement à une information locale. L'ensemble des informations accessibles est caractérisé par le voisinage, qui est généralement formalisé par un graphe ou une structure Laplacienne. Utiliser les techniques classiques avec des équations de Riccati mène généralement à des contrôleurs de type retour d'état complet. Ce n'est pas en accord avec la structure d'information locale. L'idée ici est de prendre en compte cette contrainte dans la synthèse des contrôleurs. Cette contrainte empêche souvent l'existence d'équations de Riccati que nous remplacerons par des inégalités afin de donner un peu plus de liberté à notre synthèse.

Le consensus (mais aussi le flocking et cetera) entre plusieurs joueurs peut se formaliser comme la minimisation pour chaque joueur d'un critère qui quantifie l'écart de sa sortie avec la sortie de chaque joueur de son entourage. La dynamique en boucle fermée doit avoir un spectre qui se décompose en deux parties : un sous-espace stable et un sous-espace de dimension 1, lié à la valeur propre 0. Cette décomposition assure la convergence vers le consensus, formalisé comme un vecteur appartenant au noyau de la matrice du système en boucle fermée. Néanmoins afin de réaliser ces contraintes, il n'est possible de n'avoir que des commandes en fonction du voisinage de chaque joueur. L'idée est de généraliser les résultats proposés dans [SKK2008, SKK2009b]. Effectivement, le retour d'état de chaque joueur est un produit de matrices ayant à sa droite la matrice de Lyapunov associée au joueur. En imposant une structure particulière compatible avec la structure Laplacienne, on peut arriver à n'avoir qu'un retour des états accessibles dans le voisinage pour la commande en question. Pour la résolution numérique d'inégalités de Riccati avec des structures Laplaciennes, issues de la stratégie de Nash, on peut étendre les résultats de [MJ-JI3], qui utilise des programmes semi-définis positifs sous contraintes LMIs. Il est alors possible d'imposer la structure aux matrices de Lyapunov qui sont des variables.

Néanmoins à notre connaissance, il n'existe pas de résultat d'existence ou de convergence sur ces types de structure. Cela constitue un défi particulièrement difficile.

3.4 Equations généralisées de Riccati de grandes dimensions

Les méthodes actuelles pour résoudre des équations généralisées de Riccati sont adaptées pour les systèmes dont les dimensions sont *modérées*, jusqu'à typiquement quelques centaines. Néanmoins pour de plus grandes dimensions (à partir du million), les temps de calcul et les capacités de mémoire sont alors prohibitifs. Des méthodes spécifiques pour les systèmes de grande taille sont nécessaires. La littérature offre différentes techniques fondées sur l'utilisation de la symétrie, de la parcimonie et des algorithmes parallèles pour les équations de Lyapunov et de Riccati hermitiennes [Ben2004]. Des difficultés supplémentaires sont rencontrées pour les équations généralisées de Riccati à cause du manque de symétrie et à cause des couplages quadratiques non conventionnels. Différentes pistes sont proposées.

3.4.1 Espaces de Krylov pour les équations généralisées de Riccati

Les approches pour étudier numériquement les équations quadratiques de grandes dimensions sont les méthodes de projection ou de réduction de modèle [JK1994]. Elles consistent à remplacer des modèles d'ordre élevé par des modèles approchés d'ordre réduit. Ces méthodes peuvent être fondées sur l'optimisation de la norme de Hankel, ou sur une troncature équilibrée. Plusieurs techniques adaptées impliquent les sous-espaces de Krylov, dont les bases orthonormées peuvent être calculées par la méthode d'Arnoldi [JK1994] ou bien ses raffinements [Kre2008] ou encore par des factorisations de faible rang. Néanmoins, la symétrie est un ingrédient clé qui doit être ignoré pour résoudre les équations de Riccati généralisées qui ne sont pas symétriques. Cela peut être rendu possible en considérant la décomposition en valeur singulière de la solution rectangulaire et en prenant en compte la troncature de la décomposition spectrale. Ces techniques peuvent être adaptées pour résoudre les équations de Stein ou de Sylvester (au lieu des équations de Lyapunov). Cela suggèrent des résultats positifs. Un autre point crucial va être étudié pour garantir la stabilité en boucle fermée des systèmes de grandes dimensions ainsi obtenus, alors même que cela n'est pas garanti dans le cas hermitien. Une application des équations de Riccati non symétriques de grandes dimensions est apparue récemment pour la théorie du transport [Lu2005, WFC2012]. Elle apparaît lors d'une discrétisation des équations aux dérivées partielles associées au transport. Les matrices du système ont alors une structure très particulière : ce sont des sommes d'une matrice diagonale et d'une matrice de rang 1. Cette structure est utilisée à bon escient dans la résolution de ces équations, car elle permet d'utiliser la formule de Sherman-Morrison-Woodbury (ou lemme d'inversion matricielle). Une direction de recherche possible consiste à relaxer cette structure pour traiter le cas générique des équations de Riccati non symétriques.

3.4.2 Parcimonie des équations généralisées de Riccati

La parcimonie d'une matrice correspond au fait qu'elle est creuse, clairsemée : c'est-à-dire qu'elle contient beaucoup plus de coefficients nuls que non nuls. En pratique, la majorité des équations de Riccati généralisées de grandes dimensions sont parcimonieuses, car on les rencontre dans le processus de discrétisation fine des équations aux dérivées partielles, ou bien elles sont parcimonieuses ajoutées à une perturbation de rang faible. Une idée naturelle est d'adopter une méthode de Newton pour la résolution de ce type d'équations. Pour les équations de Riccati hermitiennes, cela correspond à résoudre des équations de Lyapunov à chaque étape du processus itératif. La convergence est quadratique et limite ainsi le nombre d'itérations pour atteindre un seuil d'erreur désiré. Il est à souligner qu'une telle méthode maintient la parcimonie des solutions à chaque étape. Il existe plusieurs variations des méthodes de Newton [BIP2008]. Parmi elles, nous pouvons citer les méthodes par direction implicite alternée

(ADI) [Jbi2010], ou leur factorisation de Cholesky [LW2004]. Ici nous voulons modifier ces méthodes pour qu'elles soient adaptées à la résolution des équations de Riccati non symétriques dans le cas générique (non restreint à une somme d'une matrice diagonale avec une matrice de perturbation de faible rang comme dans [Lu2005, LB2008]). A chaque étape de la méthode de Newton, il est prévisible d'avoir à résoudre des équations de Sylvester (ou de Stein) de grandes dimensions.

Le cas des équations couplées de type Riccati parcimonieuses, qui sont issues de la théorie des jeux est un cas particulier à étudier. Effectivement ces équations ne peuvent pas se réécrire sous la forme d'une seule équation rectangulaire (et donc non symétrique) de Riccati. La possibilité d'appliquer avec succès les méthodes de projection est drastiquement réduite car elle va mener à une orthogonalisation simultanée de plusieurs matrices distinctes. A nouveau des méthodes itératives, obtenues par des itérations de Lyapunov ou bien manque de confiance sont une solution possible.

Bibliographie

La bibliographie est décomposée en deux parties. La première partie est la liste des publications par catégories dont Marc Jungers est auteur ou co-auteur, selon les clés

- [MJ-PhD] pour la thèse,
- [MJ-JI i] pour les articles de journaux internationaux,
- [MJ-JN i] pour les articles d'autres journaux,
- [MJ-CI i] pour les articles de conférences internationales,
- [MJ-CN i] pour les articles de conférences nationales,
- [MJ-Ch i] pour les chapitres d'ouvrages,
- [MJ-E i] pour les documents d'enseignement.

Les références dont Marc Jungers n'est pas auteur ou co-auteur sont listées ensuite dans une seconde partie, sous la forme [Initiales, année].

Mémoire

[MJ-PhD] M. Jungers. *Commande robuste multicritère : une approche par la théorie des jeux*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Septembre 2006.

Articles de Journaux Internationaux

- [MJ-JI21] M. Fiacchini and M. Jungers. Necessary and sufficient condition for stabilizability of discrete-time linear switched systems : a set-theory approach. *Automatica*, *accepted*, 2013.
- [MJ-JI20] M. Jungers, C. A. C. Gonzaga, and J. Daafouz. Min-switching local stabilization for discrete-time switching systems with nonlinear modes. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 9 :18–26, August 2013.
- [MJ-JI19] I.-C. Morărescu and M. Jungers. Discussion on the paper «Hinf control design for time-delay linear systems : a rational transfer function based approach». *European Journal of Control*, 18(5) :437–438, 2012.
- [MJ-JI18] M. Jungers, E. B. Castelan, V. M. Moraes, and U. F. Moreno. A dynamic output feedback controller for a network controlled system based on delay estimates. *Automatica*, 49(3) :788–792, March 2013.
- [MJ-JI17] M. Jungers, H. Abou-Kandil, E. B. Castelan, and E. R. De Pieri. A gametheoretic approach for non-uniform poles shifting and poles homothety. *Automatica*, 49(1) :238–244, 2013.
- [MJ-JI16] M. Jungers and J. Daafouz. Guaranteed cost certification for linear switched system with a dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3) :768–772, March 2013.
- [MJ-JI15] C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, and J. Daafouz. Stability analysis of discrete-time lur'e systems. *Automatica*, 48(9) :2277–2283, 2012.
- [MJ-JI14] C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, and J. Daafouz. Stability analysis and stabilisation of switched nonlinear systems. *International Journal of Control*, 85(7) :822–829, 2012.
- [MJ-JI13] M. Jungers and C. Oară. Continuous-time non-symmetric algebraic Riccati theory : A matrix pencil approach. *European Journal of Control*, 18(1) :74–81, 2012.

- [MJ-JI12] M. Jungers, E. Trélat, and H. Abou-Kandil. Min-max and min-min Stackelberg strategies with closed-loop information structure. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 17(3) :387–425, 2011.
- [MJ-JI11] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. Performance analysis and design of dynamic output feedback control for switched systems. *International Journal of Control*, 84(2) :253–260, 2011.
- [MJ-JI10] M. Jungers and E. B. Castelan. Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. *Systems and Control Letters*, 60(3) :169–173, 2011.
- [MJ-JI9] L. Hetel, J. Daafouz, J.-P. Richard, and M. Jungers. Delay-dependent sampled-data control based on delay estimates. *Systems and Control Letters*, 60(2) :146–150, 2011.
- [MJ-JI8] M. Jungers, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. MPC for LPV systems with bounded parameter variations. *International Journal of Control*, 84(1) :24–36, 2011.
- [MJ-JI7] M. Jungers, E. B. Castelan, S. Tarbouriech, and J. Daafouz. Finite \mathcal{L}_2 -induced gain and λ -contractivity of discrete-time switching systems including modal nonlinearities and saturating actuator. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 5(2) :289–300, May 2011.
- [MJ-JI6] E.-V. Belmega, S. Lasaulce, M. Debbah, M. Jungers, and J. Dumont. Power allocation games in wireless networks of multi-antenna terminals. *Springer Telecommunications Systems Journal*, 47(1-2) :109–122, 2011.
- [MJ-JI5] T. Brihaye, M. Jungers, S. Lasaulce, N. Markey, and G. Oreiby. Using model checking for analysing distributed power control problems. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2010(ID 861473), 2010.
- [MJ-JI4] M. Jungers, C. Oară, H. Abou-Kandil, and R. Ștefan. General matrix pencil techniques for solving non-symmetric algebraic riccati equations. *SIAM, J. Matrix Anal. & Appl.*, 31(3) :1257–1278, 2009.
- [MJ-JI3] M. Jungers, E. B. Castelan, E. R. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Bounded Nash type controls for uncertain linear systems. *Automatica*, 44(7) :1874–1879, July 2008.
- [MJ-JI2] M. Jungers. On Stackelberg linear quadratic games with time preference rate. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(2) :621–625, March 2008.
- [MJ-JI1] M. Jungers, E.R. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Solving coupled algebraic Riccati equations from closed-loop Nash strategy, by lack of trust approach. *Internat. J. Tomog. Stat.*, F07, Fall 2007 :49–54, 2007.

Articles d’autres Journaux

- [MJ-JN3] E.-V. Belmega, M. Jungers, and S. Lasaulce. A generalization of a trace inequality for positive definite matrices. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2) :1–5, 2011.
- [MJ-JN2] M. Jungers. Jeux différentiels LQ de Stackelberg avec une pondération temporelle commune. *e-STA*, 4(3 (Analyse et commande : aspects théoriques)), 2006.
- [MJ-JN1] M. Jungers, E. Trélat, and H. Abou-Kandil. Commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: une approche par la stratégie de Stackelberg. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 40(numéro spécial : synthèse multi-objectif) :1113–1139, 2006.

Articles de Conférences Internationales

- [MJ-CI30] I.-C. Morărescu, W. Michiels, and M. Jungers. Synchronization of coupled nonlinear oscillators with shifted gamma-distributed delays. In *13th American Control Conference*, volume Soumis, Washington, DC, USA, 2013.
- [MJ-CI29] M. Fiacchini and M. Jungers. Necessary and sufficient condition for stabilizability of discrete-time linear switched systems : a set-theory approach. In *IFAC Joint Conference : 5th Symposium on System Structure and Control*, pages 196–201, 2013.

- [MJ-CI28] M. Jungers, G. P. Papavassilopoulos, and H. Abou-Kandil. Feedback Nash strategy for games with player-dependent time horizons. In *15th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, CAO'12*, pages 45–50, 2012.
- [MJ-CI27] E. S. El'Youssef, E. R. De Pieri, M. Jungers, and U. F. Moreno. Super-twisting sliding modes tracking control of a nonholonomic wheeled mobile robot. In *10th IFAC Symposium on Robot Control, SYROCO'12*, pages 429–434, 2012.
- [MJ-CI26] M. Jungers, C. A. C. Gonzaga, and J. Daafouz. Min-switching stabilization for discrete-time switching systems with nonlinear modes. In *4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, ADHS 2012*, pages 234–239, 2012.
- [MJ-CI25] C. A. Cavichioli Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz, and E. B. Castelan. A new class of lyapunov functions for nonstandard switching systems : the stability analysis problem. In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC'11)*. Orlando, Florida, USA, 2011.
- [MJ-CI24] C. A. Cavichioli Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz, and E. B. Castelan. Stabilization of discrete-time nonlinear systems subject to input saturations : a new lyapunov function class. In *IFAC World Congress, Milan, Italy, July 2011*.
- [MJ-CI23] M. Jungers, H. Abou-Kandil, E. B. Castelan, and E. R. De Pieri. A Nash strategy approach for non-uniform multiple pole shifting. In *IFAC World Congress. Milan, Italia, 2011*.
- [MJ-CI22] L. Hetel, J. Daafouz, M. Jungers, and J.-P. Richard. Delay-dependent sampled-data control of LTI systems. In *2nd IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems, NecSys'10*, September 2010.
- [MJ-CI21] M. Jungers, L. Hetel, and J. Daafouz. Guaranteed cost for control of networked control systems with small time-varying delays. In *19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, pages 1465–1470. Budapest, Hungary, soumis, July 2010.
- [MJ-CI20] M. Jungers and C. Oară. Anti-palindromic pencil formulation for open-loop Stackelberg strategy in discrete-time. In *19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, pages 2265–2268. Budapest, Hungary, soumis, July 2010.
- [MJ-CI19] H. Tembine, S. Lasaulce, and M. Jungers. Joint power control-allocation for green cognitive wireless networks using mean field theory. In *5th International Conference on Cognitive Radio Oriented Wireless Networks and Communications, Cannes, France, June 9-11 2010*.
- [MJ-CI18] N. A. Martins, E. S. El'Youssef, D. W. Bertol, E. R. De Pieri, and M. Jungers. A study on first and second order sliding modes for application in trajectory tracking control of nonholonomic mobile robot. In *11th Pan-American Congress of Applied Mechanics (PACAM)*. Foz do Iguassu, PR, Brazil, January 2010.
- [MJ-CI17] M. Jungers and C. Oară. Non-symmetric algebraic Riccati theory : A matrix pencil approach. In *48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1229–1234. Shangai, China, December 2009.
- [MJ-CI16] M. Jungers, E. B. Castelan, S. Tarbouriech, and J. Daafouz. Stabilization of discrete-time switching systems including modal nonlinearities and saturating actuators. In *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS)*, pages 174–179. Zaragoza, Spain, September 2009.
- [MJ-CI15] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. On performance analysis of time delay systems using a switched system approach. In *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS)*, pages 192–197. Zaragoza, Spain, September 2009.
- [MJ-CI14] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. On analysis of performance for digitally controlled and time-varying delayed systems. In *European Control Conference (ECC)*, pages 4181–4186. Budapest, Hungary, August 2009.
- [MJ-CI13] M. Jungers, H. Abou-Kandil, C. Oară, and R. Ştefan. Open-loop Nash strategy for linear-quadratic games via matrix pencil approach. In *European Control Conference (ECC)*. Budapest, Hungary, August 2009.
- [MJ-CI12] M. Jungers, H. Abou-Kandil, C. Oară, and R. Ştefan. Open-loop Stackelberg strategy for linear-quadratic games via matrix pencil approach. In *IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation (CAO)*. Agora, Finland, May 2009.

- [MJ-CI11] M. Jungers and H. Abou-Kandil. Matrix block formulation of closed-loop memoryless Nash strategy for discrete-time games. In *IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation (CAO)*. Agora, Finland, May 2009.
- [MJ-CI10] M. Jungers, R. P. Caun, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Model predictive control for linear parameter varying systems using path-dependent Lyapunov functions. In *IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation (CAO)*. Agora, Finland, May 2009.
- [MJ-CI9] M. Jungers. Matrix block formulation of closed-loop memoryless Stackelberg strategy for discrete-time games. In *47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4454–4459. Cancun, Mexico, December 2008.
- [MJ-CI8] M. Jungers, E. B. Castelan, E. R. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Solving coupled algebraic Riccati equations from closed-loop Nash strategy in discrete time, by lack of trust approach. In *8th Portuguese Conference on Automatic Control (CONTROLO)*. UTAD Vila Real, Portugal, 2008.
- [MJ-CI7] M. Jungers, E. Trélat, and H. Abou-Kandil. A stackelberg game approach to mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. In *IFAC World Congress*. Seoul, Korea, July 2008.
- [MJ-CI6] M. Jungers. Discrete-time Riccati equations in open-loop Stackelberg games with time preference rates. In *3rd IFAC Symposium on System Structure and Control (SSSC)*. Foz do Iguassu, October 2007.
- [MJ-CI5] M. Jungers, P.L. D. Peres, E. B. Castelan, E.R. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Nash strategy parameter dependent control for polytopic systems. In *3rd IFAC Symposium on System Structure and Control (SSSC)*. Foz do Iguassu, October 2007.
- [MJ-CI4] M. Jungers and A.L.D. Franco. A series solution for coupled algebraic Riccati type equations from closed-loop Nash strategy. European Control Conference (ECC), Kos, Greece, July 2007.
- [MJ-CI3] M. Jungers, E. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Solving coupled algebraic Riccati equations from closed-loop Nash strategy, by lack of trust approach. Cachan, France, April 2006. 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation.
- [MJ-CI2] M. Jungers, A.L.D. Franco, E.R. De Pieri, and H. Abou-Kandil. Nash strategy applied to active magnetic bearing control. In *16th IFAC World Congress*, Praha, Czech Republic, July 4-8 2005.
- [MJ-CI1] M. Jungers and H. Abou-Kandil. Properties of coupled Riccati equations in Stackelberg games with time preference rate. In *IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC)*, Oaxaca, Mexico, December 2004.

Articles de Conférences Nationales

- [MJ-CN8] E. S. El'Youssef, N. A. Martins, D. W. Bertol, E. De Pieri, and M. Jungers. On a wheeled mobile robot tracking control : Sliding mode control design. In *Congresso Brasileiro de Automática CBA'2010*, Bonito, MS, Brazil, 2010.
- [MJ-CN7] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. Analyse de performances et synthèse d'un contrôleur par retour de sortie dynamique pour les systèmes à commutation. In *Conférence Internationale Francophone en Automatique, (CIFA)*. Nancy, France, Juin 2010.
- [MJ-CN6] R. P. Caun, R. C. L. F. Oliveira, M. Jungers, and P. L. D. Peres. Controle preditivo para sistemas lineares discretos variantes no tempo usando funções de Lyapunov dependentes de caminho. In *Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*. Juiz de Fora, MG, Brazil, September 2008.
- [MJ-CN5] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. Sur l'analyse de performance et l'approche SdH pour les systèmes commandés en réseau. In *Conférence Internationale Francophone en Automatique, (CIFA)*. Bucarest, Roumanie, September 2008.
- [MJ-CN4] M. Jungers and H. Abou-Kandil. Contribution aux équilibres de Nash en boucle ouverte sur un horizon infini. Reims, France, Juillet 2007. Journées Doctorales Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes dynamiques JDMACS'07.
- [MJ-CN3] M. Jungers. Jeux différentiels LQ de Stackelberg avec une pondération temporelle commune. In *Conférence Internationale Francophone en Automatique CIFA'06*, Bordeaux, France, Mai 2006.

- [MJ-CN2] M. Jungers and E.R. De Pieri. Stratégie de Stackelberg appliquée à la commande d'une suspension magnétique 3 pôles. In *Journées Doctorales Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes dynamiques JDMACS*, Lyon, France, Septembre 2005.
- [MJ-CN1] M. Jungers and H. Abou-Kandil. Robustesse de différentes commandes issues de la stratégie de Nash. In *Conférence Internationale Francophone en Automatique, (CIFA)*, Douz Tunisie, Novembre 2004.

Chapitre d'ouvrage :

- [MJ-Ch2] C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, and J. Daafouz. *Hybrid Systems with Constraints*, chapter Advanced Lyapunov functions for Lur'e systems and their switched extension. ISTE-Wiley, July 2013.
- [MJ-Ch1] H. Abou-Kandil and M. Jungers. *Commande optimale*, chapter Commande optimale multicritère : introduction à la théorie des jeux, pages 227–265. Hermès, 2004.

Documents pour l'enseignement :

- [MJ-E6] A. François, Q. Groshens, and M. Jungers. L'invariance : ingrédient essentiel pour l'étude des systèmes dynamiques. Rapport de TIPE, 2013.
- [MJ-E5] I.-C. Morărescu and M. Jungers. *Commande numérique des systèmes*. ENSEM, cours et TD 2A, Université de Lorraine, mars 2013.
- [MJ-E4] M. Jungers and Y. Chitour. *Commande des processus : représentation d'état*. Maîtrise EEA Université d'Orsay – ENS de Cachan, décembre 2005.
- [MJ-E3] S. Tliba, M. Jungers, and Y. Chitour. *Commande des processus : asservissements numériques*. Maîtrise EEA Université d'Orsay – ENS de Cachan, septembre 2005.
- [MJ-E2] S. Ravier, editor. *Annales de concours 2005, MPSI-PCSI*. H-K Éditions, 2005.
- [MJ-E1] S. Ravier, editor. *Annales de concours 2005, PC*. H-K Éditions, 2005.

Présentation en congrès sans acte :

- [MJ-PsA1] M. Jungers. Feedback stackelberg strategy for discrete-time descriptor games. In *International Linear Algebra Society Conference : Pure and Applied Linear Algebra*, volume Présentation sans acte, Braunschweig, Germany, August 2011.

Documents soumis ou en révision :

- [MJ-JS3] M. Jungers and S. Tarbouriech. Anti-windup strategies for discrete-time switched systems subject to input saturation. *Soumis*, 2013.
- [MJ-JS2] M. Jungers. About the linearization of continuous-time Lyapunov-Metzler inequalities. *En préparation*, 2013.
- [MJ-JS1] M. Jungers. Feedback strategies for discrete-time linear-quadratic two-player descriptor games. *in revision*, 2012.
- [MJ-CS2] G. P. Papavassilopoulos, H. Abou-Kandil, and M. Jungers. A Nash game with long-term and short-term players. In *soumis*, 2013.
- [MJ-CS1] J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. On using disconnected level sets Lyapunov functions in the context of sampled-data systems. In *Soumis*, 2013.

Autres références :

- [AA1998] P. Apkarian and R. J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 6(1) :21–32, 1998.
- [AAN⁺2003] M. Alamir, S. A. Attia, A. Nerode, P. Riedinger, C. Iung, and F. Kratz. Discussion on : An optimal control approach for hybrid systems. *European Journal of Control*, 9(5) :459–462, 2003.
- [AC1984] J. P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [AEBH1975] Jr. A. E. Bryson and Y. C. Ho. *Applied optimal control*. Hemisphere Publishing Corp. Washington, D. C., 1975. Optimization, estimation, and control, Revised printing.
- [AG1995] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled \mathcal{H}_∞ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5) :853–864, May 1995.
- [AGE2009] V. Azhmyakov, R. G. Guerra, and M. Egerstedt. Hybrid LQ-optimization using dynamic programming. In *American Control Conference*. Saint-Louis, MO, USA, June 2009.
- [AH1994] R.J. Aumann and S. Hart. *Handbook of game theory with economic applications II*, volume 2. Elsevier, 1994.
- [AK1986] H. Abou-Kandil. *Elaboration de structure de commande hiérarchisée : Approches monocritère et multicritères*. Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1986.
- [AKB1985] H. Abou-Kandil and P. Bertrand. Analytical Solution for an Open-Loop Stackelberg Game. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(12) :1222–1224, December 1985.
- [AKB1986] H. Abou-Kandil and P. Bertrand. Analytical solution for a class of linear-quadratic Nash games. *International Journal of Control*, 43 :997–1002, 1986.
- [AKFIJ2003] H. Abou-Kandil, G. Freiling, V. Ionescu, and G. Jank. *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. Birkhäuser, 2003.
- [AKFJ1993] H. Abou-Kandil, G. Freiling, and G. Jank. Necessary conditions for constant solutions of coupled Riccati equations in Nash games. *Systems and control letters*, 21 :295–306, 1993.
- [AKFJ1994] H. Abou-Kandil, G. Freiling, and G. Jank. Solution and asymptotic behavior of coupled Riccati equations in jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-39(8) :1631–1636, 1994.
- [AKFJ1995] H. Abou-Kandil, G. Freiling, and G. Jank. On the solution of discrete-time Markovian jump linear quadratic control problems. *Automatica*, 31(5) :765–768, 1995.
- [AKJ2003] H. Abou-Kandil and G. Jank. Open-loop Nash Riccati equations in games with discount rate. In *Proceedings of the IFAC Conference on Control Applications of Optimization*, Hungary, 2003.
- [AL2001a] A. Aboussoror and P. Loridan. Existence of solutions of two-level optimization problems with nonunique lower-level solutions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 254 :348–357, 2001.
- [AL2001b] A.A. Agrachev and D. Liberzon. Lie-algebraic stability criteria for switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(1) :253–269, 2001.
- [AM1989] B.D.O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal control : linear quadratic methods*. Prentice-Hall International Editions, 1989.
- [AMYZ2012] P. J. Antsaklis, M. J. McCourt, H. Yu, and F. Zhu. Cyber-physical system design using dissipativity (plenary). In *Proc. of the 31st Chinese Control Conference (CCC) 2012*, pages 1–5, Hefei, China, July 25–27 2012.
- [Bag1984] A. Bagchi. *Stackelberg Differential Games in Economic Models*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, June 1984.
- [BAH1988] M. Breton, A. Alj, and A. Haurie. Sequential Stackelberg equilibria in two-person games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 59 :71–97, 1988.
- [BB1995] T. Başar and P. Bernhard. *\mathcal{H}_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems : A Dynamic Game Approach*. Birkhäuser, 1995.
- [BBBM2005] F. Borrelli, M. Baotić, A. Bemporad, and M. Morari. Dynamic programming for constrained optimal control of discrete-time linear hybrid systems. *Automatica*, 41 :1709–1721, 2005.
- [BC1986] S. Bittanti and P. Colaneri. Lyapunov and Riccati equations : periodic inertia theorems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31(7) :659–661, 1986.

- [BC1988] P. Bolzern and P. Colaneri. The periodic Lyapunov equation. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 9(4) :499–512, 1988.
- [BC2009] S. Bittanti and P. Colaneri. *Periodic Systems Filtering and Control*. Springer, 2009.
- [BCD1997] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Modern Birkhäuser Classics, 1997.
- [BCN1991] S. Bittanti, P. Colaneri, and G. De Nicolao. *The Riccati Equation*, chapter The periodic Riccati equation, pages 127–162. In Bittanti et al. [BLW1991], 1991.
- [BDD⁺2000] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, and H. van der Vorst, editors. *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems : A Practical Guide*. SIAM, Philadelphie, 2000.
- [BEFB1994] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [Bel1957] R. Bellman. *Dynamic programming*. Princeton Univeristy Press, Princeton, N. J., 1957.
- [Ben1997] P. Benner. *Contributions to the Numerical Solution of Algebraic Riccati Equations and Related Eigenvalue Problems*. Logos Verlag, Berlin, 1997.
- [Ben2004] P. Benner. Solving large-scale control problems. *IEEE Control Systems Magazine*, 24(1) :44–59, February 2004.
- [Ben2012] A. Benzaouia. *Saturated Switching Systems*. Springer-Verlag London, 2012.
- [Ber1724a] D. Bernoulli. Cand. notata in præcedens schediasma ill. co. Jacobi Riccati. *Acta Eruditorum Lipsiae*, VIII(II) :73–75, 1724.
- [Ber1724b] D. Bernoulli. *Exercitationes quædam Mathematicæ*. Venetiis, 1724.
- [Ber1725] D. Bernoulli. Solutio problematis Riccatiani propositi. *Acta Eruditorum Lipsiae*, VIII :473–475, 1725.
- [Ber1972] D. P. Bertsekas. Infinite-time reachability of state-space regions by using feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17 :604–613, 1972.
- [Ber1982] P. Bernhard. On singular implicit linear dynamical systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 20(5) :612–633, September 1982.
- [Ber1987] D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming : Deterministic and Stochastic models*. Prentice Hall, 1987.
- [BGBMN1999] A. Bune-Gerstner, R. Byers, V. Mehrmann, and N. K. Nichols. Feedback design for regularizing descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, 299(1–3) :119–151, 1999.
- [BGR2010] M. Bruckner, S. Galeani, and L. Del Re. Switching adaptative realization of a weakened anti-windup compensator. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5233–5238, 2010.
- [BGW1990] P. Bernhard, J. Grimm, and X. M. Wang. Commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites discrets. *APII*, 24(1) :17–36, December 1990.
- [BH1989] D. S. Bernstein and W. M. Haddad. LQG control with an H_∞ performance bound : A Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-34(3) :293–305, March 1989.
- [BIM2012] D. A. Bini, B. Iannazzo, and B. Meini. *Numerical Solution of Algebraic Riccati Equations*. Number 9 in Fundamentals of Algorithms. SIAM, 2012.
- [BIP2008] D. A. Bini, B. Iannazzo, and F. Poloni. A fast Newton’s method for a nonsymmetric algebraic Riccati equation. *SIAM J. Matrix Anal. & Appl.*, 30(1) :276–290, 2008.
- [Bit1991] S. Bittanti. *The Riccati Equation*, chapter Count Riccati and the Early Days of the Riccati Equation. In [BLW1991], 1991.
- [BL1987a] D. J. Bender and A. J. Laub. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(8) :672–688, 1987.
- [BL1987b] D. J. Bender and A. J. Laub. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems : Discrete-time case. *Automatica*, 23(1) :71–85, 1987.
- [Bla1994] F. Blanchini. Ultimate boundedness control for discrete-time uncertain systems via set-induced Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 :428–433, 1994.
- [Bla1995] F. Blanchini. Nonquadratic Lyapunov functions for robust control. *Automatica*, 31 :451–461, 1995.
- [Bla1999] F. Blanchini. Set invariance in control. *Automatica*, 35 :1747–1767, 1999.
- [BLW1991] S. Bittanti, J. A. Laub, and J-C. Willems. *The Riccati Equation*. Springer Verlag, 1991.
- [BM2008] F. Blanchini and S. Miani. *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhäuser, 2008.

- [BMMX2008] R. Byers, D. S. Mackey, V. Mehrmann, and H. Xu. Symplectic, BVD, and palindromic approaches to discrete-time control problems. Sofia, 2008. Jubilee Collection of Papers Dedicated to the 60-th Anniversary of Mihail Konstantinov, Publ. House of the Bulgarian Academy of Sciences.
- [BMS1983] R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, editors. *Differential geometric control theory*. Birkhäuser, Boston, MA, 1983.
- [BN2005] V. D. Blondel and Y. Nesterov. Computationally efficient approximations of the joint spectral radius. *SIAM Journal of Matrix Analysis*, 27(1) :256–272, 2005.
- [BNT2004] V. Blondel, Y. Nesterov, and J. Theys. *Approximations of the rate of growth of switched linear systems*, volume 2993 of *Hybrid Systems : Computation and Control, HSCC*, chapter of Lecture Notes in Computer Science, pages 173–186. Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [BO1980] T. Başar and G. J. Olsder. Team-optimal closed-loop Stackelberg strategies in hierarchical control problems. *Automatica*, 16 :409–414, 1980.
- [BO1995] T. Başar and G. J. Olsder. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. SIAM, 1995.
- [Bra1994] M. S. Branicky. Stability of switched and hybrid systems. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3498–3503, 1994.
- [Bra1995] M. S. Branicky. *Studies in Hybrid Systems : Modeling, Analysis, and Control*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [Bra1998] M. S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 :475–582, 1998.
- [Bre2010] A. Bressan. Noncooperative differential games. a tutorial. Technical report, Department of Mathematics, Penn State University, 2010.
- [Bro1983] R. W. Brockett. *Differential geometric control theory*, chapter Asymptotic stability and feedback stabilization, pages 181–191. In Brockett et al. [BMS1983], 1983.
- [Bro1993] R. W. Brockett. *Essays on Control : Perspectives in the Theory and its Applications*, chapter Hybrid models for motion control systems. In Trentelman and Willems [TW1993], 1993.
- [BS1979] T. Başar and H. Selbuz. Closed-loop Stackelberg strategies with applications in the optimal control of multilevel systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24 :166–179, 1979.
- [Bur1998] J. B. Burl. *Linear Optimal Control : H2 and H-Infinity Methods*. Prentice Hall, New York, 1998.
- [Bye1987] R. Byers. Solving the algebraic Riccati equation with the matrix sign function. *Linear Algebra and its Applications*, 85 :267–280, 1987.
- [Cas1969] J.H. Case. Towards a theory of many player differential games. *SIAM J. Control*, 7 :179–197, 1969.
- [CC1971] J.B. Jr. Cruz and C.I. Chen. Series Nash solution of two person nonzero-sum linear-quadratic games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 7 :240–257, 1971.
- [CC1972] C. I. Chen and J. B. Cruz. Stackelberg solution for two-person games with biased information patterns. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-17(6) :791–797, December 1972.
- [CCAK2005] L. Cherfi, Y. Chitour, and H. Abou-Kandil. A new numerical algorithm for solving coupled algebraic Riccati equations. Vienna, Austria, 28-30 november 2005. CIMCA 2005.
- [CF1995] T. Chen and B. Francis. *Optimal Sampled-Data Control Systems*. Springer, 1995.
- [CFM2005] O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and R. P. Marques. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems. Probability and Its Applications*. Springer-Verlag London, 2005.
- [CFT2013] O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and M. G. Todorov. *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems. Probability and Its Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [CFZF2012] Y. Chen, S. Fei, K. Zhang, and Z. Fu. Control synthesis of discrete-time switched linear systems with input saturation based on minimum dwell time approach. *Circuits Syst. & Signal Process*, 31(2) :779–795, 2012.
- [CL1955] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [CL2003] Y. Y. Cao and Z. Lin. Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function. *Automatica*, 39 :1235–1241, 2003.
- [Cla2001] F. H. Clarke. Nonsmooth analysis in control theory : a survey. *European Journal of Control*, pages 63–78, 2001.
- [CLSW1998] F. H. Clarke, Y. Ledyev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. New York, Springer-Verlag, 1998.

- [CMdP2006] E. B. Castelan, U. Moreno, and E. R. de Pieri. Absolute stabilization of discrete-time systems with a sector bounded nonlinearity under control saturations. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2006)*, pages 3105–3108, Greece, 2006.
- [Cob1983] D. Cobb. Descriptor variable systems and optimal state regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(5) :601–611, 1983.
- [Col1955] W. J. Coles. Linear and Riccati systems. *Duke Math. J.*, 22 :333–338, 1955.
- [Con1777] Condorcet. *Supplément à l'Encyclopédie*, chapter Ricati, page 648. Volume Tome 4 of [Did1777], 1777.
- [Cor2008] J. Cortés. Discontinuous dynamical systems : a tutorial on solutions, nonsmooth analysis, and stability. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 36–73, 2008.
- [CW1994] S. Clemhout and H. Y. Wan. *Handbook of game theory with economic applications II*, chapter Differential Games – Economic applications. Volume 2 of [AH1994], 1994.
- [CZ2001] X. Chen and K. Zhou. Multiobjective $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control design. *SIAM Journal Control Optimization*, 40(2) :628–660, 2001.
- [Dai1989] L. Dai. *Singular Control Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 1989.
- [DB2001] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43 :355–359, 2001.
- [DBPL2000] R. DeCarlo, M. Branicky, S. Pettreson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilisability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7) :1069–1082, July 2000.
- [ddL1776] J. L. de de Lagrange. Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral. *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, pages 301–332, 1776.
- [DDL2006] S. Dempe, J. Dutta, and S. Lohse. Optimality conditions for bilevel programming problems. *Optimization*, 55(5–6) :505–524, October-December 2006.
- [Dem2005] S. Dempe. *Essays and Surveys in Global Optimization*, chapter Bilevel programming, pages 165–193. Springer Verlag, 2005.
- [DG2007] J. Daafouz and H. Gueguen, editors. *Systèmes dynamiques hybrides*, volume 41. Lavoisier–Hermès, Journal Européen des Systèmes Automatisés, 2007.
- [DHTZ2009] D. Dai, T. Hu, A. R. Teel, and L. Zaccarian. Piecewise-quadratic lyapunov functions for systems with deadzones or saturations. *Systems & Control Letters*, 58 :365–371, 2009.
- [Did1777] D. Diderot. *Supplément à l'Encyclopédie*. *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et métiers*, Tome 4, 1777.
- [DJLS2000] E. Dockner, S. Jørgensen, N. Van Long, and G. Sorger. *Differential games in economics and management science*. Cambridge University Press, 2000.
- [DK1993a] J. Demmel and B. Kågström. The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil A-zB : robust software with error bounds and applications. Part I : theory and algorithms. *ACM Trans. Math. Softw.*, 19(2) :160–174, 1993.
- [DK1993b] J. Demmel and B. Kågström. The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil A-zB : robust software with error bounds and applications. Part II : software and applications. *ACM Trans. Math. Softw.*, 19(2) :175–201, 1993.
- [DM1999] W. P. Dayawansa and C. F. Martin. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4) :751–760, 1999.
- [DMS2006] V. Dragan, T. Morozan, and A.-M. Stoica. *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems*, volume 50 of *Mathematical concepts and methods in science and engineering*. Springer, 2006.
- [DMS2010] V. Dragan, T. Morozan, and A.-M. Stoica. *Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems*. Springer, 2010.
- [dOS2001] M. C. de Oliveira and R.E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, Lectures Notes in Control and Information Sciences, pages 241–257. Springer-Verlag, 2001.
- [DRI2002] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :1883–1887, 2002.
- [DTS2013] J. Daafouz, S. Tarbouriech, and M. Sigalotti, editors. *Hybrid Systems with Constraints*. Wiley-ISTE, July 2013.

- [DZM1988] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews. Variable structure control of nonlinear multivariable systems : a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, 76(3) :212–232, 1988.
- [Eme1970] S. V. Emelyanov, editor. *Theory of variable-structure systems*. Nauka, Moscou, 1970.
- [Eng1998a] J. C. Engwerda. Computational aspects of the open-loop Nash equilibrium in linear quadratic games. *Journal of Economic Dynamics and Control*, (22) :1487–1506, 1998.
- [Eng1998b] J. C. Engwerda. On the open-loop Nash equilibrium in LQ-games. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22 :729–762, 1998.
- [Eng2005] J. C. Engwerda. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*. Wiley, 2005.
- [Eng2010] J. Engwerda. Necessary and sufficient conditions for Pareto optimal solutions of cooperative differential games. *SIAM J. Control Optim.*, 48(6) :3859–3881, 2010.
- [Eul1741] L. Euler. De constructione æquationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8 :66–85, 1741.
- [Eul1764] L. Euler. De resolutione æquationis $dy + ayydx = bx^m dx$. *Novi Commentarii academix scientiarum Petropolitane*, 9 :154–169, 1764.
- [Fai1987] L. E. Faibusovich. Matrix Riccati inequality : existence of solutions. *Systems & Control Letters*, 9 :59–64, 1987.
- [Fil1988] A.F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [FJAK1996a] G. Freiling, G. Jank, and H. Abou-Kandil. Generalized Riccati difference and differential equations. *Linear Algebra and its Applications*, 241–243 :291–303, July-August 1996.
- [FJAK1996b] G. Freiling, G. Jank, and H. Abou-Kandil. On global existence of solutions to coupled matrix Riccati equations in closed-loop Nash games. 41(2) :264–296, February 1996.
- [Fla1990] D. Flamm. A new shift-invariant representation for periodic linear systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1510–1515, 1990.
- [Fla1991] D. S. Flamm. A new shift-invariant representation for periodic linear systems. *Systems & Control Letters*, 17(1) :9–14, July 1991.
- [Fra1987] B. A. Francis. *A Course in H_∞ Control Theory*, volume 88 of *Lectures Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Fri1994] A. Friedman. *Handbook of game theory with economic applications II*, chapter Differential Games, pages 782–799. Volume 2 of [AH1994], 1994.
- [FS1971] M. H. Foley and W. E. Schmitendorf. On a class of nonzero-sum linear-quadratic differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 7(5) :357–376, 1971.
- [Fus1843] P. H. Fuss, editor. *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIIIe Siècle*, volume 1 (Euler-Goldbach). St. Petersburg, 1843.
- [GA2010] M. S. Grewal and A. P. Andrews. Applications of Kalman filtering in aerospace 1960 to the present. *IEEE Control Systems Magazine*, 30(3) :69–78, June 2010.
- [GC2006a] J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 45(5) :1915–1930, 2006.
- [GC2006b] J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of discrete-time switched systems. *International Journal of Control*, 79(7) :719–728, July 2006.
- [Ger2010] J.C. Geromel. Sur la stabilité, commande et optimisation des systèmes dynamiques hybrides. In *Conférence Internationale Francophone d’Automatique*. Nancy, France, 2010.
- [GK2008] J. C. Geromel and R. H. Korogui. H_2 robust filter design with performance certificate via convex programming. *Automatica*, 44 :937–948, 2008.
- [GL1995] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.
- [Gla1881] J. W. L. Glaisher. On Riccati’s equation and its transformations, and on some definite integrals which satisfy them. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 172 :759–828, January 1881.
- [Goe2005] R. Goebel. Stabilizing a linear system with saturation through optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5) :650–655, May 2005.
- [Gon2012] C. A. C. Gonzaga. *Analyse de stabilité et de performances d’une classe de systèmes non-linéaires à commutations en temps discret*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, Septembre 2012.

- [GPC2001] J. M. Gomes da Silva Jr., C. Paim, and E. B. Castelan. Stability and stabilization of linear discrete-time subject to control saturation. In *1st IFAC Symp. on System Structure and Control (SSSC'01)*, Prague, 2001.
- [GS1993] Z. Gajic and S. Shen. *Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1993.
- [GST2012] R. Goebel, R. G. Sanfelice, and A. R. Teel. *Hybrid Dynamical Systems : Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton University Press, 2012.
- [GT1991] E. G. Gilbert and K. Tan. Linear systems with state and control constraints : The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 :1008–1020, 1991.
- [GT2006] J. M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. *Systems & Control Letters*, pages 184–192, 2006.
- [GTTZ2009a] S. Galeani, S. Tarbouriech, M. Turner, and L. Zaccarian. A tutorial on modern anti-windup design. In *Proceedings of the European Control Conference*, pages 306–323, 2009.
- [GTTZ2009b] S. Galeani, S. Tarbouriech, M. Turner, and L. Zaccarian. A tutorial on modern anti-windup design. *European Journal of Control*, 15(3–4) :418–440, 2009.
- [GTZ2008] G. Grimm, A. R. Teel, and L. Zaccarian. The l_2 anti-windup problem for discrete-time linear systems : Definition and solutions. *Systems & Control Letters*, 57 :356–364, 2008.
- [Gur1994] L. Gurvits. Stability of linear inclusions. part 2. *Tech. rep., NECL.*, 1994.
- [Háj1979] O. Hájek. Discontinuous differential equations, I. *Journal of Differential Equations*, 32(2) :149–170, 1979.
- [Ham1949] B. Hamel. *Contribution à l'étude mathématique des systèmes de réglage par tout-ou-rien*. Thèse de doctorat, CEMV, Service Technique Aeronautique, Université de Paris, 1949.
- [HB1994a] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle and Popov theorems and their application to robust stability. part II : discrete-time theory. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(2) :249–265, 1994.
- [HB1994b] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Parameter-dependent Lyapunov functions and the discrete-time Popov criterion for robust analysis. *Automatica*, 30 :1015–1021, 1994.
- [Her1967] H. Hermes. *Differential Equations and Dynamical Systems*, chapter Discontinuous vector fields and feedback control, pages 155–165. Academic Press, New York, 1967.
- [Hes2011] J. P. Hespanha. *An Introductory Course in Noncooperative Game Theory*. Dept. of Electrical & Computer Eng. University of California, Santa Barbara, CA, October 2011.
- [HHHB1994] W. M. Haddad, J. How, S. R. Hall, and D. Bernstein. Extensions of mixed- μ bounds to monotonic and odd monotonic nonlinearities using absolute stability theory. *International Journal of Control*, 60(5) :905–951, 1994.
- [HI1994] A. Halanay and V. Ionescu. *Time-Varying Discrete Linear Systems*. Birkhäuser, 1994.
- [HL2001] T. Hu and Z. Lin. *Control systems with actuator saturation. Analysis and design*. Birkhäuser, 2001.
- [HL2003] T. Hu and Z. Lin. Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3) :440–450, 2003.
- [HLLS2009] W. P. M. H. Heemels, D. Lehmann, J. Lunze, and B. De Schutter. *Handbook of Hybrid Systems Control : Theory, Tools, Applications*, chapter Introduction to hybrid systems, pages 3–32. In Lunze and Lamnabhi-Lagarrigue [LLL2009], 2009.
- [HMM2004] A. Hilliges, C. Mehl, and V. Mehrmann. On the solution of palindromic eigenvalue problems. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Jyväskylä, Finland, 2004.
- [Ho1970] Y. C. Ho. Survey paper : Differential games, dynamic optimization and generalized control theory. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 6(3) :179–209, 1970.
- [HT2006] J. P. Hespanha and A. Tiwari, editors. *Hybrid Systems : Computation and Control*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [HTP2003] G. Herrmann, M. C. Turner, and I. Postlethwaite. Discrete-time anti-windup : Part 2 - extension to the sampled-data case. In *European Control Conference (ECC'03)*, 2003.
- [HTZ2006] T. Hu, A. R. Teel, and L. Zaccarian. Stability and performance for saturated systems via quadratic and nonquadratic Lyapunov functions. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 51(11) :1770–1786, 2006.

- [Hu2007] T. Hu. Switching law construction for discrete-time systems via composite quadratic functions. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, pages 675–680, New York City, USA, 2007.
- [IOW1999] V. Ionescu, C. Oară, and M. Weiss. *Generalized Riccati theory and robust control : a Popov function approach*. Chichester, New York, John Wiley, 1999.
- [Isa1975] R. Isaacs. *Differential Games : A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. 1975.
- [Jbi2010] K. Jbilou. ADI preconditioned Krylov methods for large Lyapunov matrix equations. *Linear Algebra and its Applications*, 432 :2473–2485, 2010.
- [JK1994] I. M. Jaimoukha and E. M. Kasenally. Krylov subspace methods for solving large Lyapunov equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(1) :227–251, February 1994.
- [JK1998] G. Jank and G. Kun. *Computational Methods and Function Theory*, chapter Solutions of generalized Riccati differential equations and their approximation, pages 1–18. World Scientific Publishing Co., 1998.
- [Joh2002] M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems - A Computational Approach*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2002.
- [JR1998] M. Johansson and A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 43(4) :555–559, 1998.
- [Jun2009] R. M. Jungers. *The joint spectral radius. Theory and applications*. Springer, 2009.
- [Kal1960a] E.R. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 2(5) :102–119, 1960.
- [Kal1960b] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82(Series D) :35–45, 1960.
- [Kal1963] R.E. Kalman. Lyapunov functions for the problem of Lur’e in automatic control. *Proceedings of National Academy of Sciences*, (49) :201–205, 1963.
- [KG1998] I. Kolmanovsky and E. G. Gilbert. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 4 :317–367, 1998.
- [KG2002] V. Kapila and K. Grigoriadis. *Actuator saturation control*. Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [KH1996] V. Kapila and W. M. Haddad. A multivariable extension of the Tsypkin criterion using a Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30 :149–152, 1996.
- [Kha2002] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems - Third Edition*. Prentice Hall, 2002.
- [Kis1991] M. Kisielewicz. *Differential Inclusions and Optimal Control*. Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [KL1961] N. N. Krasovskii and E. Lidskii. Analytical design of controllers in systems with random attributes (parts I–III). *Automat. Remote Contr.*, 22 :1021–1025, 1141–1146, 1289–1294, 1961.
- [Kle1968] D. L. Kleinman. On an iterative technique for Riccati equation computations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(1) :114–115, February 1968.
- [KR1971] N.J. Krikelis and Z.V. Rekasius. On the solution of optimal linear control problems under conflict of interest. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(2) :140–145, 1971.
- [Kra1963] N. N. Krasovskii. *Stability of Motion. Applications of Lyapunov’s Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*. Standford Univ. Press, 1963.
- [Kre2003a] D. Kremer. *Non-symmetric Riccati theory and noncooperative games*. PhD thesis, RWTH Aachen, 2003.
- [Kre2003b] D. Kressner. Large periodic Lyapunov equation : algorithms and applications. In *European Control Conference (ECC’03)*, Cambridge, UK, 2003.
- [Kre2008] D. Kressner. Memory-efficient Krylov subspace techniques for solving large-scale Lyapunov equations. In *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control Systems Design*, pages 613–618, San Antonio, 2008.
- [KŞ2002] D. Kremer and R. Ştefan. Non-symmetric Riccati theory and linear quadratic Nash games. MTNS02, University of Notre Dame, USA, August 2002.
- [Kuč1972] V. Kučera. A contribution to matrix quadratic equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(3) :344–347, June 1972.
- [Kuč1973] V. Kučera. A review of the matrix Riccati equation. *Kybernetika*, 9(1) :42–61, 1973.
- [LA2003] H. Lin and P. J. Antsaklis. Synthesis of uniformly ultimate boundedness switching laws for discrete-time uncertain switched linear systems. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4806–4811, 2003.

- [LA2005] H. Lin and P.J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems : A short survey of recent results. *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 1 :24–29, 2005.
- [Lag1938] R. Lagrange. Quelques théorèmes d’intégrabilité par quadratures de l’équation de Riccati. *Bulletin de la Société Mathématique de France (S.M.F.)*, 66 :155–163, 1938.
- [LAH1994] D.J.N. Limebeer, B.D.O. Anderson, and H. Hendel. A Nash game approach to mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(1) :69–82, January 1994.
- [Lau1979] A. J. Laub. A Schur method for solving the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30 :97–108, 1979.
- [LB2008] Y. Lin and L. Bao. Convergence analysis of the Newton-Shamanskii method for a nonsymmetric algebraic Riccati equation. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 15 :535–546, 2008.
- [LCCL2010] T. Li, C. Y. Chiang, E. K.-W. Chu, and W.-W. Lin. The palindromic generalized eigenvalue problem $A^*x = \lambda Ax$: Numerical solution and applications. *Linear Algebra and its Applications*, 434(11) :2269–2284, June 2010.
- [LD2006] J.W. Lee and G.E. Dullerud. Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems. *Automatica*, 42 :205–218, 2006.
- [LD2007] J. W. Lee and G. E. Dullerud. Uniformly stabilizing sets of switching sequences for switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5) :868–874, 2007.
- [Lei1978] G. Leitmann. On generalized Stackelberg strategies. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 26(4) :1978, December 1978.
- [Lev1959] J. J. Levin. On the matrix Riccati equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 :519–524, 1959.
- [LHM1999] D. Liberzon, J. P. Hespanha, and A. S. Morse. Stability of switched linear systems : A Lie-algebraic condition. *Systems & Control Letters*, 37(3) :117–122, 1999.
- [Lib2003] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*, volume in series Systems and Control : Foundations and Applications. Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
- [Lib2012] D. Liberzon. *Calculus of variations and optimal control theory*. Princeton University Press, 2012.
- [Lio1839] J. Liouville. Mémoire sur l’intégration d’une classe d’équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Tome 4(Série 1) :423–456, 1839.
- [Lio1841] J. Liouville. Remarques nouvelles sur l’équation de Riccati. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, VI :1–13, 1841.
- [LL2009] L. Lu and Z. Lin. A switching anti-windup design using multiple Lyapunov functions. In *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, pages 1920–1925, Shanghai, P.R. China, December 2009.
- [LL2010] L. Lu and Z. Lin. A switching anti-windup design using multiple Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(1) :142–148, January 2010.
- [LLL2009] J. Lunze and F. Lamnabhi-Lagarrigue, editors. *Handbook of Hybrid Systems Control : Theory, Tools, Applications*. Cambridge University Press, 2009.
- [LM1967] E.B. Lee and L. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory*. New York : Wiley, 1967.
- [LM1974] A. J. Laub and K. R. Meyer. Canonical forms for Hamiltonian and symplectic matrices. *Celestial Mechanics*, 9 :213–238, 1974.
- [LM1999] D. Liberzon and A.S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19 :59–70, 1999.
- [LNA2006] D. S. Laila, D. Nešić, and A. Astolfi. *Advanced Topics in Control Systems Theory II*, volume 328 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter Sampled-Data Control of Nonlinear Systems, pages 91–137. Springer, 2006.
- [Lou2013] J. Louis. Discrétisation et analyse de stabilité des systèmes de type Lur’e. In *5èmes Journées Doctorales MACS (JD-JN MACS)*, 11–12 juillet 2013.
- [LP1944] A. I. Lur’e and V. N. Postnikov. On the theory of stability of control systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 8(3) :3–13, 1944.
- [LR1960] A. I. Lur’e and E. N. Rozenvasser. On the methods for generating Lyapunov functions in theory on non-linear control systems. In *IFAC Congress : Theory and Continuous Systems – Special Mathematical Problems*, volume 30, pages 1356–1359, June 1960.
- [LR1971] D. L. Lukes and D. L. Russel. A global theory for linear-quadratic differential games. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 33(1) :96–123, 1971.

- [LR1995] P. Lancaster and L. Rodman. *Algebraic Riccati equations*. Oxford science publications, 1995.
- [LT2011] S. Lasaulce and H. Tembine. *Game Theory and Learning for Wireless Networks*. Academic Press, 2011.
- [Lu2005] L.-Z. Lu. Newton iterations for a non-symmetric algebraic Riccati equation. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 12 :191–200, 2005.
- [LW2004] J.-R. Li and J. White. Low-rank solution of Lyapunov equations. *SIAM Review*, 46(4) :693–713, 2004.
- [Mag1977] E. F. Mageirou. Iterative techniques for Riccati game equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 22(1) :51–61, May 1977.
- [Mar1990] M. Mariton. *Jump Linear Systems in Automatic Control*. Marcel Dekker, Inc., 1990.
- [MAS2009] J. R. Marden, G. Arslan, and J. S. Shamma. Cooperative control and potential games. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B : Cybernetics*, 39(6) :1393–1407, December 2009.
- [MB1985] M. Mariton and P. Bertrand. Robust jump linear quadratic control : A mode stabilizing solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(11) :1145–1147, 1985.
- [Mel2011] J. Melin. *synthèse de lois de commande pour les systèmes à commutations avec contraintes de performances*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Mai 2011.
- [MK2000] E. F. Mulder and M. V. Kothare. Synthesis of stabilizing anti-windup controllers using piecewise quadratic Lyapunov functions. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3239–3243, 2000.
- [ML2006] M. Margaliot and D. Liberzon. Lie-algebraic stability conditions for nonlinear switched systems and differential inclusions. *Systems & Control Letters*, 55(1) :8–16, 2006.
- [Mor2005] L. Moreau. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2) :169–182, 2005.
- [MP1986] A. P. Molchanov and E. S. Pyatnitskii. Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions of absolute stability of nonlinear nonstationary control systems III. *Automation and Remote Control*, 47 :620–630, 1986.
- [MPG1970] J.-F. Le Maitre, J.-G. Paquet, and J.-C. Gille. A general approach for on–off control systems oscillations. *Automatica*, 6(4) :609–613, 1970.
- [Nas1950] J.F. Nash. Equilibrium points in N –person games. *Proceedings Nat. Acad. Science U.S.*, 36 :48–49, 1950.
- [Nas1951] J.F. Nash. Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, 54 :286–296, 1951.
- [NM1944] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [NTK1999] D. Nešić, A. R. Teel, and P. V. Kokotovic. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations. *Systems & Control Letters*, 38 :259–270, 1999.
- [NTS1999] D. Nešić, A. R. Teel, and E. D. Sontag. Formulas relating $\mathbb{K}\mathbb{L}$ stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 38 :49–60, 1999.
- [OD1997] C. Oară and P. Van Dooren. An improved algorithm for the computation of structural invariants of a system pencil and related geometric aspects. *Systems and Control Letters*, 30 :39–48, 1997.
- [ÖP1977] U. Özgüner and W.R. Perkins. A series solution to the Nash strategy for large scale interconnected systems. *Automatica*, 13 :313–315, 1977.
- [PAABLL2008] R. Postoyan, T. Ahmed-Ali, L. Burlion, and F. Lamnabhi-Lagarigue. On the Lyapunov-based adaptive control redesign for a class of nonlinear sampled-data systems. *Automatica*, 44 :2099–2107, 2008.
- [Par1896] V. Pareto. *Cours d'économie politique*, volume 1. F. Rouge et Cie, Lausanne, 1896.
- [PBG1962] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, and E. Michtchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, Wiley Interscience, 1962.
- [PC1979] G. P. Papavassilopoulos and J. B. Cruz. Nonclassical control problems and Stackelberg games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(2) :155–166, April 1979.
- [PD1991] P. Peleties and R. A. DeCarlo. Asymptotic stability of m -switched systems using Lyapunov-like functions. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1679–1684, 1991.
- [PG1964] J. B. Pearson and J. E. Gibson. On the asymptotic stability of a class of saturating sampled-data systems. *IEEE Transactions on Industry Applications*, AI-83 :81–86, March 1964.
- [PJ1994] K. Premaratne and E. I. Jury. Discrete-time Positive-Real lemma revisited : the discrete-time counterpart Kalman-Yakubovich lemma. *IEEE transactions on Circuits and Systems I : Fundamental, Theory and Applications*, 41(11) :747–750, November 1994.

- [PL1996] S. Pettersson and B. Lennartson. Stability and robustness for hybrid systems. *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pages 1202–1207, December 1996.
- [PL1999] S. Pettersson and B. Lennartson. Exponential stability of hybrid systems using piecewise quadratic Lyapunov functions resulting in an LMI problem. *Proceedings of the 14th IFAC World Congress*, 1999.
- [Pol2000] A. Polański. On absolute stability analysis by polyhedral Lyapunov functions. *Automatica*, 36(4) :573–578, April 2000.
- [Pop1961] V.M. Popov. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Avtomatika i Telemekhanika*, 22(8) :961–979, 1961.
- [PS2000] B. Piccoli and H. J. Sussmann. Regular synthesis and sufficiency conditions for optimality. *SIAM J. Control and Optimization*, 39(2) :359–410, 2000.
- [PV1989] B. Park and E.I. Verriest. Canonical forms on discrete linear periodically time-varying systems and a control application. In *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1220–1225, 1989.
- [Rad1927] J. Radon. Über die oszillationstheoreme der kunjugierten punkte beim probleme von Lagrange. (german). *Münchener Sitzungsberichte*, 57 :243–257, 1927.
- [Rad1928] J. Radon. Zum problem von Lagrange. (german). *Hamburger Math. Einzelschr.*, 6 :273–299, 1928.
- [Raf1902] L. Raffy. Une leçon sur l'équation de Riccati. *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, Série 4(2) :529–545, 1902.
- [Ran1996] A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Lemma. *Systems & Control Letters*, 28(1) :7–10, 1996.
- [RCS2011] F. Rossi, P. Colaneri, and R. Shorten. Padé discretization for linear systems with polyhedral Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11) :2717–2722, 2011.
- [Rei1939] W. T. Reid. Some remarks on linear differential systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45 :414–419, 1939.
- [Rei1946] W. T. Reid. A matrix differential equation of Riccati type. *American Journal of Mathematics*, 68(2) :237–246, 1946.
- [Rei1972] W. T. Reid. *Riccati differential equations*. Academic Press, New York, 1972.
- [Ric1724] J. F. Riccati. Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus. *Acta Eruditorum Lipsiae*, VIII(II) :67–73, 1724.
- [Ric1752] V. Riccati. *De usu motus tractorii in constructione Aequationum Differentialium Commentarius*. Bononiae Typ. Laelii a Vulpe, 1752.
- [Rif2000] L. Rifford. *Problèmes de Stabilisation En Théorie Du Contrôle*. Thèse de doctorat, University Claude Bernard, Lyon 1, 2000.
- [Rif2001] L. Rifford. On the existence of nonsmooth control-Lyapunov functions in the sense of generalized gradients. *ESAIM*, 6 :593–611, 2001.
- [Rif2002] L. Rifford. Semiconcave control-Lyapunov functions and stabilizing feedbacks. *SIAM J. Control Optim.*, 41(3) :659–681, 2002.
- [RIK2003] P. Riedinger, C. Iung, and F. Kratz. An optimal control approach for hybrid systems. *European Journal of Control*, 9(5) :449–458, 2003.
- [Roc1970] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, USA, 1970.
- [Rot1950] W. E. Roth. On the matrix equation $X^2 + AX + XB + C = 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1(5) :586–589, 1950.
- [RŞ2007] V. Răsvan and R. Ştefan. *Systèmes non linéaires : théorie et applications*. Hermès, 2007.
- [Rya1990] E. P. Ryan. *Control of Uncertain Systems*, chapter Discontinuous feedback and universal adaptive stabilization. Birkhäuser, 1990.
- [San1974] N. R. Sandell. On Newton's method for Riccati equation solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(3) :254–255, 1974.
- [SC1973a] M. Simaan and J. B. Cruz. Additional aspects of the Stackelberg strategy in nonzero-sum games. 11(6) :613–626, 1973.
- [SC1973b] M. Simaan and J. B. Cruz. On the Stackelberg strategy in nonzero-sum games. 11(5) :533–555, 1973.
- [Sch1973] C. R. Schneider. Global aspects of the matrix Riccati equation. *Mathematical Systems Theory*, 7(3) :281–286, 1973.
- [Sch1991] C. W. Scherer. The solution set of the algebraic Riccati equation and the algebraic Riccati inequality. *Linear Algebra and its Applications*, 153 :99–122, 1991.

- [Sch1993] R. Schneider. *Convex bodies : The Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993.
- [Sch1995] C. W. Scherer. The general nonstrict algebraic Riccati inequality. *Linear Algebra and its Applications*, 219 :1–33, 1995.
- [Sch2000] B. De Schutter. Optimal control of a class of linear hybrid systems with saturations. *SIAM J. Control Optim.*, 39(3) :835–851, 2000.
- [Sch2008] C. Schröder. *Palindromic and Even Eigenvalue Problems - Analysis and Numerical Methods*. PhD thesis, Technischen Universität Berlin, April 2008.
- [SCM⁺2009] R. Shorten, M. Corless, R. Middleton, S. Klinge, and K. Wulff. A quadratic stability result for singular switched systems with application to anti-windup control. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1917–1922, 2009.
- [SCSS2011] R. Shorten, M. Corless, S. Sajja, and S. Solmaz. On Padé approximations, quadratic stability and discretization of switched linear systems. *Systems & Control Letters*, 60 :683–689, 2011.
- [SG2011] Z. Sun and S. S. Ge. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. Communications and Control Engineering. Springer, 2011.
- [SGC1997] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on automatic control*, 42(7) :896–911, 1997.
- [SGT2006] R. G. Sanfelice, R. Goebel, and A. R. Teel. *Hybrid Systems : Computation and Control*, chapter A Feedback Control Motivation for Generalized Solutions to Hybrid Systems. In Hespanha and Tiwari [HT2006], 2006.
- [SH1969a] A. W. Starr and Y. C. Ho. Further properties of nonzero-sum differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3(4) :207–219, 1969.
- [SH1969b] A. W. Starr and Y. C. Ho. Nonzero-sum differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3(3) :184–206, 1969.
- [SKK2008] E. Semsar-Kazerooni and K. Khorasani. Optimal consensus algorithms for cooperative team of agents subject to partial information. *Automatica*, 44(11) :2766–2777, 2008.
- [SKK2009a] E. Semsar-Kazerooni and K. Khorasani. A game theory approach to multi-agent team cooperation. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4512–4518, St. Louis, MO, USA, 2009.
- [SKK2009b] E. Semsar-Kazerooni and K. Khorasani. Multi-agent team cooperation : A game theory approach. *Automatica*, 45 :2205–2213, 2009.
- [SN1999] R. N. Shorten and K. S. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1410–1414, San Diego, USA, 1999.
- [Sof2009] J. Sofrony. *Anti-windup Compensation of Input Constrained Systems : Synthesis using Riccati Equations*. Verlag Dr. Müller, 2009.
- [SRCS2013] S. Sajja, F. Rossi, P. Colaneri, and R. Shorten. Extensions of “Padé discretization for linear systems with polyhedral lyapunov functions” for generalised jordan structures. *IEEE Transactions on Automatic Control*, online, 2013.
- [SS1981] T. N. Sharma and V. Singh. On the absolute stability of multivariable discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26 :51–61, 1981.
- [ST1990] A. A. Stoorvogel and H. Trentelman. The quadratic matrix inequality in singular \mathcal{H}_∞ control with state feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28(5) :1190–1208, 1990.
- [Sto1992] A. A. Stoorvogel. *The \mathcal{H}_∞ Control Problem : A State Space Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1992.
- [Sus2000] H. J. Sussmann. *Nonlinear Control in the Year 2000*, chapter New Theories of Set-valued Differentials and New Versions of the Maximum Principle of Optimal Control Theory. Springer-Verlag, 2000.
- [SWM⁺2007] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Review*, 49(4) :545–592, 2007.
- [Sze1963] GP Szegö. On the absolute stability of a certain class of sampled-data control systems. *Proceedings of National Academy of Sciences*, (50) :558–560, 1963.
- [TB1997] J. Tsitsiklis and V. Blondel. The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard – when not impossible – to compute and to approximate. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 10 :31–40, 1997.

- [TE2006] M.C. Turner and L. Zaccarian (Editors). Special issue : Anti-windup. *International Journal of Systems Science*, 37(2) :65–139, 2006.
- [TGE2007] S. Tarbouriech, G. Garcia, and A.H. Glattfelder (Eds.). *Advanced strategies in control systems with input and output constraints*. LNCIS vol.346 Springer Verlag., 2007.
- [TGGQ2011] S. Tarbouriech, G. Garcia, J. M. Gomes da Silva Jr., and I. Queinnec. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer, 2011.
- [The2005] J. Theys. *Joint Spectral Radius : theory and approximations*. PhD thesis, UCL Belgium, 2005.
- [THP2003] M. C. Turner, G. Herrmann, and I. Postlethwaite. Discrete-time anti-windup : Part 1 - stability and performance. In *European Control Conference (ECC'03)*, 2003.
- [TMK2007] P. Y. Tiwari, E. F. Mulder, and M. V. Kothare. Synthesis of stabilizing antiwindup controllers using piecewise quadratic lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(12) :2341–2345, December 2007.
- [Tol1981] B. Tolwinski. Closed-loop Stackelberg solution to a multistage linear-quadratic game. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 34(4) :485–501, August 1981.
- [Tol1983] B. Tolwinski. A Stackelberg solution of dynamic games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(1) :85–93, January 1983.
- [TPG2006] S. Tarbouriech, C. Prieur, and J. M. Gomes da Silva Jr. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8) :1364–1371, 2006.
- [Tré2005] E. Trélat. *Contrôle optimal : théorie et applications*. Vuibert, 2005.
- [Tsy1955] Y. Z. Tsytkin. *Theory of relay systems*. Gostekhizdat, Moscou, 1955.
- [Tsy1962] Y. Z. Tsytkin. The absolute stability of large-scale nonlinear sampled-data systems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 145 :52–55, 1962.
- [TW1993] H. Trentelman and J. C. Willems, editors. *Essays on Control : Perspectives in the Theory and its Applications*. Birkhäuser, Boston, MA, 1993.
- [UGS2009] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. Automation and Control Engineering Series. CRC Press, second edition, 2009.
- [Utk1977] V. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2) :212–222, 1977.
- [Utk1992] V. Utkin. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer Verlag, 1992.
- [Var1996] A. Varga. Computation of Kronecker-like forms of a system pencil : Applications, algorithms and software. In *CACSD*. Paderborn, 1996.
- [vS1934] H. von Stackelberg. *Marktform und Gleichgewicht*. Springer, 1934.
- [vS1952] H. von Stackelberg. *The Theory of market economy*. Oxford University Press, 1952.
- [WD1997] M. Wicks and R. DeCarlo. Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1709–1713, 1997.
- [WFC2012] P. C.-Y. Weng, H.-Y. Fan, and E. K.-W. Chu. Low-rank approximation to the solution of a non-symmetric algebraic Riccati equation from transport theory. *Applied Mathematics and Computation*, 219 :729–740, 2012.
- [Why1934] W. M. Whyburn. Matrix differential equations. *American Journal of Mathematics*, 56(1/4) :587–592, 1934.
- [Wil1971] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6) :621–634, 1971.
- [Wit1966] H. S. Witsenhausen. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 11(2) :161–167, 1966.
- [Won1968] W. M. Wonham. On a matrix Riccati equation of stochastic control. *SIAM J. Control*, 6(4) :681–697, 1968.
- [Won1970] W. M. Wonham. *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, volume 1, chapter Random differential equations in control theory, pages 131–212. A.T. Bharucha-Reid, 1970.
- [WPD1994] M. Wicks, P. Peleties, and R. DeCarlo. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In *Proceedings 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3492–3497, Lake Buena Vista, FL, 1994.
- [Yak1962] V. A. Yakubovich. Solution of some matrix inequalities encountered in the automatic control theory. *Doklady Akademii Nak*, 43 :1304–1307, 1962.

- [Yak1971] V. A. Yakubovich. *S*-procedure in nonlinear control theory. *Vestnik Leningrad Univ.*, 1 :62–77 (en russe), 1971.
- [Ye1997] J. J. Ye. Optimal strategies for bilevel dynamic problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35 :512–531, 1997.
- [YMH1998] H. Ye, A.N. Michel, and L. Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :461–474, April 1998.
- [Zay2001] J. Zaytoon, editor. *Systèmes dynamiques hybrides*. Hermès Science Publication, Paris, 2001.
- [ZDG1996] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, 1996.
- [Zua2011] E. Zuazua. Switching control. *Journal of European Mathematical Society*, 13 :85–117, 2011.
- [ZWZ2012] X. Zhang, M. Wang, and J. Zhao. Stability analysis and antiwindup design of uncertain discrete-time switched linear systems subject to actuator saturation. *J Control Theory Appl*, 10(3) :325–331, 2012.
- [ZZ2012] X. Zhang and J. Zhao. \mathcal{L}_2 -gain analysis and anti-windup design of discrete-time switched systems with actuator saturation. *International Journal of Automation and Computing*, 9(4) :369–377, 2012.