

Université de Monastir

# THESE

présentée à

l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir



pour l'obtention du

**Doctorat en Génie Electrique**

par

**Anissa BEN AICHA**

Assistante en Génie Electrique

---

## Détection et localisation de défauts par Analyse en Composantes Principales certaine ou incertaine de type intervalle

---

Soutenue le 20 septembre devant le Jury d'Examen :

<i>Président :</i>	M. Hassani MESSAOUD	Professeur à l'ENIM
<i>Rapporteurs :</i>	Mme Moufida KSOURI M. Anas KAMOUN	Professeur à l'ENIT Professeur à l'ENIS
<i>Examineurs :</i>	M. José RAGOT M. Kamel BEN OTHMAN	Professeur à l'INPL (Co-directeur de thèse) Professeur à l'ENIM (Directeur de thèse)



À mon petit Mohamed Yassine.  
À mon cher mari.  
À mes chers parents.  
À mes chers frères et soeurs.  
À tous ceux que j'aime et tous ceux qui me sont chers.



## Avant propos

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Recherche en Automatique et Traitement du Signal et Image, LARATSI à l'ENIM, sous la direction de Monsieur le Professeur K. BENOTHMAN, en collaboration avec Monsieur le Professeur J. RAGOT du Centre de Recherche en Automatique de Nancy, CRAN à l'INPL.*

*Je suis particulièrement sensible au grand honneur que Monsieur le Professeur H. MESSAOUD m'a fait en acceptant de présider ce Jury. Qu'il reçoive l'expression de ma profonde gratitude.*

*J'exprime mes plus vifs remerciements, à Madame le Professeur M. KSOURI et à Monsieur le Professeur A. KAMOUN pour leur présence dans ce Jury qui m'honorent grandement.*

*Monsieur le Professeur J. RAGOT, m'a encouragé et aidé au cours de mon travail, me faisant profiter de son expérience. Je lui en suis très reconnaissante.*

*Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur G. Mourot, Ingénieur de recherche à l'INPL, pour ses judicieux conseils et son aide durant toute la durée de ce travail.*

*Monsieur le Professeur K. BEN OTHMAN, m'a suivi, guidé et aidé durant l'élaboration de ce travail. Qu'il soit très sincèrement remercié et assuré de ma profonde reconnaissance.*

*Enfin, j'exprime ma sympathie et ma reconnaissance à tous les membres du LARATSI et du CRAN, en particulier à ceux qui m'ont aidés de près ou de loin et prêtés leur concours.*



# Table des matières

Table des figures	ix
-------------------	----

Introduction générale	xi
-----------------------	----

<b>Chapitre 1</b> <b>Diagnostic de systèmes par Analyse en Composantes Principales (ACP)</b>
---

1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Principe de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) . . . . .	2
1.3	Indices statistiques pour la détection de défauts . . . . .	4
1.3.1	Indice $SPE$ . . . . .	6
1.3.2	Indice $SWE$ . . . . .	8
1.3.3	Indice $T^2$ de Hotelling . . . . .	9
1.3.4	Indice combiné $\zeta$ . . . . .	10
1.3.5	Distance de Mahalanobis . . . . .	11
1.4	Méthodes pour la localisation de défauts . . . . .	12
1.4.1	Calcul des contributions . . . . .	13
1.4.2	ACP partielles . . . . .	15
1.4.3	Méthode d'élimination . . . . .	16
1.4.4	Méthode de structuration des résidus . . . . .	17
1.4.4.1	Conditions d'existence de la transformation . . . . .	18
1.4.4.2	Méthode SRAMS . . . . .	19
1.4.5	Méthode de reconstruction de variables . . . . .	19
1.4.5.1	Principe de reconstruction . . . . .	20
1.4.5.2	Différents indices de localisation par reconstruction . . . . .	23
1.5	Conclusion . . . . .	27

**Chapitre 2**

**Contribution à la modélisation par ACP pour le diagnostic de systèmes**

2.1	Introduction . . . . .	30
2.2	Choix de la structure des modèles ACP . . . . .	30
2.2.1	Détection de défauts dans différents sous-espaces résiduels . . . . .	30
2.2.2	Principe de reconstruction à l'indicateur $SW E^{(i)}$ . . . . .	32
2.2.3	Méthodes de choix du nombre de composantes principales . . . . .	35
2.2.3.1	Méthodes existantes . . . . .	35
2.2.3.2	Méthode proposée . . . . .	37
2.3	Application . . . . .	41
2.3.1	Défauts simples . . . . .	41
2.3.2	Défauts multiples . . . . .	48
2.4	Conclusion . . . . .	50

**Chapitre 3**

**Contribution au diagnostic de systèmes par ACP intervalle**

3.1	Introduction . . . . .	56
3.2	Estimation des incertitudes du modèle ACP par intervalle . . . . .	56
3.2.1	Incertainces des valeurs propres . . . . .	57
3.2.2	Incertainces des vecteurs propres . . . . .	58
3.2.3	Détection de défauts par ACP intervalle . . . . .	60
3.3	Extension de la méthode de localisation par reconstruction à l'ACP intervalle . . . . .	61
3.3.1	Nouvelle méthode de reconstruction de variables par ACP intervalle . . . . .	62
3.3.2	Génération des résidus structurés intervalles . . . . .	64
3.3.3	Conditions de reconstruction par ACP intervalle . . . . .	66
3.4	Application . . . . .	67
3.4.1	Estimation des incertitudes du modèle ACP par intervalle . . . . .	68
3.4.2	Détection de défauts par ACP intervalle . . . . .	70
3.4.3	Localisation de défauts par ACP intervalle . . . . .	71
3.4.3.1	Analyse des directions de reconstruction utiles . . . . .	72
3.4.3.2	Isolation de défauts . . . . .	74
3.5	Conclusion . . . . .	79

---

**Chapitre 4****Diagnostic par ACP intervalle d'un système d'échangeurs thermiques**

4.1	Introduction . . . . .	84
4.2	Classification des échangeurs de chaleur . . . . .	84
4.2.1	Type d'échange . . . . .	84
4.2.2	Présence ou absence de paroi . . . . .	85
4.2.3	Mode de circulation des fluides . . . . .	85
4.2.4	Technologie de construction . . . . .	86
4.3	Modélisation du système d'échangeurs . . . . .	87
4.3.1	Mise en équation d'un échangeur à contre-courant . . . . .	88
4.3.2	Mise en équation d'un double échangeurs . . . . .	91
4.4	Application . . . . .	92
4.4.1	Linéarisation du modèle de simulation . . . . .	92
4.4.1.1	Expression de la température $T_{1,fs}$ . . . . .	93
4.4.1.2	Expression de la température $T_{1,cs}$ . . . . .	93
4.4.1.3	Expression de la température $T_{2,fs}$ . . . . .	94
4.4.1.4	Expression de la température $T_{2,cs}$ . . . . .	95
4.4.1.5	Application numérique . . . . .	95
4.4.2	Détermination des incertitudes du modèle ACP . . . . .	97
4.4.3	Détection de défauts . . . . .	98
4.4.4	Localisation de défauts . . . . .	98
4.4.4.1	Analyse des directions de reconstruction utiles . . . . .	98
4.4.4.2	Isolation de défauts . . . . .	101
4.5	Conclusion . . . . .	103
	<b>Conclusion générale</b>	<b>109</b>
	<b>Annexe A : Opérations arithmétiques sur les intervalles</b>	<b>111</b>
	<b>Annexe B : Méthodes de résolution d'un système d'équations linéaires intervalles</b>	<b>113</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>115</b>



# Table des figures

1.1	Illustration graphique de l'effet du centrage et de réduction d'une distribution bivariable (a) Distribution d'origine (b) Centrage et réduction de cette distribution . . . . .	3
1.2	Décomposition du vecteur de mesures [94] . . . . .	4
1.3	Procédure de localisation par ACP partielle structurée . . . . .	16
2.1	Schéma illustratif de l'évolution de $trace(\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)})$ , $j = 1 \dots m$ . . . . .	40
2.2	Evolution des mesures des 8 variables $x_j(k)$ . . . . .	42
2.3	Evolution de $VNR$ pour $j = 1 \dots 8$ . . . . .	43
2.4	Evolution de $trace(\mathbf{S}_5^{(j)})$ et $trace(\mathbf{S}_8^{(j)})$ pour $j = 1 \dots 8$ . . . . .	44
2.5	Evolution de $SNR_4^{SWE^{(j)}}$ et $SNR_6^{SWE^{(j)}}$ en fonction de $j$ . . . . .	45
2.6	Evolution des indicateurs $SWE^{(1)}(k)$ , $SWE^{(3)}(k)$ avec un défaut affectant $x_6$ . . . . .	47
2.7	Evolution des indicateurs $SWE_1^{(1)}(k)$ et $SWE_1^{(3)}(k)$ avec un défaut affectant $x_6$ . . . . .	48
2.8	Indicateur de localisation $\overline{SWE}_{\mathbf{R}}^{(3)}(k)$ en absence puis en présence de défaut de mesures . . . . .	49
2.9	Evolution de $SNR_{1,4,8}^{SWE^{(j)}}$ pour $j = 1 \dots 8$ . . . . .	49
2.10	Evolution de $trace(\mathbf{S}_{1,4,8}^{(j)})$ pour $j = 3 \dots 8$ . . . . .	50
2.11	Evolution des indicateurs $SWE^{(3)}(k)$ (déterminé par le $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$ ), $SWE^{(5)}(k)$ (déterminé par le $VNR$ ) et $SWE^{(6)}(k)$ (déterminé par la méthode proposée) avec de défauts affectant $x_1$ , $x_4$ et $x_8$ . . . . .	51
2.12	Evolution des indicateurs $SWE_{1,4}^{(3)}(k)$ (déterminé par la méthode $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$ ), $SWE_{1,4}^{(5)}(k)$ (déterminé par la méthode $VNR$ ) et $SWE_{1,4}^{(6)}(k)$ (déterminé par la méthode proposée) avec de défauts affectant $x_1$ , $x_4$ et $x_8$ . . . . .	52
2.13	Evolution des indicateurs $SWE_{1,4,8}^{(6)}(k)$ , $SWE_{1,3,8}^{(6)}(k)$ , $SWE_{1,2,3}^{(6)}(k)$ et $SWE_{1,2,4}^{(6)}(k)$ avec de défauts affectant $x_1$ , $x_4$ et $x_8$ . . . . .	53
3.1	Evolution des résidus intervalles et singletons . . . . .	70
3.2	Evolution des mesures des 7 variables en présence et en absence de défauts . . . . .	71
3.3	Résidus $[\tilde{\mathbf{t}}^i](k)$ ; $i = 1 \dots 4$ . . . . .	72
3.4	Résidus $[\tilde{\mathbf{t}}_1](k)$ et indicateur $[\Delta_1](k)$ . . . . .	74
3.5	Résidus $[\tilde{\mathbf{t}}_2](k)$ et indicateur $[\Delta_2](k)$ . . . . .	75
3.6	Résidus $[\tilde{\mathbf{t}}_3](k)$ et indicateur $[\Delta_3](k)$ . . . . .	76

---

3.7	Résidus $[\tilde{\mathbf{t}}_4](k)$ et indicateur $[\Delta_4](k)$ . . . . .	77
3.8	Résidus $[\tilde{\mathbf{t}}_5](k)$ et indicateur $[\Delta_5](k)$ . . . . .	78
3.9	Résidus $[\tilde{\mathbf{t}}_6](k)$ et indicateur $[\Delta_6](k)$ . . . . .	79
3.10	Résidus $[\tilde{\mathbf{t}}_7](k)$ et indicateur $[\Delta_7](k)$ . . . . .	80
3.11	Indicateurs $[\Delta_{1,2}](k)$ , $[\Delta_{1,3}](k)$ et $[\Delta_{1,2,3}](k)$ . . . . .	81
4.1	Echangeur à tubes et calandre . . . . .	86
4.2	Echangeur compact avec un fluide brassé et l'autre non brassé et un échangeur compact avec deux fluides brassés . . . . .	87
4.3	Echangeur à plaques et joints . . . . .	87
4.4	Echangeur thermique à contre-courant . . . . .	88
4.5	Élément d'échangeur de longueur $dx$ . . . . .	89
4.6	Deux échangeurs à contre-courant en série sur le circuit primaire . . . . .	91
4.7	Evolution des mesures des variables . . . . .	104
4.8	Résidus $[\tilde{\mathbf{t}}](k)$ . . . . .	105
4.9	Indicateur $[\Delta_2](k)$ . . . . .	105
4.10	Indicateur $[\Delta_4](k)$ . . . . .	105
4.11	Indicateur $[\Delta_5](k)$ . . . . .	105
4.12	Indicateur $[\Delta_6](k)$ . . . . .	105
4.13	Indicateur $[\Delta_7](k)$ . . . . .	106
4.14	Indicateur $[\Delta_8](k)$ . . . . .	106
4.15	Indicateur $[\Delta_9](k)$ . . . . .	106
4.16	Indicateur $[\Delta_{10}](k)$ . . . . .	106
4.17	Indicateur $[\Delta_{11}](k)$ . . . . .	106
4.18	Indicateur $[\Delta_{12}](k)$ . . . . .	106
4.19	Indicateur $[\Delta_{2,5}](k)$ . . . . .	107
4.20	Indicateur $[\Delta_{4,12}](k)$ . . . . .	107
4.21	Indicateur $[\Delta_{2,9}](k)$ . . . . .	107
4.22	Indicateur $[\Delta_{2,12}](k)$ . . . . .	107
4.23	Indicateur $[\Delta_{4,6}](k)$ . . . . .	107
4.24	Indicateur $[\Delta_{4,9}](k)$ . . . . .	107
4.25	Indicateur $[\Delta_{2,7,9}](k)$ . . . . .	108
4.26	Indicateur $[\Delta_{2,9,10}](k)$ . . . . .	108
4.27	Indicateur $[\Delta_{4,5,12}](k)$ . . . . .	108
4.28	Indicateur $[\Delta_{4,6,12}](k)$ . . . . .	108
4.29	Indicateur $\Delta_{2,5}(k)$ déterminé par ACP certaine . . . . .	108
4.30	Indicateur $\Delta_{4,9}(k)$ déterminé par ACP certaine . . . . .	108

# Introduction générale

Certes, l'automatisation des procédés industriels, de plus en plus complexes, a permis des gains importants en termes de productivité et de qualité. Cependant, les systèmes automatisés de production sont devenus vulnérables aux défaillances. Une vulnérabilité à l'origine de coûts importants en termes de sécurité pour faire face aux risques d'accidents, de pollutions, ... et en termes de disponibilité pour améliorer la productivité, ... En fait, une défaillance d'une partie du processus peut endommager tout le système de production pouvant engendrer des pertes en vies humaines et des dommages sur le plan économique et écologique. Ainsi, les défaillances plus ou moins critiques représentent une limite aux bénéfices résultant de l'automatisation.

Cette situation a justifié la mise en oeuvre d'une recherche scientifique ayant pour objectif le développement des approches fiables de surveillance de systèmes afin de détecter de façon précise et précoce l'apparition de défauts et de trouver des solutions adaptées à chaque procédé industriel.

La validation de mesures est essentielle pour la surveillance de fonctionnement de systèmes. Dans ce travail, on s'intéresse à la détection et la localisation de défauts capteurs à partir des mesures issues du système à surveiller.

Dans la littérature, il existe une multitude de méthodes pour aborder ce type de problème [95]. Parmi ces méthodes celle retenue dans ce travail est l'Analyse en Composantes Principales (ACP) connue sous le nom de transformée de Karhunen-Loève ou de transformée de Hotelling [47]. Elle a été largement utilisée pour la détection et la localisation de défauts capteurs [67], [36], [76], [79], [4] afin d'améliorer la surveillance et la conduite des systèmes. Cette technique est classée parmi les méthodes sans modèle a priori, le modèle se révèle a posteriori par la collecte des données recueillies sur le système en fonctionnement normal sans effectuer une distinction entre ses entrées et ses sorties. Son principe consiste à transformer les variables d'un système en un nombre restreint de nouvelles variables, appelées composantes principales, qui sont des combinaisons linéaires des variables d'origine, tout en préservant au maximum la variance des données mesurées sur un système. Ces nouvelles variables sont ensuite utilisées à des fins de modélisation, d'estimation d'état et de diagnostic de fonctionnement de systèmes. Cette réduction du nombre de variables n'est possible que si les variables initiales sont redondantes, cette redondance découlant directement des relations linéaires existantes entre les variables du processus. L'ACP définit ainsi un sous-espace de représentation (ou principal) contenant les variations significatives des données et un sous-espace résiduel, porté par les relations de redondance, contenant essentiellement les bruits affectant les mesures. Un test de cohérence vérifiant l'adéquation entre les mesures et les estimations fournies par ces relations permet de déterminer et d'isoler les capteurs défaillants. La performance de la procédure

de diagnostic en termes de détection et de localisation de défauts dépend directement de la qualité de ces relations ainsi que de leur structure c'est-à-dire du nombre de composantes principales retenues dans le modèle utilisé.

Ce mémoire est décomposé en quatre chapitres et organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre présente les procédures de diagnostic par ACP en termes de détection et de localisation de défauts capteurs. Dans une première partie, l'ACP est utilisée pour modéliser les relations existantes entre les variables mesurées sur le système en bon fonctionnement. Une fois le modèle ACP construit, les défauts peuvent être détectés par le biais des indicateurs de détection reposant sur l'espace résiduel, l'espace principal ou l'espace global. Après avoir détecté la présence de défauts, il est important de localiser la ou les variables défectueuses. Cette opération est réalisée à l'aide des approches de localisation qui seront explicitées dans la troisième partie de ce chapitre. Ces approches sont classées en deux groupes en fonction de la méthode utilisée pour la structuration des résidus : sans ou avec optimisation des résidus aux défauts [78].

La performance de la méthode de diagnostic dépend directement du nombre de composantes principales à retenir dans le modèle ACP [86]. Pour cet effet, dans le deuxième chapitre, nous proposons une nouvelle méthode de détermination des modèles ACP pour des fins de diagnostic. Cette méthode, basée sur le principe de reconstruction, permet d'optimiser la détection et la localisation de défauts simples ou multiples sur les variables redondantes ou non. L'aspect novateur réside dans l'optimisation des détecteurs ; à chaque défaut à détecter correspond un détecteur optimal au sens d'un critère qui sera précisé. La première section de ce chapitre est consacrée à la généralisation du principe de reconstruction et à la méthode de détermination du nombre de composantes principales. La dernière section illustre l'application des résultats méthodologiques sur les données issues d'un système linéaire dont les mesures sont corrompues par des bruits et affectées par un ou plusieurs défauts [7], [8].

Comme toute méthode d'analyse des données, les résultats fournis par ACP ne sont précis qu'en tenant compte des incertitudes du modèle [3], [81]. Ces incertitudes permettent la prise en compte des notions d'imprécision de variations des mesures qui peuvent être dues aux bruits. Pour pallier à cet inconvénient, nous proposons, dans la première partie du troisième chapitre, une nouvelle méthode analytique permettant d'estimer les incertitudes paramétriques du modèle ACP sous forme d'intervalle [69]. Comme l'ACP par intervalle n'a pas été appliquée aux procédures de diagnostic, la deuxième partie de ce chapitre concerne la détection de défauts sur les variables certaines par ACP intervalle. La troisième porte sur la localisation de défauts par extension du principe de reconstruction à l'ACP par intervalle puis par projection des reconstructions dans l'espace résiduel intervalle. Les variables reconstruites sont déterminées par résolution, à chaque instant, d'un système d'équations de type intervalle. Une analyse des conditions de reconstruction est également proposée, dans cette partie, afin de réduire le nombre de combinaisons de variables à reconstruire simultanément et de déterminer les défauts isolables. La dernière partie s'intéresse à l'application de l'ensemble des résultats novateurs sur un système sta-

---

tique soumis à des bruits et affecté par de défauts.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons d'appliquer les méthodes proposées précédemment sur un système d'échangeurs thermiques. L'échangeur de chaleur est un système permettant le transfert de chaleur d'un fluide chaud vers un fluide froid. Son utilisation est fréquente notamment dans l'industrie (transfert et récupération de l'énergie), l'habitat (chauffage et climatisation) et l'agro-alimentaire (conservation des produits et réfrigération) [68]. Cette utilisation nécessite une maintenance régulière afin de détecter de façon précoce les défauts et puis de les localiser. Le système considéré comprend deux échangeurs à contre-courant assemblés en série sur le circuit primaire. Après la présentation des échangeurs, la modélisation et la mise en équation du système d'application sont réalisées. Par la suite, on s'intéresse à la détection et la localisation de défauts affectant ce système linéarisé en utilisant la méthode d'ACP par intervalle. Enfin, une étude comparative est réalisée concernant le diagnostic par ACP intervalle et le diagnostic par ACP classique.



# 1

## Diagnostic de systèmes par Analyse en Composantes Principales (ACP)

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Principe de l'Analyse en Composantes Principales (ACP)</b>	<b>2</b>
<b>1.3</b>	<b>Indices statistiques pour la détection de défauts</b>	<b>4</b>
1.3.1	Indice <i>SPE</i>	6
1.3.2	Indice <i>SWE</i>	8
1.3.3	Indice $T^2$ de Hotelling	9
1.3.4	Indice combiné $\zeta$	10
1.3.5	Distance de Mahalanobis	11
<b>1.4</b>	<b>Méthodes pour la localisation de défauts</b>	<b>12</b>
1.4.1	Calcul des contributions	13
1.4.2	ACP partielles	15
1.4.3	Méthode d'élimination	16
1.4.4	Méthode de structuration des résidus	17
1.4.5	Méthode de reconstruction de variables	19
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>27</b>

---

## 1.1 Introduction

L'Analyse en Composantes Principales (ACP) permet de mettre en évidence les relations qui existent entre les variables, sans tenir compte, a priori, d'une quelconque structure [52]. En effet, l'ACP élabore implicitement un modèle du système à partir de données prélevées sur ce dernier en fonctionnement nominal. Cette technique descriptive peut être considérée comme une méthode d'identification de systèmes à part entière [66], [85]. L'identification du modèle repose sur deux étapes : la première consiste à estimer ses paramètres alors que la seconde consiste à déterminer sa structure.

Une fois le modèle ACP identifié, des résidus peuvent être générés en comparant le comportement observé à celui donné par le modèle ACP de référence. Ces résidus permettent de détecter puis de localiser l'ensemble des variables en défaut.

Ce chapitre concerne la présentation et le développement des procédures de diagnostic à base d'ACP en termes de détection et de localisation de défauts capteurs. Dans une première partie, l'ACP est utilisée pour modéliser les relations existantes entre les variables mesurées sur le système en bon fonctionnement. La deuxième partie s'intéresse à l'étude des indicateurs de détection de défauts. Ces indicateurs reposent sur l'espace résiduel, l'espace principal ou l'espace global. La troisième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des approches de localisation. Ces dernières sont classées en deux groupes en fonction de la méthode de structuration des résidus [78] : sans ou avec optimisation des résidus aux défauts.

## 1.2 Principe de l'Analyse en Composantes Principales (ACP)

Le but de l'ACP est d'identifier les relations linéaires existantes entre les différentes variables du système. L'identification du modèle ACP débute par la construction d'une matrice contenant l'ensemble des données disponibles sans distinction entre les entrées et les sorties du système. Ces données sont supposées être recueillies sur un système statique en fonctionnement normal (données "saines").

Sous cette hypothèse, considérons, à l'instant  $k$ , le vecteur des mesures suivant :

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_m(k)]^T \quad (1.1)$$

La matrice de données  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times m}$  formée par la concaténation des vecteurs  $\mathbf{x}(k)$  obtenus à différents instants est :

$$\mathbf{X} = [ \mathbf{x}(1) \ \dots \ \mathbf{x}(N) ]^T \quad (1.2)$$

Généralement, les données sont exprimées par des unités et des échelles différents. Pour cela, on centre, en premier lieu, les données. Puis, afin de rendre les résultats indépendants des unités utilisées pour les différentes variables, on réduit ces dernières par rapport à leur variance respective [78]. Les données ainsi obtenues sont centrées et réduites ; elles sont de moyenne nulle et de variance unité.

L'effet du centrage et de réduction d'une distribution de données est illustrée graphiquement par la figure 1.1.

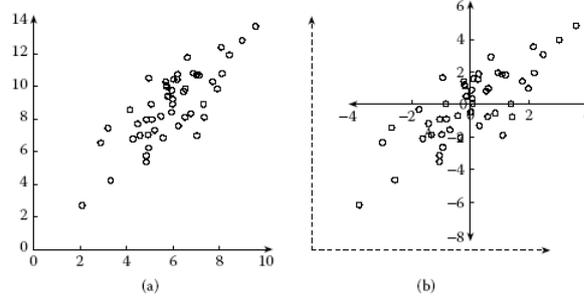


FIGURE 1.1 – Illustration graphique de l'effet du centrage et de réduction d'une distribution bivariable (a) Distribution d'origine (b) Centrage et réduction de cette distribution

L'estimation des paramètres du modèle ACP se ramène à la diagonalisation de la matrice des corrélations. Cette estimation implique la détermination de sa matrice des valeurs propres et de sa matrice des vecteurs propres.

L'ACP détermine une transformation linéaire optimale (vis-à-vis d'un critère de variance) du vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  en un vecteur de nouvelles variables  $\mathbf{t}(k)$  :

$$\mathbf{t}(k) = \mathbf{P}^T \mathbf{x}(k) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(k) = \mathbf{P} \mathbf{t}(k) \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{t}(k) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des composantes principales. Ces dernières peuvent être considérées comme de nouvelles variables, combinaisons linéaires des variables originelles, non corrélées entre elles.

$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est la matrice des vecteurs propres  $p_j$ ;  $j = 1 \dots m$  correspondant aux valeurs propres  $\lambda_j$  issues de la décomposition en vecteurs et valeurs propres de la matrice des corrélations  $\Sigma$  de  $\mathbf{X}$  :

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \quad \text{et} \quad \Sigma = \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^T \quad (1.4)$$

où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_m)$  désigne la matrice diagonale des valeurs propres ordonnées dans l'ordre décroissant de leurs amplitudes.

Les  $m$  valeurs propres sont réelles (positives par définition) alors que les  $m$  vecteurs propres sont distincts, orthogonaux et ils forment une base orthonormée :

$$\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}_m \quad (1.5)$$

Les relations (1.3) trouvent leur intérêt par diminution de la dimension de l'espace de représentation.

Une fois déterminé le nombre  $\ell$  de composantes principales à retenir, en considérant le partitionnement suivant :

$$\mathbf{P} = [\hat{\mathbf{P}} \mid \tilde{\mathbf{P}}], \quad \hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{m \times \ell} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{m \times (m-\ell)} \quad (1.6)$$

le vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  se décompose en un vecteur des estimées  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  et un vecteur des erreurs  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  :

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (1.7)$$

avec :

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k) &= (\mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{C}}) \mathbf{x}(k) \\ &= \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (1.9)$$

La matrice  $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T$  constitue le modèle ACP du système. Les deux matrices  $\hat{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{C}}$  sont symétriques [19] :

$$\hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{C}}^T = \hat{\mathbf{C}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{C}}^T = \tilde{\mathbf{C}} \quad (1.10)$$

et elles sont idempotentes [19] ; le vecteur des estimées et le vecteur des erreurs sont liés par :

$$\hat{\mathbf{x}}^T(k) \tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}^T(k) \underbrace{(\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{C}}))}_{=0} \mathbf{x}(k) = 0 \quad (1.11)$$

Ainsi, ce modèle décompose l'espace des données en deux sous-espaces orthogonaux comme l'illustre la figure 1.2 :

- l'espace principal de représentation (Principal Component Subspace PCS) est constitué par les  $\ell$  premiers vecteurs propres. Il contient les variations significatives des données.
- l'espace résiduel (Residual Subspace RS) est représenté par les  $(m - \ell)$  derniers vecteurs propres. Il contient essentiellement les bruits affectant les mesures et les variations dues aux erreurs du modèle. Ainsi, cet espace peut être utilisé pour la détection de défauts de façon analogue à l'espace de parité [31].

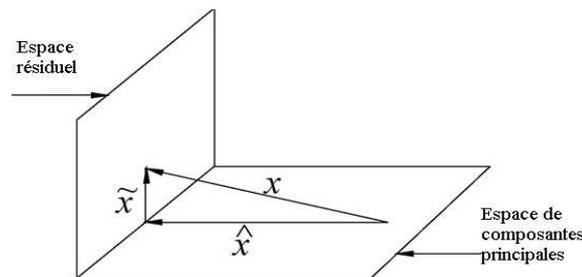


FIGURE 1.2 – Décomposition du vecteur de mesures [94]

### 1.3 Indices statistiques pour la détection de défauts

La phase de détection de défauts est liée à l'étape de génération des résidus ayant pour but de construire, à partir d'un modèle de bon fonctionnement et des mesures disponibles,

des signaux révélateurs de la présence de défauts, appelés résidus [25]. L'analyse de ces résidus assure la prise de décision quant à la présence ou l'absence de défauts.

En présence de défauts affectant un ensemble de variables  $\mathbf{F}$ , le vecteur des mesures s'écrit :

$$\mathbf{x}(k) = \underbrace{\mathbf{x}^0(k) + \epsilon(k)}_{=\mathbf{x}^*(k)} + \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \quad (1.12)$$

où  $\mathbf{x}^*(k)$  est le vecteur des mesures sans défaut,  $\mathbf{f}(k) \in \mathbb{R}^f$  ( $f \geq 1$ ) le vecteur des amplitudes de défaut et  $\Xi_{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{m \times f}$  la matrice de directions de défauts ;  $\mathbf{F}$  étant le sous-ensemble contenant les indices de directions de défauts. Cette matrice orthonormale est constituée de 1 pour indiquer la présence d'une variable en défaut (respectivement de 0 pour une variable saine).

Dès à présent, cette matrice est a priori inconnue, le diagnostic ayant précisément comme objectif de déterminer les directions de défauts.

Pour la suite, le signe \* sera adopté pour désigner l'ensemble des mesures non défectueuses et affectées de bruits de mesures (représentant le bon fonctionnement) à l'exception de : la matrice des corrélations  $\Sigma$ , la matrice des valeurs propres  $\Lambda$ , la matrice des vecteurs propres  $\mathbf{P}$ , la matrice  $\hat{\mathbf{C}}$  et la matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$  puisqu'elles ne sont définies qu'en bon fonctionnement.

Compte tenu de la définition (1.3), la projection du vecteur de mesures (1.12) dans l'espace principal est :

$$\hat{\mathbf{t}}(k) = \hat{\mathbf{P}}^T (\mathbf{x}^*(k) + \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k)) \quad (1.13)$$

Notons la projection des directions de défauts dans l'espace principal :

$$\hat{\Xi}_{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathbf{F}} \quad (1.14)$$

et la projection de vecteur de mesures sans défaut dans cet espace :

$$\hat{\mathbf{t}}^*(k) = \hat{\mathbf{P}}^T \hat{\mathbf{x}}^*(k) = \hat{\mathbf{P}}^T (\mathbf{x}^0(k) + \epsilon(k)) \quad (1.15)$$

Compte tenu des notations (1.14) et (1.15), le vecteur (1.13) s'écrit :

$$\hat{\mathbf{t}}(k) = \hat{\mathbf{t}}^*(k) + \hat{\Xi}_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \quad (1.16)$$

De même, la projection du vecteur des mesures (1.12) dans l'espace résiduel donne :

$$\tilde{\mathbf{t}}(k) = \tilde{\mathbf{P}}^T (\mathbf{x}^*(k) + \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k)) \quad (1.17)$$

Notons la projection des directions de défauts dans l'espace résiduel :

$$\tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathbf{F}} \quad (1.18)$$

et la projection de vecteur de mesures sans défaut dans cet espace :

$$\tilde{\mathbf{t}}^*(k) = \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}^*(k) = \tilde{\mathbf{P}}^T \epsilon(k) \quad (1.19)$$

Notons que la relation :

$$\tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}^0(k) = 0 \quad (1.20)$$

indique l'existence de  $(m - \ell)$  relations linéaires entre les composantes de  $\mathbf{x}^0$ .

Compte tenu de ces définitions (1.18) et (1.19), le vecteur des résidus (1.17) s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{t}}(k) = \tilde{\mathbf{t}}^*(k) + \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \quad (1.21)$$

Notons que l'expression "résidu" est utilisée pour illustrer le fait que la projection des mesures dans l'espace résiduel met en évidence les bruits affectant ces mesures ; de façon complémentaire, des projections d'amplitudes anormalement élevées dans cet espace peuvent être révélateurs de mesures anormales traduisant un dysfonctionnement. Pour la projection des observations dans l'espace principal, il reste l'influence des données (1.16). Un défaut perturbe à la fois les projections des observations dans l'espace principal et dans l'espace résiduel. Cependant, suivant le modèle, la projection de défauts peut avoir un impact plus important dans l'espace principal ou dans l'espace résiduel.

La mise en évidence de la présence de défauts est alors réalisée via un indice utilisant les variables dans l'un de ces sous-espaces : principalement *SPE* pour l'espace résiduel et  $T^2$  pour l'espace principal ou dans l'espace complet [67].

### 1.3.1 Indice *SPE*

L'indicateur *SPE* (Squared Prediction Error) assure la détection de défauts dans l'espace résiduel. Il se base sur l'utilisation des propriétés statistiques du vecteur des erreurs d'estimations (résidus)  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Cet indice est donné à chaque instant  $k$  par :

$$SPE(k) = \|\tilde{\mathbf{x}}(k)\|_2^2 = \tilde{\mathbf{x}}^T(k)\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (1.22)$$

Compte tenu de l'équation (1.9) et de la propriété d'idempotence de la matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$  (1.10), l'indicateur *SPE* (1.22) s'écrit :

$$SPE(k) = \mathbf{x}^T(k)\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) \quad (1.23)$$

A partir de l'équation (1.17), l'expression (1.23) s'écrit :

$$SPE(k) = \|\tilde{\mathbf{t}}(k)\|_2^2 \quad (1.24)$$

A un instant  $k$ , le processus est suspecté en défaut, si :

$$SPE(k) > \delta_\alpha^2 \quad (1.25)$$

où  $\delta_\alpha^2$  représente le seuil de détection du *SPE* pour un seuil de confiance  $\alpha$  donné. Le seuil de détection  $\delta_\alpha^2$  a été quantifié théoriquement par Box [10] sous l'hypothèse que les données suivent une distribution multivariable normale :

$$\delta_\alpha^2 = g\chi_{h,\alpha}^2 \quad (1.26)$$

avec :

$$g = \frac{\theta_2}{\theta_1} \quad \text{et} \quad h = \frac{\theta_1^2}{\theta_2} \quad (1.27)$$

où

$$\theta_i = \sum_{j=\ell+1}^m \lambda_j^i; i = 1, 2 \quad (1.28)$$

où  $\lambda_j^i$  est la  $j^{\text{ème}}$  valeur propre de  $\mathbf{\Lambda}$  à la puissance  $i$ .

En remplaçant la définition (1.21) dans l'expression (1.24), on a :

$$SPE(k) = \left\| \tilde{\mathbf{t}}^*(k) + \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \right\|_2^2 \quad (1.29)$$

Compte tenu de (1.29), pour que les défauts soient détectables quelles que soient leurs amplitudes, la condition suivante doit être vérifiée :

$$\left\| \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \right\|_2 = \sigma_{\max} \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \right) \neq 0 \quad (1.30)$$

où  $\sigma_{\max}(\ast)$  est la valeur singulière maximale de la matrice  $\ast$ .

En appliquant l'inégalité triangulaire à l'équation (1.29), on obtient :

$$\left\| \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \right\|_2 \leq \left\| \tilde{\mathbf{t}}(k) \right\|_2 + \left\| \tilde{\mathbf{t}}^*(k) \right\|_2 \quad (1.31)$$

Comme  $\left\| \tilde{\mathbf{t}}^*(k) \right\|_2^2$  représente le  $SPE$  en fonctionnement normal, alors  $\left\| \tilde{\mathbf{t}}^*(k) \right\|_2 \leq \delta_\alpha$ .

Par conséquent, l'équation (1.31) s'écrit :

$$\left\| \tilde{\mathbf{t}}(k) \right\|_2 \geq \left\| \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \right\|_2 - \delta_\alpha \quad (1.32)$$

Or, pour assurer la détection de défauts en utilisant le  $SPE$ , l'inégalité (1.25) doit être respectée ;  $\left\| \tilde{\mathbf{t}}(k) \right\|_2 \geq \delta_\alpha$ , l'équation (1.32) devient alors :

$$\left\| \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \right\|_2 \geq 2\delta_\alpha \quad (1.33)$$

En vertu de la condition (1.33) et des propriétés du norme 2, la projection de défauts dans l'espace résiduel avec l'indice  $SPE$ , notée  $\|f_{SPE}\|_2$ , doit vérifier l'inégalité suivante [19] :

$$\|f_{SPE}\|_2 \geq \frac{2\delta_\alpha}{\sigma_{\max} \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \right)} \quad (1.34)$$

L'indicateur  $SPE$  peut être interprété comme une mesure de variations non captées par le modèle ACP [49]. En d'autres termes, le  $SPE$  est un test global qui somme les résidus sans tenir compte de la différence de variances entre ceux-ci [16] et par conséquent les erreurs de modélisation vont être cumulées [35]. La sensibilité de l'indice  $SPE$  aux erreurs de modélisation peut entraîner de nombreuses fausses alarmes. Or un test de détection de défauts est considéré puissant si sa probabilité de fausses alarmes est faible alors que sa

probabilité de détection est importante.

Pour réduire le taux de fausses alarmes et par conséquent améliorer la qualité de détection, Harkat et al. [34] ont proposé d'utiliser le filtre EWMA [65]. Cependant, ce dernier introduit un retard à la détection. Il paraît ainsi évident que le  $SPE$  est un test relativement peu efficace. Face à ce problème, Harkat et al. [34] ont proposé d'appliquer l'indicateur  $SPE$  sur des sous-espaces de l'espace résiduel puisque les défauts affectant certaines variables sont détectables dans des sous-espaces résiduels de dimension bien inférieure à celle associée à l'indicateur  $SPE$ .

### 1.3.2 Indice $SWE$

L'indice  $SWE$  (Squared Weighted Error) encore appelé indice de Hawkins est une implémentation symétrique de l'indice  $T^2$  dans l'espace résiduel. L'indice  $SWE$  peut être aussi défini comme étant le  $SPE$  pondéré par l'inverse des variances des  $(m - \ell)$  dernières composantes principales, son expression est :

$$\begin{aligned} SWE(k) &= \tilde{\mathbf{t}}^T(k) \left( \tilde{\mathbf{\Lambda}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{t}}(k) \\ &= \left\| \left( \tilde{\mathbf{\Lambda}} \right)^{-1/2} \tilde{\mathbf{t}}(k) \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

où  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$  représente la matrice diagonale contenant les  $(m - \ell)$  dernières valeurs propres de la matrice des corrélations  $\mathbf{\Sigma}$ .

A l'instant  $k$ , le processus est supposé en défaut, si :

$$SWE(k) > \chi_{\alpha, m-\ell}^2 \quad (1.36)$$

où  $\chi_{\alpha, m-\ell}^2$  est le seuil de détection de  $SWE$ .

En supposant que le nombre d'observations  $N$  est important, ce seuil peut être approximé, pour un seuil de confiance  $\alpha$  donné, par une distribution du  $\chi^2$  avec  $(m - \ell)$  degrés de liberté.

L'indice  $SWE$  n'impose aucune supposition sur la distribution des variables du processus, mais il suppose que les résidus  $\tilde{\mathbf{t}}$  sont des bruits blancs gaussiens centrés [34].

Avec cet indicateur et compte tenu de l'expression (1.21), pour que les défauts soient détectables quelque soient leurs amplitudes, il faut que :

$$\sigma_{\max} \left( \left( \tilde{\mathbf{\Lambda}} \right)^{-1/2} \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \right) \neq 0 \quad (1.37)$$

Théoriquement, l'indice  $SWE$  n'est défini que si les dernières valeurs propres de la matrice  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$  sont non nulles. Les mesures étant entachées de bruit de mesures, il est peu probable que la matrice diagonale  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$  contienne des valeurs propres nulles. Par conséquent, la condition précédente est équivalente à :

$$\sigma_{\max} \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \right) \neq 0 \quad (1.38)$$

De plus assurer la détection de défauts en utilisant le  $SWE$ , leur projection dans l'espace résiduel, notée  $\|f_{SWE}\|_2$ , doit satisfaire :

$$\|f_{SWE}\|_2 \geq \frac{2\chi_{\alpha, m-\ell}}{\sigma_{\max} \left( \left( \tilde{\Lambda} \right)^{-1/2} \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \right)} \quad (1.39)$$

En présence des erreurs de modélisation, cet indicateur est plus robuste à la détection de défauts que l'indicateur  $SPE$  [64], [87]. En effet, la présence des erreurs de modélisation se traduit par une augmentation des variances des projections des observations dans l'espace résiduel. Les fortes variances peuvent masquer les défauts avec l'indice  $SPE$  alors qu'avec l'indice  $SWE$  la pondération avec les valeurs propres de la matrice des corrélations peut permettre d'éviter ce problème.

### 1.3.3 Indice $T^2$ de Hotelling

L'indice  $T^2$  de Hotelling mesure les variations des projections des observations dans l'espace principal. Il est calculé à partir des  $\ell$  premières composantes principales :

$$\begin{aligned} T^2(k) &= \hat{\mathbf{t}}^T(k) \left( \hat{\Lambda} \right)^{-1} \hat{\mathbf{t}}(k) \\ &= \left\| \left( \hat{\Lambda} \right)^{-1/2} \hat{\mathbf{t}}(k) \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (1.40)$$

où  $\hat{\Lambda}$  représente la matrice diagonale contenant les  $\ell$  premières valeurs propres de la matrice des corrélations  $\Sigma$ .

Le processus est supposé en défaut à l'instant  $k$ , si :

$$T^2(k) > \chi_{\alpha, \ell}^2 \quad (1.41)$$

où  $\chi_{\alpha, \ell}^2$  est le seuil de détection de  $T^2$ .

En supposant que le nombre d'observations  $N$  est important, ce seuil peut être approximé, pour un seuil de confiance  $\alpha$  donné, par une distribution du  $\chi^2$  avec  $\ell$  degrés de liberté.

Avec cet indicateur et compte tenu de l'expression (1.13), pour que les défauts soient détectables quelque soient leurs amplitudes, il faut que :

$$\sigma_{\max} \left( \left( \hat{\Lambda} \right)^{-1/2} \hat{\Xi}_{\mathbf{F}} \right) \neq 0 \quad (1.42)$$

Comme les  $\ell$  premières valeurs propres sont différentes de zéro, la condition (1.42) se ramène alors à :

$$\sigma_{\max} \left( \hat{\Xi}_{\mathbf{F}} \right) \neq 0 \quad (1.43)$$

Pour assurer la détection de défauts en utilisant l'indice  $T^2$ , leurs amplitudes notée  $\|f_{T^2}\|_2$  doivent respecter l'inégalité suivante [19] :

$$\|f_{T^2}\|_2 \geq \frac{2\chi_{\alpha, \ell}}{\sigma_{\max} \left( \left( \hat{\Lambda} \right)^{-1/2} \hat{\Xi}_{\mathbf{F}} \right)} \quad (1.44)$$

L'utilisation de la statistique  $T^2$  pour la détection de défauts capteurs en particulier ceux de faible amplitude n'est pas performante puisque les variations des projections des observations dans l'espace principal dues aux défauts peuvent être masquées par leurs variations normales.

### 1.3.4 Indice combiné $\zeta$

Dans certains cas, le  $SPE$  est meilleur comparé au  $T^2$ . Dans d'autres cas, c'est tout à fait l'inverse [67]. Pour réduire cet effet, Yue et Qin [92] ont proposé de définir un indice global couvrant tout l'espace de représentation des données, combinaison des deux indices précédents et normalisé par leurs seuils respectifs. Cette statistique combinée, notée  $\zeta$ , a pour expression :

$$\begin{aligned}\zeta(k) &= \frac{SPE(k)}{\delta_\alpha^2} + \frac{T^2}{\chi_{l,\alpha}^2} \\ &= \mathbf{x}^T(k)\mathbf{M}\mathbf{x}(k) = \left\| \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{x}(k) \right\|_2^2\end{aligned}\quad (1.45)$$

où  $\mathbf{M}$  est une matrice définie positive donnée par :

$$\mathbf{M} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T}{\delta_\alpha^2} + \frac{\hat{\mathbf{P}}(\hat{\Lambda})^{-1}\hat{\mathbf{P}}^T}{\chi_{l,\alpha}^2}\quad (1.46)$$

et où  $\delta_\alpha^2$  et  $\chi_{l,\alpha}^2$  représentent respectivement les seuils de détection de  $SPE$  et de  $T^2$ . Yue et Qin [92] ont déterminé le seuil de détection de  $\zeta$  à partir des résultats de Box [10]. Pour un seuil de confiance  $\alpha$  donné, cet indice est approximé par la loi suivante :

$$\zeta(k) \sim g\chi_h^2\quad (1.47)$$

où  $g$  et  $h$  désignent respectivement le coefficient et le nombre de degré de liberté, ils sont donnés par :

$$g = \frac{\text{trace}((\Sigma\mathbf{M})^2)}{\text{trace}(\Sigma\mathbf{M})} = \frac{\sum_{j=1}^m \gamma_j^2}{\sum_{j=1}^m \gamma_j} \quad \text{et} \quad h = \frac{(\text{trace}(\Sigma\mathbf{M}))^2}{\text{trace}((\Sigma\mathbf{M})^2)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^m \gamma_j\right)^2}{\sum_{j=1}^m \gamma_j^2}\quad (1.48)$$

où  $\gamma_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  valeur propre de la matrice  $\Sigma\mathbf{M}$ .

Pour simplifier le calcul, Qin [67] a montré que :

$$\text{trace}(\Sigma\mathbf{M}) = \frac{l}{\chi_{l,\alpha}^2} + \frac{\sum_{j=\ell+1}^m \lambda_j}{\delta_\alpha^2}\quad (1.49)$$

$$\text{trace}((\Sigma\mathbf{M})^2) = \frac{l}{\chi_{l,\alpha}^4} + \frac{\sum_{j=\ell+1}^m \lambda_j^2}{\delta_\alpha^4}\quad (1.50)$$

où  $\lambda_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  valeur propre de la matrice des corrélations  $\Sigma$ .  
 A l'instant  $k$ , le processus est déclaré contenir un défaut, si :

$$\zeta(k) > g\chi_{h,\alpha}^2 \quad (1.51)$$

Pour que les défauts soient détectables quelque soient leurs amplitudes, il faut que :

$$\sigma_{\max} \left( \mathbf{M}^{1/2} \Xi_{\mathbf{F}} \right) \neq 0 \quad (1.52)$$

Pour assurer la détection de défauts en utilisant l'indice combiné, il faut que leurs amplitudes  $\|f_{\zeta}\|_2$  vérifient l'inégalité suivante :

$$\|f_{\zeta}\|_2 \geq \frac{2(g\chi_h^2)^{1/2}}{\sigma_{\max} \left( \mathbf{M}^{1/2} \Xi_{\mathbf{F}} \right)} \quad (1.53)$$

### 1.3.5 Distance de Mahalanobis

La distance de Mahalanobis correspond à l'indice  $T^2$  appliqué à l'ensemble de l'espace [67] :

$$\begin{aligned} D(k) &= \mathbf{x}^T(k) \Sigma^{-1} \mathbf{x}(k) \\ &= \left\| \Sigma^{-1/2} \mathbf{x}(k) \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Cette distance peut être exprimée de manière directe avec les indices  $T^2$  et  $SWE$  :

$$D(k) = T^2(k) + SWE(k) \quad (1.55)$$

Le processus est considéré en fonctionnement anormal à l'instant  $k$ , si :

$$D(k) > \chi_{m,\alpha}^2 \quad (1.56)$$

où  $\chi_{m,\alpha}^2$  est le seuil de détection de  $D$  pour un seuil de confiance  $\alpha$  donné.

En supposant que le nombre d'observations  $N$  est important, le seuil de détection est approximé par une distribution du  $\chi^2$  avec  $m$  degrés de liberté.

Pour que les défauts soient détectables quelque soient leurs amplitudes, il faut que :

$$\sigma_{\max} \left( \Sigma^{-1/2} \Xi_{\mathbf{F}} \right) \neq 0 \quad (1.57)$$

La condition suffisante de détection en utilisant la distance de Mahalanobis est explicitée par :

$$\|f_D\|_2 \geq \frac{2\chi_{\alpha,m}}{\sigma_{\max} \left( \Sigma^{-1/2} \Xi_{\mathbf{F}} \right)} \quad (1.58)$$

En présence de bruit de mesures, la matrice  $\Sigma$  est de plein rang. Par conséquent, l'indice  $D$  est bien défini et il permet de détecter l'ensemble de défauts affectant le processus. Tong et Crowe [83] ont signalé que l'utilisation de la distance de Mahalanobis pour la détection de défauts augmente la probabilité des fausses alarmes et des erreurs de non détection. Ceci

s'explique par le fait que la distance de Mahalanobis ne fait aucune distinction entre le bruit affectant les données. Dans le cas particulier où le nombre de composantes principales est égal à la dimension des données, le  $SPE$  n'est plus défini et l'indice  $T^2$ , la distance de Mahalanobis et l'indice combiné sont équivalents.

**Remarques :**

- Pratiquement, si les seuils de détection des indicateurs ne sont pas adéquats, ils peuvent être fixés par apprentissage à partir des données réputées saines [34].
- Compte tenu des expressions des indices de détection (1.23), (1.35), (1.40), (1.45) et (1.54), ces derniers peuvent s'écrire sous la forme généralisée suivante :

$$\Psi(k) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{N}\mathbf{x}(k) = \left\| \mathbf{N}^{1/2}\mathbf{x}(k) \right\|_2^2 \quad (1.59)$$

où  $\mathbf{N}$  est une matrice symétrique qui dépend de l'indicateur de détection. Elle est donnée par le tableau 1.1 pour les différents indicateurs de détection.

TABLE 1.1 – Valeurs de la matrice  $\mathbf{N}$  en fonction des indicateurs de détection

$\Psi$	Valeur de la matrice $\mathbf{N}$
$SPE$	$\tilde{\mathbf{C}}$
$SWE$	$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}^T$
$T^2$	$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\hat{\mathbf{P}}^T$
$\zeta$	$\mathbf{M}$
$D$	$\mathbf{\Sigma}$

Les performances des ces indicateurs en termes de robustesse aux erreurs de modélisation ont été comparées [78]. Tharrault et al. [78] ont montré que dans le cas où le nombre de composantes principales retenu dans le modèle ACP est correct, les résultats fournis par les différents indices sont sensiblement identiques. Dans le cas contraire où ce nombre est incorrect, les indices de détection tenant compte des valeurs propres ( $SWE$ ,  $T^2$  et  $D$ ) donnent de meilleurs résultats comparés aux indices  $SPE$  et  $\zeta$ . Ils sont ainsi plus robustes aux erreurs de modélisation que ces derniers.

## 1.4 Méthodes pour la localisation de défauts

La phase de détection de défauts doit être complétée par une phase de localisation ou d'isolation de défauts permettant de préciser la ou les variables en cause. Pour la réaliser, on construit, en premier lieu, un ensemble des résidus qui dépendent a priori de tous les défauts appelés "résidus primaires". Les combinaisons linéaires de ces derniers forment des nouveaux résidus insensibles à certain défauts [20].

Concernant la localisation de défauts par ACP, on distingue trois approches. La première se base sur la structuration des résidus comme dans le cas de l'espace de parité. D'autres approches utilisent des bancs de modèles où chacun est sensible à un ensemble de défauts et insensible aux autres, tel que l'approche par ACP partielles (utilise des ACP avec des ensembles réduits de variables) ou encore l'approche par élimination (génère des

résidus en éliminant à chaque fois une variable de l'ensemble des variables à surveiller). Basée sur le même principe, on trouve l'approche reposant sur le principe de reconstruction. La dernière méthode se base sur le calcul des contributions des différentes variables à l'indice de détection [4].

Ces approches peuvent être rassemblées en deux groupes en fonction de la méthode utilisée pour la structuration des résidus [78]. Dans ce contexte, on distingue les méthodes de localisation sans ou avec optimisation des résidus aux défauts.

Dans ce qui suit, on présente le principe de ces méthodes ainsi que leurs limites d'application.

### A- Méthodes sans optimisation des résidus aux défauts

Dans ce groupe des méthodes, on trouve :

- le calcul des contributions,
- les ACP partielles,
- la méthode d'élimination.

#### 1.4.1 Calcul des contributions

L'approche de localisation par calcul des contributions est très répandue [66], [51], [33], [87], [67], [1]. Elle se base sur la quantification de la contribution de chaque variable du système à la statistique de détection (calculée à l'instant de détection). Les variables ayant les plus grandes contributions par rapport aux autres sont suspectées en défaut. Plusieurs approches ont été proposées pour définir la contribution des variables [14], [63], [66], [87], [89]. La plupart des travaux sont basés sur les définitions des contributions aux statistiques  $SPE$  et  $T^2$  [66], [51].

L'expression générale des différents indices (1.59) s'écrit [1] :

$$\begin{aligned}\Psi(k) &= \sum_{j=1}^m (\xi_j^T \mathbf{N} \mathbf{x}(k))^2 \\ &= \sum_{j=1}^m \mathbf{c}_j^\Psi(k)\end{aligned}\tag{1.60}$$

où  $\mathbf{c}_j^\Psi(k)$  désigne la contribution de la  $j^{\text{ème}}$  variable à l'indice de détection approprié  $\Psi$ , la matrice  $\mathbf{N}$  est donnée par le tableau 1.1 et  $\xi_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice identité correspondant à la sélection de la  $j^{\text{ème}}$  variable de  $\mathbf{x}(k)$  ( $x_j(k)$ ).

Toutefois, il est intéressant de diviser chaque contribution  $\mathbf{c}_j^\Psi(k)$  par son seuil correspondant  $\tau_j^\Psi$  afin de normaliser les contributions des différents blocs à 1 [87]. Le rapport obtenu est utilisé comme un indicateur de l'occurrence de défauts. En effet, la  $j^{\text{ème}}$  variable est considérée en défaut, à l'instant  $k$ , si :

$$\frac{\mathbf{c}_i^\Psi(k)}{\tau_j^\Psi} > 1\tag{1.61}$$

où  $\tau_j^\Psi$  suit une loi de  $\chi^2$ , les résultats de Box [10] permettent de déterminer son coefficient  $r_j^\Psi$  et son degré de liberté  $b_j^\Psi$  pour un seuil  $\alpha$  donné :

$$\tau_j^\Psi \equiv r_j^\Psi \chi_{b_j^\Psi, \alpha}^2\tag{1.62}$$

avec

$$r_j^\Psi = \frac{\text{trace} \left( \left( \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{N}^{1/2} \xi_j \xi_j^T \mathbf{N}^{1/2} \right)^2 \right)}{\text{trace} \left( \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{N}^{1/2} \xi_j \xi_j^T \mathbf{N}^{1/2} \right)} \quad \text{et} \quad b_j^\Psi = \frac{\left( \text{trace} \left( \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{N}^{1/2} \xi_j \xi_j^T \mathbf{N}^{1/2} \right) \right)^2}{\text{trace} \left( \left( \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{N}^{1/2} \xi_j \xi_j^T \mathbf{N}^{1/2} \right)^2 \right)} \quad (1.63)$$

qui se simplifient :

$$r_j^\Psi = \xi_j^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{N} \xi_j \quad \text{et} \quad b_j^\Psi = 1 \quad (1.64)$$

Compte tenu du tableau 1.1, en remplaçant la matrice  $\mathbf{N}$  par sa valeur correspondant, on obtient la contribution à chaque indice et le seuil de normalisation qui lui est associé.

Miller et al. [58] ont proposé la contribution exacte de la  $j^{\text{ème}}$  variable à la statistique *SPE* :

$$\mathbf{c}_j^{\text{SPE}}(k) = \left( \xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \right)^2 = \tilde{x}_j(k)^2 \quad (1.65)$$

La contribution de la  $j^{\text{ème}}$  variable à la statistique  $T^2$  a été proposée par Wise et al. [89] :

$$\mathbf{c}_j^{T^2}(k) = \left( \xi_j^T \mathbf{G}^{1/2} \mathbf{x}(k) \right)^2 \quad (1.66)$$

Alcala et Qin [1] ont défini la contribution de la  $j^{\text{ème}}$  variable à la statistique combinée  $\zeta$  :

$$\mathbf{c}_j^\zeta(k) = \left( \xi_j^T \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{x}(k) \right)^2 \quad (1.67)$$

Il existe d'autres définitions des contributions aux statistiques  $T^2$  et  $\zeta$ , ces définitions sont des approximations [14], [63], [66].

On peut également définir la contribution à l'indice *SWE* notée  $\mathbf{c}_j^{\text{SWE}}$  (1.68) et la contribution à la distance de Mahalanobis  $D$  notée  $\mathbf{c}_j^D$  (1.69) :

$$\mathbf{c}_j^{\text{SWE}}(k) = \left( \xi_j^T \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{x}(k) \right)^2 \quad (1.68)$$

$$\mathbf{c}_j^D(k) = \left( \xi_j^T \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{x}(k) \right)^2 \quad (1.69)$$

Cependant, les contributions aux différents indicateurs de détection sont sensibles aux amplitudes des variables [33]. Les variables ayant les valeurs les plus élevées ont des fortes probabilités d'être suspectées en défaut conduisant ainsi à des fausses localisations. En effet, Yoon et MacGregor [91] ont prouvé que, dans le cas de défauts capteurs simples et quelque soit l'amplitude de défaut, la contribution classique ne peut pas garantir que le capteur en défaut est celui ayant la plus forte contribution.

Pour pallier aux inconvénients précités, une approche appelée contribution hiérarchique a été proposée [57], [66]. Le principe de cette méthode consiste à diviser les  $m$  variables en  $n$  blocs et à calculer les contributions des différents blocs. Comparée à l'approche de contribution classique, la contribution hiérarchique donne une indication plus claire de l'ensemble des variables en défaut [67]. Cependant, la performance de cette méthode

de localisation est directement liée au choix des variables relatives aux différents blocs. Qin [67] a proposé de faire le partitionnement selon la connaissance physique ou chimique du processus. Afin de tirer des informations plus précises concernant les défauts, Guerfel et al. [28] proposent une méthode heuristique de partitionnement. Son principe consiste à ramener la moyenne des contributions des variables à l'indicateur de détection de chaque bloc au même ordre de grandeur en fonctionnement nominal. La présence de défauts dans un bloc se traduit par l'augmentation des contributions de toutes ses variables par rapport à leurs valeurs nominales. L'élévation la plus significative est celle des variables défectueuses. Dans le cas où ce partitionnement n'est pas respecté, cette augmentation peut être masquée par les variables ayant les plus grandes contributions en fonctionnement nominal. Dans le cas contraire, la probabilité de fausses localisations est minimisée.

### 1.4.2 ACP partielles

Gertler [24] utilise une structuration particulière des résidus appelés ACP partielles ou modèles partiels. L'ACP partielle consiste à réduire le vecteur de données en écartant certaines variables du vecteur de départ. Ainsi, les résidus sont sensibles uniquement aux défauts associés aux variables formant le vecteur réduit. La procédure consiste à structurer les indices de détection (utilisant l'indicateur  $SPE$ ) pour les ACP partielles. Une matrice des signatures expérimentales est obtenue suite à un test logique de ces indices par rapport à leurs seuils respectifs. Le principe de cette méthode est explicité par l'algorithme suivant [39] :

#### a- Procédure de structuration des résidus

Cette procédure consiste à :

- Appliquer l'ACP à la matrice des données pour retenir les variables les plus corrélées.
- Construire une matrice de signatures théoriques fortement localisable.
- Construire un ensemble de modèles ACP partielles où chaque modèle correspond à une ligne de la matrice d'incidence (prendre les variables ayant un 1 sur cette ligne).
- Déterminer le seuil de détection de chaque modèle partiel.

**Remarque :** La matrice d'incidence ou matrice des signatures théoriques traduit la sensibilité des résidus par rapport aux défauts possibles [20]. Elle est constituée de 0 pour indiquer l'insensibilité des résidus aux défauts et de 1 pour indiquer la sensibilité.

#### b- Procédure de surveillance en ligne

Le test de localisation peut s'effectuer en ligne comme l'illustre la figure 1.3 [39] :

- Calculer le  $SPE_i$  relatif au  $i^{\text{ème}}$  modèle.
- Comparer l'indice  $SPE_i$  au seuil approprié  $Seuil_i$  et formuler la signature expérimentale du défaut :

$$Se_i = \begin{cases} 0 & \text{si } SPE_i \leq Seuil_i \\ 1 & \text{si } SPE_i > Seuil_i \end{cases} \quad (1.70)$$

- Comparer la signature expérimentale du défaut aux colonnes de la matrice de signatures théoriques pour arriver à une décision de localisation.

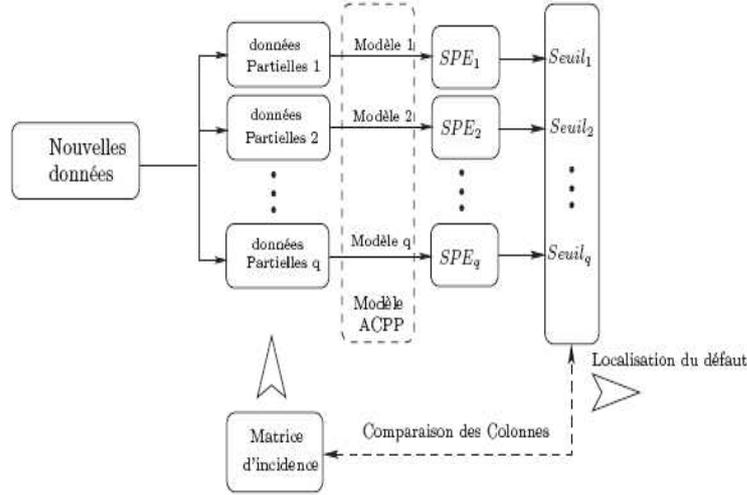


FIGURE 1.3 – Procédure de localisation par ACP partielle structurée

Pratiquement, certains indices  $SPE_i$  sont entachés des erreurs de modélisation et présentent des taux de fausses alarmes élevés. Pour optimiser la localisation de défauts, Gertler et Cao [27] ont proposé une méthode de construction de modèles partiels structurés. Cependant, cette approche présente plusieurs inconvénients. D'une part, l'utilisation de l'indice  $SPE$  comme indicateur de défaut permet d'accumuler les erreurs de modélisation. D'autre part, les modèles partiels sont construits uniquement en fonction de l'occurrence de défauts dans les résidus alors qu'il faut s'assurer que les modèles ACP réduits ont les capacités désirées en termes de détectabilité de défauts [35]. En effet, l'utilisation d'une partie des variables pour construire les modèles partiels peut entraîner une diminution du nombre d'équations de redondance et par conséquent une diminution des possibilités de détection et de localisation de défauts. En fait, un défaut n'est pas détectable lorsqu'il est de faible amplitude, mais notamment si sa sensibilité au résidu est faible.

### 1.4.3 Méthode d'élimination

Cette approche, proposée par Stork [75], consiste à éliminer à chaque fois une variable de l'ensemble des variables à surveiller et à calculer de nouveau l'indice  $SPE$ . Cet indice, calculé après élimination de la  $j^{\text{ème}}$  variable, est noté  $SPE_{-j}$ . Son expression est donnée, à l'instant  $k$ , par :

$$SPE_{-j}(k) = \mathbf{x}_{-j}^T(k)(\mathbf{I}_{m-1} - \hat{\mathbf{P}}_{-j}\hat{\mathbf{P}}_{-j}^T)\mathbf{x}_{-j}(k) \quad ; j \in \{1, \dots, m\} \quad (1.71)$$

où  $\mathbf{x}_{-j}(k) \in \mathbb{R}^{m-1}$  correspond au vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  obtenu après élimination de la  $j^{\text{ème}}$  variable et  $\hat{\mathbf{P}}_{-j}$  correspond à la matrice  $\hat{\mathbf{P}}$  du modèle ACP dont la  $j^{\text{ème}}$  ligne est éliminée.

La quantité, définie par  $\mathbf{Q}_{-j}$ , représente le rapport entre le  $SPE_{-j}(k)$  et son seuil noté

$\delta_{\alpha,-j}^2$  [41]. Elle est calculée, à l'instant  $k$ , pour les  $m$  modèles comme suit :

$$\mathbf{Q}_{-j}(k) = \frac{SPE_{-j}(k)}{\delta_{\alpha,-j}^2} \quad (1.72)$$

La variable éliminée, pour laquelle le rapport  $\mathbf{Q}_{-j}(k)$  est le plus petit, est considérée comme la variable incriminée.

Cette méthode permet de localiser un défaut dans l'espace résiduel. Cependant, sa sensibilité aux erreurs de modélisation peut engendrer de fausses localisations [34]. Cette sensibilité est due conjointement à l'utilisation de l'indicateur de détection  $SPE$  et au manque de redondance dans les modèles ACP choisis. En fait, l'élimination d'une ligne de la matrice  $\hat{\mathbf{P}}$  crée un déséquilibre dans les équations permettant de générer les résidus (dans le cas où les équations sont équilibrées, les résidus générés sont statistiquement nuls). Les indices de détection  $SPE_{-j}(k)$  correspondant présentent ainsi un taux de fausses alarmes élevé pouvant interférer la localisation de défaut.

### B- Méthodes à base d'optimisation des résidus aux défauts

Dans cette catégorie d'approches, on distingue :

- l'approche de structuration des résidus,
- la méthode de reconstruction de variables.

#### 1.4.4 Méthode de structuration des résidus

Cette approche de localisation, présentée initialement par Gertler [23], s'inspire des méthodes de diagnostic basées sur la redondance analytique qui utilise un système d'équations reliant ses sorties et ses entrées.

Cette méthode débute par la définition de la matrice des signatures théoriques. Pour éviter le risque d'une mauvaise localisation, cette matrice doit être fortement localisable [20]. Le tableau 1.2 présente un exemple d'une matrice des signatures théoriques à quatre résidus [20]. Une fois la table des signatures théoriques construite, on applique à chaque résidu une procédure de détection afin d'obtenir la signature réelle des résidus à chaque instant. Si cette signature réelle est nulle, alors le système est exempt de défaut. En présence d'un défaut, au moins un des résidus générés est sensible à ce défaut et la signature réelle devient alors non nulle. La procédure de localisation consiste, ensuite, à faire la correspondance entre la signature réelle obtenue et les signatures présentes dans la table des signatures théoriques [20].

TABLE 1.2 – Exemple d'une matrice des signatures théoriques avec quatre résidus

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$r_1$	0	0	1	1
$r_2$	1	0	0	1
$r_3$	1	1	0	0
$r_4$	0	0	1	1

D'une part, les colonnes de la matrice présentée dans le tableau 1.2 sont non nulles et distinctes deux à deux. D'autre part, cette matrice est isolable d'ordre 2 (par exemple les signatures de  $f_1$  et de  $f_2$  différent de deux bits). Ainsi, elle est fortement localisable.

La relation entre le vecteur des résidus primaires  $\tilde{\mathbf{t}}(k)$  (1.17) et le vecteur des résidus structurés  $\mathbf{r}(k)$  est liée par :

$$\mathbf{r}(k) = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{t}}(k) = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) \quad (1.73)$$

où  $\mathbf{W} \in^{m \times (m-\ell)}$  est la matrice de transformation,  $m$  et  $\ell$  étant respectivement le nombre de variables du système et le nombre de composantes principales retenu.

Pour la suite, on note :

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{P}}^T \quad (1.74)$$

La  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\mathbf{W}$ , notée  $w_i^T$ , respecte la condition suivante :

$$w_i^T \mathbf{B}^i = 0 \quad (1.75)$$

où  $\mathbf{B}^i$  est la matrice regroupant les colonnes de la matrice  $\mathbf{B}$  correspondant à des zéros dans la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice d'incidence (les variables insensibles aux défauts).

#### 1.4.4.1 Conditions d'existence de la transformation

Le nombre de zéros dans chaque ligne de la table de signatures théoriques ne doit pas dépasser  $(m - \ell - 1)$ . La matrice  $\mathbf{B}^i$  doit alors satisfaire l'inégalité suivante [25] :

$$\text{rang}(\mathbf{B}^i) \leq m - \ell - 1 \quad (1.76)$$

De plus, pour ne pas avoir un zéro non voulu dans l'une des lignes de la matrice de structuration, c'est-à-dire pour que le résidu ne soit pas découplé d'un défaut qui apparaîtrait avec 1 sur l'une des lignes de la matrice des signatures théoriques, la condition :

$$\text{rang} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}^i & b_j \end{array} \right] = \text{rang}(\mathbf{B}^i) + 1 \quad (1.77)$$

doit être satisfaite pour toutes les colonnes  $\mathbf{B}^i$  de la matrice  $\mathbf{B}$  qui n'appartiennent pas à  $b_j$ .

Reprenons l'exemple du tableau 1.2, la matrice  $\mathbf{W}$ , permettant la structuration des résidus, vérifie les conditions suivantes :  $w_1^T [b_1 \ b_2] = [0 \ 0]$ ,  $w_2^T [b_2 \ b_3] = [0 \ 0]$ ,  $w_3^T [b_3 \ b_4] = [0 \ 0]$  et  $w_4^T [b_1 \ b_4] = [0 \ 0]$

Les  $w_i^T$ ;  $i = 1, \dots, 4$  désignent les lignes de la matrice  $\mathbf{W}$  et les  $b_i$  représentent les colonnes de la matrice  $\mathbf{B}$ . Les matrices  $\mathbf{B}^i$  sont :

$$\mathbf{B}^1 = [b_1 \ b_2], \mathbf{B}^2 = [b_2 \ b_3], \mathbf{B}^3 = [b_3 \ b_4] \text{ et } \mathbf{B}^4 = [b_1 \ b_4].$$

Si les deux conditions d'existence de la transformation ne sont pas satisfaites, la localisation devient impossible. En fait, quand deux colonnes de la matrice  $\mathbf{B}$  sont linéairement dépendantes, les deux résidus structurés relatifs à ces deux colonnes peuvent avoir la même signature (signature dégradée) et par conséquent les défauts ne sont pas isolables [26]. Cependant, même si ces deux conditions sont satisfaites, il est souvent difficile de trouver la matrice des signatures expérimentales souhaitées étant donné que certaines signatures expérimentales sont dégradées, en particulier pour un système de grande dimension. Cette

dégradation est due à la contrainte de sensibilité des résidus aux défauts. En effet, la matrice d'incidence est choisie en fonction de sa capacité de localisation (fortement localisable) sans prendre en considération la sensibilité des résidus aux défauts [34]. Afin de maximiser cette sensibilité, Qin et al. [66] ont proposé l'approche de structuration des résidus avec maximisation de la sensibilité aux défauts (Structured Residual Approach with Maximized Sensitivity SRAMS).

#### 1.4.4.2 Méthode SRAMS

Son objectif est de concevoir une matrice de transformation  $\mathbf{W}$  de telle sorte que chaque élément de  $\mathbf{r}(k)$  soit insensible à un défaut particulier et présente une sensibilité maximale aux autres. En d'autres termes,  $w_i^T$  est choisit tel que  $r_i(k)$  ( $i^{\text{ème}}$  élément de  $\mathbf{r}(k)$ ) soit insensible à  $f_i$  et sensible le plus possible à  $f_j; j \neq i$ . Cependant, Cao [11] a montré que cette approche est comparable à l'approche classique puisque la méthode SRAMS maximise en moyenne les projections des observations dans l'espace résiduel [78]. Une variante de cette dernière est la méthode OSR (Optimal Structured Residual) [54] qui maximise indépendamment chaque projection. Cependant, la méthode de localisation par structuration des résidus, malgré ses variantes, présente plusieurs inconvénients. Tout d'abord, elle permet de localiser les défauts seulement dans l'espace résiduel. D'autre part, le problème de dégradation persiste puisqu'il est dû aux perturbations et aux erreurs de modélisation affectant les résidus. Dans le cas où la structure du modèle ACP est incorrecte, les différentes variantes de structuration n'assurent pas la localisation de défauts [78]. Dans le cas contraire où la structure du modèle ACP est correcte, la méthode OSR présente de performances meilleures que la méthode SRAMS mais elle s'accompagne d'une augmentation du taux de fausses alarmes. Afin de diminuer ces erreurs, le seuil de détection doit être augmenté ce qui engendre une perte de sensibilité pour la détection de défauts, en particulier ceux de faibles amplitudes.

#### 1.4.5 Méthode de reconstruction de variables

La reconstruction simultanée de  $r$  variables du vecteur de mesures consiste à estimer ces variables à un instant donné en utilisant les  $(m-r)$  variables restantes au même instant et le modèle ACP obtenu. Deux approches, aboutissant à la même solution, peuvent être utilisées. Une minimise l'influence des variables sur l'indicateur de détection [88]. L'autre minimise l'influence de défauts sur une observation et permet d'estimer à la fois la direction et l'amplitude du défaut [46], [67], [19]. La deuxième approche est celle retenue dans cette partie. La comparaison de l'indice de détection avant et après reconstruction assure l'isolation de défauts étant donné que l'influence de défauts sur l'indice de détection est éliminée quand les variables défectueuses sont reconstruites. Ce principe peut être appliqué aux différents indices de détection précédemment exposés.

### 1.4.5.1 Principe de reconstruction

Le vecteur de reconstruction  $\mathbf{z}_{\mathbf{R}}(k)$  (1.78) et le vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  sont reliés par la relation suivante :

$$\mathbf{z}_{\mathbf{R}}(k) = \mathbf{x}(k) - \Xi_{\mathbf{R}}\mathbf{f}_{\mathbf{R}}(k) \quad (1.78)$$

où  $\mathbf{f}_{\mathbf{R}}(k) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur des amplitudes de défauts (inconnues). La matrice ortho-normale  $\Xi_{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{m \times r}$  indique les directions de reconstruction ;  $r \geq 1$  désigne le nombre de variables à reconstruire simultanément et  $\mathbf{R}$  est le sous-ensemble contenant les indices de variables à reconstruire. La matrice  $\Xi_{\mathbf{R}}$  est constituée de 1 pour indiquer les variables reconstruites (respectivement de 0 pour les variables non reconstruites).

Par exemple, pour reconstruire le jeu de variables  $\mathbf{R} = \{2, 4\}$  parmi 5 variables, la matrice  $\Xi_{\mathbf{R}}$  est donnée par :

$$\Xi_{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (1.79)$$

La formule de reconstruction dépend de l'indicateur de détection utilisé, on présente une forme générale pour la localisation par reconstruction de l'ensemble de défauts.

Compte tenu de l'expression unifiée de l'indicateur de détection  $\Psi(k)$  (1.59), on note  $\Psi_{\mathbf{R}}(k)$  l'indice correspondant à l'indice  $\Psi(k)$  obtenu après reconstruction de  $r$  variables simultanément. L'expression générale de reconstruction, notée  $\Psi_{\mathbf{R}}(k)$ , est donnée par :

$$\Psi_{\mathbf{R}}(k) = \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)^T \mathbf{N} \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) \quad (1.80)$$

où la matrice  $\mathbf{N}$  est définie dans le tableau 1.1 en fonction de l'indicateur de détection.

L'estimation des amplitudes de défauts de  $\mathbf{f}_{\mathbf{R}}(k)$  permet de déterminer le vecteur de reconstruction (1.78). Cette estimation est obtenue en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{R}}(k) = \arg \min_{\mathbf{f}_{\mathbf{R}}(k)} \{\Psi_{\mathbf{R}}(k)\} \quad (1.81)$$

En vertu de la définition de l'indice  $\Psi_{\mathbf{R}}(k)$  (1.80) et de l'expression de  $\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)$  (1.78), la résolution de l'équation (1.81) permet d'avoir l'estimé des amplitudes de défauts de  $\mathbf{f}_{\mathbf{R}}(k)$  ayant pour expression :

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{R}}(k) = \mathbf{B}_{\mathbf{R}}\mathbf{x}(k) \quad (1.82)$$

où

$$\mathbf{B}_{\mathbf{R}} = (\Xi_{\mathbf{R}}^T \mathbf{N} \Xi_{\mathbf{R}})^{-1} \Xi_{\mathbf{R}}^T \mathbf{N} \quad (1.83)$$

La définition de  $\mathbf{B}_{\mathbf{R}}$  (1.83) met en avant la condition de reconstruction suivante :

#### a- Condition de reconstruction

Afin d'assurer la reconstruction, il faut que la matrice  $\Xi_{\mathbf{R}}^T \mathbf{N} \Xi_{\mathbf{R}}$  soit de plein rang colonne. Cette condition sera détaillée dans les sections suivantes en fonction de l'indicateur de détection utilisé pour la reconstruction.

En remplaçant l'expression (1.82) dans (1.78), le vecteur reconstruit est donné par :

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) = \mathbf{G}_{\mathbf{R}}\mathbf{x}(k) \quad (1.84)$$

où

$$\mathbf{G}_{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_m - \Xi_{\mathbf{R}}\mathbf{B}_{\mathbf{R}} \quad (1.85)$$

Compte tenu de la définition de  $\mathbf{B}_R$  (1.83), l'expression de  $\mathbf{G}_R$  (1.85) s'explique :

$$\mathbf{G}_R = \mathbf{I}_m - \Xi_R (\Xi_R^T \mathbf{N} \Xi_R)^{-1} \Xi_R^T \mathbf{N} \quad (1.86)$$

La matrice  $\mathbf{G}_R$  possède la propriété suivante :

$$\mathbf{G}_R \Xi_R = 0 \quad (1.87)$$

Considérons le partitionnement du vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  :

$$\mathbf{x}(k) = \Xi_R \mathbf{x}_R(k) + \Xi_{\bar{R}} \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) \quad (1.88)$$

avec :

$$\mathbf{x}_R(k) = \Xi_R^T \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}_R(k) \in \mathbb{R}^r \quad (1.89)$$

$$\mathbf{x}_{\bar{R}}(k) = \Xi_{\bar{R}}^T \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) \in \mathbb{R}^{m-r} \quad (1.90)$$

où  $\mathbf{x}_R(k)$  correspond aux  $r$  composantes de  $\mathbf{x}(k)$  à reconstruire et  $\mathbf{x}_{\bar{R}}(k)$  correspond aux  $(m-r)$  composantes restantes de  $\mathbf{x}(k)$  avec  $\bar{R}$  regroupe l'ensemble des indices des variables restantes.

Les matrices orthonormales  $\Xi_R$  et  $\Xi_{\bar{R}}$  sélectionnent respectivement ces deux groupes de variables. La matrice  $\Xi_{\bar{R}}$  est construite comme la matrice  $\Xi_R$  pour les variables restantes. Par exemple, si on considère 5 variables et que l'on souhaite reconstruire les variables 2 et 4 alors  $\bar{R} = \{1, 3, 5\}$ . La matrice  $\Xi_R$  a été présentée précédemment et  $\Xi_{\bar{R}}$  est donnée par :

$$\Xi_{\bar{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (1.91)$$

Compte tenu du partitionnement du vecteur  $\mathbf{x}(k)$  (1.88), des définitions de  $\mathbf{x}_R(k)$  (1.89) et  $\mathbf{x}_{\bar{R}}(k)$  (1.90) ainsi que de la propriété (1.87), le vecteur reconstruit (1.84) se réduit à :

$$\hat{\mathbf{z}}_R(k) = \mathbf{G}_R \Xi_{\bar{R}} \mathbf{x}_{\bar{R}}(k) \quad (1.92)$$

L'expression (1.92) montre que la reconstruction d'un groupe  $R$  de variables ne faisant pas intervenir ces variables. On voit clairement apparaître son intérêt pour la localisation de défauts. En effet, il est possible de générer un ensemble de résidus structurés insensibles à certaines variables. De plus, cette expression (1.92) est intéressante puisqu'elle permet de proposer des valeurs de remplacement pour les mesures aberrantes de différents capteurs [35].

### b- Erreur de reconstruction

En présence de défauts  $\mathbf{f}(k)$  agissant dans la direction  $\Xi_R$ , le vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  (1.12) est donné par :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \Xi_R \mathbf{f}(k) \quad (1.93)$$

En vertu des expressions (1.78) et (1.93), l'erreur de reconstruction est donnée par :

$$\mathbf{x}^*(k) - \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) = \Xi_{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{R}}(k) - \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(k) \quad (1.94)$$

Compte tenu des expressions (1.82) et (1.93), l'erreur (1.94) s'écrit :

$$\mathbf{x}^*(k) - \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) = \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{B}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}^*(k) + \underbrace{(\Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{B}_{\mathbf{R}} - \mathbf{I}_m)}_{=0} \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(k) = \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{B}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}^*(k) \quad (1.95)$$

A partir des expressions (1.93) et (1.82), on a :

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{R}}(k) - \mathbf{f}(k) = \mathbf{B}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}^*(k) \quad (1.96)$$

D'après [77], l'espérance mathématique de l'expression (1.95) est :

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}^*(k) - \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)) = 0 \quad (1.97)$$

Ainsi,  $\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)$  est une estimation non biaisée de  $\mathbf{x}^*(k)$ . De même, en vertu de l'expression (1.96),  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{R}}(k)$  est une estimation non biaisée de  $\mathbf{f}(k)$ .

L'erreur de reconstruction dépend de l'indicateur de détection. Dunia et al. [19] ont déterminé l'erreur de reconstruction pour l'indicateur *SPE*. Cet erreur a été à la base de la définition d'un critère de sélection du nombre de composantes principales.

En remplaçant l'expression (1.84) dans (1.80), on a :

$$\Psi_{\mathbf{R}}(k) = \mathbf{x}(k)^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{N} \mathbf{G}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}(k) \quad (1.98)$$

Si on considère l'expression du vecteur  $\mathbf{x}(k)$  en présence de défauts (1.12),  $\Psi_{\mathbf{R}}(k)$  (1.98) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{R}}(k) &= \mathbf{x}^{*\mathbf{T}}(k) \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{N} \mathbf{G}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{x}^{*\mathbf{T}}(k) \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{N} \mathbf{G}_{\mathbf{R}} \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \\ &+ \mathbf{f}(k) \Xi_{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{N} \mathbf{G}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{f}(k) \Xi_{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{N} \mathbf{G}_{\mathbf{R}} \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \end{aligned} \quad (1.99)$$

- Si la matrice des directions de reconstruction  $\Xi_{\mathbf{R}}$  correspond à la matrice des directions de défauts  $\Xi_{\mathbf{F}}$  c'est-à-dire si  $\Xi_{\mathbf{R}} = \Xi_{\mathbf{F}}$ , alors l'influence de défauts est complètement éliminée. En effet, à partir des équations (1.87) et (1.86), on a :

$$\mathbf{x}^{*\mathbf{T}}(k) \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{N} \mathbf{G}_{\mathbf{R}} \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(k) = 0 \quad (1.100)$$

$$\mathbf{f}(k) \Xi_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{N} \mathbf{G}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}^*(k) = 0 \quad (1.101)$$

$$\mathbf{f}(k) \Xi_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{N} \mathbf{G}_{\mathbf{R}} \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) = 0 \quad (1.102)$$

- Si les directions de reconstruction sont différentes de celles de défauts, alors l'indice  $\Psi_{\mathbf{R}}(k)$  (1.98) est vraisemblablement supérieur au seuil de détection.

### 1.4.5.2 Différents indices de localisation par reconstruction

Les indicateurs utilisés pour la localisation de défauts par reconstruction pour les variables dépendantes ou indépendantes sont :

- indicateur  $SPE$  ou  $SWE$  pour l'espace résiduel,
- indicateur  $T^2$  pour l'espace principal,
- indicateur  $D$  ou  $\zeta$  pour l'ensemble de l'espace de représentation.

#### a- Reconstruction à l'indice $SPE$

Dunia et al. [18] ont commencé, tout d'abord, par la reconstruction d'une seule variable ( $r = 1$ ) à l'indicateur  $SPE$ . Ensuite, le principe de reconstruction a été généralisé à la reconstruction simultanée de plusieurs variables ( $r > 1$ ) à partir de  $(m - r)$  variables restantes et du modèle ACP à l'indicateur  $SPE$  [19]. Ces variables reconstruites sont utilisées pour identifier l'ensemble des variables en défaut.

A partir de l'équation (1.84) et du tableau 1.1, l'expression de reconstruction est :

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) = \left( \mathbf{I}_m - \Xi_{\mathbf{R}} \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{P}}^T \right) \mathbf{x}(k) \quad (1.103)$$

avec :

$$\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathbf{R}} \quad (1.104)$$

Notons que si  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}$  est de plein rang colonne, alors  $(\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}})^{-1}$  existe. Cette condition signifie que le nombre  $r$  de variables à reconstruire doit respecter l'inégalité (1.105) et que les colonnes de la matrice  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}$  ne doivent être ni nulles ni colinéaires :

$$r \leq m - \ell \quad (1.105)$$

La projection des variables reconstruites dans l'espace résiduel permet de définir le vecteur des résidus  $\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) &= \tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (1.106)$$

avec :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{P}}^T \quad (1.107)$$

En vertu de l'expression du vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  en présence de défauts (1.12), le vecteur des résidus (1.106) devient :

$$\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) = \mathbf{P}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{P}_{\mathbf{R}} \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \quad (1.108)$$

L'espérance mathématique du vecteur des résidus se réduit à :

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)) = \mathbf{P}_{\mathbf{R}} \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \quad (1.109)$$

A partir de l'expression (1.109), on remarque que :

- si les directions de reconstruction  $\Xi_{\mathbf{R}}$  sont identiques aux directions de défauts  $\Xi_{\mathbf{F}}$ , alors toutes les composantes du vecteur  $\mathbf{P}_{\mathbf{R}} \Xi_{\mathbf{F}}$  sont nulles et  $\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)) = 0$

- si les directions de reconstruction  $\Xi_{\mathbf{R}}$  sont différentes de celles de défauts  $\Xi_{\mathbf{F}}$ , alors toutes les composantes du vecteur  $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}\Xi_{\mathbf{F}}$  sont a priori non nulles sauf celles appartenant à l'ensemble  $\mathbf{R}$ .

Pour qu'il n'y a pas de perte de sensibilité à certaine partie de défauts, Tharrault et al. [79] ont montré que  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}$  doit être de plein rang colonne.

L'analyse des amplitudes des résidus  $\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)$  (1.108) de l'indicateur  $SPE_{\mathbf{R}}(k)$  pour toutes les combinaisons de reconstruction possibles permet de localiser les variables défectueuses.

L'indicateur  $SPE_{\mathbf{R}}(k)$  est donné par :

$$SPE_{\mathbf{R}}(k) = \tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) \quad (1.110)$$

Le seuil de détection dépend des variables reconstruites. Par exemple, la reconstruction d'une variable signifie la non prise en compte de sa variance et par conséquent le seuil de détection après la reconstruction de cette variable diminue comparé au seuil avant reconstruction.

Pour déterminer le seuil de détection après reconstruction, la matrice des corrélations  $\Sigma_{\mathbf{R}}$  est recalculée [55] :

$$\Sigma_{\mathbf{R}} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}^T(k) \quad (1.111)$$

En posant  $\theta_i^{(\mathbf{R})} = \sum_{j=1+\ell}^m (\lambda_j^{(\mathbf{R})})^i$  ;  $(\lambda_j^{(\mathbf{R})})^i$  étant la  $j^{\text{ème}}$  valeur propre à la puissance  $i$  de la matrice  $\Sigma_{\mathbf{R}}$ , le seuil de détection théorique est alors :

$$\delta_{\alpha}^{(\mathbf{R})2} = g_{\mathbf{R}} \chi_{h_{\mathbf{R}}, \alpha}^2 \quad (1.112)$$

où  $g_{\mathbf{R}} = \theta_2^{(\mathbf{R})}/\theta_1^{(\mathbf{R})}$  et  $h_{\mathbf{R}} = (\theta_1^{(\mathbf{R})})^2/\theta_2^{(\mathbf{R})}$ , avec  $\theta_i^{(\mathbf{R})} = \sum_{j=\ell+1}^{m-r} \lambda_j^i$  ;  $i = 1, 2$  ;  $\lambda_j^i$  étant la  $j^{\text{ème}}$  valeur propre de  $\Lambda$  à la puissance  $i$ .

Le système est considéré en fonctionnement anormal à l'instant  $k$ , si :

$$SPE_{\mathbf{R}}(k) > \delta_{\alpha}^{(\mathbf{R})2} \quad (1.113)$$

### b- Reconstruction à l'indice $SWE$

Compte tenu de la relation (1.84) et de la définition de la matrice  $\mathbf{N}$  relative à l'indice  $SWE$ , l'expression de reconstruction à cet indice est la suivante :

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) = (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathbf{R}}(\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}})^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T) \mathbf{x}(k) \quad (1.114)$$

La condition de reconstruction avec  $SWE$  exige que  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^T \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}$  soit de plein rang colonne. Or comme la matrice  $\tilde{\Lambda}^{-1}$  est non singulière, alors la condition de reconstruction est identique à celle de l'indicateur  $SPE$ .

Pour identifier l'ensemble de variables en défaut, l'indicateur  $SWE_{\mathbf{R}}(k)$  est utilisé :

$$SWE_{\mathbf{R}}(k) = \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}^T(k) \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) \quad (1.115)$$

Le seuil de détection théorique peut alors être déterminé de façon analogue à l'indicateur  $SWE$ . Dans le cas où le nombre d'observations  $N$  est important, le système est considéré en fonctionnement anormal si :

$$SWE_{\mathbf{R}}(k) > \chi_{m-\ell-r, \alpha}^2 \quad (1.116)$$

Tharrault et al. [78] ont montré, sur un exemple de simulation, que la méthode de reconstruction avec  $SWE$  est plus robuste aux erreurs de modélisation que la reconstruction avec l'indicateur  $SPE$ . En fait, dans le cas où le nombre de composantes principales sélectionné est inférieur au nombre correct, il est possible de localiser les défauts seulement en utilisant la reconstruction avec l'indicateur  $SWE$ .

### c- Reconstruction à l'indice $T^2$

Pour localiser un défaut ayant une projection importante dans l'espace principal, la structuration des résidus en utilisant le principe de reconstruction peut être reformulé à l'indicateur  $T^2$  [86], [46].

A partir de l'équation (1.78) et compte tenu de la définition de la matrice  $\mathbf{N}$  relative à l'indicateur  $T^2$ , l'expression de la reconstruction  $\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)$  du vecteur  $\mathbf{x}(k)$  est donnée par :

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) = (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathbf{R}}(\hat{\Xi}_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\Xi}_{\mathbf{R}})^{-1} \hat{\Xi}_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^{\text{T}}) \mathbf{x}(k) \quad (1.117)$$

avec

$$\hat{\Xi}_{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{P}}^{\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} \quad (1.118)$$

L'expression de reconstruction (1.117) exige que la matrice  $\hat{\Xi}_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\Xi}_{\mathbf{R}}$  soit de plein rang colonne. Comme la matrice  $\hat{\Lambda}^{-1}$  est non singulière, la condition de rang porte alors sur la matrice  $\hat{\Xi}_{\mathbf{R}}$ . Cette condition implique que le nombre  $r$  de variables à reconstruire doit respecter l'inégalité (1.119) et que les colonnes de la matrice  $\hat{\Xi}_{\mathbf{R}}$  ne doivent être ni nulles ni colinéaires :

$$r \leq \ell \quad (1.119)$$

Pour localiser les défauts, l'indicateur  $T_{\mathbf{R}}^2(k)$  est utilisé :

$$T_{\mathbf{R}}^2(k) = \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}^{\text{T}}(k) \hat{\mathbf{P}}^{\text{T}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) \quad (1.120)$$

Le seuil de détection théorique peut alors être déterminé de la même manière que pour l'indicateur  $T^2$ . Dans le cas où le nombre d'observations  $N$  est important, le système est considéré en fonctionnement anormal, si :

$$T_{\mathbf{R}}^2(k) > \chi_{\ell-r, \alpha}^2 \quad (1.121)$$

### d- Reconstruction à l'indice combiné $\zeta$

Compte tenu de l'équation (1.78) et de la définition de la matrice  $\mathbf{N}$  relative à l'indice combiné  $\zeta$ , l'expression de la reconstruction est donnée par [92] :

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) = (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathbf{R}}(\Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{M} \Xi_{\mathbf{R}})^{-1} \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{M}) \mathbf{x}(k) \quad (1.122)$$

Dans le cas de cet indice, le nombre de variables à reconstruire doit respecter la condition structurelle suivante :

$$r \leq \max(m - \ell, \ell) \quad (1.123)$$

Pour localiser les défauts, l'indice  $\zeta_{\mathbf{R}}$  s'explique à l'instant  $k$  par :

$$\zeta_{\mathbf{R}}(k) = \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) \quad (1.124)$$

Pour un seuil de confiance  $\alpha$  donné, l'indice  $\zeta_{\mathbf{R}}$  est approximé par la loi suivante :

$$\zeta_{\mathbf{R}}(k) \sim g\chi_h^2 \quad (1.125)$$

où  $g_{\mathbf{R}}$  et  $h_{\mathbf{R}}$  représentent respectivement le coefficient et le nombre de degré de liberté, ils sont donnés par :

$$g_{\mathbf{R}} = \frac{\text{trace}((\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{M})^2)}{\text{trace}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{M})} \quad \text{et} \quad h_{\mathbf{R}} = \frac{(\text{trace}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}))^2}{\text{trace}((\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{M})^2)} \quad (1.126)$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}$  désigne la matrice des corrélations calculée après reconstruction.

Le système est considéré en fonctionnement anormal, à l'instant  $k$ , si :

$$\zeta_{\mathbf{R}}(k) > g\chi_{h,\alpha}^2 \quad (1.127)$$

#### e- Reconstruction à la distance de Mahalanobis $D$

Compte tenu de l'équation (1.78) et de la définition de la matrice  $\mathbf{N}$  relative à la distance de Mahalanobis  $D$ , l'expression de reconstruction est donnée par [78] :

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) = (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathbf{R}}(\Xi_{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \Xi_{\mathbf{R}})^{-1} \Xi_{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{x}(k) \quad (1.128)$$

La condition de reconstruction pour la distance de Mahalanobis  $D$  est identique à celle pour l'indice combiné  $\zeta$ .

Pour localiser les défauts, l'indice  $D_{\mathbf{R}}$  s'explique par :

$$D_{\mathbf{R}}(k) = \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}(k) \quad (1.129)$$

En supposant que le nombre d'observations  $N$  est important, le seuil de détection de la distance de Mahalanobis après reconstruction  $D_{\mathbf{R}}(k)$  peut être approximé, pour un seuil de confiance  $\alpha$  donné, par une distribution du  $\chi^2$  avec  $(m - r)$  degrés de liberté.

Ainsi, le système est considéré en fonctionnement anormal, si :

$$D_{\mathbf{R}}(k) > g\chi_{(m-r),\alpha}^2 \quad (1.130)$$

Tharrault et al. [78] ont comparé les robustesses des deux dernières méthodes reposant sur l'espace global vis-à-vis du nombre de composantes principales. Ils ont prouvé que la reconstruction avec la distance de Mahalanobis permet d'avoir un indicateur plus robuste au nombre de composantes principales que la reconstruction avec l'indice combiné.

## 1.5 Conclusion

L'ACP cherche un sous-espace de dimension plus réduite que celle de l'espace de départ et à y projeter les données avec une perte minimale d'information. Le résultat ainsi obtenu permet de modéliser les relations existantes entre les variables mesurées et d'estimer le comportement de ces dernières à partir du modèle ACP identifié. Ces relations servent par la suite à la détection et la localisation de défauts.

La détection de défauts est réalisée par l'utilisation des indicateurs de détection reposant sur : l'espace résiduel ; les indices  $SPE$  et  $SWE$ , l'espace principal ; l'indice  $T^2$  et l'espace global ; les indices  $\zeta$  et  $D$ .

Classiquement, la localisation des variables défectueuses est effectuée soit par calcul des contributions des variables à l'indicateur de détection, soit par structuration de résidus. La méthode des contributions est simple à mettre en oeuvre mais se révèle sensible aux points de fonctionnement du système [33]. La structuration des résidus consiste à générer de nouveaux résidus sensibles uniquement à des sous-ensembles particuliers de défauts affectant les variables à surveiller préalablement répertoriées dans un cahier des charges. Dans cette catégorie, on distingue les approches classiques de structuration de résidus permettant de localiser un défaut dans l'espace résiduel et la méthode de localisation basée sur le principe de reconstruction. Cette dernière peut être appliquée aux différents indicateurs de détection et elle permet de localiser l'ensemble des variables en défaut dans les espaces ; résiduel, principal et global.



# 2

## Contribution à la modélisation par ACP pour le diagnostic de systèmes

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>2.2</b>	<b>Choix de la structure des modèles ACP</b>	<b>30</b>
2.2.1	Détection de défauts dans différents sous-espaces résiduels	30
2.2.2	Principe de reconstruction à l'indicateur $SWE^{(i)}$	32
2.2.3	Méthodes de choix du nombre de composantes principales	35
<b>2.3</b>	<b>Application</b>	<b>41</b>
2.3.1	Défauts simples	41
2.3.2	Défauts multiples	48
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>50</b>

---

## 2.1 Introduction

L'identification du modèle ACP consiste à estimer ses paramètres par une décomposition en valeurs et vecteurs propres de la matrice des corrélations des données et à déterminer le nombre de composantes principales à retenir. Ce nombre a un impact significatif sur les capacités de détection et de localisation de défauts [50], [86]. En effet, dans le cas où peu de composantes sont utilisées, la dimension élevée de l'espace résiduel va nuire à la détection de défauts en particulier ceux de faible amplitude et par la suite à leur localisation. Dans le cas contraire où un nombre élevé de composantes est choisi, la dimension réduite de l'espace résiduel peut empêcher la localisation de défauts [79].

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode basée sur le principe de reconstruction de variables pour la détermination des modèles ACP optimisant la détection et la localisation de défauts simples ou multiples sur les variables redondantes ou non [6], [7], [8]. L'aspect novateur réside précisément dans l'optimisation des détecteurs ; à chaque défaut à détecter correspond un détecteur optimal au sens d'un critère qui sera précisé. La première section est consacrée à la généralisation du principe de reconstruction et à la méthode de détermination du nombre de composantes principales. La dernière section concerne l'application des résultats méthodologiques sur les données issues d'un système linéaire dont les mesures sont corrompues par des bruits et affectées par un ou plusieurs défauts .

## 2.2 Choix de la structure des modèles ACP

La détermination du nombre de composantes principales à retenir pour fixer la dimension de l'espace principal ou l'espace résiduel est souvent issu de l'optimisation d'un critère de qualité de l'estimation des variables du système. L'objectif assigné porte sur l'aptitude du modèle ACP à réaliser un diagnostic ce qui va orienter le choix du nombre de composantes principales à retenir de façon à détecter et localiser un ou de défauts particuliers.

La nouvelle méthode de détermination des modèles ACP est basée sur le principe de reconstruction des variables redondantes ou non. Elle consiste à minimiser l'influence de ces variables sur l'indicateur de détection proposé tout en optimisant la détection et la localisation de défauts. Dans un premier temps, l'indicateur de détection utilisé est défini. Ensuite, le principe de reconstruction est étendu à cet indicateur. Enfin, la méthode proposée pour déterminer le nombre de composantes principales pour les différents défauts simples ou multiples est présentée [7].

### 2.2.1 Détection de défauts dans différents sous-espaces résiduels

Dans le cadre de la détection de défauts par ACP, la plupart des travaux publiés utilisent soit la statistique  $T^2$  de Hotelling pour analyser les données représentées dans l'espace principal, soit l'erreur quadratique d'estimation  $SPE$  ou l'erreur quadratique pondérée d'estimation  $SWE$  pour la détection dans l'espace résiduel ou encore un indicateur

combiné utilisant l'espace total [67]. Cependant, l'utilisation de la statistique  $T^2$  ne permet pas la détection de défauts de faibles amplitudes car ces derniers peuvent être masqués par les variations significatives des données présentes dans ce sous-espace. D'autre part, pour la détection dans l'espace résiduel, Harkat et al. [36] ont montré que l'indicateur  $SPE$  est sensible aux erreurs de modélisation et ont proposé d'appliquer l'indicateur  $SPE$  sur des sous-espaces de l'espace résiduel puisque les défauts affectant certaines variables sont détectables dans des sous-espaces résiduels de dimension bien inférieure à celle associée à l'indicateur  $SPE$ . Pour maximiser la sensibilité aux défauts, Tamura et al. [76] ont développé ultérieurement une idée similaire où ils construisent autant de modèles ACP que de défauts à détecter. Cependant, l'utilisation de l'indicateur  $SWE$  peut être plus judicieuse, car tenir compte des variances des résidus peut permettre de détecter de défauts qui peuvent ne pas être détectés au moyen de l'indicateur  $SPE$  [87].

Dans la suite, l'indicateur  $SWE$  appliqué à des sous-espaces de l'espace résiduel est utilisé pour la détection de défauts [5], [6].

L'indicateur proposé  $SWE^{(i)}(k)$  est défini par la norme quadratique pondérée du vecteur des résidus :

$$SWE^{(i)}(k) = \tilde{\mathbf{t}}^{(i)\text{T}}(k) (\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)})^{-1} \tilde{\mathbf{t}}^{(i)}(k), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

où

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(i)}(k) = \tilde{\mathbf{P}}^{(i)\text{T}} \mathbf{x}(k) \quad (2.2)$$

avec  $\tilde{\mathbf{P}}^{(i)}$  la matrice formée par les  $i$  ou les  $(m - \ell)$  derniers vecteurs propres de  $\mathbf{P}$ .

Dans la suite, la notation  $^{(i)}$  (respectivement  $^{(m-i)}$ ) qui affecte une grandeur, est utilisée pour témoigner de la dépendance de cette grandeur vis-à-vis de  $i$  (respectivement de  $(m - i)$ ) composantes principales.

Compte tenu de (2.2), l'indicateur  $SWE^{(i)}(k)$  (2.1) est donné en fonction du vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  par :

$$SWE^{(i)}(k) = \mathbf{x}(k)^{\text{T}} \mathbf{H}^{(i)} \mathbf{x}(k) \quad (2.3)$$

avec

$$\mathbf{H}^{(i)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(i)} (\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{(i)\text{T}}, \quad \mathbf{H}^{(i)} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (2.4)$$

où  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)}$  est la matrice diagonale constituée des  $i$  dernières valeurs propres de  $\mathbf{\Lambda}$ .

A l'instant  $k$ , le processus est considéré en fonctionnement anormal, si :

$$SWE^{(i)}(k) > \chi_{i,\alpha}^2 \quad (2.5)$$

où  $\chi_{i,\alpha}^2$  suit une distribution du chi-2 avec  $i$  degrés de liberté pour un seuil de confiance  $\alpha$  donné. Pratiquement, si ce seuil se révèle inadéquat, il peut être adapté par apprentissage à partir de données saines.

Compte tenu de (2.3) et de l'expression du vecteur de mesures en présence de défauts (1.12) agissant dans les directions  $\Xi_{\mathbf{F}}$ , pour être détectables quelles que soient les amplitudes de défauts, ces derniers doivent être projetés dans l'espace résiduel et par conséquent la condition suivante doit être vérifiée :

$$\left\| (\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)})^{-1/2} \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}^{(i)} \right\|_2 = \sigma_{\max}((\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)})^{-1/2} \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}^{(i)}) \neq 0 \quad (2.6)$$

Notons la projection des directions de défauts dans l'espace résiduel généré par  $\tilde{\mathbf{P}}^{(i)}$  par :

$$\tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}^{(i)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(i)\text{T}} \Xi_{\mathbf{F}} \quad (2.7)$$

Les mesures étant entachées de bruits, il est peu probable que la matrice diagonale  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)}$  contienne des termes diagonaux nuls. Par conséquent, la condition précédente est équivalente à :

$$\sigma_{\max}(\tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}^{(i)}) \neq 0 \quad (2.8)$$

De plus, pour garantir la détection de défauts dans l'espace résiduel, leurs amplitudes doivent satisfaire la condition suivante :

$$\|f_{SWE^{(i)}}\|_2 \geq \frac{2 \chi_{i,\alpha}}{\sigma_{\max}((\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)})^{-1/2} \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}^{(i)})} \quad (2.9)$$

L'amplitude minimale de défaut détectable est donnée par :

$$\|f_{SWE^{(i)}}\|_{2min} = \frac{2 \chi_{i,\alpha}}{\sigma_{\max}((\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(i)})^{-1/2} \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}^{(i)})} \quad (2.10)$$

On obtient facilement la formule (2.9) en étendant les résultats présentés dans le chapitre précédent pour  $SWE$  à notre indicateur de détection  $SWE^{(i)}$ .

Dans le cas particulier où le nombre  $i$  est égal à  $m$ , l'indicateur proposé correspond à la distance de Mahalanobis  $D$ . Ainsi, la caractéristique importante de l'indicateur  $SWE^{(i)}$  est son aptitude à la détection de tout défaut affectant le processus puisqu'il peut être étendu à l'ensemble de l'espace de représentation des données.

La condition (2.8) peut être qualifiée de globale puisqu'elle permet de détecter la présence de défauts. L'analyse de la structure de la matrice  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}^{(i)}$  (2.7) peut compléter ce constat en précisant les composantes du vecteur  $\mathbf{f}(k)$  qui sont détectables. Rappelons que cette analyse doit être conduite pour les différentes directions  $\Xi_{\mathbf{F}}$  de défauts envisageables.

## 2.2.2 Principe de reconstruction à l'indicateur $SWE^{(i)}$

La reconstruction a tout d'abord été définie par Dunia et al. [19] pour l'indicateur  $SPE$ , puis par Yue et al. [92] pour un indicateur combinant les indicateurs  $SPE$  et  $T^2$ , par Jiang et al. [46] pour l'indicateur  $T^2$  et par Tharrault et al. [79] pour la distance de Mahalanobis  $D$ . Par minimisation de l'influence des variables sur l'indicateur de détection, la reconstruction simultanée d'un ensemble de variables  $\mathbf{R}$  consiste à estimer les variables de cet ensemble à partir de l'ensemble  $\bar{\mathbf{R}}$  des variables restantes et du modèle ACP.

Dans cette partie, nous définissons la reconstruction simultanée de plusieurs variables pour notre indicateur de détection  $SWE^{(i)}$ .

Tout d'abord, rapellons que le vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  peut être partitionné en deux parties :

$$\mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k) = \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{x}(k) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) = \Xi_{\bar{\mathbf{R}}}^{\text{T}} \mathbf{x}(k) \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k)$  correspond aux  $r$  composantes de  $\mathbf{x}(k)$  à reconstruire et  $\mathbf{x}_{\overline{\mathbf{R}}}(k)$  correspond aux  $(m-r)$  composantes restantes de  $\mathbf{x}(k)$ . Les matrices  $\Xi_{\mathbf{R}}$  et  $\Xi_{\overline{\mathbf{R}}}$  sélectionnent respectivement ces deux groupes de variables.

Notons  $SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  l'indicateur correspondant à l'indicateur  $SWE^{(i)}(k)$  (2.3) obtenu après reconstruction simultanée de  $r$  variables du vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  de l'ensemble  $\mathbf{R}$  à partir des  $i$  derniers vecteurs propres. Cette reconstruction est obtenue en minimisant l'indicateur  $SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  par rapport au vecteur de reconstruction  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = \arg \min_{\mathbf{x}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)} \left\{ SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) \right\} \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  correspond au vecteur  $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k)$  obtenu à partir des  $i$  derniers vecteurs propres et l'indicateur  $SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  est donné par :

$$SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = \left\| \mathbf{H}^{(i)1/2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) \\ \mathbf{x}_{\overline{\mathbf{R}}}(k) \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (2.14)$$

Le vecteur de reconstruction estimé  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  (2.13) de  $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  s'explique par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = \mathbf{C}_{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{x}_{\overline{\mathbf{R}}}(k) \quad (2.15)$$

avec :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{R}}^{(i)} = - \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)\text{T}} \left( \tilde{\Lambda}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)\text{T}} \left( \tilde{\Lambda}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\overline{\mathbf{R}}}^{(i)} \quad (2.16)$$

Dans le paragraphe suivant, les conditions de reconstruction ainsi que leurs influences sur la méthode proposée seront précisées.

### Démonstration

Explicitons l'expression de  $SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  (2.14) avec le partitionnement du vecteur  $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k)$  et celui correspondant pour la matrice  $\mathbf{H}^{(i)}$  :

$$SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{R}}^{(i)\text{T}}(k) & \mathbf{x}_{\overline{\mathbf{R}}}^{\text{T}}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{(i)} & \mathbf{H}_2^{(i)} \\ \mathbf{H}_2^{(i)\text{T}} & \mathbf{H}_3^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) \\ \mathbf{x}_{\overline{\mathbf{R}}}(k) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^{(i)} &= \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{H}^{(i)} \Xi_{\mathbf{R}} \\ \mathbf{H}_2^{(i)} &= \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{H}^{(i)} \Xi_{\overline{\mathbf{R}}} \\ \mathbf{H}_3^{(i)} &= \Xi_{\overline{\mathbf{R}}}^{\text{T}} \mathbf{H}^{(i)} \Xi_{\overline{\mathbf{R}}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

On développe l'expression (2.17) de  $SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$ , puis en la minimisant par rapport à  $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$ , on obtient :

$$\mathbf{H}_1^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) + \mathbf{H}_2^{(i)} \mathbf{x}_{\overline{\mathbf{R}}}(k) = 0 \quad (2.19)$$

A condition que  $\mathbf{H}_1^{(i)}$  soit inversible, on obtient l'estimé  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  de  $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = - \left( \mathbf{H}_1^{(i)} \right)^{-1} \mathbf{H}_2^{(i)} \mathbf{x}_{\overline{\mathbf{R}}}(k) \quad (2.20)$$

En vertu des définitions :

$$\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(i)\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} \quad (2.21)$$

$$\tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}}^{(i)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(i)\text{T}} \Xi_{\bar{\mathbf{R}}} \quad (2.22)$$

l'équation (2.20) entraîne (2.15).

L'ensemble du vecteur reconstruit s'obtient :

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = \Xi_{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) + \Xi_{\bar{\mathbf{R}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \quad (2.23)$$

Compte tenu de l'expression (2.15), l'équation (2.23) s'écrit :

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{(i)} \Xi_{\bar{\mathbf{R}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \quad (2.24)$$

avec :

$$\mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{(i)} = \mathbf{I}_m - \Xi_{\mathbf{R}} \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)\text{T}} \left( \tilde{\Lambda}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)\text{T}} \left( \tilde{\Lambda}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{(i)\text{T}} \quad (2.25)$$

La forme (2.24) s'obtient aisément en remplaçant dans l'équation (1.92) (du chapitre précédent) la matrice  $\mathbf{N}$  par  $\mathbf{H}^{(i)}$ .

Dans cette partie, nous analysons en détail les propriétés de l'estimateur développé. L'erreur de reconstruction s'explique :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = \mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{x}(k) \quad (2.26)$$

avec :

$$\mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(i)} = \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)\text{T}} \left( \tilde{\Lambda}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)\text{T}} \left( \tilde{\Lambda}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{(i)\text{T}} \quad (2.27)$$

### Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) &= \mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k) - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) \\ &= \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{x}(k) - \mathbf{C}_{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \end{aligned} \quad (2.28)$$

En remplaçant (2.16) dans (2.28), on obtient :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{x}(k) + \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)\text{T}} \left( \tilde{\Lambda}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)\text{T}} \left( \tilde{\Lambda}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}}^{(i)} \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \quad (2.29)$$

Comme le vecteur  $\mathbf{x}(k)$  peut être défini à partir de  $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k)$  et  $\mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k)$  :

$$\mathbf{x}(k) = \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k) + \Xi_{\bar{\mathbf{R}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \quad (2.30)$$

En remplaçant l'expression (2.11) dans (2.30), on a :

$$\Xi_{\bar{\mathbf{R}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) = \left( \mathbf{I}_m - \Xi_{\mathbf{R}} \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \right) \mathbf{x}(k) \quad (2.31)$$

Compte tenu de la définition de  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(i)}$  (2.21), l'expression (2.31) reportée dans (2.29) mène à l'expression finale de l'erreur de reconstruction.

Compte tenu de la définition du vecteur de mesures en absence de défaut  $\mathbf{x}^*(k)$  (1.12), l'espérance mathématique de l'erreur de reconstruction (2.26) est donnée par :

$$\mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) \right] = \mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbb{E} [\mathbf{x}(k)] \quad (2.32)$$

$$= \mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{x}^0(k) + \underbrace{\mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbb{E} [\epsilon(k)]}_{=0} \quad (2.33)$$

Compte tenu de la forme de  $\mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(i)}$  (2.27), on considère les deux cas suivants :

- 1<sup>er</sup> cas. Si l'espace résiduel, lié à la valeur de  $i$ , est choisi tel que  $\tilde{\mathbf{P}}^{(i)\text{T}} \mathbf{x}^0(k) = 0$  alors  $\mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) \right] = 0$  et l'estimateur n'est pas biaisé. Dans cette situation, l'espace résiduel est formé d'une ou de plusieurs relations de redondance.
- 2<sup>ème</sup> cas. Si l'espace résiduel est choisi tel que  $\tilde{\mathbf{P}}^{(i)\text{T}} \mathbf{x}^0(k) \neq 0$  alors  $\mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) \right] \neq 0$  et l'estimateur est biaisé. Dans cette situation, l'espace résiduel est formé de relations de redondance et de composantes principales.

Etant donné ce résultat et sachant qu'on souhaite développer une méthode de choix du nombre de composantes pour de défauts affectant des variables redondantes ou non, nous utilisons un critère qui s'affranchit de ce problème.

### 2.2.3 Méthodes de choix du nombre de composantes principales

Dans cette partie, on explique, en premier lieu, le principe des méthodes existantes de Dunia et al. [19] et Tamura et al. [76]. Ensuite, on présente la méthode proposée et on la positionne par rapport aux méthodes existantes.

#### 2.2.3.1 Méthodes existantes

Pour la détermination du nombre de composantes principales, de nombreuses règles ont été proposées dans la littérature [84]. La plupart sont issues de méthodes heuristiques parfois subjectives ou de critères utilisés en identification de système qui privilégient la qualité de l'approximation de la matrice de données.

Dans ce cadre, on cite : la méthode du pourcentage cumulé de la variance totale PCV [56], la méthode du coude [12] ou encore la méthode de validation croisée (PRESS) [90].

Ces approches présentent plusieurs inconvénients. D'une part, elles sont monotones croissantes ou décroissantes. Le choix du nombre de composantes principales qui en découle est ainsi ambiguë. En fait, Valle et al. [84] ont montré que ces méthodes donnent des résultats complètement différents. D'autre part, dans une procédure de diagnostic, on ne cherche pas à déterminer la meilleure approximation des données mais le modèle ACP optimisant la détection et la localisation de défauts. A cet effet, Dunia et al. [19] ont proposé la méthode *VNR* (Variance Non Reconstituée). Plus tard, Tamura et al. [76] ont proposé la méthode *SNR*.

Nous présentons ces deux dernières méthodes ainsi que leurs limites d'application.

### a- Méthode VNR

Dunia et al. [19] ont proposé de déterminer le nombre de composantes qui minimise le critère de la variance moyenne de l'erreur de reconstruction ou variance non reconstruite *VNR* des différentes variables par rapport à l'indicateur *SPE*.

Le nombre  $i$  à déterminer est défini par :

$$i = \arg \min_j \left( \phi^{(j)} \right), \quad j = 1 \dots m - 1 \quad (2.34)$$

où  $\phi^{(j)}$  désigne la variance moyenne de l'erreur de reconstruction des différentes variables pour un nombre de composantes égal à  $j$ . Cette variance a pour expression :

$$\phi^{(j)} = \sum_{h=1}^m \frac{\rho_h^{(j)}}{\xi_h^T \Sigma \xi_h} \quad (2.35)$$

où  $\rho_h^{(j)}$  désigne la variance de l'erreur de reconstruction de la  $h^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{x}(k)$ . Cette variance est donnée par :

$$\rho_h^{(j)} = \text{var} \left\{ \xi_h^T (\mathbf{x}^*(k) - \hat{\mathbf{z}}_h(k)) \right\} = \text{var} \left\{ \hat{\mathbf{f}}_h(k) - \mathbf{f}(k) \right\} \quad (2.36)$$

où  $\hat{\mathbf{z}}_h(k)$  est le vecteur de reconstruction et  $\hat{\mathbf{f}}_h(k)$  est l'estimé de l'amplitude de défaut  $\mathbf{f}_h(k)$ .

Compte tenu des relations (1.96) et (1.95), de la définition de la matrice  $\mathbf{N}$  relative à l'indicateur *SPE* et en remplaçant  $\Xi_{\mathbf{R}}$  par  $\xi_h$ , la variance (2.36) s'explique :

$$\rho_h^{(j)} = \frac{\tilde{\xi}_h^{(j)T} \tilde{\mathbf{P}}^{(j)T} \Sigma \tilde{\mathbf{P}}^{(j)} \tilde{\xi}_h^{(j)}}{\left( \tilde{\xi}_h^{(j)T} \tilde{\xi}_h^{(j)} \right)^2} \quad (2.37)$$

où  $\tilde{\xi}_h^{(j)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(j)T} \xi_h$ .

La variance (2.37) n'est définie que si  $\sigma_{\max} \left( \tilde{\xi}_h^{(j)} \right) \neq 0$ . Cette condition est la condition nécessaire de détectabilité.

Ainsi, cette méthode ne tient compte que de l'aspect détectabilité de défauts. Cependant, elle présente plusieurs inconvénients. Tout d'abord, considérant uniquement l'indicateur de détection *SPE*, elle ne permet pas de considérer le cas de la détection de défauts sur les variables non redondantes qui se projettent uniquement dans l'espace principal. En fait, Dunia et al. [19] ont écarté de l'ensemble des variables utilisées celles non corrélées avec les autres puisqu'elles ne peuvent pas être reconstruites avec une bonne précision. De plus, en déterminant un nombre de composantes unique et donc un modèle ACP "moyen" pour détecter et localiser l'ensemble de défauts simples, cette méthode ne garantit pas la maximisation de la sensibilité à chacun de défauts considéré séparément, ni de la capacité à localiser les défauts multiples.

### b- Méthode SNR

Tamura et al. [76] ont proposé une nouvelle méthode appelée *SNR* (Signal to Noise Ratio)

qui cherche non pas un modèle ACP unique mais les différents modèles ACP dont le nombre de composantes maximise la sensibilité à chacun des différents défauts simples à détecter affectant les variables. Cette méthode permet de déterminer le nombre optimal de composantes principales qui maximise la détection de défauts à l'indicateur adapté  $SPE$  et  $T^2$  [76].

Ainsi, pour chaque défaut simple caractérisé par le vecteur de sélection  $\xi_h$ , le  $SNR$  est donné pour l'indicateur  $SPE$  par :

$$SNR_h^{SPE} = \frac{\tilde{\xi}_h^{(j)\top} \tilde{\xi}_h^{(j)}}{\delta_{\alpha,j}^2} \quad (2.38)$$

où  $\delta_{\alpha,j}^2$  désigne le seuil de détection de  $SPE$ , il peut être approximé pour chaque valeur de  $j$  de façon analogue au raisonnement de Box [10] par :

$$\delta_{\alpha,j}^2 = g_j \chi_{h_j, \alpha}^2 \quad (2.39)$$

$$\text{où } g_j = \frac{\theta_2^j}{\theta_1^j} \text{ et } h_j = \frac{(\theta_1^j)^2}{\theta_2^j}$$

avec  $\theta_i^j = \sum_{s=m-j+1}^m \lambda_s^i, i = 1, 2, \lambda_s^i$  étant la  $s^{\text{ème}}$  valeur propre de  $\mathbf{\Lambda}$  à la puissance  $i$ .

L'expression de  $SNR$  pour l'indicateur  $T^2$  est :

$$SNR_h^{T^2} = \frac{\hat{\xi}_h^{(m-j)\top} (\hat{\mathbf{\Lambda}}^{(m-j)})^{-1} \hat{\xi}_h^{(m-j)}}{\chi_{m-j, \alpha}^2} \quad (2.40)$$

où  $\chi_{m-j, \alpha}^2$  désigne le seuil de détection de  $T^2$  avec  $(m-j)$  degrés de liberté (sous l'hypothèse que le nombre d'observations  $N$  est important) et  $\hat{\xi}_h^{(m-j)} = \hat{\mathbf{P}}^{(m-j)\top} \xi_h$ .

Le nombre  $i$  de composantes à retenir correspond à la valeur maximale de  $SNR_h^{SPE}$  (2.38) et de  $SNR_h^{T^2}$  (2.40) pour  $j = 1, \dots, m$ . Ceci implique la vérification de deux conditions :  $\sigma_{max}(\tilde{\xi}_h^{(j)}) \neq 0$  pour (2.38) et  $\sigma_{max}(\hat{\xi}_h^{(m-j)}) \neq 0$  pour (2.40).

Ainsi, ce critère de sélection cherche seulement à mettre en évidence l'aspect détectabilité puisqu'il vise à maximiser la projection de défauts dans l'espace résiduel pour assurer leur détection. Par exemple, pour deux défauts ayant une projection colinéaire dans l'espace résiduel, la valeur maximale de (2.38) ou (2.40) est atteinte bien que leur localisation ne soit pas possible (ces deux défauts ne sont pas distinguables de l'ensemble de variables suspectées en défaut). Généralement, l'utilisation des modèles issus de cette méthode pour la localisation peut conduire à des localisations erronées.

### 2.2.3.2 Méthode proposée

La méthode proposée consiste à minimiser la trace de la variance de l'erreur de reconstruction des variables pour lesquelles on veut maximiser la détection et la localisation de défauts.

Pour chaque défaut de capteur simple ou multiple caractérisé par la direction  $\Xi_{\mathbf{R}}$ , le nombre  $i$  de composantes à retenir est défini par :

$$i = \arg \min_j \left( \text{trace} \left( \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} \right) \right), \quad j = 1 \dots m \quad (2.41)$$

où la variance de l'erreur de reconstruction des  $r$  variables du sous-ensemble  $\mathbf{R}$  est donnée par :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} = \text{var} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(j)}(k) \right) \quad (2.42)$$

La variance de l'erreur de reconstruction est :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} = \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)\text{T}} \left( \tilde{\Lambda}^{(j)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)} \right)^{-1} \quad (2.43)$$

### Démonstration

A partir des expressions de l'erreur de reconstruction (2.26) et de son espérance (2.32), on obtient :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(j)}(k) - \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}^{(j)}(k) \right] = \mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(j)} \left( \mathbf{x}(k) - \mathbb{E} [\mathbf{x}(k)] \right) \quad (2.44)$$

En remplaçant la variance des mesures définie par :

$$\Sigma = \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{x}(k) - \mathbb{E} [\mathbf{x}(k)] \right) \left( \mathbf{x}(k) - \mathbb{E} [\mathbf{x}(k)] \right)^{\text{T}} \right] \quad (2.45)$$

dans l'expression (2.42), cette dernière devient :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} = \mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(j)} \Sigma \mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(j)\text{T}} \quad (2.46)$$

Compte tenu de la relation :

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(j)\text{T}} \Sigma \tilde{\mathbf{P}}^{(j)} = \tilde{\Lambda}^{(j)} \quad (2.47)$$

et en remplaçant la définition de  $\mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{(j)}$  (2.27) dans (2.46), on obtient (2.43).

Dans un premier temps, analysons les conditions d'existence de la matrice de variance-covariance de l'erreur de reconstruction (2.43). Cette dernière est définie si la matrice  $(\tilde{\Lambda}^{(j)})^{-1/2} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)} \in \mathbb{R}^{j \times r}$  est de plein rang colonne  $r$ . Comme la matrice  $(\tilde{\Lambda}^{(j)})^{-1/2}$  est non singulière, la condition de rang va porter alors sur la matrice  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)}$ . Cette condition implique que :

- le nombre de composantes à retenir doit satisfaire la condition suivante :

$$r \leq j \quad (2.48)$$

c'est-à-dire que la dimension de l'espace résiduel doit être supérieure ou égale au nombre de défauts multiples.

- les colonnes de la matrice  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)}$  ne soient pas nulles, sinon les variables reconstruites ne sont pas projetées dans le sous-espace résiduel et donc un défaut sur ces variables n'est pas détectable et donc non localisable.
- les colonnes de la matrice  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)}$  ne soient pas colinéaires, sinon la direction de défaut des variables reconstruites de l'ensemble  $\mathbf{R}$  et certaines directions de défauts de sous-ensembles de  $\mathbf{R}$  ne sont pas distinguables dans l'espace résiduel choisi.

Dans les deux cas cités ci-avant de perte de rang ou de quasi-perte de rang de la matrice  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)}$ , la variance de l'erreur de reconstruction (2.43) tend vers l'infini. Ceci montre que le critère retenu (2.41) pour définir la dimension de l'espace résiduel prend en compte des critères de diagnosticabilité de défauts multiples en termes de détection et de localisation.

L'analyse du critère peut être facilitée en utilisant une forme récursive de l'expression de la matrice de variance-covariance. En effet, compte tenu de (2.43) et de la définition de  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)}$  (2.21), on a :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} = \left( \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \tilde{\mathbf{P}}^{(j)} (\tilde{\Lambda}^{(j)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{(j)\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} \right)^{-1} \quad (2.49)$$

expression dans laquelle les matrices  $\tilde{\mathbf{P}}^{(j)}$  et  $\tilde{\Lambda}^{(j)}$  se construisent de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{m-j+1} & \tilde{\mathbf{P}}^{(j-1)} \end{bmatrix} \quad \tilde{\Lambda}^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda_{m-j+1} & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda}^{(j-1)} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

où  $\mathbf{p}_{m-j+1}$  et  $\lambda_{m-j+1}$  représentent respectivement les  $(m-j+1)^{\text{ème}}$  vecteur et valeur propres de  $\mathbf{P}$  et  $\Lambda$ .

En vertu de ces partitionnements, on montre alors que :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} = \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} - \frac{\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{p}_{m-j+1} \mathbf{p}_{m-j+1}^{\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)}}{\lambda_{m-j+1} + \mathbf{p}_{m-j+1}^{\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{p}_{m-j+1}} \quad (2.51)$$

Le calcul de la trace de cette matrice montre que le critère proposé décroît si le nombre  $j$  de composantes utilisées pour cette reconstruction croît.

### Démonstration

Remplaçons les expressions des matrices  $\tilde{\mathbf{P}}^{(j)}$  et  $\tilde{\Lambda}^{(j)}$  (2.50) dans (2.49) :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} = \left( \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \tilde{\mathbf{P}}^{(j-1)} (\tilde{\Lambda}^{(j-1)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{(j-1)\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} + \lambda_{m-j+1} \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{p}_{m-j+1} \mathbf{p}_{m-j+1}^{\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} \right)^{-1} \quad (2.52)$$

En appliquant à (2.52) le lemme d'inversion matricielle :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \quad (2.53)$$

on obtient :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} = \underbrace{\left( \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \tilde{\mathbf{P}}^{(j-1)} (\tilde{\Lambda}^{(j-1)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{(j-1)\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} \right)^{-1}}_{\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)}} - \beta \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{p}_{m-j+1} \mathbf{p}_{m-j+1}^{\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \quad (2.54)$$

où  $\beta$  est un scalaire défini par :

$$\beta = \left( \lambda_{m-j+1} + \mathbf{p}_{m-j+1}^{\text{T}} \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \Xi_{\mathbf{R}}^{\text{T}} \mathbf{p}_{m-j+1} \right)^{-1} \quad (2.55)$$

On retrouve donc l'expression (2.51).

Compte tenu de la définition du critère utilisé (2.41), on applique l'opérateur trace à cette expression :

$$\text{trace} \left( \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} \right) = \text{trace} \left( \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \right) - \beta \text{trace} \left( \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \Xi_{\mathbf{R}}^T \mathbf{P}_{m-j+1} \mathbf{P}_{m-j+1}^T \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \right) \quad (2.56)$$

D'une part, le scalaire  $\beta$  est positif ou nul car la valeur propre  $\lambda_{m-j+1}$  est positive ou nulle et le second terme de  $\beta$  est une forme quadratique où la matrice  $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)}$  est semi-définie positive. D'autre part, dans l'expression (2.56), le dernier terme est la trace d'une matrice symétrique (les éléments de sa diagonale sont donc positifs ou nuls). On constate donc que le critère utilisé décroît lorsque la valeur de  $j$  augmente.

Dans le cas simple où le système est affecté par un défaut et le sous-ensemble  $\mathbf{R}$  est constitué d'une variable correspondant à la  $h^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\mathbf{x}(k)$  ( $\Xi_{\mathbf{R}} = \xi_h$ ;  $\xi_h$  est le vecteur de sélection de la  $h^{\text{ème}}$  composante), l'expression (2.56) s'écrit :

$$\text{trace} \left( \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} \right) = \mathbf{K}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \quad (2.57)$$

avec  $\mathbf{K}_{\mathbf{R}}^{(j-1)}$ , le coefficient d'atténuation, ayant pour expression :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} = 1 - \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \frac{\mathbf{p}_{h,m-j+1}^2}{\lambda_{m-j+1} + \mathbf{p}_{h,m-j+1}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)}} \quad (2.58)$$

où  $\mathbf{p}_{h,m-j+1}$  désigne la  $h^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\mathbf{p}_{m-j+1}$ .

Le coefficient (2.58) change en fonction de  $j$ . Ce changement dépend des  $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j-1)}$ , des valeurs et des vecteurs propres. Ces derniers varient selon les variables redondantes ou non.

La figure 2.1 illustre l'évolution de  $\text{trace} \left( \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)} \right)$  (2.57) pour  $j = 1 \dots m$ . Le coefficient d'atténuation de la pente (1) est très petit comparé à celui de la pente (2) (de l'ordre de 1). La valeur de  $i$  retenue est celle pour laquelle la variation de  $\text{trace}(\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)})$  n'est plus significative.

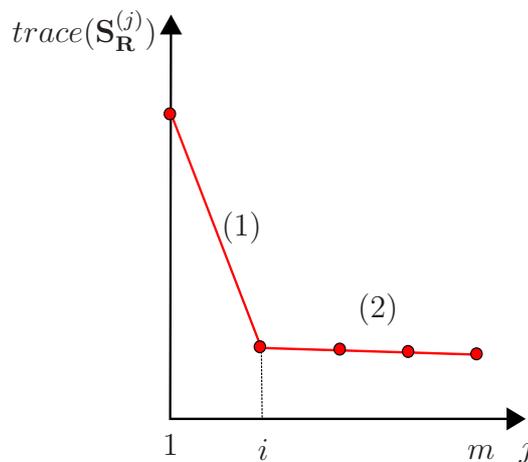


FIGURE 2.1 – Schéma illustratif de l'évolution de  $\text{trace}(\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^{(j)})$ ,  $j = 1 \dots m$

Ainsi, pour chaque défaut de capteur simple ou multiple caractérisé par la matrice des directions de reconstruction  $\Xi_{\mathbf{R}}$ , le nombre  $i$  de composantes à retenir est obtenu en appréciant pour quelle valeur de  $j$  la réduction de la trace de la variance (2.43) n'est plus significative.

## 2.3 Application

Pour illustrer les méthodes présentées précédemment, on considère un système statique régi par 8 variables  $x_j^0$ ,  $j = 1, \dots, 8$ . Ce système est décrit à différents instants  $k$  par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^0(k) = \sin(k/4) + 1 + v_1(k)^2 \\ x_2^0(k) = \cos(k/4)^3 \exp(-k/N) \\ x_3^0(k) = x_1^0(k) + x_2^0(k) \\ x_4^0(k) = x_1^0(k) \\ x_5^0(k) = x_2^0(k) \\ x_6^0(k) = 2x_1^0(k) + x_2^0(k) \\ x_7^0(k) = x_1^0(k) + x_3^0(k) \\ x_8^0(k) = v_2(k) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_1(k) \sim \mathfrak{N}(0, 1) \\ \\ \\ \\ \\ \\ v_2(k) \sim \mathfrak{N}(0, 1) \end{array} \quad (2.59)$$

Ce jeu d'équations fait clairement apparaître des relations de redondance analytique linéaires entre  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0$  et  $x_7^0$  ainsi qu'une variable indépendante (non redondante)  $x_8^0$ . Aux données ainsi générées ont été superposées des réalisations de variables aléatoires  $\varepsilon_j(k)$  à distribution normale centrée et d'écart type 0.095 de façon à simuler la présence de bruits de mesure. Le système est simulé, en premier lieu, sur une fenêtre de  $N = 500$  observations.

L'évolution des mesures des variables  $x_j(k)$ ,  $j = 1, \dots, 8$  est illustrée sur la figure (2.2). Après centrage et réduction des variables, ces dernières sont regroupées dans une matrice  $\mathbf{X}$  (1.2).

Une analyse en composantes principales est appliquée ce qui permet d'estimer les valeurs et vecteurs propres de la matrice des corrélations  $\Sigma$  de  $\mathbf{X}$ .

### 2.3.1 Défauts simples

La figure 2.3 illustre l'évolution de  $VNR$  (2.37) en fonction du nombre de variables  $j$ . Le minimum de ce critère apparaît pour un nombre  $i$  de composantes principales égal à 6 (correspondant à un espace résiduel de dimension 2). Cependant, le système considéré possédant une variable indépendante des autres, le nombre  $i$  est 5 correspondant à un espace principal de dimension  $m - i = 3$ .

La figure 2.4 illustre l'application de la méthode de détermination du nombre de composantes principales proposée (2.41) pour la variable redondante  $x_5$  et pour la variable non redondante  $x_8$  avec un seuil de confiance  $\alpha$  de 95%. Ce seuil est conservé dans la suite de cette application.

A partir de l'évolution de  $trace(\mathbf{S}_5^{(j)})$ , le nombre  $i$  vaut 4 puisque à partir de ce nombre

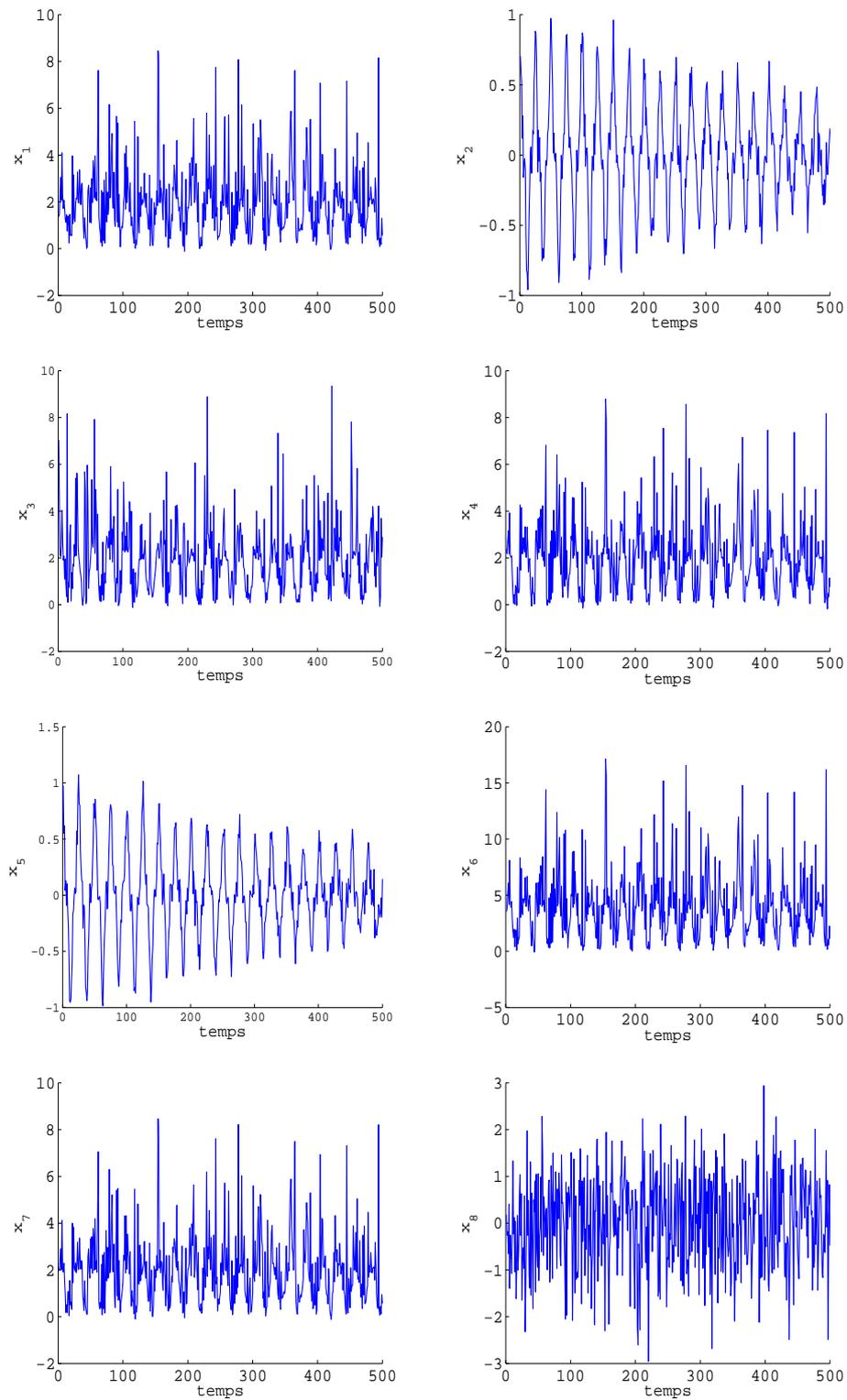
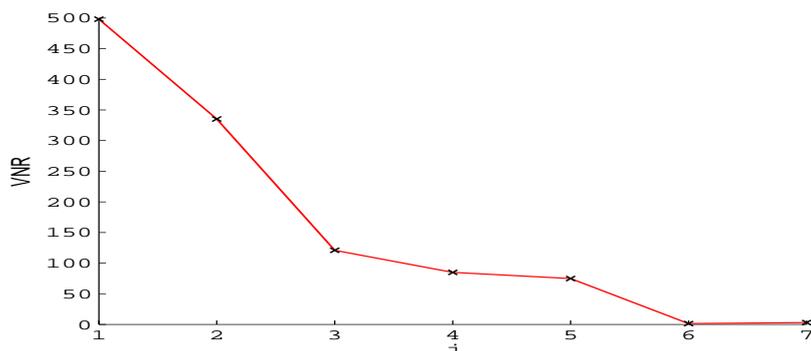


FIGURE 2.2 – Evolution des mesures des 8 variables  $x_j(k)$

FIGURE 2.3 – Evolution de  $VNR$  pour  $j = 1 \dots 8$ 

$trace(\mathbf{S}_5^{(j)})$  atteint une valeur presque constante. L'analyse de  $trace(\mathbf{S}_8^{(j)})$  permet de choisir  $i = 6$ .

L'analyse des coefficients d'atténuation  $\mathbf{K}_5^{(j-1)}$ ,  $j = 2 \dots 8$  (2.58) relatifs à la variable  $x_5$  et  $\mathbf{K}_8^{(j-1)}$  relatifs à la variable  $x_8$  présentés respectivement dans les tableaux 2.1 et 2.2 justifie ce résultat. En fait, à partir de  $\mathbf{K}_5^{(4)}$  et  $\mathbf{K}_8^{(6)}$ , la réduction n'est plus significative; les coefficients  $(\mathbf{K}_5^{(4)}, \dots, \mathbf{K}_5^{(7)})$  et  $(\mathbf{K}_8^{(6)}, \mathbf{K}_8^{(7)})$  se stabilisent presque à 1.

TABLE 2.1 – Coefficients d'atténuation  $\mathbf{K}_5^{(j-1)}$  pour  $j = 2 \dots 8$ 

$\mathbf{K}_5^{(1)}$	$\mathbf{K}_5^{(2)}$	$\mathbf{K}_5^{(3)}$	$\mathbf{K}_5^{(4)}$	$\mathbf{K}_5^{(5)}$	$\mathbf{K}_5^{(6)}$	$\mathbf{K}_5^{(7)}$
0.08	0.75	0.33	0.98	0.99	1	1

TABLE 2.2 – Coefficients d'atténuation  $\mathbf{K}_8^{(j-1)}$  pour  $j = 2 \dots 8$ 

$\mathbf{K}_8^{(1)}$	$\mathbf{K}_8^{(2)}$	$\mathbf{K}_8^{(3)}$	$\mathbf{K}_8^{(4)}$	$\mathbf{K}_8^{(5)}$	$\mathbf{K}_8^{(6)}$	$\mathbf{K}_8^{(7)}$
0.88	0.68	0.87	0.87	0.07	0.99	1

A partir de la figure 2.4, on remarque que les deux courbes  $trace(\mathbf{S}_5^{(j)})$  et  $trace(\mathbf{S}_8^{(j)})$  n'ont pas la même allure c'est-à-dire que leurs coefficients d'atténuation sont différents. On a déjà mentionné que ces coefficients dépendent des variables à reconstruire. En fait, pour la variable dépendante, les coefficients d'atténuation sont plus importants dans l'espace principal comparés à ceux dans l'espace résiduel. Ceci explique la grande rupture en passant de l'espace résiduel à l'espace principal. Pour la variable indépendante  $x_8$ , ses coefficients ont presque le même ordre de grandeur sauf pour  $\mathbf{K}_8^{(5)}$  associé à la réduction la plus importante. Ceci explique la légère atténuation en passant de l'espace résiduel à l'espace principal.

Afin de comparer les performances de la méthode proposée et celle du  $SNR$  en termes de détection et de localisation de défauts à l'indicateur proposé  $SWE^{(i)}(k)$  (2.3), on propose d'appliquer le principe de la méthode  $SNR$  [76] à notre indicateur et de la généraliser

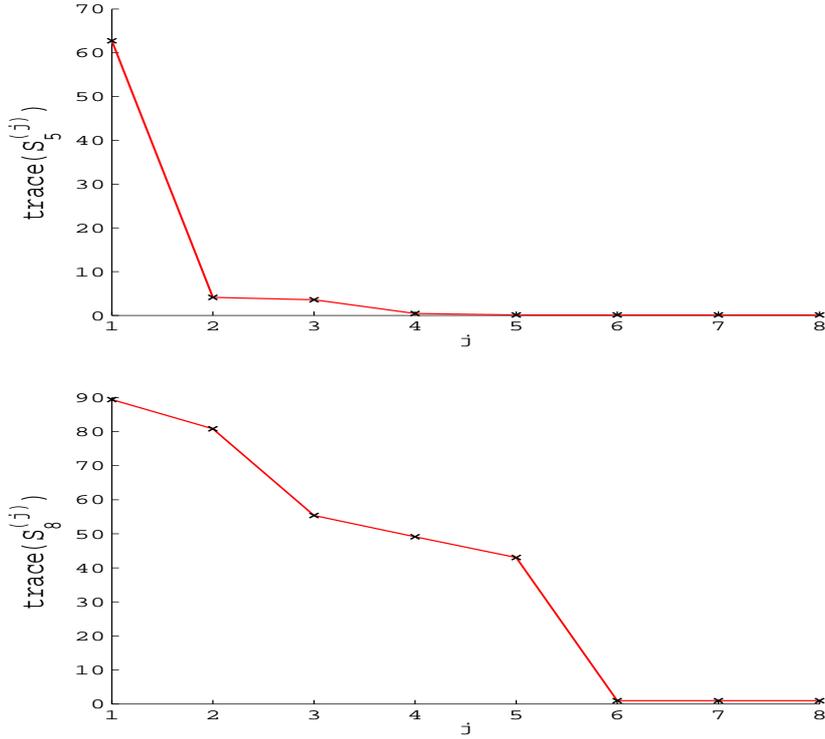


FIGURE 2.4 – Evolution de  $trace(\mathbf{S}_5^{(j)})$  et  $trace(\mathbf{S}_8^{(j)})$  pour  $j = 1 \dots 8$

pour le cas de défauts multiples caractérisés par la matrice  $\Xi_{\mathbf{R}}$ .  
Le nombre optimal à retenir  $i$  est donné par :

$$i = \arg \max_j \left( SNR_{\mathbf{R}}^{SWE(j)} \right), \quad j = 1 \dots m \quad (2.60)$$

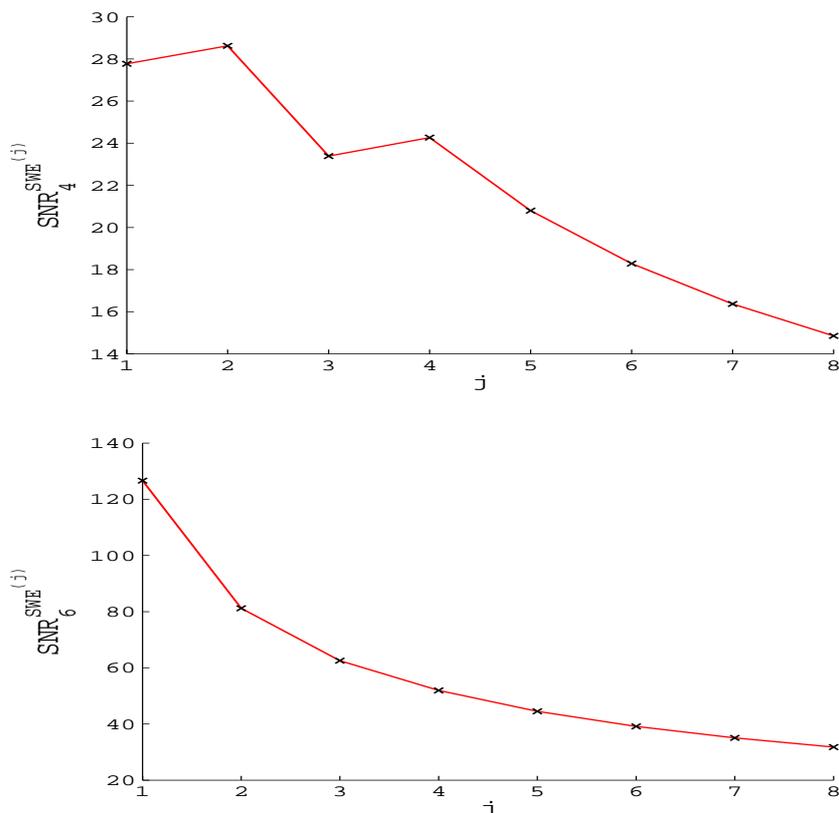
avec :

$$SNR_{\mathbf{R}}^{SWE(j)} = \frac{\left\| \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)T} \left( \tilde{\Lambda}^{(j)} \right)^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)} \right\|_2}{\chi_{j,\alpha}^2} \quad (2.61)$$

La valeur maximale n'est atteinte que si  $\sigma_{max}(\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^{(j)}) \neq 0$ .

La figure 2.5 illustre l'évolution de  $SNR_4^{SWE(j)}$  (2.61) pour  $\mathbf{R} = 4$  et  $SNR_6^{SWE(j)}$  pour  $\mathbf{R} = 6$ , à titre indicatif. A partir de cette figure, le maximum correspond à  $j = 2$  pour  $SNR_4^{SWE(j)}$  c'est-à-dire un nombre de composantes  $i = 2$ . Concernant  $SNR_6^{SWE(j)}$ , le maximum est atteint à  $j = 1$  ainsi la dimension de l'espace résiduel vaut 1.

La table 2.3 illustre les résultats d'application de la méthode  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE(j)}$  (2.61) et de la méthode proposée pour tous les sous-ensembles  $\mathbf{R}$  constitués d'une variable c'est-à-dire pour  $r = 1$ . Ce tableau indique, pour la détection d'un défaut simple affectant l'un des huit capteurs, la structure du modèle ACP, c'est-à-dire le nombre de composantes principales à retenir dans l'espace résiduel. A partir de ce tableau, on remarque que les

FIGURE 2.5 – Evolution de  $SNR_4^{SWE^{(j)}}$  et  $SNR_6^{SWE^{(j)}}$  en fonction de  $j$ 

deux méthodes donnent le même résultat sauf pour les défauts affectant  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_6$ .

TABLE 2.3 – Nombre de composantes principales  $i$  pour  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$  et pour la méthode proposée en fonction de directions de défauts avec  $r = 1$

Directions de défauts	1	2	3	4	5	6	7	8
$i$ pour $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$	3	5	4	2	4	1	3	6
$i$ pour méthode proposée	3	5	5	4	4	3	3	6

Une simulation est réalisée pour tester la sensibilité des différentes méthodes : la méthode proposée,  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$  et  $VNR$  en fonction des directions de défauts constituées d'une variable. Pour cette raison, 500 échantillons de mesures sont générés. L'amplitude minimale de défaut est déterminée de la façon suivante. Pour une variable faisant parti du sous-ensemble  $\mathbf{R}$ , un défaut de type rampe est ajouté à cette variable. Ensuite, on calcule l'indicateur  $SWE^{(i)}(k)$  (le nombre  $i$  dépend de la méthode utilisée) et on compare à chaque instant cet indicateur par rapport à son seuil de détection. L'amplitude de défaut minimale correspond au premier instant pour lequel l'indicateur  $SWE^{(i)}(k)$  dépasse 4 instants successifs son seuil de détection (le nombre 4 est choisi d'une façon empirique

pour éviter les fausses alarmes). Puis, l'amplitude obtenue est divisée par le domaine de variation de la variable considérée afin d'obtenir un défaut exprimé en pourcent. Cette procédure est effectuée pour toutes les variables de sous-ensemble  $\mathbf{R}$ .

Pour obtenir des résultats statistiquement interprétables, la totalité de cette simulation est répétée 100 fois.

Le tableau 2.4 présente les résultats obtenus. On remarque, d'une part, que les amplitudes minimales de défauts issues de la méthode proposée et celles de  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$  sont presque identiques sauf pour la 3<sup>ème</sup> direction où on note un écart entre les deux amplitudes. D'autre part, la méthode  $VNR$  donne des résultats légèrement en retrait par rapport à la méthode proposée sauf pour la variable indépendante  $x_8$ .

On avait déjà fait remarquer la difficulté de traiter le cas des variables indépendantes avec la méthode  $VNR$ . Pour cette variable, on note l'intérêt de travailler avec un espace résiduel dont la dimension est largement supérieure à celle nécessaire pour détecter de défauts sur les autres variables.

TABLE 2.4 – Pourcentages des amplitudes minimales de défauts affectant les différentes variables pour les différentes méthodes

Directions de défauts	1	2	3	4	5	6	7	8
Méthode proposée	6.3	35	35	8	9.8	5	6.7	57.6
Méthode $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$	6.3	35	90	8.2	9.8	3.6	6.7	57.6
Méthode $VNR$	7.2	35	35	8.7	10.7	6	8	408.8

Un défaut simple a été introduit à la variable  $x_6$  aux instants 51 à 100. Il est représenté par un biais d'amplitude égale à 6% de la plage de variation de cette variable. On a calculé les indicateurs pour les deux méthodes en considérant tous les ensembles  $\mathbf{R}$  à une variable, chaque indicateur étant évalué à partir du nombre  $i$  figurant dans le tableau 2.3. La figure 2.6 montre deux indicateurs sensibles à ce défaut. L'indicateur  $SWE^{(1)}(k)$  (déterminé par la méthode  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$ ) est représenté par la somme des carrés des éléments de la dernière composante principale pondérés par l'inverse de sa variance et l'indicateur  $SWE^{(3)}(k)$  (obtenu par la méthode proposée) est représenté par la somme des carrés des éléments de trois dernières composantes principales pondérées par l'inverse de leur variance respective.

Cette phase de détection est complétée par une phase de localisation de défaut.

Dans cette partie, nous comparons les performances de la méthode proposée et de la méthode  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$  en termes de localisation par reconstruction. L'évolution au cours du temps des indicateurs  $SWE_1^{(1)}(k)$  et  $SWE_1^{(3)}(k)$  correspondant respectivement aux indicateurs  $SWE^{(1)}(k)$  et  $SWE^{(3)}(k)$  calculés après reconstruction de la variable  $x_1$  est illustrée sur la figure 2.7. L'indicateur  $SWE_1^{(3)}(k)$  est sensible au défaut alors que l'indicateur  $SWE_1^{(1)}(k)$  est en dessous de son seuil de détection indiquant que la variable  $x_1$  est en défaut alors qu'en réalité la variable en défaut est la variable  $x_6$ .

Pour faciliter la localisation pour tous les ensembles  $\mathbf{R}$  constitués d'une variable, on peut définir à chaque instant un indicateur normalisé de localisation calculé à partir de

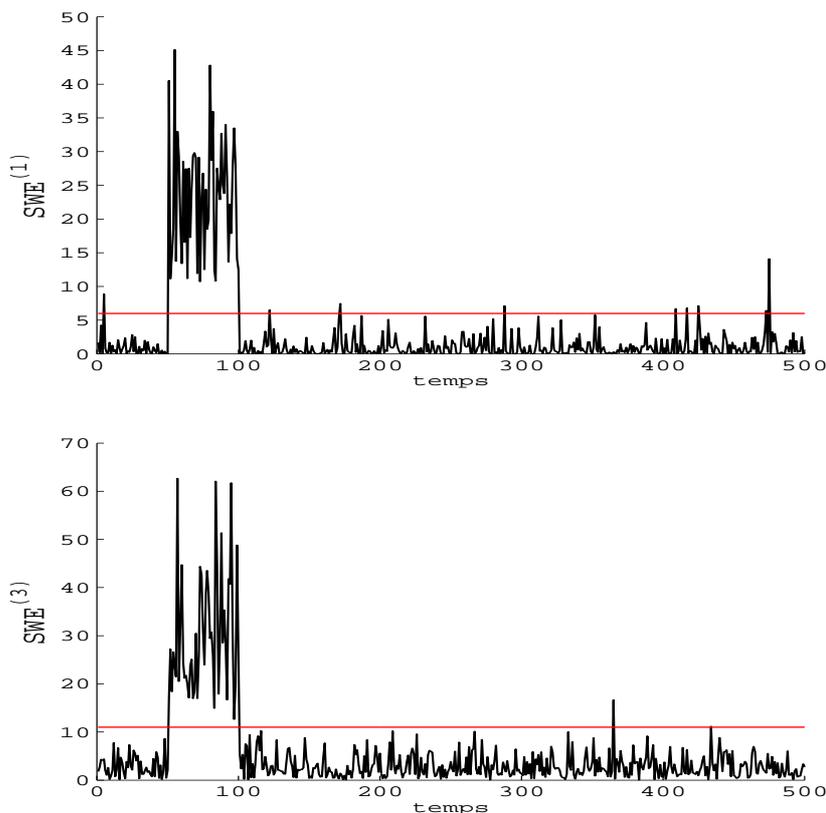


FIGURE 2.6 – Evolution des indicateurs  $SWE^{(1)}(k)$ ,  $SWE^{(3)}(k)$  avec un défaut affectant  $x_6$

l'indicateur de détection  $SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  :

$$\overline{SWE}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k) = \frac{SWE_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)}{\chi_{i,\alpha}^2} \quad (2.62)$$

La variable, pour laquelle l'indicateur  $\overline{SWE}_{\mathbf{R}}^{(i)}(k)$  est inférieur à un à un instant  $k$ , est considérée comme défectueuse à cet instant.

La figure 2.8 présente les indicateurs de localisation  $\overline{SWE}_{\mathbf{R}}^{(3)}(k)$  calculés à deux instants après reconstruction ; le premier graphique a été établi avant l'apparition du défaut, le deuxième dans l'intervalle où un défaut a été introduit dans les mesures.

Seul l'indicateur  $\overline{SWE}_6^{(3)}(k)$ , calculé après reconstruction de la variable  $x_6$ , admet une valeur inférieure à un, indiquant clairement que cette dernière est en défaut. De plus, dans l'intervalle de temps où le défaut apparaît, si l'on observe la valeur de l'indicateur  $\overline{SWE}_4^{(3)}(k)$ , ce dernier étant celui dont la valeur est immédiatement supérieur à  $\overline{SWE}_3^{(3)}(k)$ , le facteur de contraste lève toute ambiguïté de décision quant à la variable en défaut.

Ainsi, le modèle ACP obtenu à partir de la méthode proposée permet d'éviter le risque de fausses localisations comparé aux résultats fournis par la méthode  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$ .

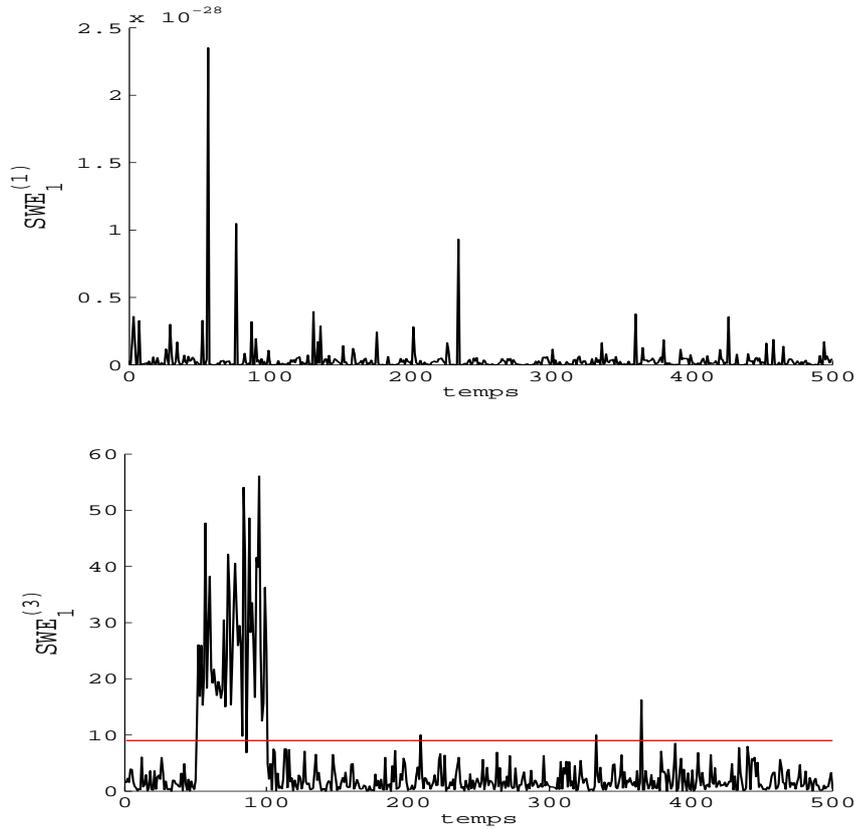


FIGURE 2.7 – Evolution des indicateurs  $SWE_1^{(1)}(k)$  et  $SWE_1^{(3)}(k)$  avec un défaut affectant  $x_6$

### 2.3.2 Défauts multiples

Une simulation est effectuée sur 500 échantillons où trois défauts de type biais sont introduits simultanément sur les variables  $x_1$ ,  $x_4$  d'une amplitude de 10% de la plage de variation de chaque variable et sur la variable  $x_8$  (variable indépendante) d'amplitude égale à 150% de la plage de variation de cette dernière entre les instants 300 et 500.

La figure 2.9 trace l'évolution de  $SNR_{1,4,8}^{SWE^{(j)}}$  pour l'ensemble  $\mathbf{R} = \{1, 4, 8\}$  ( $r = 3$ ) avec  $j = 1 \dots 8$ . Le maximum de  $SNR_{1,4,8}^{SWE^{(j)}}$  correspond à  $j = 3$  et par conséquent cette méthode permet la détection de défauts grâce à l'indicateur  $SWE^{(3)}(k)$ .

L'application de la méthode proposée pour cet ensemble  $\mathbf{R}$  nécessite la prise en compte de la condition structurelle (2.48). La figure 2.10 présente l'évolution de  $trace(\mathbf{S}_{1,4,8}^{(j)})$  pour  $j = 3 \dots 8$ . A partir de cette figure, le nombre de composantes  $i$  à retenir vaut 6. Ainsi, la méthode proposée permet la détection de défauts grâce à l'indicateur  $SWE^{(6)}(k)$ .

Rappelons que la méthode  $VNR$  permet de choisir un nombre de composantes  $i = 5$ . L'évolution des indicateurs  $SWE^{(3)}$ ,  $SWE^{(5)}$  et  $SWE^{(6)}$  est illustrée sur la figure 2.11. Ces trois indicateurs permettent de mettre en évidence la présence de défauts à partir de l'instant 300.

Maintenant, nous comparons les performances de ces indicateurs associés aux dif-

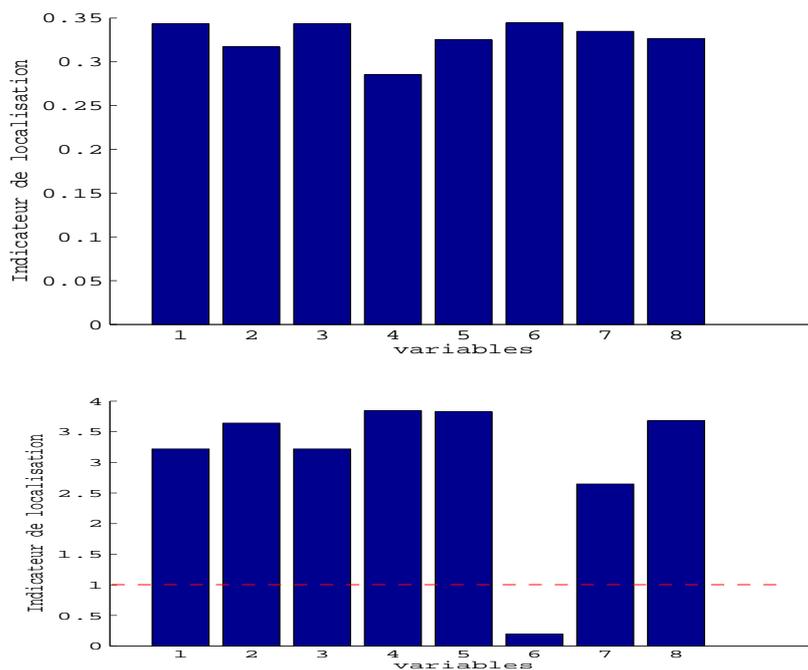


FIGURE 2.8 – Indicateur de localisation  $\overline{SWE}_{\mathbf{R}}^{(3)}(k)$  en absence puis en présence de défaut de mesures

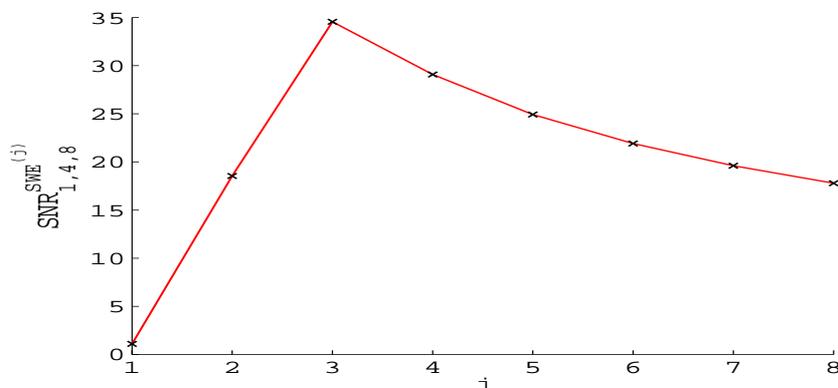


FIGURE 2.9 – Evolution de  $SNR_{1,4,8}^{SWE(j)}$  pour  $j = 1 \dots 8$

férentes méthodes de sélection ( $VNR$ ,  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE(j)}$  et la méthode proposée) en termes d'identification des variables en défaut.

Pour la reconstruction avec l'indicateur  $SWE^{(i)}$ , en considérant par exemple le cas de la combinaison de deux variables  $r = 2$  pour l'ensemble  $\mathbf{R} = \{2, 4\}$ , le nombre  $i$  étant déterminé à l'aide de ces trois méthodes.

La figure (2.12) présente l'évolution des indicateurs  $SWE_{1,4}^{(3)}(k)$ ,  $SWE_{1,4}^{(5)}(k)$  et  $SWE_{1,4}^{(6)}(k)$  correspondant respectivement aux indicateurs  $SWE^{(3)}(k)$ ,  $SWE^{(5)}(k)$  et  $SWE^{(6)}(k)$  après reconstruction simultanée de deux variables  $x_1$  et  $x_4$  (sans l'utilisation de ces deux va-

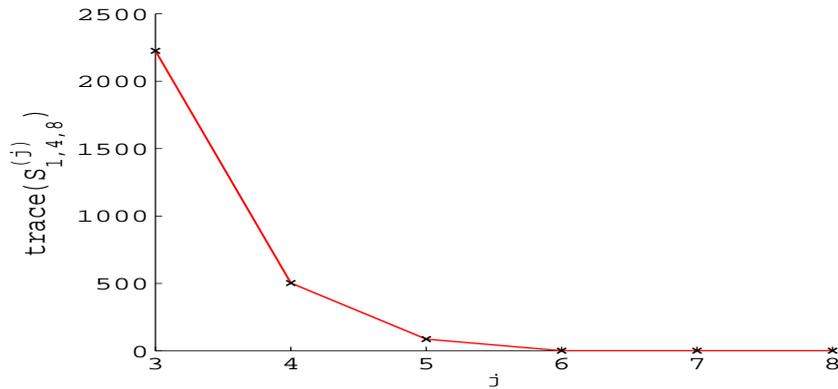


FIGURE 2.10 – Evolution de  $trace(\mathbf{S}_{1,4,8}^{(j)})$  pour  $j = 3 \dots 8$

riables). Les deux premiers graphes de cette figure relatifs aux indicateurs  $SWE_{1,4}^{(3)}(k)$  et  $SWE_{1,4}^{(5)}(k)$  sont en dessous de leur seuil de détection témoignant ainsi que seulement les deux variables  $x_1$  et  $x_4$  sont en défaut alors, qu'en réalité, la variable  $x_8$  est aussi en défaut. Le dernier graphe de la figure (2.12) relatif à l'indicateur  $SWE_{1,4}^{(6)}(k)$  montre que ces deux variables ne sont pas l'unique responsable de défauts.

La figure (2.13) présente l'évolution de quelques indicateurs  $SWE_{\mathbf{R}}^{(6)}(k)$  relatifs à l'indicateur  $SWE^{(6)}(k)$  obtenus par reconstruction des variables correspondant aux combinaisons de 3 défauts possibles. Seule la reconstruction simultanée des variables en défaut  $x_1$ ,  $x_4$  et  $x_8$  élimine leurs effets et l'indicateur de détection résultant  $SWE_{1,4,8}^{(6)}(k)$  est en dessous de son seuil de détection. Ainsi, l'exploitation de deux indicateurs  $SWE^{(3)}(k)$  et  $SWE^{(5)}(k)$  (obtenus respectivement par la méthode  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$  et par la méthode  $VNR$ ) engendre une localisation erronée alors que l'utilisation de l'indicateur  $SWE^{(6)}(k)$  (obtenu par la méthode proposée) assure une bonne localisation puisqu'il permet d'identifier les variables en défaut.

Sur cet exemple, on peut en conclure que la méthode proposée a permis de déterminer des modèles ACP ayant des performances en termes de localisation supérieures à celles obtenues par les deux méthodes;  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$  et  $VNR$ . Les nombreux exemples traités, mais non présentés ici, confirment ce constat.

## 2.4 Conclusion

La méthode proposée détermine des modèles ACP optimisant la détection et la localisation de défauts simples ou multiples sur les variables redondantes ou non. Elle se base sur la minimisation de la trace de la variance de l'erreur de reconstruction des variables. Le principe de reconstruction est généralisée à l'indicateur de détection proposé qui correspond à l'indice  $SWE$  appliqué sur des espaces résiduels de dimensions différentes.

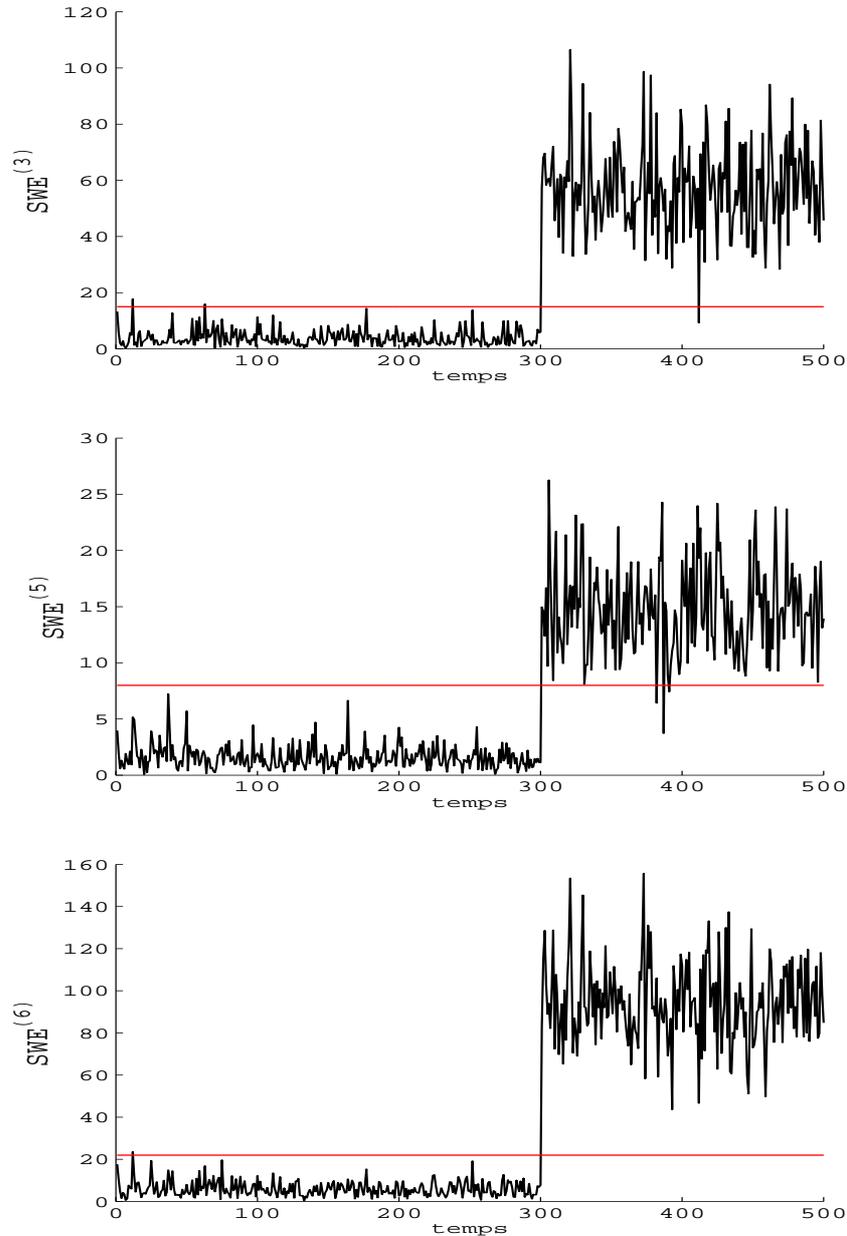


FIGURE 2.11 – Evolution des indicateurs  $SWE^{(3)}(k)$  (déterminé par le  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$ ),  $SWE^{(5)}(k)$  (déterminé par le  $VNR$ ) et  $SWE^{(6)}(k)$  (déterminé par la méthode proposée) avec de défauts affectant  $x_1$ ,  $x_4$  et  $x_8$

Afin de comparer les aptitudes de cette méthode et des deux méthodes existantes :  $VNR$  et  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$  ( $SNR$  appliqué à l'indicateur proposé  $SWE^{(j)}$ ) à la détection et la localisation de défauts, un exemple de simulation régi par un système linéaire dont les mesures sont corrompues par des bruits et affectées par un ou plusieurs défauts est utilisé.

Les résultats obtenus sur cet exemple ont montré que la méthode proposée détermine

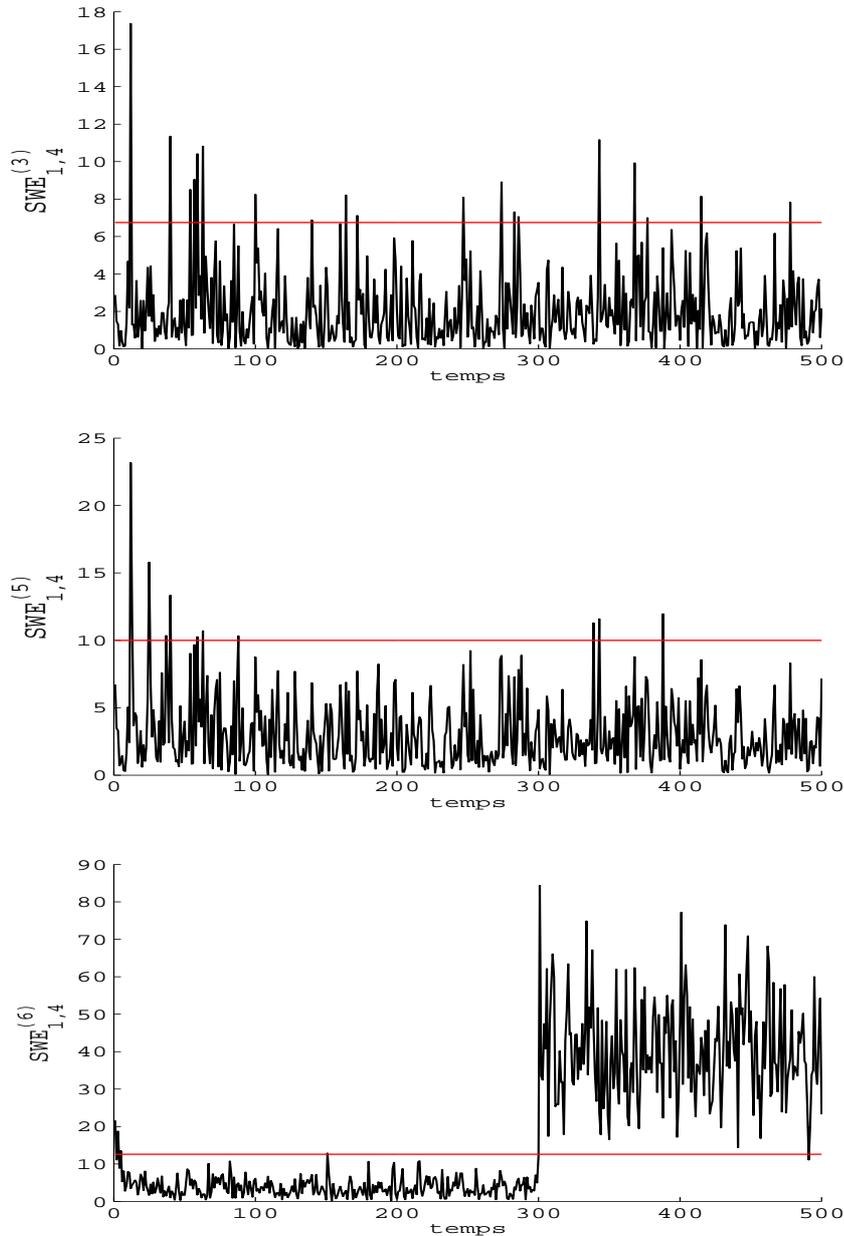


FIGURE 2.12 – Evolution des indicateurs  $SWE_{1,4}^{(3)}(k)$  (déterminé par la méthode  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$ ),  $SWE_{1,4}^{(5)}(k)$  (déterminé par la méthode  $VNR$ ) et  $SWE_{1,4}^{(6)}(k)$  (déterminé par la méthode proposée) avec de défauts affectant  $x_1$ ,  $x_4$  et  $x_8$

de modèles ACP ayant des performances en termes de détection et de localisation supérieures à celles obtenues par les deux méthodes existantes. En effet, la méthode proposée est plus sensible aux défauts ; les amplitudes minimales de ces derniers sont inférieures à celles fournies par  $SNR_{\mathbf{R}}^{SWE^{(j)}}$  et  $VNR$ . Concernant la localisation, les modèles fournis par ces deux dernières engendrent une fausse localisation, alors que la méthode proposée garantit une bonne localisation.

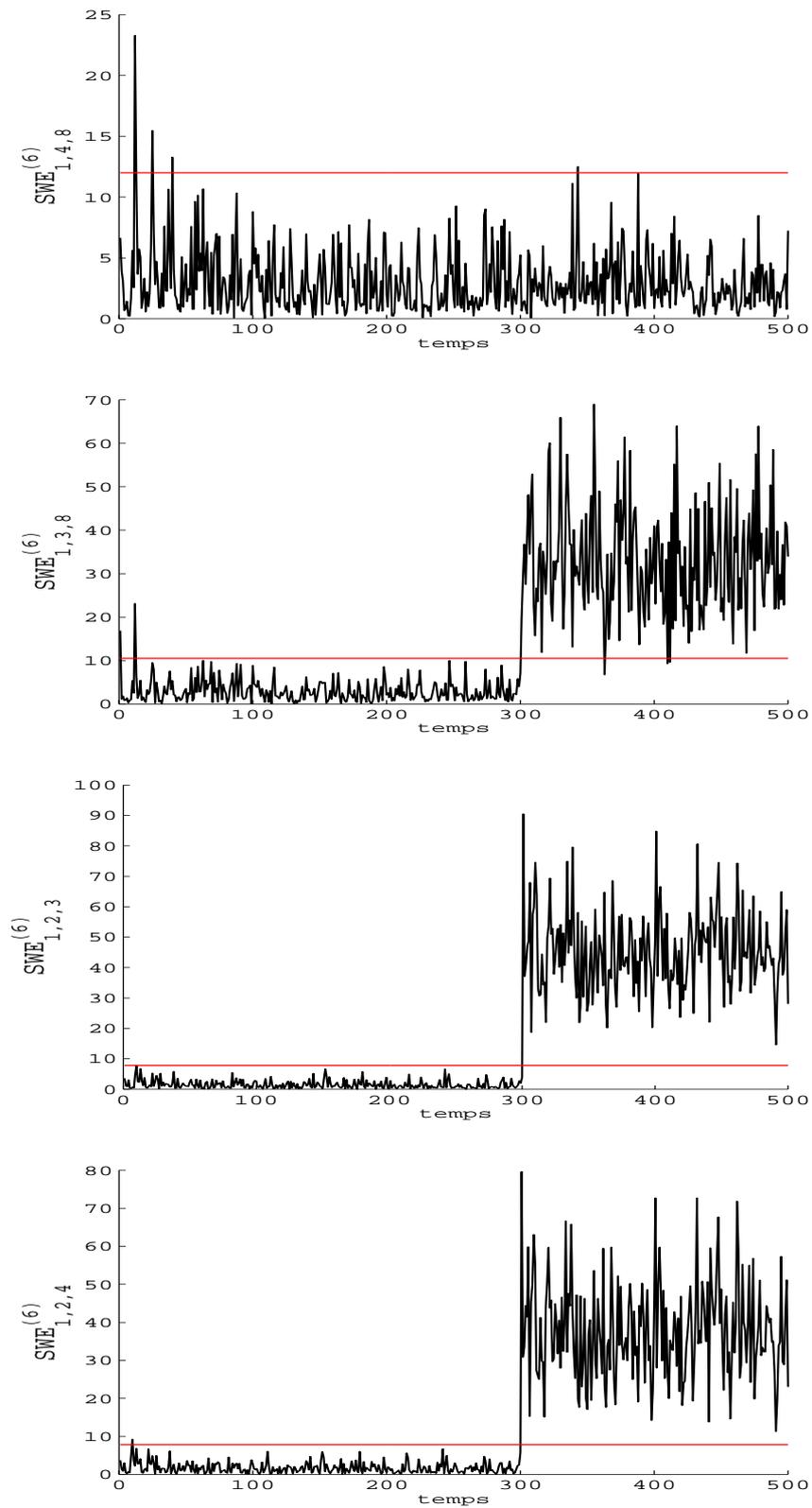


FIGURE 2.13 – Evolution des indicateurs  $SWE_{1,4,8}^{(6)}(k)$ ,  $SWE_{1,3,8}^{(6)}(k)$ ,  $SWE_{1,2,3}^{(6)}(k)$  et  $SWE_{1,2,4}^{(6)}(k)$  avec de défauts affectant  $x_1$ ,  $x_4$  et  $x_8$



# 3

## Contribution au diagnostic de systèmes par ACP intervalle

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>56</b>
<b>3.2</b>	<b>Estimation des incertitudes du modèle ACP par intervalle</b>	<b>56</b>
3.2.1	Incertitudes des valeurs propres	57
3.2.2	Incertitudes des vecteurs propres	58
3.2.3	Détection de défauts par ACP intervalle	60
<b>3.3</b>	<b>Extension de la méthode de localisation par reconstruction à l'ACP intervalle</b>	<b>61</b>
3.3.1	Nouvelle méthode de reconstruction de variables par ACP intervalle	62
3.3.2	Génération des résidus structurés intervalles	64
3.3.3	Conditions de reconstruction par ACP intervalle	66
<b>3.4</b>	<b>Application</b>	<b>67</b>
3.4.1	Estimation des incertitudes du modèle ACP par intervalle	68
3.4.2	Détection de défauts par ACP intervalle	70
3.4.3	Localisation de défauts par ACP intervalle	71
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>79</b>

---

### 3.1 Introduction

Comme toute méthode d'analyse des données, les résultats fournis par ACP ne sont précis qu'en tenant compte des incertitudes du modèle [3], [81]. Ces incertitudes permettent la prise en compte des notions d'imprécision de variations des mesures qui peuvent être dues aux bruits. Le bootstrap, méthode d'inférence statistique, a été appliquée fréquemment en ACP pour l'évaluation des incertitudes sous forme des intervalles de confiance pour les valeurs et les vecteurs propres [42], [21], [81], [22] assurant ainsi la fiabilité de l'estimation du modèle ACP. Cependant, cette technique échoue dans l'estimation des valeurs propres très proches [32] ce qui arrive souvent pour les dernières valeurs propres de l'espace résiduel.

Dans la première partie de ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode analytique permettant d'estimer les incertitudes paramétriques du modèle ACP sous forme intervalle [69]. Comme l'ACP par intervalle n'a pas été appliquée aux procédures de diagnostic, la deuxième partie concerne la détection de défauts sur les variables certaines par ACP intervalle. La troisième porte sur la localisation de défauts par extension du principe de reconstruction à l'ACP par intervalle puis par projection des reconstructions dans l'espace résiduel intervalle. Les variables reconstruites sont déterminées par résolution, à chaque instant, d'un système d'équations de type intervalle. Une analyse des conditions de reconstruction est également proposée, dans cette partie, afin de réduire le nombre de combinaisons de variables à reconstruire simultanément et de déterminer les défauts isolables. La dernière partie s'intéresse à l'application de l'ensemble des résultats novateurs sur un système statique soumis à des bruits et affecté par de défauts.

### 3.2 Estimation des incertitudes du modèle ACP par intervalle

Considérons, à l'instant  $k$ , le vecteur de mesures collectées sur le système en absence de défauts et de bruits des mesures :

$$\mathbf{x}^0(k) = [x_1^0(k) \ x_2^0(k) \ \dots \ x_m^0(k)]^T \quad (3.1)$$

La matrice de données  $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{R}^{N \times m}$  formée par la concaténation des vecteurs  $\mathbf{x}^0(k)$  obtenus à différents instants est :

$$\mathbf{X}^0 = [ \mathbf{x}^0(1) \ \dots \ \mathbf{x}^0(N) ]^T \quad (3.2)$$

Le modèle ACP peut être construit à partir des données idéales (3.2). Cependant, il est plus réaliste d'effectuer cette synthèse avec prise en compte des erreurs de mesure. Pour cela, on se propose de trouver le lien existant entre le modèle ACP établi à partir des données idéales et le modèle ACP établi à partir des données affectées par des bruits. Cela revient à établir le lien entre les vecteurs propres des matrices de variance-covariance évaluées à partir des données avec et sans bruits. Ce lien peut être établi des deux façons :

- expérimentalement par l'examen numérique de l'influence de perturbations  $\delta\mathbf{X}^*$  sur les vecteurs propres de la matrice de covariance des données. Ces perturbations peuvent être générées de façon aléatoire.
- analytiquement par l'étude de sensibilité au premier ordre des vecteurs propres de la matrice de covariance vis-à-vis des variations  $\delta\mathbf{X}^*$ .

Pour l'analyse de sensibilité, nous considérons les variations  $\delta\mathbf{X}^*$  que la matrice des données  $\mathbf{X}^0$  subit.

La nouvelle matrice des données est alors donnée par :

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^0 + \delta\mathbf{X}^* \quad (3.3)$$

La matrice  $\delta\mathbf{X}^*$  s'explique par :

$$\delta\mathbf{X}^* = [ \delta\mathbf{x}^*(1) \quad \cdots \quad \delta\mathbf{x}^*(N) ]^T \quad (3.4)$$

Les variations  $\delta\mathbf{X}^*$  peuvent être des réalisations de variables aléatoires centrées, d'amplitudes bornées représentant les erreurs de mesure qui affectent les variables du système à étudier.

La matrice de variance-covariance :

$$\mathbf{V}^* = \frac{1}{N-1} \mathbf{X}^{*T} \mathbf{X}^* \quad (3.5)$$

peut s'écrire compte tenu de la relation (3.3) sous la forme :

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^0 + \delta\mathbf{V}^* \quad (3.6)$$

où

$$\mathbf{V}^0 = \frac{1}{N-1} \mathbf{X}^{0T} \mathbf{X}^0 \quad (3.7)$$

$$\delta\mathbf{V}^* = \frac{1}{N-1} (\mathbf{X}^{0T} \delta\mathbf{X}^* + \delta\mathbf{X}^{*T} \mathbf{X}^0 + \delta\mathbf{X}^{*T} \delta\mathbf{X}^*) \quad (3.8)$$

La diagonalisation de la matrice  $\mathbf{V}^0$  permet de déterminer les valeurs propres  $\lambda_i^0$ ,  $i = 1 \dots m$  et les vecteurs propres  $p_i^0$  qui leur sont associés.

Pour les matrices  $\mathbf{V}^0$  et  $\mathbf{V}^0 + \delta\mathbf{V}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^0 p_i^0 &= \lambda_i^0 p_i^0 \\ (\mathbf{V}^0 + \delta\mathbf{V}^*) (p_i^0 + \delta p_i^*) &= (\lambda_i^0 + \delta\lambda_i^*) (p_i^0 + \delta p_i^*) \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $\delta p_i^*$  et  $\delta\lambda_i^*$  représentent respectivement les variations des vecteurs propres  $p_i^0$  et des valeurs propres  $\lambda_i^0$  dues aux variations  $\delta\mathbf{V}^*$  de la matrice  $\mathbf{V}^0$ .

### 3.2.1 Incertitudes des valeurs propres

En conservant les termes du premier ordre de (3.9), il reste :

$$\mathbf{V}^0 \delta p_i^* + \delta\mathbf{V}^* p_i^0 = \lambda_i^0 \delta p_i^* + \delta\lambda_i^* p_i^0 \quad (3.10)$$

Comme :

$$\begin{aligned} p_i^{0\text{T}}\mathbf{V}^0 &= \lambda_i^0 p_i^{0\text{T}} \\ p_i^{0\text{T}}p_i^0 &= 1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Compte tenu de (3.11) et en multipliant à gauche l'expression (3.10) par  $p_i^{0\text{T}}$ , on déduit alors les incertitudes des valeurs propres :

$$\delta\lambda_i^* = p_i^{0\text{T}}\delta\mathbf{V}^*p_i^0 \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Incertitudes des vecteurs propres

La substitution de la relation (3.12) dans (3.10) donne :

$$(\mathbf{V}^0 - \lambda_i^0\mathbf{I}_m)\delta p_i^* = (p_i^0 p_i^{0\text{T}} - \mathbf{I}_m)\delta\mathbf{V}^*p_i^0 \quad (3.13)$$

Cette expression quantifie l'influence des variations  $\delta\mathbf{V}^*$  de  $\mathbf{V}^*$  sur ses vecteurs propres. Cependant, comme la matrice  $(\mathbf{V}^0 - \lambda_i^0\mathbf{I}_m)$  est singulière, on ne peut pas alors obtenir explicitement  $\delta p_i^*$  à partir de (3.13). Mais étant donné que les vecteurs propres sont définis à une constante près, on peut imposer la contrainte suivante :

$$p_i^{0\text{T}}\delta p_i^* = 0 \quad (3.14)$$

La concaténation de la relation (3.13) dans (3.14) donne :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}^0 - \lambda_i^0\mathbf{I}_m \\ p_i^{0\text{T}} \end{pmatrix} \delta p_i^* = \begin{pmatrix} (p_i^0 p_i^{0\text{T}} - \mathbf{I}_m)\delta\mathbf{V}^*p_i^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Dans le cas où les valeurs propres ne sont pas multiples, le système obtenu est de plein rang et il peut être résolu par rapport à  $\delta p_i^*$ .

Une alternative à cette évaluation consiste à l'utilisation conjointe des relations (3.12) et (3.10). Les incertitudes  $\delta p_i^*$  et  $\delta\lambda_i^*$  sont liées à la matrice  $\delta\mathbf{V}^*$  par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}^0 - \lambda_i^0\mathbf{I}_m & -p_i^0 \\ p_i^{0\text{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_i^* \\ \delta\lambda_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta\mathbf{V}^*p_i^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Dans le cas de valeurs propres non multiples, on a :

$$\begin{pmatrix} \delta p_i^* \\ \delta\lambda_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^0 - \lambda_i^0\mathbf{I}_m & -p_i^0 \\ p_i^{0\text{T}} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\delta\mathbf{V}^*p_i^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Ainsi, pour une variation particulière de la matrice de variance-covariance  $\delta\mathbf{V}^*$ , on peut évaluer les incertitudes des vecteurs et des valeurs propres  $\delta p_i^*$  et  $\delta\lambda_i^*$  correspondant.

La relation (3.17) peut être appliquée à l'ensemble des valeurs et des vecteurs propres ; c'est-à-dire pour  $i = 1 \dots m$ . Cette évaluation peut être réitérée pour  $B$  réalisations  $\delta\mathbf{V}^*(h)$ ,  $h = 1, \dots, B$  générant ainsi un ensemble des valeurs de  $\delta p_i^*(h)$  et de  $\delta\lambda_i^*(h)$ .

Pour cet ensemble de réalisations, il est simple de déterminer à quels intervalles appartiennent les valeurs et les vecteurs propres de  $\mathbf{V}^*(h)$ .

Les bornes inférieures et supérieures des valeurs et des vecteurs propres sont déterminées respectivement par les deux relations (3.18) et (3.19).

$$\begin{cases} \underline{\lambda}_i = \min_h (\lambda_i^0 + \delta\lambda_i^*(h)) \\ \bar{\lambda}_i = \max_h (\lambda_i^0 + \delta\lambda_i^*(h)) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} \underline{p}_{ij} = \min_h (p_{ij}^0 + \delta p_{ij}^*(h)) \\ \bar{p}_{ij} = \max_h (p_{ij}^0 + \delta p_{ij}^*(h)) \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $\underline{\lambda}_i$  et  $\bar{\lambda}_i$  désignent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des valeurs propres des matrices  $\mathbf{V}^0 + \delta\mathbf{V}^*(h)$ .  $\underline{p}_{ij}$  et  $\bar{p}_{ij}$  représentent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la  $j^{\text{ème}}$  composante de le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre de ces mêmes matrices.

Ainsi, la matrice des valeurs propres intervalles de  $\mathbf{V}^0 + \delta\mathbf{V}^*(h)$  est donnée par :

$$[\mathbf{\Lambda}] = \text{diag}([\lambda_1] \dots [\lambda_m]) \quad (3.20)$$

où les valeurs propres  $[\lambda_i] = [\underline{\lambda}_i \quad \bar{\lambda}_i]$ ,  $i = 1 \dots m$  sont ordonnées dans l'ordre décroissant de leurs amplitudes.

La matrice des vecteurs propres intervalles s'explique par :

$$[\mathbf{P}] = [ [p_1] \quad [p_2] \quad \dots \quad [p_m] ] \quad (3.21)$$

où

$$\begin{aligned} [p_i] &= ([p_{i1}] \quad [p_{i2}] \quad \dots \quad [p_{im}])^T \\ [p_{ij}] &= [\underline{p}_{ij} \quad \bar{p}_{ij}] \end{aligned}$$

**Remarque :**

Cette procédure de calcul est issue d'une démarche analytique. Elle peut être utilisée dans le cas où les variations de bruits des mesures sont connues. Cependant, si cette information est indisponible ou s'il est difficile de discerner la variation de bruits des données tel que le cas des données collectées sur un système réel, une autre méthode de calcul peut être utilisée. Cette dernière se base sur la diagonalisation directe de toutes les matrices  $\mathbf{V}^0 + \delta\mathbf{V}^*(h)$ . La recherche des bornes inférieures et supérieures des valeurs et des vecteurs propres pour  $B$  réalisations de  $\delta\mathbf{V}^*(h)$  permet de trouver les valeurs et les vecteurs propres intervalles  $[\lambda_i]$  et  $[p_i]$ .

Rappelons que dans le cas singleton, l'ACP détermine une transformation linéaire optimale (vis-à-vis d'un critère de variance) du vecteur de mesures  $\mathbf{x}^*$  en un vecteur de nouvelles variables  $\mathbf{t}$  :

$$\mathbf{t}(k) = \mathbf{P}^T \mathbf{x}^*(k) \quad (3.22)$$

La relation (3.22) trouve son intérêt en décomposant l'espace des données en deux sous-espaces : le sous-espace principal de représentation constitué par les  $\ell$  premiers vecteurs

propres et le sous-espace résiduel représenté par les  $(m - \ell)$  derniers vecteurs propres. La projection du vecteur des mesures dans cet espace permet de définir le vecteur des résidus :

$$\tilde{\mathbf{t}}(k) = \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}^*(k) \quad (3.23)$$

En absence de bruits des mesures et d'incertitudes de modélisation, l'expression suivante :

$$\tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}^*(k) = \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}^0(k) = 0 \quad (3.24)$$

est relative aux relations de redondance analytiques entre les variables.

En présence de bruit de mesures, on a :

$$\tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}^*(k) = \tilde{\mathbf{P}}^T \delta x^*(k) \quad (3.25)$$

Si on considère le cas de bruits des mesures faibles, l'équation (3.25) peut être approximée à 0.

Compte tenu de la définition intervalle des vecteurs propres de la matrice de variance-covariance des données, les résultats obtenus pour le modèle ACP singleton peuvent être étendus au modèle ACP intervalle.

La matrice  $[\mathbf{P}]$  peut être alors partitionné comme suit :

$$[\mathbf{P}] = \left[ \begin{array}{c|c} [\hat{\mathbf{P}}] & [\tilde{\mathbf{P}}] \end{array} \right], \quad [\hat{\mathbf{P}}] \in \mathbb{R}^{m \times \ell} \quad \text{et} \quad [\tilde{\mathbf{P}}] \in \mathbb{R}^{m \times (m-\ell)} \quad (3.26)$$

En vertu de cette décomposition, on peut proposer une procédure de détection de mesures traduisant des comportements anormaux du système.

### 3.2.3 Détection de défauts par ACP intervalle

Soit un vecteur de mesures de type singleton  $\mathbf{x}(k)$ . L'objectif est de pouvoir distinguer si ces mesures sont normales ou au contraire entachées de défauts qu'il convient alors de détecter puis de localiser.

Généralement, la détection de défauts est liée à la génération des résidus ayant pour but de construire, à partir du modèle ACP ici de type intervalle et des nouvelles mesures, des signaux révélateurs de la présence de défauts affectant les données singletons.

Compte tenu de l'expression (3.26), le vecteur des résidus intervalles s'écrit :

$$[\tilde{\mathbf{t}}](k) = [\tilde{\mathbf{P}}]^T \mathbf{x}(k) \quad (3.27)$$

#### Remarque :

Les mesures sont considérées sous forme singleton. Cependant, comme le modèle ACP est incertain de type intervalle, la procédure proposée dans la suite de ce travail s'étend immédiatement au cas de mesures représentées sous forme intervalle.

En présence de défauts affectant un ensemble de variables  $\mathbf{F}$ , le vecteur des mesures s'écrit :

$$\mathbf{x}(k) = \underbrace{\mathbf{x}^0(k) + \delta \mathbf{x}^*(k)}_{=\mathbf{x}^*(k)} + \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \quad (3.28)$$

où  $\mathbf{x}^*(k)$  le vecteur des mesures sans défaut,  $\mathbf{f}(k) \in \mathbb{R}^f$  ( $f \geq 1$ ) le vecteur des amplitudes de défauts et  $\Xi_{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{m \times f}$  la matrice des directions de défauts. Elle est constituée de 1 pour indiquer une variable en défaut (respectivement de 0 pour une variable sans défaut).

Compte tenu de l'équation (3.28), le vecteur des résidus (3.27) s'écrit :

$$[\tilde{\mathbf{t}}](k) = [\tilde{\mathbf{P}}]^T \mathbf{x}^*(k) + [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\mathbf{F}} \mathbf{f}(k) \quad (3.29)$$

En absence de défauts, l'enveloppe des résidus contient la valeur 0 :

$$[\tilde{\mathbf{t}}](k) = [\tilde{\mathbf{P}}]^T \mathbf{x}^*(k) \subseteq 0 \quad (3.30)$$

### Démonstration

En appliquant la propriété d'inculsion suivante :

Si  $X \subseteq Y$  et  $Y \subseteq Z$  alors  $X \subseteq Z$

où  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont des ensembles fermés bornés.

et comme les résultats fournis par l'ACP généralisée doivent encadrer ceux issus de l'ACP classique [15], [13] et compte tenu de l'expression (3.25), on prouve que :

$$\tilde{\mathbf{t}}(k) \subseteq [\tilde{\mathbf{t}}](k)$$

et

$$0 = \tilde{\mathbf{t}}(k)$$

ce qui signifie que  $0 \subseteq \tilde{\mathbf{t}}(k)$  et  $\tilde{\mathbf{t}}(k) \subseteq 0$ , alors

$$0 \subseteq [\tilde{\mathbf{t}}](k)$$

d'où l'équation (3.30).

En présence de défauts, l'enveloppe des résidus ne contient pas la valeur 0 :

$$[\tilde{\mathbf{t}}](k) = [\tilde{\mathbf{P}}]^T \mathbf{x}^*(k) + [\tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}] \mathbf{f}(k) \not\subseteq 0 \quad (3.31)$$

où

$$[\tilde{\Xi}_{\mathbf{F}}] = [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\mathbf{F}} \quad (3.32)$$

est la projection de type intervalle des directions de défauts dans l'espace résiduel de type intervalle.

## 3.3 Extension de la méthode de localisation par reconstruction à l'ACP intervalle

Dans le cas singleton, la localisation de défauts par ACP est réalisée par analyse des résidus structurés obtenus par projection dans l'espace résiduel de la reconstruction de  $r$  variables de l'ensemble  $\mathbf{R}$  à partir des  $(m - r)$  variables restantes de l'ensemble  $\bar{\mathbf{R}}$  et du modèle ACP certain.

Dans le cas intervalle, la reconstruction de  $r$  variables fait, également, intervenir les  $(m - r)$  variables restantes de type singleton et le modèle ACP de type intervalle. Les variables

reconstruites, ici de type intervalle, sont estimées par résolution directe d'un système d'équations linéaires par intervalle par des méthodes d'éliminations de type Gauss [38]. Le vecteur des résidus structurés intervalles est obtenu par projection des variables reconstruites dans l'espace résiduel intervalle.

Comme les directions de défauts sont a priori inconnues, nous proposons, alors de réduire le nombre de combinaisons de défauts multiples à considérer par analyse des conditions de reconstruction intervalle.

L'analyse des différents résidus structurés, générés par projection des reconstructions suivant les directions utiles, permet, ensuite, d'identifier les défauts. En fait, les variables reconstruites sont estimées à partir du modèle ACP intervalle et des variables non reconstruites de type singleton, le résidu est alors insensible aux défauts pouvant affecter les variables reconstruites.

### 3.3.1 Nouvelle méthode de reconstruction de variables par ACP intervalle

Dans cette partie, on se propose d'établir la formule de reconstruction simultanée de  $r$  variables de l'ensemble  $\mathbf{R}$  parmi  $m$  variables à partir de  $(m - r)$  variables restantes et du modèle ACP par intervalle.

Partons de l'expression de l'indicateur de détection  $[\Delta_{\mathbf{R}}](k)$  (3.33) obtenu après reconstruction :

$$[\Delta_{\mathbf{R}}](k) = \mathbf{x}^T(k) \left[ \tilde{\mathbf{P}} \right] \left[ \tilde{\mathbf{P}} \right]^T \mathbf{x}(k) \quad (3.33)$$

Rappelons que le vecteur de mesures  $\mathbf{x}(k)$  s'écrit comme suit :

$$\mathbf{x}(k) = \Xi_{\mathbf{R}} \mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k) + \Xi_{\bar{\mathbf{R}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \quad (3.34)$$

où  $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k)$  correspond aux  $r$  composantes de  $\mathbf{x}(k)$  à reconstruire et  $\mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k)$  correspond aux composantes restantes de l'ensemble  $\bar{\mathbf{R}}$ . Les deux matrices orthonormales  $\Xi_{\mathbf{R}}$  et  $\Xi_{\bar{\mathbf{R}}}$  sélectionnent respectivement ces deux groupes de variables.

Compte tenu du partitionnement (3.34) et des projections de type intervalle des deux matrices  $\Xi_{\mathbf{R}}$  et  $\Xi_{\bar{\mathbf{R}}}$  dans l'espace résiduel notées respectivement :

$$\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] = \left[ \tilde{\mathbf{P}} \right]^T \Xi_{\mathbf{R}} \quad (3.35)$$

$$\left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right] = \left[ \tilde{\mathbf{P}} \right]^T \Xi_{\bar{\mathbf{R}}} \quad (3.36)$$

l'indicateur (3.33) s'explique :

$$\begin{aligned} [\Delta_{\mathbf{R}}](k) &= \mathbf{x}_{\mathbf{R}}^T(k) \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] \mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k) + \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}^T(k) \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right] \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \\ &\quad + \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}^T(k) \left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] \mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k) + \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}^T(k) \left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right] \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \end{aligned} \quad (3.37)$$

En utilisant la forme normalisée d'un intervalle [74] à partir de son centre, les deux matrices  $\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]$  (3.35) et  $\left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right]$  (3.36) peuvent s'écrire comme :

$$\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] = \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^c + \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^r \mathbf{diag}(\alpha) \quad (3.38)$$

$$\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] = \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^c + \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^r \mathbf{diag}(\alpha) \quad (3.39)$$

où  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^c$  et  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^r$  représentent respectivement les matrices centres de  $\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]$  et  $\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]$ .

$\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^r$  et  $\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^r$  sont respectivement les matrices rayons de  $\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]$  et  $\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]$ .

$\mathbf{diag}(\alpha)$  est une matrice diagonale ayant  $\alpha$  dans la diagonale et 0 ailleurs où  $-1 \leq \alpha \leq 1$ .

La formule de reconstruction s'obtient par résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\arg \min_{\mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k)} [\Delta_{\mathbf{R}}](k) \quad (3.40)$$

En vertu de (3.37) et des notations (3.38) et (3.39), la résolution de l'équation (3.40) donne :

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^c + \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^r \mathbf{diag}(\alpha) \right)^{\mathbf{T}} \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^c + \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^r \mathbf{diag}(\alpha) \right) \mathbf{x}_{\mathbf{R}}(k) \\ & + \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^c + \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^r \mathbf{diag}(\alpha) \right)^{\mathbf{T}} \left( \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^c + \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}^r \mathbf{diag}(\alpha) \right) \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Compte tenu des définitions (3.38) et (3.39), l'équation (3.41) s'explique :

$$\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^{\mathbf{T}} \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] [\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}](k) + \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^{\mathbf{T}} \left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right] \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) = 0 \quad (3.42)$$

Rappelons qu'on part des données singletons mais comme le modèle ACP est de type intervalle, le résultat de l'estimation est également fourni sous une forme intervalle ; c'est-à-dire que le vecteur des reconstructions à estimer  $[\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}](k)$  devient alors de type intervalle.

L'expression (3.42) correspond à un système d'équations linéaires par intervalle de la forme :

$$[\mathbf{A}][\mathbf{y}] = [\mathbf{b}] \quad (3.43)$$

où

$$[\mathbf{A}] = \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^{\mathbf{T}} \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] \quad (3.44)$$

$$[\mathbf{b}] = -\left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^{\mathbf{T}} \left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right] [\mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k)] \quad (3.45)$$

$$[\mathbf{y}] = [\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}](k) \quad (3.46)$$

Pour la résolution du système (3.43), c'est-à-dire pour l'estimation instantannée du vecteur  $[\mathbf{y}]$  (3.46), il existe plusieurs approches [62], [45], [37] qui cherchent à déterminer un surencadrement le moins large possible du vecteur  $[\mathbf{y}]$  en raison du problème de dépendance [59]. Comme la matrice  $[\mathbf{A}]$  (3.44) est symétrique, Jansson [43] et Golub [30] ont prouvé l'intérêt de l'utilisation des méthodes basées sur la prise en compte de cette propriété en termes d'optimisation de la solution (vecteur intervalle de rayon minimal). Dans ce contexte, on distingue la méthode proposée par Hladik [40], la méthode de Cholesky [2] et la décomposition  $[\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^{\mathbf{T}}$  [30]. Cependant, la méthode de Hladik [40] ne converge pas nécessairement vers la solution optimale et nécessite un coût de calcul important en particulier pour un système de grande dimension. La méthode de Cholesky exige une condition particulière : les éléments diagonaux de la matrice  $[\mathbf{A}]$  doivent être positifs, alors que cette condition peut ne pas être vérifiée.

**Remarque** En utilisant l'inversion par intervalle [71], [72], le vecteur reconstruit peut s'écrire :

$$[\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}](k) = - \left( \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] \right)^{-1} \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right] \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \quad (3.47)$$

Cependant, lors de l'évaluation numérique, il n'est plus judicieux d'utiliser cette expression puisque l'inversion par intervalle peut conduire à sur-estimer le résultat [72]. Nous avons recours à l'expression (3.47) pour montrer certain faits théoriques ou pour reconstruire une variable.

Notons qu'indépendamment du mode de résolution, l'expression (3.43) est particulièrement intéressante car la reconstruction d'un ensemble de variables  $\mathbf{R}$  consiste à estimer les variables de cet ensemble à partir de l'ensemble  $\bar{\mathbf{R}}$  des variables restantes et du modèle ACP de type intervalle. Ainsi, si l'ensemble  $\mathbf{R}$  est en défaut, la reconstruction de variables de cet ensemble fournit une estimation indépendante des défauts.

### 3.3.2 Génération des résidus structurés intervalles

Une fois le vecteur  $[\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}](k)$  estimé, l'ensemble du vecteur des mesures reconstruites est :

$$[\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}](k) = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}](k) \\ \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Le vecteur des résidus structurés par rapport à la direction de reconstruction  $\Xi_{\mathbf{R}}$  est défini comme la projection du vecteur des mesures reconstruites  $[\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}]$  (3.48) dans l'espace résiduel de type intervalle :

$$[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k) = [\tilde{\mathbf{P}}]^T [\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}](k) \quad (3.49)$$

A partir de l'expression (3.48), le vecteur des résidus (3.49) s'écrit :

$$[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k) = [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\mathbf{R}} [\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{R}}](k) + [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\bar{\mathbf{R}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \quad (3.50)$$

En remplaçant l'expression (3.47) dans le vecteur  $[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k)$  (3.50), on obtient :

$$[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k) = - [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\mathbf{R}} \left( \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] \right)^{-1} \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\bar{\mathbf{R}}} \right] \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) + [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\bar{\mathbf{R}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbf{R}}}(k) \quad (3.51)$$

Compte tenu de la définition (3.36) et du partitionnement du vecteur des mesures (3.34), la relation (3.51) se simplifie :

$$[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k) = - [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\mathbf{R}} \left( \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] \right)^{-1} \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T [\tilde{\mathbf{P}}]^T \mathbf{x}(k) + [\tilde{\mathbf{P}}]^T \mathbf{x}(k) \quad (3.52)$$

En vertu de l'expression (3.28), l'équation (3.52) s'écrit :

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k) = & \left( - [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\mathbf{R}} \left( \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] \right)^{-1} \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T + \mathbf{I}_{m-\ell} \right) [\tilde{\mathbf{P}}]^T \mathbf{x}^*(k) \\ & + \left( - [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\mathbf{R}} \left( \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right] \right)^{-1} \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{R}} \right]^T + \mathbf{I}_{m-\ell} \right) \left[ \tilde{\Xi}_{\mathbf{F}} \right] \mathbf{f}(k) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Compte tenu de l'expression (3.30), le premier terme du vecteur (3.53) contient 0 indépendamment des directions de reconstruction  $\Xi_{\mathbf{R}}$  :

$$\left( - [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\mathbf{R}} \left( [\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}]^T [\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}] \right)^{-1} [\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}]^T + \mathbf{I}_{m-\ell} \right) [\tilde{\mathbf{P}}]^T \mathbf{x}^*(k) \subseteq 0 \quad (3.54)$$

Le deuxième terme de ce vecteur (3.53) dépend des directions de reconstruction ; deux cas se présentent :

- Si les directions de défauts correspondent aux directions de reconstruction ; c'est-à-dire si  $\Xi_{\mathbf{F}} = \Xi_{\mathbf{R}}$ , alors on a :

$$\left( - [\tilde{\mathbf{P}}]^T \Xi_{\mathbf{R}} \left( [\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}]^T [\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}] \right)^{-1} [\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}]^T + \mathbf{I}_{m-\ell} \right) [\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}] \mathbf{f}(k) \subseteq 0 \quad (3.55)$$

et par conséquent, le vecteur des résidus contient 0 :

$$[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k) \subseteq 0 \quad (3.56)$$

- Si les directions de défauts sont différentes de celles de reconstruction, le vecteur des résidus structurés ne contient pas 0 :

$$[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k) \not\subseteq 0 \quad (3.57)$$

Ainsi, en considérant toutes les reconstructions possibles de  $\Xi_{\mathbf{R}}$ , l'analyse de l'enveloppe des résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k)$  (3.50) est révélatrice de la présence de défauts et permet de déterminer les composantes du vecteur des mesures en cause. En effet, si la matrice de reconstruction  $\Xi_{\mathbf{R}}$  correspond à celle de défauts  $\Xi_{\mathbf{F}}$  ( $\mathbf{R} = \mathbf{F}$ ), l'enveloppe de ces résidus contient alors 0.

L'analyse de l'indicateur  $[\Delta_{\mathbf{R}}](k)$  (3.33) permet également d'identifier l'ensemble de variables en défaut. Il est défini à partir des résidus structurés  $[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k)$  (3.50) par :

$$[\Delta_{\mathbf{R}}](k) = [\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}]^T(k) [\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k) \quad (3.58)$$

Notons que dans l'arithmétique des intervalles, le résultat de l'évaluation numérique dépend de l'expression formelle [45]. Ainsi, pour avoir la largeur optimale des intervalles de cet indicateur (3.58), ce dernier se calcule à l'aide de l'expression suivante :

$$[\Delta_{\mathbf{R}}](k) = \sum_{i=1}^{m-\ell} ([\tilde{t}_{\mathbf{R}}^i](k))^2 \quad (3.59)$$

où  $[\tilde{t}_{\mathbf{R}}^i](k)$  est l' $i^{\text{ème}}$  élément de  $[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k)$ .

De façon similaire aux résidus structurés, l'influence des défauts est éliminée sur cet indicateur (3.59) si la matrice des directions de reconstruction  $\Xi_{\mathbf{R}}$  correspond à celle de défauts. L'ensemble  $\mathbf{R}$  est suspecté en défaut à l'instant  $k$ , si la valeur inférieure de l'indicateur  $[\Delta_{\mathbf{R}}](k)$  (3.59) vaut 0, conjointement si sa valeur supérieure est en dessous de son

seuil de détection (fixé par apprentissage à partir des données réputées en fonctionnement nominal). Rappelons que l'indicateur  $[\Delta_{\mathbf{R}}](k)$  (3.59) est défini comme étant la somme des carrés des résidus structurés et qu'en absence de défauts, les enveloppes de ces résidus contiennent 0. En se servant de l'opérateur arithmétique carré dans le cas intervalle (présenté dans l'annexe), la borne inférieure de  $[\Delta_{\mathbf{R}}](k)$  vaut 0 alors que sa borne supérieure est égale à un certain seuil.

Comme les directions de défauts  $\Xi_{\mathbf{F}}$  à préciser sont a priori inconnues, une analyse de la structure du modèle ACP intervalle en termes de reconstruction est alors nécessaire afin de réduire le nombre de combinaisons des variables à considérer.

### 3.3.3 Conditions de reconstruction par ACP intervalle

La première condition de reconstruction par ACP intervalle porte sur la matrice  $[\tilde{\Xi}_{\mathbf{R}}]$  qui doit être de plein rang colonne  $r$ . Cette condition implique que :

- le nombre  $r$  de variables à reconstruire doit satisfaire la condition suivante :

$$r \leq m - \ell \quad (3.60)$$

c'est-à-dire que ce nombre doit être inférieur ou égal à la dimension de l'espace résiduel ;

- les colonnes de cette matrice ne soient ni nulles ni colinéaires.

En vertu de l'inégalité (3.60), le nombre maximum de directions  $n_{max}$  à reconstruire est calculé à l'aide de la formule suivante [79] :

$$n_{max} = \sum_{r=1}^{m-\ell} \mathbb{C}_m^r \quad (3.61)$$

où  $\mathbb{C}_m^r$  représente le nombre de combinaisons possibles de choisir  $r$  variables parmi  $m$ .

Ce nombre peut être réduit en tenant compte de la deuxième condition de reconstruction dans l'espace résiduel choisi. Cette condition porte sur l'inversabilité de la matrice  $[\mathbf{A}]$  (3.44) qui nécessite la vérification de l'inégalité suivante [73] :

$$\sigma_{\max} \left( |(\mathbf{A}^c)^{-1} | \mathbf{A}^r \right) < 1 \quad (3.62)$$

où  $\sigma_{\max} (*)$  est la valeur singulière maximale de  $*$ ,  $\mathbf{A}^c$  et  $\mathbf{A}^r$  désignent respectivement les matrices centre et rayon de  $[\mathbf{A}]$ .

L'inégalité (3.62) est équivalente à [70] :

$$\sigma_{\max} (\mathbf{A}^r) < \sigma_{\min} (\mathbf{A}^c) \quad (3.63)$$

où  $\sigma_{\min} (*)$  est la valeur singulière minimale de  $*$ .

On définit le rapport de reconstruction suivant :

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{R}} = \frac{\sigma_{\max} (\mathbf{A}^r)}{\sigma_{\min} (\mathbf{A}^c)} \quad (3.64)$$

Compte tenu de l'inégalité (3.63), nous remarquons que plus le rapport  $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$  (3.64) associé à l'ensemble  $\mathbf{R}$  de variables à reconstruire est inférieur à 1, meilleure sera la reconstruction de ces variables.

Dans le cas particulier où le modèle ACP est certain, c'est-à-dire si  $\sigma_{\max}(\mathbf{A}^r) = 0$ , alors  $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}} = 0$ .

Pour réduire le nombre maximum de directions de défauts à considérer (3.61), on procède comme suit :

- 1- Pour  $r = 1$ , calculer, pour l'ensemble  $\mathbf{R}$  des directions possibles, les rapports de reconstruction  $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$  (3.64).
- 1-a- Si  $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$  est loin de 1, cette variable est reconstruite.
- 1-b- Si  $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$  se rapproche ou devient supérieur à 1, cette variable ne peut pas être reconstruite et la combinaison avec cette variable de  $r+1$  variables parmi les variables appartenant à l'ensemble  $\mathbf{R}$  est impossible.
- 2- Pour  $r = r + 1$ , tant que l'inégalité (3.60) est vérifiée, calculer pour l'ensemble  $\mathbf{R}$  constitué de  $r$  variables simultanément les rapports de reconstruction  $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$  (3.64) qui leur sont associés.
- 2-a- Si  $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$  est loin de 1, les  $r$  variables sont reconstruites et par la suite isolables.
- 2-b- Si  $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$  se rapproche ou supérieur à 1, les  $r$  variables de cet ensemble ne peuvent pas être reconstruites. Ces variables sont écartées de l'ensemble des combinaisons à reconstruire.
- 3- Refaire l'étape 2.

Ainsi, l'analyse de la structure du modèle ACP en termes de reconstruction par intervalle permet de réduire le nombre de combinaisons de défauts multiples à considérer et de déterminer les défauts isolables.

## 3.4 Application

Afin de valider les méthodes proposées ci-dessus, nous proposons leur application sur un système statique régi par 7 variables  $x_j^0$ ;  $j = \{1, \dots, 7\}$  et décrit aux différents instants  $k$  par :

$$\begin{cases} x_1^0(k) = 0.4v_1(k) + \sin(k/N), & v_1(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_2^0(k) = v_2(k) - 2 \cos(k/4), & v_2(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_3^0(k) = 0.2v_3(k) - 1, & v_3(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_4^0(k) = x_1^0(k) + x_2^0(k) \\ x_5^0(k) = x_2^0(k) + x_3^0(k) \\ x_6^0(k) = 2x_1^0(k) + x_3^0(k) \\ x_7^0(k) = x_4^0(k) + x_5^0(k) \end{cases} \quad (3.65)$$

Ces équations font apparaître 4 relations de redondance analytique linéaires entre les variables  $x_i^0$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . Les données ainsi générées constituent la matrice  $\mathbf{X}^0$  (3.2). Des variations  $\delta\mathbf{X}^*$  ont été superposées à cette matrice afin de simuler la présence de bruits de mesures. Ces variations sont des réalisations de variables aléatoires centrées. Le système est simulé sur une fenêtre de  $N = 100$  observations.

### 3.4.1 Estimation des incertitudes du modèle ACP par intervalle

La diagonalisation de la matrice de variance-covariance  $\mathbf{V}^*$  (3.5) de  $\mathbf{X}^*$  permet de déterminer les matrices des valeurs et vecteurs propres et d'établir, par la suite, le modèle ACP certain du système (méthode d'ACP classique).

Nous appliquons les deux méthodes de détermination des incertitudes de modélisation sous forme intervalle (méthode de calcul analytique et méthode de calcul direct) afin de comparer entre elles. D'une part, l'application de la méthode de calcul analytique, présentée ci-dessus, permet de trouver la matrice des valeurs propres  $[\mathbf{\Lambda}]$  et la matrice des vecteurs propres  $[\mathbf{P}]$ . D'autre part, la diagonalisation directe de la matrice  $\mathbf{V}^*(h) = \mathbf{V}^0 + \delta\mathbf{V}^*(h)$  permet d'obtenir les matrices des valeurs et vecteurs propres singletons.

Pratiquement, nous remarquons que le nombre de réalisations  $B$  doit être suffisamment important par rapport au nombre d'échantillons  $N$  pour une estimation robuste des intervalles des valeurs et vecteurs propres comme pour la méthode bootstrap [3].

Dans notre cas, on choisit  $B = 500$  réalisations de ces matrices pour déterminer les bornes inférieures et supérieures des valeurs et vecteurs propres. Cette méthode de calcul direct permet de trouver les matrices intervalles des valeurs propres  $[\mathbf{\Lambda}_d]$  et vecteurs propres  $[\mathbf{P}_d]$ .

La table 3.1 donne les valeurs propres intervalles obtenues par le calcul analytique et par le calcul direct. On remarque que les résultats obtenus par la méthode analytique sont confondus (si l'on considère deux chiffres significatifs) aux résultats fournis par la méthode de calcul direct justifiant ainsi de façon expérimentale l'utilisation de la méthode analytique.

TABLE 3.1 – Valeurs propres sous forme intervalle

Calcul analytique		Calcul direct	
$\underline{\lambda}_i$	$\bar{\lambda}_i$	$\underline{\lambda}_i$	$\bar{\lambda}_i$
1657	1698	1657	1698
239	246	239	246
163	169	163	169
0.25	0.63	0.26	0.66
0.15	0.32	0.14	0.34
0.20	0.53	0.09	0.48
0.08	0.20	0.05	0.10

Au vu des amplitudes des différentes valeurs propres de la table 3.1, le nombre de composantes principales à conserver dans le modèle ACP est  $\ell = 3$ . Ainsi, la matrice  $[\mathbf{\Lambda}]$  se décompose en deux matrices  $[\hat{\mathbf{\Lambda}}]$  et  $[\tilde{\mathbf{\Lambda}}]$ , de même pour la matrice  $[\mathbf{P}]$  qui se décompose en  $[\hat{\mathbf{P}}]$  et  $[\tilde{\mathbf{P}}]$ .

Une forme plus simple est utilisée pour la matrice  $[\tilde{\mathbf{P}}]$  qui peut être partitionnée sous la forme :

$$[\tilde{\mathbf{P}}] = \begin{pmatrix} [\tilde{\mathbf{P}}_1] \\ [\tilde{\mathbf{P}}_2] \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

où  $[\tilde{\mathbf{P}}_1]$  est une partie régulière de  $[\tilde{\mathbf{P}}]$ .

Cette matrice peut être normalisée comme suit :

$$[\tilde{\mathbf{P}}] = \begin{pmatrix} I \\ [\tilde{\mathbf{P}}_2] [\tilde{\mathbf{P}}_1]^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

La matrice  $[\tilde{\mathbf{P}}]^T$  normalisée (3.67) est présentée dans la table 3.2. Les vecteurs colonnes intervalles obtenus sont à rapprocher des équations de redondance ayant servi à générer les données. En effet, les équations de redondance (3.65) permettent d'explicitier les variables  $x_i^0, i = 1, \dots, 4$  comme suit :

$$\begin{cases} x_1^0(k) &= -\frac{2}{3}x_5^0(k) + \frac{1}{3}x_6^0(k) + \frac{1}{3}x_7^0(k) \\ x_2^0(k) &= -\frac{1}{3}x_5^0(k) - \frac{1}{3}x_6^0(k) + \frac{2}{3}x_7^0(k) \\ x_3^0(k) &= \frac{4}{3}x_5^0(k) + \frac{1}{3}x_6^0(k) - \frac{2}{3}x_7^0(k) \\ x_4^0(k) &= -x_5^0(k) + x_7^0(k) \end{cases} \quad (3.68)$$

L'examen conjoint de ces relations et des vecteurs propres intervalles de la table 3.2 montre la cohérence des estimations de ces vecteurs propres.

TABLE 3.2 – Matrice des 4 derniers vecteurs propres intervalles

1	0	0	0	[ 0.64	0.68]	[-0.34	-0.32]	[-0.34	-0.32]
0	1	0	0	[ 0.30	0.37]	[ 0.32	0.35]	[-0.68	-0.65]
0	0	1	0	[-1.37	-1.29]	[-0.35	-0.32]	[ 0.65	0.69]
0	0	0	1	[ 0.95	1.06]	[-0.02	0.03]	[-1.03	-0.97]

TABLE 3.3 – Matrice des 4 derniers vecteurs propres singletons

1	0	0	0	0.67	-0.31	-0.33
0	1	0	0	0.34	0.35	-0.66
0	0	1	0	-1.33	-0.35	0.66
0	0	0	1	0.99	0.02	-0.98

Les quatre derniers vecteurs propres singletons issus de la méthode d'ACP classique sont présentés à la table 3.3. Ces vecteurs propres sont bien contenus dans les vecteurs propres intervalles donnés à la table 3.2. Cependant, les vecteurs propres singletons sont différents de ceux donnés par les équations de redondance (3.68). Ceci met l'accent sur l'intérêt de la méthode de modélisation proposée en termes de précision du modèle ACP.

La projection des données dans l'espace résiduel, définie par les quatre derniers vecteurs propres intervalles de la table 3.2 et dans l'espace résiduel représenté par les vecteurs propres singletons de la table 3.3, génère respectivement les résidus intervalles (3.27) et

les résidus singletons (3.23).

La figure 3.1 illustre l'évolution des quatre derniers résidus intervalles et singletons. Cette figure nous incite à dire que l'objectif de l'ACP généralisée est atteint puisque les résidus issus de l'ACP classique coincident avec ceux issus de l'ACP par intervalle.

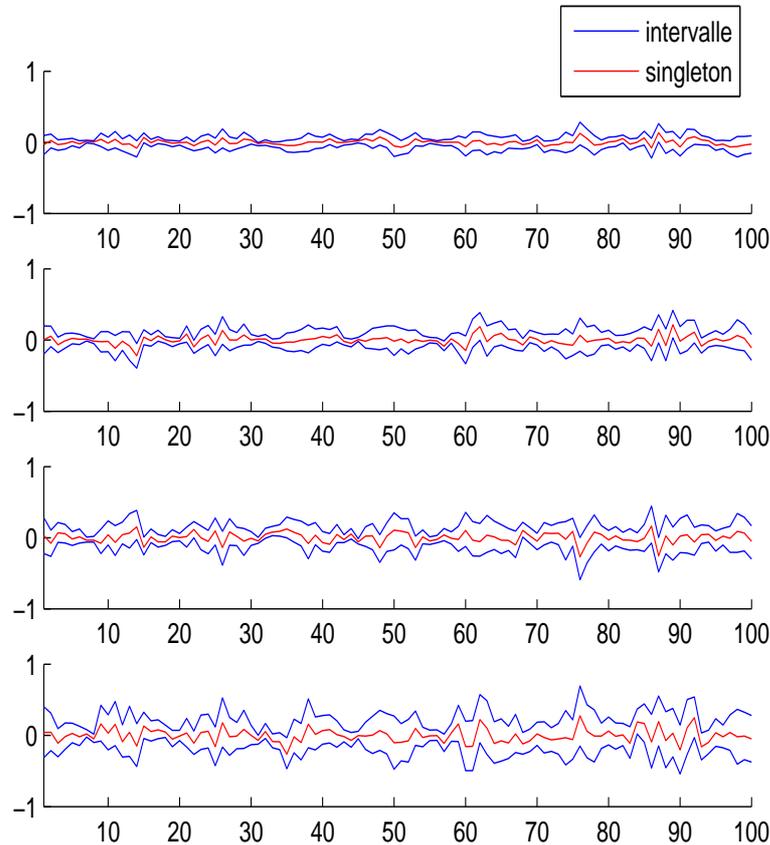


FIGURE 3.1 – Evolution des résidus intervalles et singletons

### 3.4.2 Détection de défauts par ACP intervalle

Des défauts ont été ajoutés à la variable  $\mathbf{x}_1^*$  aux instants 11 à 20 (zone  $Z_1$ ), à la variable  $\mathbf{x}_3^*$  aux instants 41 à 50 (zone  $Z_2$ ) et à la variable  $\mathbf{x}_5^*$  aux instants 71 à 80 (zone  $Z_3$ ). Chaque défaut correspond à un biais d'amplitude égale à 3. La figure 3.2 illustre l'évolution des vraies (saines) et des nouvelles mesures (en présence de défauts).

La figure 3.3 montre l'évolution des quatre résidus intervalles  $[\tilde{\mathbf{t}}^i](k)$ ;  $i = 1, \dots, 4$  du vecteur  $[\tilde{\mathbf{t}}](k)$  (3.23). Ces résidus présentent une sensibilité plus au moins importante aux défauts dans les zones  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  où leurs enveloppes ne contiennent pas la valeur 0 témoignant ainsi de la présence de défauts.

Pratiquement, ce test revient à déterminer, aux différents instants  $k$  ( $k = 1, \dots, 100$ ), le

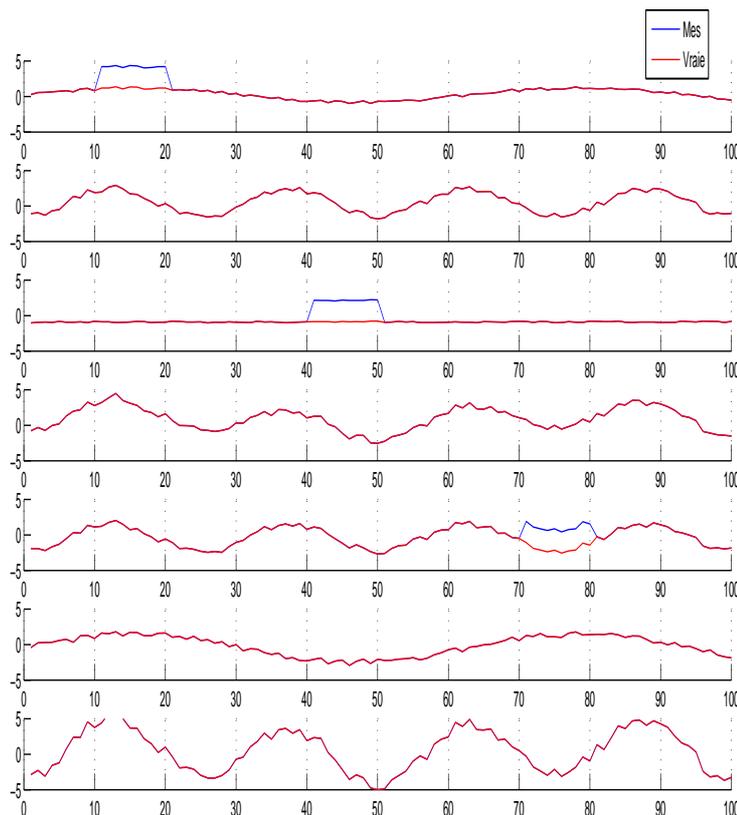


FIGURE 3.2 – Evolution des mesures des 7 variables en présence et en absence de défauts

signe de la quantité de chaque résidu  $[\tilde{\mathbf{t}}^i](k)$ ;  $i = 1, \dots, 4$  du vecteur  $[\tilde{\mathbf{t}}](k)$  :

$$\Theta^{(i)}(k) = \underline{\tilde{t}}^i(k)\overline{\tilde{t}}^i(k) \quad (3.69)$$

où  $\underline{\tilde{t}}^i(k)$  et  $\overline{\tilde{t}}^i(k)$  désignent respectivement les bornes inférieure et supérieure de  $[\tilde{\mathbf{t}}^i](k)$ .

Si  $\Theta^{(i)}(k) \leq 0$  alors le  $i^{\text{ème}}$  résidu contient la valeur 0 à cet instant, sinon il ne la contient pas.

Pour réduire le taux de fausses alarmes, le système est déclaré défaillant si  $\Theta^{(i)}(k)$  dépasse 4 fois de suite 0. La valeur 4 est déterminée de façon empirique et elle est ajustée en fonction de l'application traitée.

### 3.4.3 Localisation de défauts par ACP intervalle

Cette phase assure l'identification de l'ensemble des variables en défaut. Comme les directions de défauts sont a priori inconnues, nous analysons, en premier lieu, les conditions d'existence de la reconstruction afin de réduire le nombre de combinaisons de défauts multiples à considérer. L'estimation des variables reconstruites suivant ces directions utiles, puis leur projection dans l'espace résiduel intervalle permet de générer les résidus structurés qui servent à l'isolation de défauts.

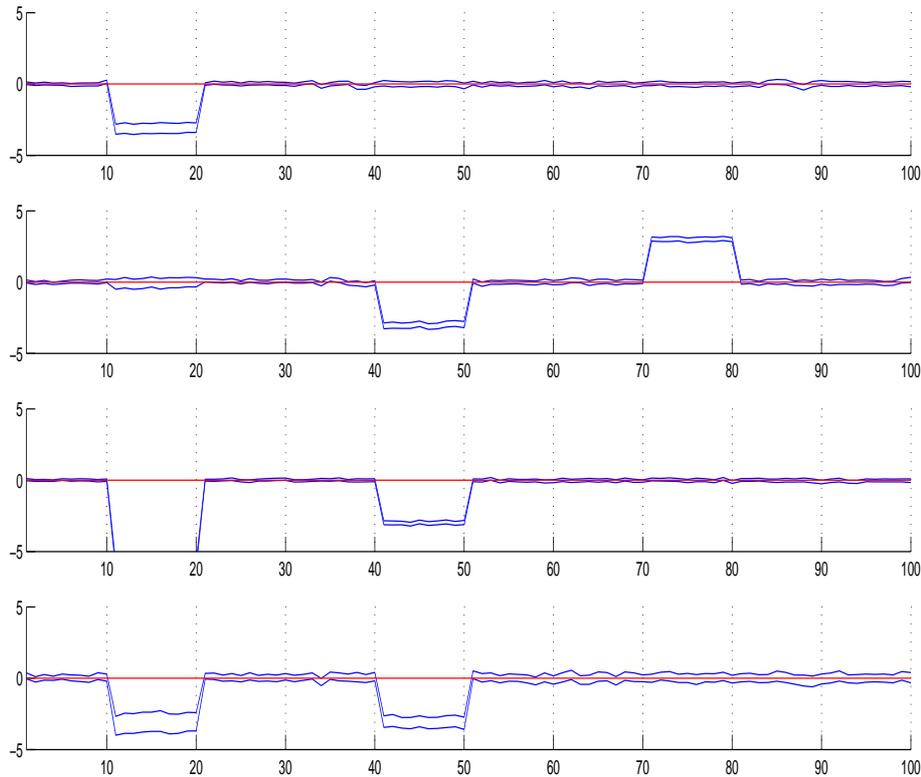


FIGURE 3.3 – Résidus  $\left[ \tilde{\mathbf{t}}^i \right] (k)$ ;  $i = 1 \dots 4$

### 3.4.3.1 Analyse des directions de reconstruction utiles

L'analyse du modèle ACP intervalle en termes de reconstruction détermine les directions de reconstruction utiles.

Compte tenu de l'inégalité structurelle (3.60), le nombre maximal de variables reconstruites simultanément vaut 4. Ainsi, selon l'équation (3.61), le nombre maximum de reconstructions est  $n_{max} = 98$ .

Le tableau 3.4 présente les valeurs des rapports de reconstruction  $\mathbf{Q}_R$  (3.64) pour les sept combinaisons possibles constituées d'une variable. Ce tableau montre que les sept variables sont toutes reconstructibles puisqu'elles admettent des rapports inférieurs à 1. Ainsi, le nombre de directions de défauts affectant une variable vaut 7.

On effectue le même calcul pour  $r = 2$ . Théoriquement, le nombre de directions constituées de deux variables simultanément vaut 21. La table 3.5 montre les valeurs de rapport  $\mathbf{Q}_R$  qui leur sont associées. L'analyse de ce tableau montre que 6 couples de variables (combinaisons avec la variable 6) ne peuvent pas être reconstruits puisqu'ils ont des valeurs proches de 1. Le nombre de directions de défauts affectant deux variables est alors réduit à 15.

Pour  $r = 3$ , le nombre de reconstructions possibles est 20. Le tableau 3.6 présente les

valeurs de reconstruction pour l'ensemble de ces directions possibles. A partir de ce tableau, nous constatons que 7 triplets de variables ( $\{1, 3, 5\}$ ,  $\{2, 4, 7\}$ ,  $\{2, 5, 7\}$ ,  $\{3, 4, 5\}$ ,  $\{3, 4, 7\}$ ,  $\{3, 5, 7\}$  et  $\{4, 5, 7\}$ ) admettent des rapports assez élevés par rapport aux autres. Le nombre de directions de défauts affectant trois variables simultanément réellement reconstituables est alors 13 et la combinaison avec ces variables est impossible. Ainsi, seulement 3 reconstructions pour  $r = 4$ , données par le tableau 3.7, sont théoriquement possibles. Selon ce tableau, seul l'ensemble  $\{1, 2, 4, 5\}$ , ayant un rapport inférieur à 1, est isolable.

Ainsi, le nombre de reconstructions possibles est réduit à 36, seules ces directions permettent de localiser les défauts. Cependant, pour les 62 combinaisons non reconstituables, si ce jeu de variables est en défaut, il est impossible de déterminer ces variables défectueuses.

TABLE 3.4 – Valeurs de  $Q_R$  pour  $r = 1$ 

<b>R</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.02	0.02	0.10	0.05	0.06	0.25	0.05

TABLE 3.5 – Valeurs de  $Q_R$  pour  $r = 2$ 

<b>R</b>	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{1, 5\}$	$\{1, 6\}$	$\{1, 7\}$
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.06	0.15	0.11	0.11	0.91	0.13
<b>R</b>	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{2, 5\}$	$\{2, 6\}$	$\{2, 7\}$	
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.15	0.10	0.10	0.62	0.14	
<b>R</b>	$\{3, 4\}$	$\{3, 5\}$	$\{3, 6\}$	$\{3, 7\}$		
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.26	0.35	0.77	0.20		
<b>R</b>	$\{4, 5\}$	$\{4, 6\}$	$\{4, 7\}$			
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.13	0.72	0.23			
<b>R</b>	$\{5, 6\}$	$\{5, 7\}$				
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.65	0.31				
<b>R</b>	$\{6, 7\}$					
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.74					

TABLE 3.6 – Valeurs de  $Q_R$  pour  $r = 3$ 

<b>R</b>	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 2, 7\}$	$\{1, 3, 4\}$
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.22	0.18	0.18	0.26	0.46
<b>R</b>	$\{1, 3, 5\}$	$\{1, 3, 7\}$	$\{1, 4, 5\}$	$\{1, 4, 7\}$	$\{1, 5, 7\}$
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.61	0.26	0.24	0.40	0.53
<b>R</b>	$\{2, 3, 4\}$	$\{2, 3, 5\}$	$\{2, 3, 7\}$	$\{2, 4, 5\}$	$\{2, 4, 7\}$
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.48	0.46	0.36	0.18	0.87
<b>R</b>	$\{2, 5, 7\}$	$\{3, 4, 5\}$	$\{3, 4, 7\}$	$\{3, 5, 7\}$	$\{4, 5, 7\}$
<b>Q<sub>R</sub></b>	0.97	1.10	0.67	2.08	0.88

TABLE 3.7 – Valeurs de  $\mathbf{Q}_R$  pour  $r = 4$

$\mathbf{R}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 7\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$
$\mathbf{Q}_R$	0.85	0.64	0.32

### 3.4.3.2 Isolation de défauts

Après avoir déterminé les directions utiles de reconstruction, les résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_R](k)$  (3.50) associés à ces directions sont obtenus par reconstruction-projection des  $r$  variables en utilisant toutes les variables sauf celles de rang appartenant à l'ensemble  $\mathbf{R}$ . Les figures 3.4 à 3.10 visualisent l'évolution de ces résidus obtenus en utilisant l'expression (3.51). La figure 3.4, relative à la projection des résidus avec reconstruction des variables sans utiliser la première variable, présente les quatre résidus du vecteur  $[\tilde{\mathbf{t}}_1](k)$ . La figure 3.5 est relative au vecteur des résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_2](k)$  obtenu après projection des reconstructions sans utiliser la deuxième variable. La troisième figure associée au vecteur résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_3](k)$  est obtenue après projection des reconstructions sans utiliser la troisième variable, ... Chaque figure présente les quatre résidus du vecteur  $[\tilde{\mathbf{t}}_R](k)$ . Les indicateurs  $[\Delta_R](k)$  (3.59) associés aux différents résidus structurés sont également calculés et présentés.

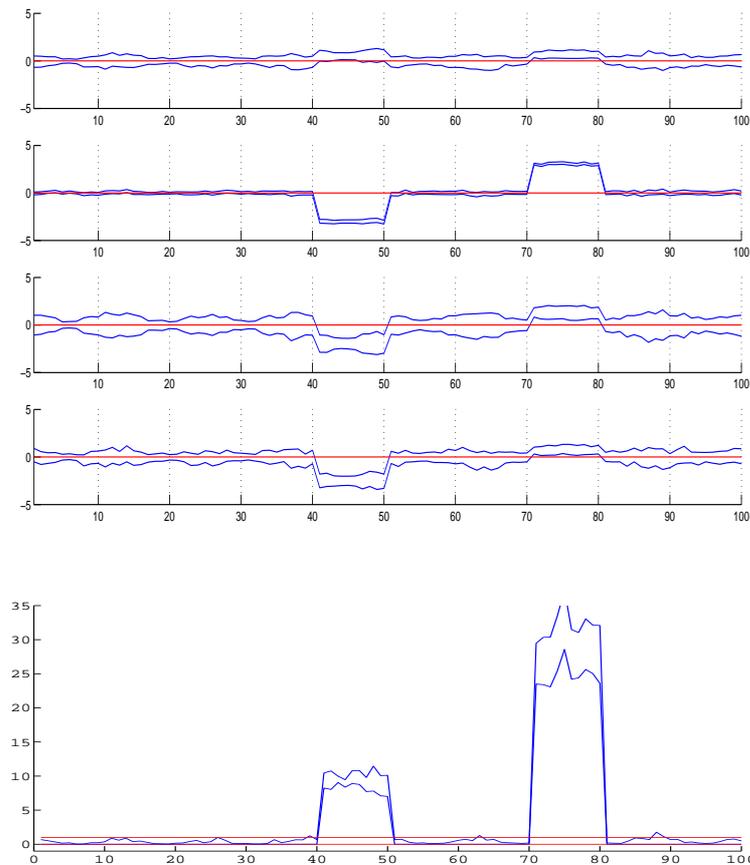
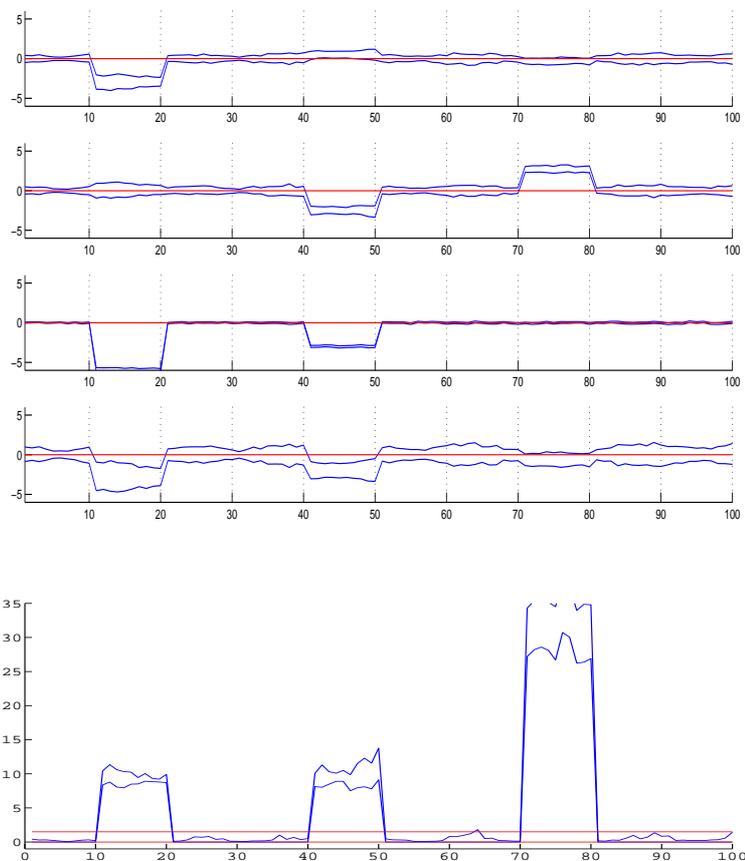


FIGURE 3.4 – Résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_1](k)$  et indicateur  $[\Delta_1](k)$

FIGURE 3.5 – Résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_2](k)$  et indicateur  $[\Delta_2](k)$ 

Les résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_1](k)$ , représentés par les quatre graphes de la figure 3.4, sont insensibles aux défauts des observations de la zone  $Z_1$ . Leurs enveloppes contiennent la valeur 0 révélant ainsi l'absence de défauts dans les variables utilisées pour la reconstruction c'est-à-dire toutes les variables sauf la première. Ces quatre graphes présentent une sensibilité plus ou moins importante aux défauts des variables 3 et 5 dans les zones  $Z_2$  et  $Z_3$  où leurs enveloppes ne contiennent pas la valeur 0.

Ce résultat est confirmé par le dernier graphe de cette figure où l'on trace l'indicateur  $[\Delta_1]$  obtenu après reconstruction de la variable  $x_1$ . Pour les observations de la zone  $Z_1$ , les valeurs inférieures et supérieures de cet indicateur ne dépassent pas respectivement la valeur 0 et le seuil de détection fixé par apprentissage. Ceci témoigne, alors, de l'absence de défauts dans les variables utilisées c'est-à-dire toutes les variables sauf  $x_1$ . Pour les défauts apparaissant dans les zones  $Z_2$  et  $Z_3$ , les valeurs inférieures et supérieures de cet indicateur dépassent leurs seuils respectifs mettant en évidence la présence de défauts dans ces deux zones.

De façon similaire, la figure 3.5 indique l'évolution des résidus construits sans utiliser la deuxième variable (qui n'est pas soumise aux défauts). Les différents résidus témoignent avec des sensibilités plus ou moins importantes de la présence de défauts durant les trois intervalles de temps où les défauts sont introduits. Le dernier graphe de cette figure, illus-

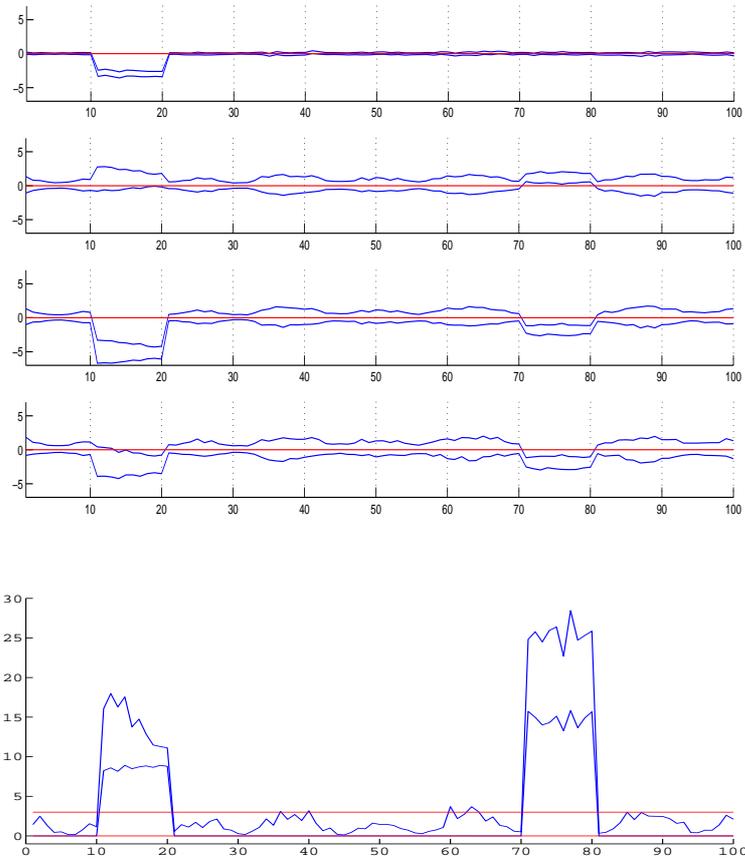


FIGURE 3.6 – Résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_3](k)$  et indicateur  $[\Delta_3](k)$

trant l'évolution de l'indicateur  $[\Delta_2]$ , vérifie ce résultat puisque durant les zones concernées, les valeurs de ses bornes inférieure et supérieure dépassent leurs seuils respectifs.

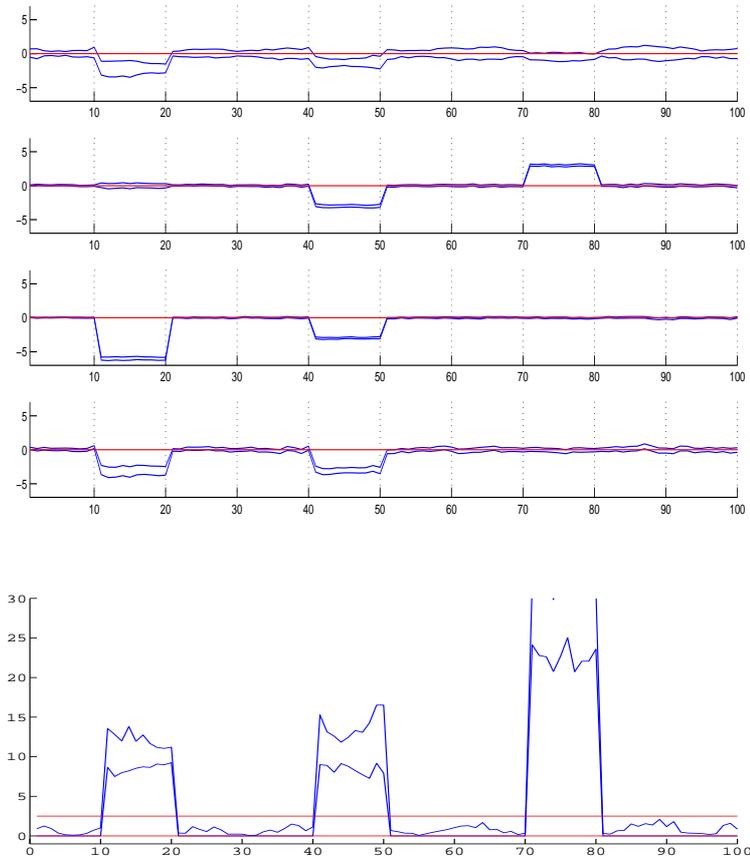
Les figures 3.6 à 3.10 relatives aux résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_3](k)$  à  $[\tilde{\mathbf{t}}_7](k)$ , ainsi qu'aux indicateurs qui leur sont associés  $[\Delta_3]$  à  $[\Delta_7]$ , s'interprètent de façon analogue.

Ainsi, l'examen des figures 3.4 à 3.10 permet de retrouver les variables effectivement en défaut. Cependant, pour confirmer cette décision, nous pouvons effectuer la reconstruction simultanée de 2 ou 3 variables pour les directions possibles déjà précisées.

Notons que, pour la reconstruction multiple, le vecteur des reconstructions intervalles est estimé par la méthode d'élimination de Gauss tenant compte de la propriété de symétrie de la matrice  $[\mathbf{A}]$  dite décomposition  $[\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T$ . Son algorithme est explicité dans l'annexe. Nous avons recours à cette méthode puisqu'elle permet de limiter le pessimisme de cette estimation.

La figure 3.11 trace l'évolution des indicateurs  $[\Delta_{1,2}](k)$  (obtenu après reconstruction simultanée des variables 1 et 2),  $[\Delta_{1,3}](k)$  (obtenu après reconstruction simultanée des variables 1 et 3) et  $[\Delta_{1,2,3}](k)$  (obtenu après reconstruction simultanée des variables 1, 2 et 3).

La table 3.8 résume les conclusions issues de l'examen des différents indicateurs donnés

FIGURE 3.7 – Résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_4](k)$  et indicateur  $[\Delta_4](k)$ 

par les figures 3.4 à 3.11.

TABLE 3.8 – Signatures de défauts

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
$[\Delta_1]$	0	×	×
$[\Delta_2]$	×	×	×
$[\Delta_3]$	×	0	×
$[\Delta_4]$	×	×	×
$[\Delta_5]$	×	×	0
$[\Delta_6]$	×	×	×
$[\Delta_7]$	×	×	×
$[\Delta_{1,2}]$	0	×	×
$[\Delta_{1,3}]$	0	0	×
$[\Delta_{1,2,3}]$	0	0	×

La ligne  $[\Delta_1]$  est relative à la projection des résidus avec reconstruction sans utiliser la première variable... Les symboles 0 et × témoignent respectivement de l'insensibilité et de

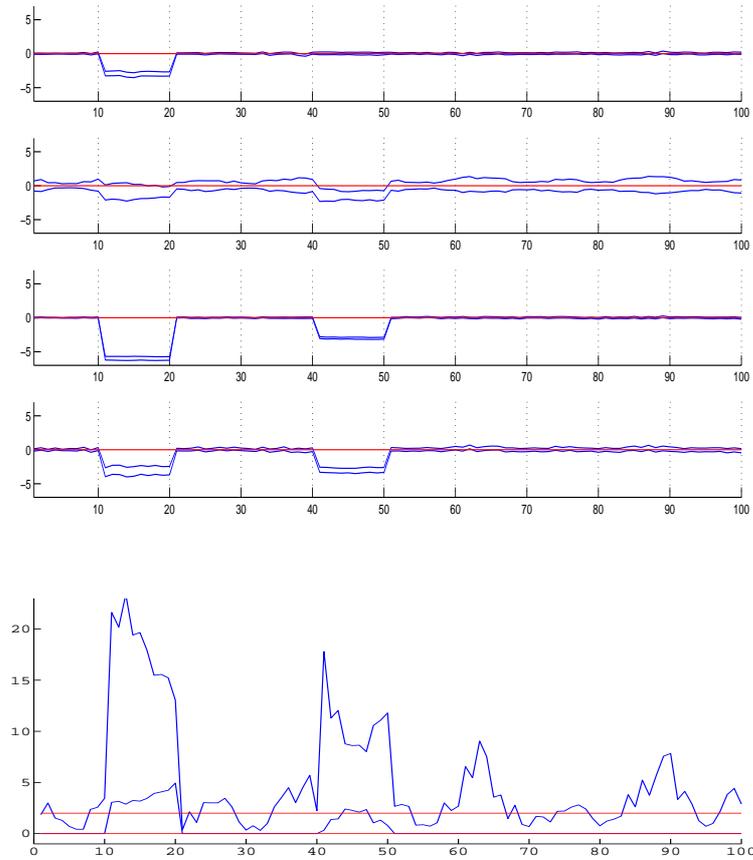
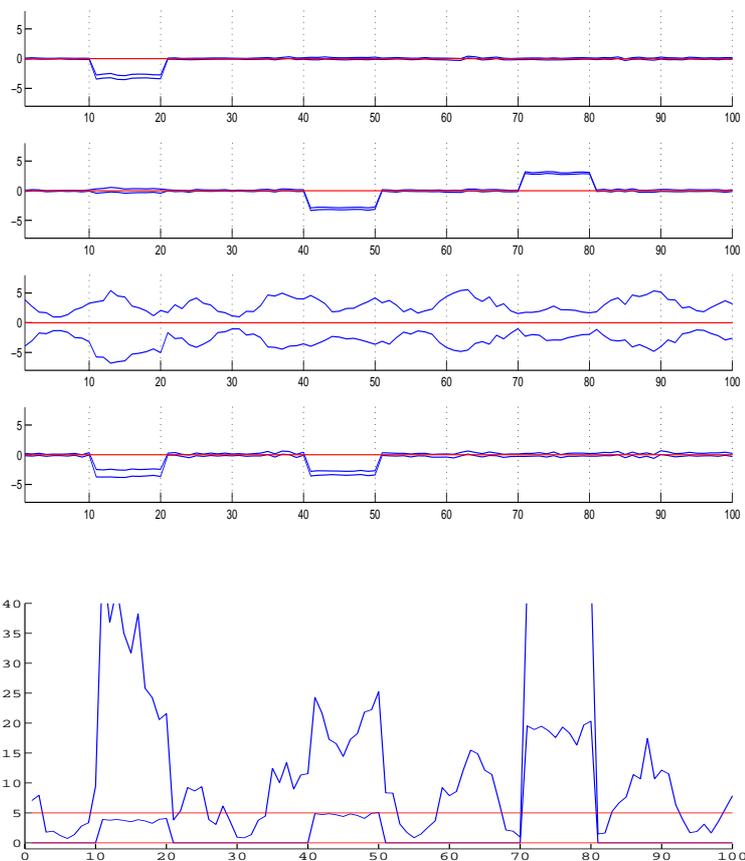


FIGURE 3.8 – Résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_5](k)$  et indicateur  $[\Delta_5](k)$

la sensibilité au défaut dans la zone considérée. L'analyse de ce tableau certifie l'examen précédent quant aux variables défectueuses. En effet :

- dans la zone  $Z_1$ , la variable 1 est défectueuse,
- dans la zone  $Z_2$ , la variable 3 est défectueuse,
- dans la zone  $Z_3$ , la variable 5 est défectueuse.

Finalement, sur cet exemple, on arrive à identifier correctement les variables en défaut en dépit de la présence de quelques fausses alarmes. En effet, les valeurs supérieures des indicateurs  $[\Delta_{\mathbf{R}}]$ , admettant des rapports de reconstruction relativement importants, sont entachées de fausses alarmes pouvant engendrer des localisations erronées. On a déjà mentionné que la difficulté de reconstruction intervalle est directement liée au rapport de reconstruction  $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$ . Cependant, l'utilisation conjointe des bornes inférieures et supérieures de ces indicateurs donne une indication plus claire. Par exemple, en comparant seulement les valeurs supérieures des indicateurs  $[\Delta_6]$ ,  $[\Delta_7]$  et  $[\Delta_{1,2,3}]$  à leur seuil de détection respectif, il est difficile d'isoler les variables incriminées. Par contre, la comparaison des valeurs inférieures de ces indicateurs à la valeur 0 lève toute ambiguïté quant aux variables effectivement en défaut.

FIGURE 3.9 – Résidus  $[\tilde{\mathbf{t}}_6](k)$  et indicateur  $[\Delta_6](k)$ 

### 3.5 Conclusion

La nouvelle méthode proposée tient compte des incertitudes du modèle ACP sous forme intervalle par estimation des valeurs et des vecteurs propres intervalles.

Le modèle ACP intervalle ainsi obtenu permet la détection de défauts sur les variables certaines par la génération des résidus intervalles. Quant à la localisation, elle est effectuée par extension du principe de reconstruction à l'ACP par intervalle. Les variables reconstruites sont obtenues par résolution directe d'un système d'équations linéaires par intervalle à l'aide de la décomposition  $[\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T$ .

Le principal inconvénient lié à l'examen de défauts multiples est l'augmentation du nombre de combinaisons de variables à reconstruire simultanément. Une stratégie de localisation est proposée par analyse des conditions de reconstruction par intervalle afin de réduire ce nombre toutefois fini et directement lié au nombre de variables du système.

Les résidus structurés sont ensuite générés par projection des reconstructions suivant les directions utiles dans l'espace résiduel intervalle. L'analyse de ces résidus identifie les

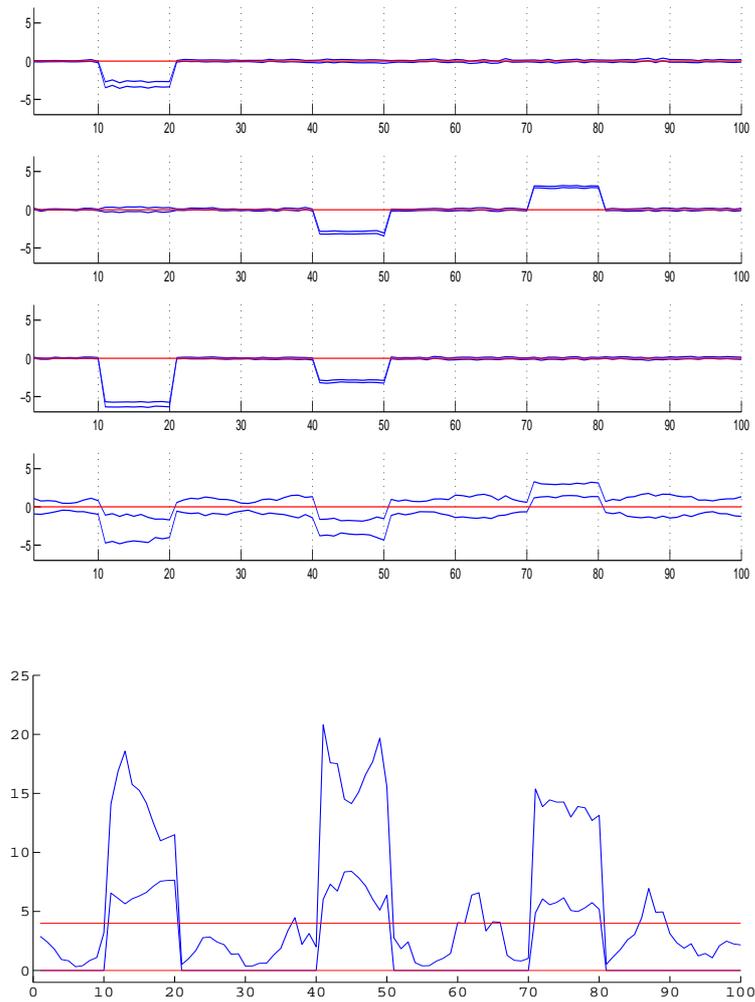
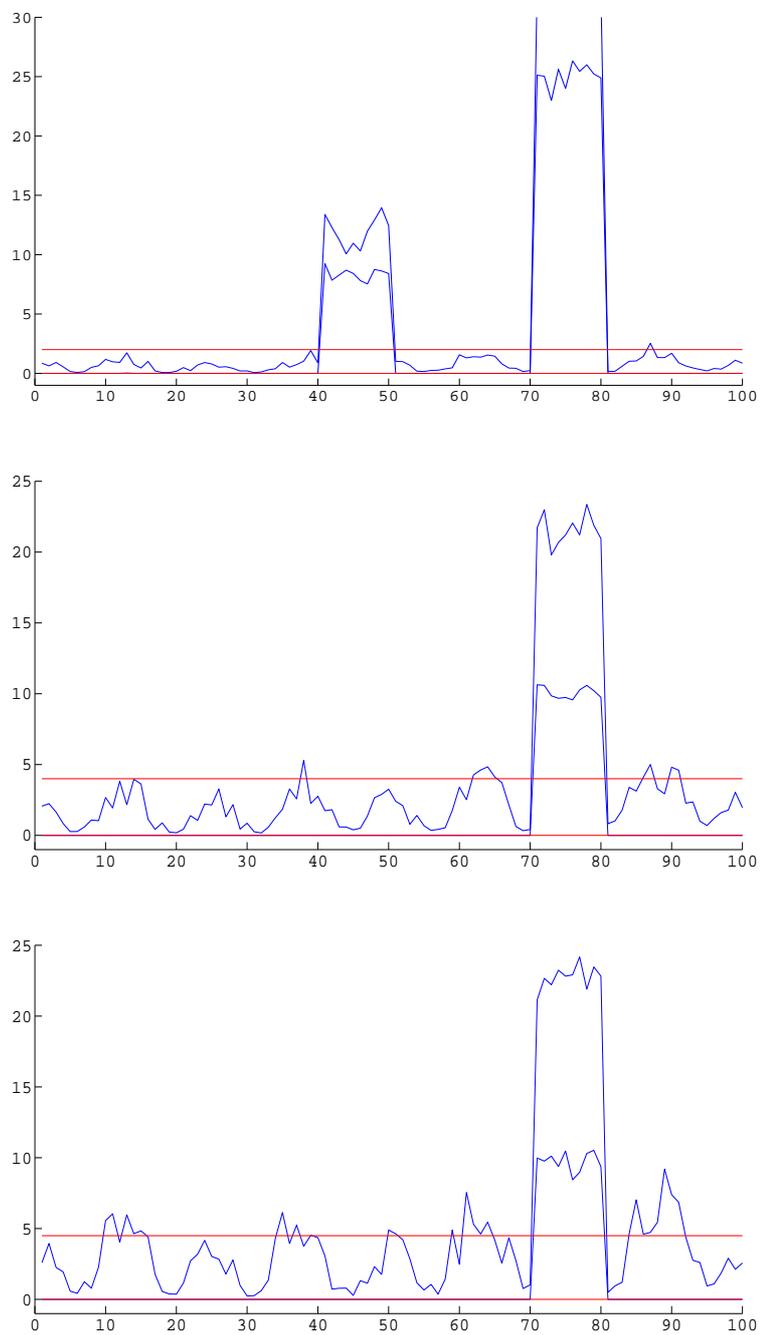


FIGURE 3.10 – Résidus  $[\tilde{t}_7](k)$  et indicateur  $[\Delta_7](k)$

variables incriminées.

Pour la validation de nos propositions, un exemple de simulation est utilisé. Les résultats obtenus, vecteurs et valeurs propres, par ACP intervalle contiennent ceux fournis par ACP classique. L'utilisation du modèle ACP intervalle pour le diagnostic a permis d'identifier correctement l'ensemble des variables défectueuses en dépit de la présence de quelques fausses alarmes liées au rapport de reconstruction élevé  $Q_R$ .

FIGURE 3.11 – Indicateurs  $[\Delta_{1,2}](k)$ ,  $[\Delta_{1,3}](k)$  et  $[\Delta_{1,2,3}](k)$



# 4

## Diagnostic par ACP intervalle d'un système d'échangeurs thermiques

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>84</b>
<b>4.2</b>	<b>Classification des échangeurs de chaleur</b>	<b>84</b>
4.2.1	Type d'échange	84
4.2.2	Présence ou absence de paroi	85
4.2.3	Mode de circulation des fluides	85
4.2.4	Technologie de construction	86
<b>4.3</b>	<b>Modélisation du système d'échangeurs</b>	<b>87</b>
4.3.1	Mise en équation d'un échangeur à contre-courant	88
4.3.2	Mise en équation d'un double échangeurs	91
<b>4.4</b>	<b>Application</b>	<b>92</b>
4.4.1	Linéarisation du modèle de simulation	92
4.4.2	Détermination des incertitudes du modèle ACP	97
4.4.3	Détection de défauts	98
4.4.4	Localisation de défauts	98
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>103</b>

---

## 4.1 Introduction

L'utilisation d'un échangeur de chaleur est fréquente notamment dans l'industrie (transfert et récupération de l'énergie), l'habitat (chauffage et climatisation) et l'agro-alimentaire (conservation des produits et réfrigération) [68].

Cependant, les transferts thermiques dans les échangeurs sont favorables au développement d'encrassement qui s'accumule avec le temps sur les surfaces des échanges. Ce phénomène a des effets néfastes sur l'efficacité de l'échangeur : un écart de température supérieur à celui nécessaire, une chute du taux de débit massique, etc. Pour la détection et la localisation de défauts causés par l'encrassement, différentes méthodes de diagnostic ont été développées [48], [17], [29].

Dans ce chapitre, nous proposons d'appliquer les méthodes proposées précédemment sur un système d'échangeurs thermiques. Le système considéré comprend deux échangeurs à contre-courant assemblés en série. Après la présentation des échangeurs, la modélisation et la mise en équation du système d'échangeurs sont réalisées. Par la suite, on s'intéresse à la détection et la localisation de défauts affectant ce système linéarisé en utilisant la méthode d'ACP par intervalle. Enfin, une étude comparative est réalisée concernant le diagnostic par ACP intervalle et le diagnostic par ACP classique.

## 4.2 Classification des échangeurs de chaleur

Un échangeur de chaleur ou échangeur thermique est un dispositif qui assure, essentiellement, la transmission du chaleur d'un fluide chaud à un autre fluide de plus faible température [9].

Les échangeurs thermiques peuvent être classés en fonction de différents paramètres : nature des échanges thermiques, présence ou absence d'une paroi, sens de parcours de fluides, technologie de construction, ...

### 4.2.1 Type d'échange

L'échange thermique entre les deux fluides est réalisé avec ou sans changement de phase.

Il est sans changement de phase si l'un des fluides se refroidit pour réchauffer le deuxième. Les températures des fluides varient tout au long de l'échangeur. C'est le cas des échangeurs : liquide-liquide, gaz-liquide et gaz-gaz [9].

Le transfert de chaleur s'effectue avec changement de phase de l'un des deux fluides lorsque la température de celui-ci reste constante. Il existe les trois cas suivants [9] :

- l'un des fluides se condense alors que l'autre se vaporise. C'est l'exemple de l'évaporateur-condenseur tel que les machines frigorifiques installées en cascade.
- le fluide secondaire se vaporise en recevant de la chaleur du fluide primaire qui ne subit pas de changement d'état. C'est l'exemple des évaporateurs.

- le fluide primaire se condense en cédant sa chaleur latente au fluide secondaire (le plus froid) qui ne subit pas de transformation d'état. C'est l'exemple des condenseurs des machines frigorifiques.

### 4.2.2 Présence ou absence de paroi

L'échange thermique entre les deux fluides est réalisé par l'intermédiaire d'une paroi de séparation (sans mélange des fluides) ou sans paroi (par mélange des deux fluides) [9].

En absence d'une paroi de séparation entre les deux fluides, ces derniers sont intimement mélangés (échangeur mélangeur) et ils sont de même nature (ou non miscibles). C'est l'échangeur le plus simple ou l'idéal [9]. On cite : les aéroréfrigérants, tour de refroidissement ouverte, ...

En présence d'une paroi, le fluide générateur d'énergie est dit primaire alors que l'autre est dit secondaire.

Dans cette catégorie, on distingue [93] : les régénérateurs ou échangeurs discontinus et les échangeurs continus.

Les régénérateurs ou échangeurs discontinus qui se caractérisent par une surface d'échange alternativement mise en contact avec les fluides chaud et froid. Un exemple classique en centrale thermique est celui des réchauffeurs d'air rotatifs.

Les échangeurs continus comprenant deux fluides qui circulent de manière continue de part et d'autre de la surface d'échange. Ces échangeurs sont le plus souvent utilisés dans l'industrie.

### 4.2.3 Mode de circulation des fluides

Ce classement se base sur la géométrie de l'échangeur et le sens des écoulements des fluides [9]. On distingue : l'échangeur à co-courant, l'échangeur à contre-courant et l'échangeur à courant croisé.

L'échangeur à co-courant (nommé aussi à courant parallèle ou anti-méthodique) où l'écoulement des deux fluides s'effectue en parallèle et dans le même sens. Ce fonctionnement n'est possible que si la température de sortie de fluide froid est inférieure à la température de sortie de fluide chaud [82]. Ce type d'échangeurs est utilisé pour les produits thermosensibles.

L'échangeur à contre-courant (dit aussi méthodique) où l'écoulement des deux fluides s'effectue en parallèle mais en sens opposé ; l'entrée de l'un des fluides étant à la sortie de l'autre. La température de sortie du fluide froid peut être supérieure à la température de sortie du fluide chaud [82]. Ce type d'échangeurs est plus efficace que l'échangeur à co-courant comme il permet l'échange d'une plus grande quantité de chaleur. L'échange de chaleur est commandé par le fluide qui subit la plus grande variation de température,

autrement par le fluide ayant la plus faible capacité thermique [9].

L'échangeur à courant croisé où les deux fluides circulent perpendiculairement l'un à l'autre. Généralement, l'un des fluides traverse l'écoulement de l'autre fluide plusieurs fois et l'échangeur est dit à multiple passe.

On distingue deux modes de circulation [9] : la circulation croisée méthodique où l'un des fluides entre par l'extrémité de l'appareil d'où sort le deuxième et la circulation croisée anti-méthodique où les deux fluides entrent par la même extrémité de l'appareil.

#### 4.2.4 Technologie de construction

On peut également classer les échangeurs de chaleur selon leur technologie de construction. On cite principalement : l'échangeur à double enveloppe, l'échangeur à tubes et calandres, l'échangeur compact et l'échangeur à plaques et joints.

L'échangeur à double enveloppe ou à deux tubes coaxiaux est le plus simple des échangeurs [9]. L'un des fluides (généralement le chaud) circule dans le tube intérieur tandis que l'autre s'écoule dans l'espace annulaire compris entre les deux tubes. Cet échangeur est à simple passe. Il est souvent utilisé dans l'industrie frigorifique, en particulier pour les condenseurs à eau ou encore les groupes de production d'eau glacée [80].

L'échangeur à tubes et calandres est constitué d'un faisceau de tubes branchés en parallèle enfermés dans une enveloppe appelée calandre. Des chicanes sont placées dans la calandre afin d'augmenter la turbulence et l'efficacité de l'échange. Généralement, les tubes sont métalliques et le fluide chaud circule dans les tubes afin de minimiser les pertes de chaleur [9]. La figure 4.1 illustre le principe de cet échangeur. Il sert pour de nombreuses applications industrielles nécessitant des pressions élevées [29].

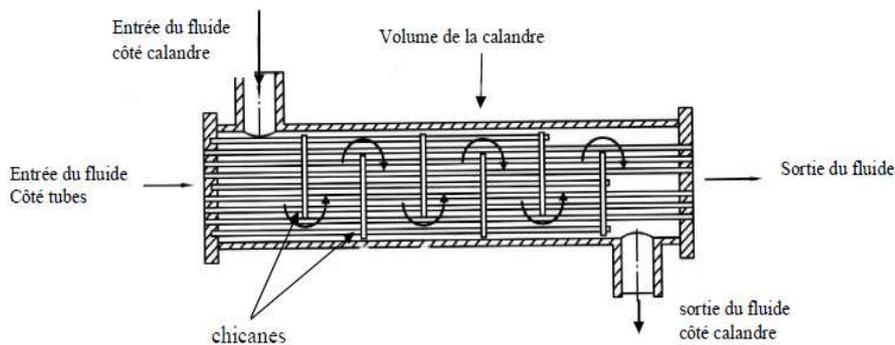


FIGURE 4.1 – Echangeur à tubes et calandre

L'échangeur compact contient deux fluides circulant perpendiculairement l'un à l'autre. Un fluide est dit non brassé puisqu'il s'écoule dans une veine divisée en plusieurs canaux parallèles distincts et de faibles sections. Dans le cas contraire, le fluide est dit brassé.

Le brassage permet d'homogénéiser les températures dans la section droite de la veine. Les échangeurs à courants croisés sont utilisés pour l'échange entre un gaz circulant en calandre et un liquide circulant dans les tubes. La figure 4.2 présente les deux types d'échangeurs compacts à courants croisés [44].

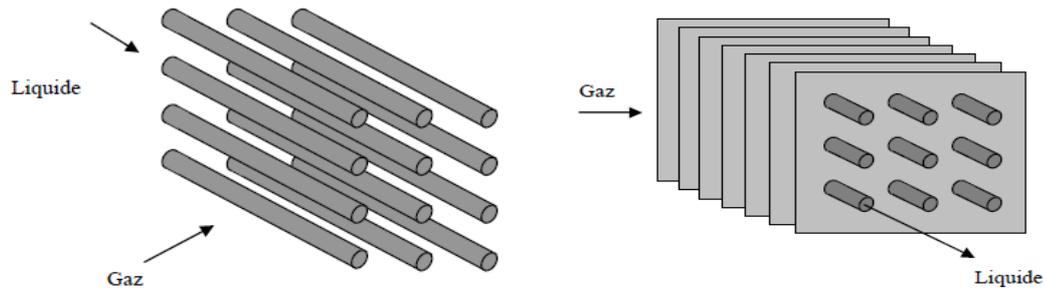


FIGURE 4.2 – Echangeur compact avec un fluide brassé et l'autre non brassé et un échangeur compact avec deux fluides brassés

L'échangeur à plaques et joints est composé d'un empilement de plaques métalliques séparées par des joints et serrées les unes contre les autres par des tirants comme l'illustre la figure 4.3. Le fluide primaire circule dans les canaux impairs et l'autre dans les canaux pairs. Il est préférable que la circulation des fluides soit à contre courant [9]. Cet échangeur présente une grande surface d'échange dans un volume limité grâce à leur compacité [29]. Il est couramment utilisé dans le bâtiment grâce à sa performance et son faible encombrement [9].

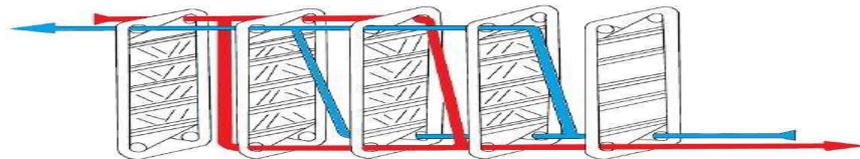


FIGURE 4.3 – Echangeur à plaques et joints

### 4.3 Modélisation du système d'échangeurs

Pour la modélisation du système d'échangeurs thermiques constitué de deux échangeurs à contre-courant et assemblés en série sur le circuit primaire, on s'intéresse, en premier lieu, à la mise en équation d'un échangeur à contre-courant. On déduit, ensuite, les équations du système d'application considéré.

### 4.3.1 Mise en équation d'un échangeur à contre-courant

Considérons un échangeur de chaleur constitué de deux tubes coaxiaux où chaque tube est traversé par un fluide. Les deux fluides caloporteurs circulent le long d'une paroi de séparation dans deux sens contraires (échangeur à contre-courant). Le principe de cet échangeur est donné à la figure 4.4.



FIGURE 4.4 – Echangeur thermique à contre-courant

La liste des notations utilisées dans cette figure est donnée à la table 4.2.

TABLE 4.1 – Liste des notations utilisées pour l'échangeur

Symbole	Signification
$T_{ce}$	Température d'entrée du fluide chaud
$T_{cs}$	Température de sortie du fluide chaud
$T_{fe}$	Température d'entrée du fluide froid
$T_{fs}$	Température de sortie du fluide froid
$D_c$	Débit massique du fluide chaud
$D_f$	Débit massique du fluide froid

La figure 4.5 présente une tranche de l'échangeur de longueur  $dx$  correspondant à une surface d'échange élémentaire  $ds$ . Le sens des abscisses est choisit selon le sens d'écoulement de fluide chaud et par conséquent, l'abscisse  $x = 0$  correspond à l'entrée de fluide chaud alors que l'abscisse  $x = L$  correspond à l'entrée de fluide froid.

Le fluide chaud passe de la température  $T_c$  à  $T_c + dT_c$  et le fluide froid de  $T_f$  à  $T_f + dT_f$  entre les sections d'abscisses respectives  $x$  et  $x + dx$ . On a  $dT_c < 0$  puisque, selon cette direction,  $T_c$  décroît et on a également  $dT_f < 0$  puisqu'on se dirige vers l'entrée de fluide froid (sens de l'écoulement opposé à celui de l'axe de  $x$ ).

En considérant les paramètres suivants comme connus :

- les débits massiques des fluides chaud et froid  $D_c$  et  $D_f$
- les chaleurs massiques ou spécifiques (dites aussi capacités thermiques massiques) des fluides chaud et froid  $c_c$  et  $c_f$
- les températures d'entrée des fluides chaud et froid  $T_{ce}$  et  $T_{fe}$
- le coefficient global d'échange  $U$ . Ce paramètre dépend du flux massique, de l'état thermodynamique du fluide et de la surface d'échange. Il est souvent indiqué par les constructeurs. On suppose que ce coefficient a une valeur moyenne unique tout au long de l'échangeur de chaleur,

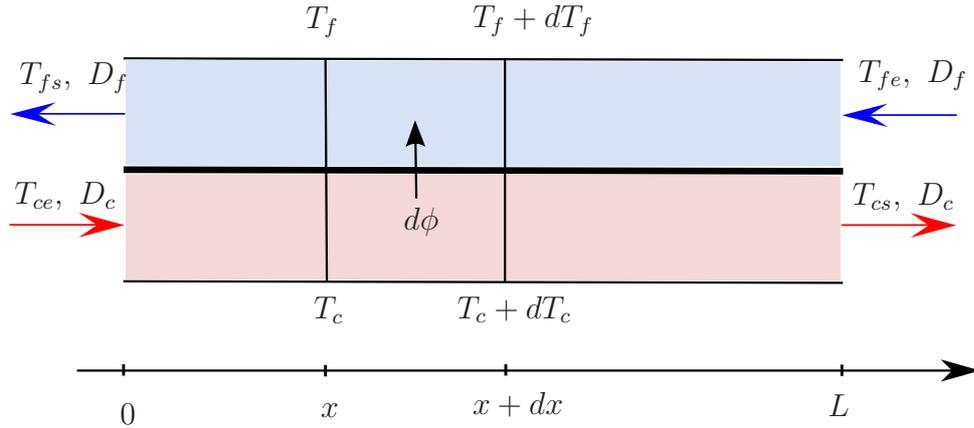


FIGURE 4.5 – Élément d'échangeur de longueur  $dx$

l'objectif consiste alors à déterminer :

- les températures de sortie des fluides chaud et froid  $T_{cs}$  et  $T_{fs}$
- le flux de chaleur échangé  $\Phi$
- l'éventuelle répartition spatiale des températures de fluides chaud  $T_c(x)$  et froid  $T_f(x)$  le long de l'échangeur.

Pour ce fait, les hypothèses suivantes sont retenues :

- le régime est permanent (tous les paramètres sont constants dans le temps)
- l'échangeur est adiabatique (pas d'échange de chaleur avec l'extérieur ; la surface de séparation est la seule surface d'échange )
- le transfert de chaleur s'effectue sans changement de phase.

Le flux de chaleur  $d\phi$ , indiqué à la figure 4.5, peut être évalué de différentes manières [80] :

- Echange transféré à travers l'élément de la paroi de surface  $ds$ . Ce flux est proportionnel à la différence de température entre les deux fluides à cet endroit, soit :

$$d\phi = U (T_c - T_f) ds \quad (4.1)$$

où  $ds = p dx$ ,  $p$  étant le périmètre de la section.

- Perte de chaleur entre les sections en  $x$  et  $x + dx$ , soit :
  - par le fluide chaud ( $dT_c < 0$ ) :

$$d\phi = -\alpha_c dT_c \quad (4.2)$$

où  $\alpha_c = D_c c_c$  étant le débit de capacité thermique (ou débit calorifique) du fluide chaud [80].

- par le fluide froid ( $dT_f < 0$ ) :

$$d\phi = -\alpha_f dT_f \quad (4.3)$$

où  $\alpha_f = D_f c_f$  désigne le débit de capacité thermique du fluide froid.

Compte tenu des conditions limites et en intégrant les équations (4.1) à (4.3), on peut écrire :

$$T_{fs} = \frac{1 - \beta}{\alpha - \beta} T_{fe} + \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta} T_{ce} \quad (4.4)$$

et

$$T_{cs} = \frac{(\alpha - 1)\beta}{\alpha - \beta} T_{fe} + \frac{\alpha(1 - \beta)}{\alpha - \beta} T_{ce} \quad (4.5)$$

avec

$$\alpha = e^{-UMS} \quad (4.6)$$

où  $M = \frac{1}{\alpha_c} - \frac{1}{\alpha_f}$  et  $S$  est la surface totale d'échange thermique.

$$\beta = \frac{\alpha_f}{\alpha_c} \quad (4.7)$$

**Démonstration** La différence des deux équations (4.2) et (4.3) donne :

$$d(T_c - T_f) = - \left( \frac{1}{\alpha_c} - \frac{1}{\alpha_f} \right) d\Phi \quad (4.8)$$

Compte tenu de l'équation (4.1), on a :

$$T_c - T_f = \frac{d\Phi}{Uds} \quad (4.9)$$

La division de l'équation (4.8) par (4.9) donne :

$$\frac{d(T_c - T_f)}{T_c - T_f} = -Uds \left( \frac{1}{\alpha_c} - \frac{1}{\alpha_f} \right) \quad (4.10)$$

L'intégration de l'équation (4.10) entre les bornes  $x = 0$  et  $x = L$  conduit à :

$$Ln \left( \frac{T_c(L) - T_f(L)}{T_c(0) - T_f(0)} \right) = -US \left( \frac{1}{\alpha_c} - \frac{1}{\alpha_f} \right) \quad (4.11)$$

A partir de la figure 4.5, on a :  $T_c(L) = T_{cs}$ ,  $T_c(0) = T_{ce}$ ,  $T_f(L) = T_{fe}$ ,  $T_f(0) = T_{fs}$ ,  $s(0) = 0$ ,  $s(L) = S$  et compte tenu de la notation (4.6), l'équation précédente devient :

$$\frac{T_{cs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} = \alpha \quad (4.12)$$

L'intégration de l'expression (4.2) entre les bornes  $x = 0$  et  $x = L$  donne :

$$\Phi = -\alpha_c (T_{cs} - T_{ce}) \quad (4.13)$$

De la même façon, l'intégration de (4.3) conduit à :

$$\Phi = -\alpha_f (T_{fe} - T_{fs}) \quad (4.14)$$

En divisant l'expression (4.13) par (4.14) et compte tenu de la notation (4.7), on obtient :

$$T_{cs} - T_{ce} = \beta (T_{fe} - T_{fs}) \quad (4.15)$$

En utilisant les deux relations (4.15) et (4.12), on obtient les deux expressions (4.4) et (4.5).

### 4.3.2 Mise en équation d'un double échangeurs

Souvent, les échangeurs de chaleur sont combinés en réseau afin d'avoir le transfert thermique désiré : atelier d'échangeurs, ensemble de climatisations pour un bâtiment, ect. L'assemblage peut s'effectuer en série, en parallèle ou en une autre configuration [9]. Dans cette partie, on s'intéresse à l'assemblage série où chaque appareil est irrigué en série par les deux fluides. La circulation générale choisie est à contre-courant vue sa performance.

Les notations et les unités des principales variables physiques, présentées dans cette section, sont résumées dans le tableau 4.2.

Pour plus de simplicité, nous considérons un système de deux échangeurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  en série sur le circuit primaire comme l'illustre la figure 4.6. Nous supposons que le fluide chaud de débit  $D_c$  alimente le primaire de deux échangeurs et que le fluide froid de débit  $D_f$  est séparé en deux flux  $D_{1,f}$  et  $D_{2,f}$  alimentant le secondaire de deux échangeurs.

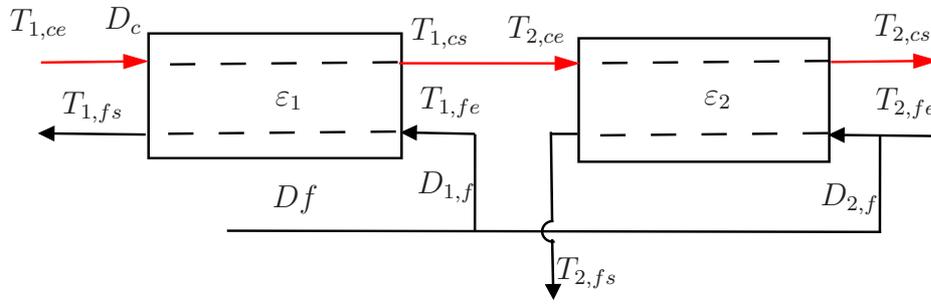


FIGURE 4.6 – Deux échangeurs à contre-courant en série sur le circuit primaire

Les températures de sortie des liquides froid et chaud des deux échangeurs, issues des lois de conservation de l'énergie, sont données par [80] :

$$\varepsilon_1 \begin{cases} T_{1,fs} = \mu_{1,1}T_{1,fe} + \mu_{1,2}T_{1,ce} \\ T_{1,cs} = \gamma_{1,1}T_{1,fe} + \gamma_{1,2}T_{1,ce} \\ \mu_{1,1} = \frac{1 - \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \mu_{1,2} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1 - \beta_1} \\ \gamma_{1,1} = \mu_{1,2}\beta_1 & \gamma_{1,2} = \mu_{1,1}\alpha_1 \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_2 \begin{cases} T_{2,fs} = \mu_{2,1}T_{2,fe} + \mu_{2,2}T_{2,ce} \\ T_{2,cs} = \gamma_{2,1}T_{2,fe} + \gamma_{2,2}T_{2,ce} \\ \mu_{2,1} = \frac{1 - \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \mu_{2,2} = \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \beta_2} \\ \gamma_{2,1} = \mu_{2,2}\beta_2 & \gamma_{2,2} = \mu_{2,1}\alpha_2 \end{cases} \quad (4.17)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_1 = e^{-UM_1S} & \alpha_2 = e^{-UM_2S} \\ M_1 = \frac{1}{D_c c_{1,c}} - \frac{1}{D_{1,f} c_{1,f}} & M_2 = \frac{1}{D_c c_{2,c}} - \frac{1}{D_{2,f} c_{2,f}} \\ \beta_1 = \frac{D_{1,f} c_{1,f}}{D_c c_{1,c}} & \beta_2 = \frac{D_{2,f} c_{2,f}}{D_c c_{2,c}} \end{cases} \quad (4.18)$$

TABLE 4.2 – Liste des notations utilisées pour les deux échangeurs

Symbole	Signification	Unité
$D_c$	Débit du fluide chaud pour les échangeurs $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$	$Kg/s$
$D_{1,f}$	Débit du fluide froid pour le premier échangeur $\varepsilon_1$	$Kg/s$
$D_{2,f}$	Débit du fluide froid pour le deuxième échangeur $\varepsilon_2$	$Kg/s$
$T_{1,ce}$	Température d'entrée du fluide chaud pour $\varepsilon_1$	$K$
$T_{1,cs}$	Température de sortie du fluide chaud pour $\varepsilon_1$	$K$
$T_{2,ce}$	Température d'entrée du fluide chaud pour $\varepsilon_2$	$K$
$T_{2,cs}$	Température de sortie du fluide chaud pour $\varepsilon_2$	$K$
$T_{1,fe}$	Température d'entrée du fluide froid pour $\varepsilon_1$	$K$
$T_{1,fs}$	Température de sortie du fluide froid pour $\varepsilon_1$	$K$
$T_{2,fe}$	Température d'entrée du fluide froid pour $\varepsilon_2$	$K$
$T_{2,fs}$	Température de sortie du fluide froid pour $\varepsilon_2$	$K$
$c_{1,c}$	Chaleur massique du fluide chaud pour $\varepsilon_1$	$(J/KgK)$
$c_{2,c}$	Chaleur massique du fluide chaud pour $\varepsilon_2$	$(J/KgK)$
$c_{1,f}$	Chaleur massique du fluide froid pour $\varepsilon_1$	$(J/KgK)$
$c_{2,f}$	Chaleur massique du fluide froid pour $\varepsilon_2$	$(J/KgK)$
$S$	Surface totale d'échange thermique	$m^2$
$U$	coefficient global d'échange de chaleur	$(W/m^2K)$

Les deux échangeurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont décrits par 7 relations de redondance liant les différentes variables comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1,fs} = \mu_{1,1}T_{1,fe} + \mu_{1,2}T_{1,ce} \\ T_{1,cs} = \gamma_{1,1}T_{1,fe} + \gamma_{1,2}T_{1,ce} \\ T_{2,fs} = \mu_{2,1}T_{2,fe} + \mu_{2,2}T_{2,ce} \\ T_{2,cs} = \gamma_{2,1}T_{2,fe} + \gamma_{2,2}T_{2,ce} \\ D_f - D_{1,f} - D_{2,f} = 0 \\ T_{1,cs} - T_{2,ce} = 0 \\ T_{1,fe} - T_{2,fe} = 0 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

## 4.4 Application

Dans cette partie, nous allons mettre en évidence l'aptitude des différentes méthodes de diagnostic, proposées dans le chapitre précédent, à détecter et localiser les défauts affectant les données par ACP de type intervalle. Pour cela nous nous intéressons, dans la suite, au diagnostic du système d'échangeurs thermiques modélisé précédemment (4.19).

### 4.4.1 Linéarisation du modèle de simulation

Le système (4.19) n'est pas linéaire comme les températures de sortie de l'échangeur  $\varepsilon_1$  ( $T_{1,fs}$  et  $T_{1,cs}$ ) (4.16) et les températures de sortie de l'échangeur  $\varepsilon_2$  ( $T_{2,fs}$  et  $T_{2,cs}$ ) (4.17) ne sont pas linéaires par rapport à la variation des débits ( $D_c$ ,  $D_{1,f}$  et  $D_{2,f}$ ).

On cherche, alors, à écrire les expressions de  $T_{1,fs}$  et  $T_{1,cs}$  comme des fonctions linéaires

des variables d'entrée  $T_{1,fe}$ ,  $T_{1,ce}$ ,  $D_c$  et  $D_{1,f}$  alors que les expressions de  $T_{2,fs}$  et  $T_{2,cs}$  doivent être en fonction des variables  $T_{2,fe}$ ,  $T_{2,ce}$ ,  $D_c$  et  $D_{2,f}$ . Pour cela, nous étendons la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.

#### 4.4.1.1 Expression de la température $T_{1,fs}$

Soit le point  $F_1 = (T_{1,fe}, T_{1,ce}, D_c, D_{1,f})$ , d'après la formule de Taylor, au voisinage d'un point de linéarisation  $F_{10} = (T_{1,fe0}, T_{1,ce0}, D_{c0}, D_{1,f0})$ , on peut écrire :

$$T_{1,fs} \approx T_{1,fs}|_{F_1=F_{10}} + \left. \frac{\partial T_{1,fs}}{\partial T_{1,fe}} \right|_{F_1=F_{10}} (T_{1,fe} - T_{1,fe0}) + \left. \frac{\partial T_{1,fs}}{\partial T_{1,ce}} \right|_{F_1=F_{10}} (T_{1,ce} - T_{1,ce0}) + \left. \frac{\partial T_{1,fs}}{\partial D_c} \right|_{F_1=F_{10}} (D_c - D_{c0}) + \left. \frac{\partial T_{1,fs}}{\partial D_{1,f}} \right|_{F_1=F_{10}} (D_{1,f} - D_{1,f0}) \quad (4.20)$$

où

$$\left. \frac{\partial T_{1,fs}}{\partial T_{1,fe}} \right|_{F_1=F_{10}} = \mu_{1,1} \quad (4.21)$$

$$\left. \frac{\partial T_{1,fs}}{\partial T_{1,ce}} \right|_{F_1=F_{10}} = \mu_{1,2} \quad (4.22)$$

$$\left. \frac{\partial T_{1,fs}}{\partial D_c} \right|_{F_1=F_{10}} = \frac{\beta_1 c_{1,c} D_c (\alpha_1 - \beta_1) - (US\alpha_1 + \beta_1 c_{1,c} D_c) (1 - \beta_1)}{c_{1,c} D_c^2 (\alpha_1 - \beta_1)^2} T_{1,fe} + \frac{US\alpha_1 (\alpha_1 - \beta_1) - (US\alpha_1 + \beta_1 c_{1,c} D_c) (\alpha_1 - 1)}{c_{1,c} D_c^2 (\alpha_1 - \beta_1)^2} T_{1,ce} \quad (4.23)$$

$$\left. \frac{\partial T_{1,fs}}{\partial D_{1,f}} \right|_{F_1=F_{10}} = \frac{-\beta_1 c_{1,f} D_{1,f} (\alpha_1 - \beta_1) + (US\alpha_1 + \beta_1 c_{1,f} D_{1,f}) (1 - \beta_1)}{c_{1,f} D_{1,f}^2 (\alpha_1 - \beta_1)^2} T_{1,fe} + \frac{-US\alpha_1 (\alpha_1 - \beta_1) + (US\alpha_1 + \beta_1 c_{1,f} D_{1,f}) (\alpha_1 - 1)}{c_{1,f} D_{1,f}^2 (\alpha_1 - \beta_1)^2} T_{1,ce} \quad (4.24)$$

#### 4.4.1.2 Expression de la température $T_{1,cs}$

A l'aide de la formule de Taylor au voisinage de point  $F_{10}$ , on a :

$$T_{1,cs} \approx T_{1,cs}|_{F_1=F_{10}} + \left. \frac{\partial T_{1,cs}}{\partial T_{1,fe}} \right|_{F_1=F_{10}} (T_{1,fe} - T_{1,fe0}) + \left. \frac{\partial T_{1,cs}}{\partial T_{1,ce}} \right|_{F_1=F_{10}} (T_{1,ce} - T_{1,ce0}) + \left. \frac{\partial T_{1,cs}}{\partial D_c} \right|_{F_1=F_{10}} (D_c - D_{c0}) + \left. \frac{\partial T_{1,cs}}{\partial D_{1,f}} \right|_{F_1=F_{10}} (D_{1,f} - D_{1,f0}) \quad (4.25)$$

avec

$$\left. \frac{\partial T_{1,cs}}{\partial T_{1,fe}} \right|_{F_1=F_{10}} = \gamma_{1,1} \quad (4.26)$$

$$\left. \frac{\partial T_{1,cs}}{\partial T_{1,ce}} \right|_{F_1=F_{10}} = \gamma_{1,2} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_{1,cs}}{\partial D_c} \right|_{F_1=F_{10}} &= \left( \frac{US\alpha_1(\alpha_1 - \beta_1) - (US\alpha_1 + \beta_1 c_{1,c} D_c)(\alpha_1 - 1)}{c_{1,c} D_c^2 (\alpha_1 - \beta_1)^2} \beta_1 - \frac{\beta_1}{D_c} \mu_{1,2} \right) T_{1,fe} \\ &+ \left( \frac{\beta_1 D_c c_{1,c} (\alpha_1 - \beta_1) - (US\alpha_1 + \beta_1 c_{1,c} D_c)(1 - \beta_1)}{c_{1,c} D_c^2 (\alpha_1 - \beta_1)^2} \alpha_1 + \frac{US\alpha_1}{c_{1,c} D_c^2} \mu_{1,1} \right) T_{1,ce} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_{1,cs}}{\partial D_{1,f}} \right|_{F_1=F_{10}} &= \left( \frac{-US\alpha_1(\alpha_1 - \beta_1) + (US\alpha_1 + \beta_1 c_{1,f} D_{1,f})(\alpha_1 - 1)}{c_{1,f} D_{1,f}^2 (\alpha_1 - \beta_1)^2} \beta_1 + \frac{\beta_1}{D_{1,f}} \mu_{1,2} \right) T_{1,fe} \\ &+ \left( \frac{-\beta_1 D_{1,f} c_{1,f} (\alpha_1 - \beta_1) + (US\alpha_1 + \beta_1 c_{1,f} D_{1,f})(1 - \beta_1)}{c_{1,f} D_{1,f}^2 (\alpha_1 - \beta_1)^2} \alpha_1 - \frac{US\alpha_1}{c_{1,f} D_{1,f}^2} \mu_{1,1} \right) T_{1,ce} \end{aligned} \quad (4.29)$$

#### 4.4.1.3 Expression de la température $T_{2,fs}$

Soit le point  $F_2 = (T_{2,fe}, T_{2,ce}, D_c, D_{2,f})$ , en utilisant la formule de Taylor au voisinage du point de linéarisation  $F_{20} = (T_{2,fe0}, T_{2,ce0}, D_{c0}, D_{2,f0})$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} T_{2,fs} &\approx T_{2,fs}|_{F_2=F_{20}} + \left. \frac{\partial T_{2,fs}}{\partial T_{2,fe}} \right|_{F_2=F_{20}} (T_{2,fe} - T_{2,fe0}) + \left. \frac{\partial T_{2,fs}}{\partial T_{2,ce}} \right|_{F_2=F_{20}} (T_{2,ce} - T_{2,ce0}) \\ &+ \left. \frac{\partial T_{2,fs}}{\partial D_c} \right|_{F_2=F_{20}} (D_c - D_{c0}) + \left. \frac{\partial T_{2,fs}}{\partial D_{2,f}} \right|_{F_2=F_{20}} (D_{2,f} - D_{2,f0}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

où

$$\left. \frac{\partial T_{2,fs}}{\partial T_{2,fe}} \right|_{F_2=F_{20}} = \mu_{2,1} \quad (4.31)$$

$$\left. \frac{\partial T_{2,fs}}{\partial T_{2,ce}} \right|_{F_2=F_{20}} = \mu_{2,2} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_{2,fs}}{\partial D_c} \right|_{F_2=F_{20}} &= \frac{\beta_2 D_c c_{2,c} (\alpha_2 - \beta_2) - (US\alpha_2 + \beta_2 D_c c_{2,c})(1 - \beta_2)}{c_{2,c} D_c^2 (\alpha_2 - \beta_2)^2} T_{2,fe} \\ &+ \frac{US\alpha_2 (\alpha_2 - \beta_2) - (US\alpha_2 + \beta_2 D_c c_{2,c})(\alpha_2 - 1)}{c_{2,c} D_c^2 (\alpha_2 - \beta_2)^2} T_{2,ce} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_{2,fs}}{\partial D_{2,f}} \right|_{F_2=F_{20}} &= \frac{-\beta_2 D_{2,f} c_{2,f} (\alpha_2 - \beta_2) + (US\alpha_2 + \beta_2 D_{2,f} c_{2,f})(1 - \beta_2)}{c_{2,f} D_{2,f}^2 (\alpha_2 - \beta_2)^2} T_{2,fe} \\ &+ \frac{-US\alpha_2 (\alpha_2 - \beta_2) + (US\alpha_2 + \beta_2 D_{2,f} c_{2,f})(\alpha_2 - 1)}{c_{2,f} D_{2,f}^2 (\alpha_2 - \beta_2)^2} T_{2,ce} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.4.1.4 Expression de la température  $T_{2,cs}$ 

A l'aide de la formule de Taylor au voisinage de  $F_{20}$ , on a :

$$T_{2,cs} \approx T_{2,cs}|_{F_2=F_{20}} + \frac{\partial T_{2,cs}}{\partial T_{2,fe}} \Big|_{F_2=F_{20}} (T_{2,fe} - T_{2,fe0}) + \frac{\partial T_{2,cs}}{\partial T_{2,ce}} \Big|_{F_2=F_{20}} (T_{2,ce} - T_{2,ce0}) \\ + \frac{\partial T_{2,cs}}{\partial D_c} \Big|_{F_2=F_{20}} (D_c - D_{c0}) + \frac{\partial T_{2,cs}}{\partial D_{2,f}} \Big|_{F_2=F_{20}} (D_{2,f} - D_{2,f0}) \quad (4.35)$$

avec

$$\frac{\partial T_{2,cs}}{\partial T_{2,fe}} \Big|_{F_2=F_{20}} = \gamma_{2,1} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial T_{2,cs}}{\partial T_{2,ce}} \Big|_{F_2=F_{20}} = \gamma_{2,2} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial T_{2,cs}}{\partial D_c} \Big|_{F_2=F_{20}} = \left( \frac{US\alpha_2(\alpha_2 - \beta_2) - (US\alpha_2 + \beta_2 c_{2,c} D_c)(\alpha_2 - 1)}{c_{2,c} D_c^2 (\alpha_2 - \beta_2)^2} \beta_2 - \frac{\beta_2}{D_c} \mu_{2,2} \right) T_{2,fe} \\ + \left( \frac{\beta_2 D_c c_{2,c} (\alpha_2 - \beta_2) - (US\alpha_2 + \beta_2 c_{2,c} D_c)(1 - \beta_2)}{c_{2,c} D_c^2 (\alpha_2 - \beta_2)^2} \alpha_2 + \frac{US\alpha_2}{c_{2,c} D_c^2} \mu_{2,1} \right) T_{2,ce} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial T_{2,cs}}{\partial D_{2,f}} \Big|_{F_2=F_{20}} = \left( \frac{-US\alpha_2(\alpha_2 - \beta_2) + (US\alpha_2 + \beta_2 c_{2,f} D_{2,f})(\alpha_2 - 1)}{c_{2,f} D_{2,f}^2 (\alpha_2 - \beta_2)^2} \beta_2 + \frac{\beta_1}{D_{1,f}} \mu_{2,2} \right) T_{2,fe} \\ + \left( \frac{-\beta_2 D_{2,f} c_{2,f} (\alpha_2 - \beta_2) + (US\alpha_2 + \beta_2 c_{2,f} D_{2,f})(1 - \beta_2)}{c_{2,f} D_{2,f}^2 (\alpha_2 - \beta_2)^2} \alpha_2 - \frac{US\alpha_2}{c_{2,f} D_{2,f}^2} \mu_{2,1} \right) T_{2,ce} \quad (4.39)$$

## 4.4.1.5 Application numérique

Considérons le cas où  $T_{1,fe0} = 313K$ ,  $T_{1,ce0} = 363K$ ,  $D_{c0} = 5000Kg/h$ ,  $D_{1,f0} = 12000Kg/h$ ,  $D_{2,f0} = 5Kg/s$ ,  $S = 5m^2$ ,  $U = 800W/m^2K$  et qu'on a le même liquide qui est l'eau circulant dans les deux échangeurs, on choisit  $c_{1,c} = c_{2,c} = c_{1,f} = c_{2,f} = 4180J/KgK$ . Les expressions numériques des différentes températures de sortie de deux échangeurs sont alors données par les quatre expressions suivantes :

**a- Expression de  $T_{1,fs}$** 

Compte tenu de la relation (4.20), on obtient :

$$T_{1,fs} = 322.56 + 0.8(T_{1,fe} - 313) + 0.19(T_{1,ce} - 363) \\ + 1.78(D_c - 1.38) - 2.63(D_{1,f} - 3.33) \quad (4.40) \\ = 6.26 + 0.8T_{1,fe} + 0.19T_{1,ce} + 1.78D_c - 2.63D_{1,f}$$

**b- Expression de  $T_{1,cs}$**

Compte tenu de l'expression (4.25), on a :

$$\begin{aligned} T_{1,cs} &= 311.42 + 0.45(T_{1,fe} - 313) + 0.54(T_{1,ce} - 363) \\ &\quad + 12.22(D_c - 1.38) - 0.57(D_{1,f} - 3.33) \\ &= -15.07 + 0.45T_{1,fe} + 0.54T_{1,ce} + 12.22D_c - 0.57D_{1,f} \end{aligned} \quad (4.41)$$

**c- Expression de  $T_{2,fs}$**

En vertu de l'expression (4.30), on a :

$$\begin{aligned} T_{2,fs} &= 319.70 + 0.75(T_{1,fe} - 313) + 0.24(T_{1,cs} - 340.05) \\ &\quad + 1.18(D_c - 1.38) - 2.38(D_{2,f} - 2.5) \\ &= 4.31 + 0.75T_{1,fe} + 0.24T_{1,cs} + 1.18D_c - 2.38D_{2,f} \end{aligned} \quad (4.42)$$

**d- Expression de  $T_{2,cs}$**

Compte tenu de l'expression (4.35), on a :

$$\begin{aligned} T_{2,cs} &= 327.98 + 0.44(T_{1,fe} - 313) + 0.55(T_{1,cs} - 340.05) \\ &\quad + 6.55(D_c - 2.5) - 0.53(D_{2,f} - 2.5) \\ &= -7.76 + 0.44T_{1,fe} + 0.55T_{1,cs} + 6.55D_c - 0.53D_{2,f} \end{aligned} \quad (4.43)$$

On obtient ainsi le système linéarisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1,fs} = 6.26 + 0.8T_{1,fe} + 0.019T_{1,ce} + 1.78D_c - 2.63D_{1,f} \\ T_{1,cs} = -15.07 + 0.45T_{1,fe} + 0.54T_{1,ce} + 12.22D_c - 0.57D_{1,f} \\ T_{2,fs} = 4.31 + 0.75T_{1,fe} + 0.24T_{1,cs} + 1.18D_c - 2.38D_{2,f} \\ T_{2,cs} = -7.76 + 0.44T_{1,fe} + 0.55T_{1,cs} + 6.55D_c - 0.53D_{2,f} \\ D_f = D_{1,f} + D_{2,f} \\ T_{2,ce} = T_{1,cs} \\ T_{2,fe} = T_{1,fe} \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Les 12 variables du système (4.44) :  $D_{2,f}$ ,  $D_{1,f}$ ,  $D_c$ ,  $D_f$ ,  $T_{1,fs}$ ,  $T_{2,fs}$ ,  $T_{2,ce}$ ,  $T_{2,cs}$ ,  $T_{1,fe}$ ,  $T_{1,cs}$ ,  $T_{2,fe}$  et  $T_{1,ce}$  désignant respectivement les variables  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{12}^0$  forment le vecteur de mesures  $\mathbf{x}^0(k)$ . Ces variables sont reliées entre elles par 7 relations de redondance analytiques linéaires. La matrice  $\mathbf{X}^0$  (3.2) est formée par la juxtaposition de ces vecteurs sur une fenêtre de  $N = 1000$  observations.

La figure 4.7 illustre l'évolution de ces variables  $x_j^0(k)$ ;  $j = 1, \dots, 12$ . A partir de cette figure, nous constatons que la température  $T_{2,cs}$  de sortie du fluide chaud de l'échangeur  $\varepsilon_2$  diminue par rapport à la température  $T_{1,ce}$  de même fluide à l'entrée à l'échangeur  $\varepsilon_1$ . Par contre, la température  $T_{1,fs}$  de sortie du fluide froid de l'échangeur  $\varepsilon_1$  augmente par rapport à la température  $T_{1,fe}$  de même fluide à l'entrée à l'échangeur  $\varepsilon_1$ . De même pour la température de fluide froid à la sortie de l'échangeur  $\varepsilon_2$ . Ceci vérifie bien le rôle de l'échangeur qui consiste essentiellement à transmettre la chaleur d'un fluide chaud à un autre fluide de plus faible température.

Au jeu des données ainsi obtenues ont été ajoutées des variations  $\delta\mathbf{X}^*$  qui sont des réalisations de variables centrées et de 5% de la plage de variation de chaque variable de façon à simuler la présence de bruits des mesures. On obtient alors la matrice des mesures  $\mathbf{X}^*$  (3.3). A partir de la figure 4.7, nous remarquons que les variables ont des unités et des échelles des mesures différents. Pour les ramener au même ordre de grandeur, on effectue un centrage et une réduction de ces données.

#### 4.4.2 Détermination des incertitudes du modèle ACP

L'application de la méthode de calcul proposée aux données centrées réduites de la matrice  $\mathbf{X}^*$  pour  $B = 2000$  réalisations permet de déterminer les incertitudes sur l'estimation des valeurs et des vecteurs propres sous forme intervalle. Les valeurs propres intervalles sont données au tableau 4.3. L'analyse des amplitudes des valeurs propres de cette table permet de conserver, sans ambiguïté, cinq composantes principales dans le modèle ACP intervalle;  $\ell = 5$ .

TABLE 4.3 – Valeurs propres intervalles

[4.86 6.86]
[1.32 2.40]
[0.99 1.69]
[0.85 1.28]
[0.68 1.02]
[0.40 0.67]
[0.19 0.50]
[0.19 0.44]
[0.18 0.39]
[0.16 0.37]
[0.14 0.35]
[0.12 0.29]

TABLE 4.4 – Valeurs propres singletons

5.98
1.64
1.53
1
0.87
0.52
0.35
0.33
0.30
0.27
0.24
0.21

Le tableau 4.4 présente les valeurs propres de type singleton déterminées par la méthode d'ACP classique. Les deux tableaux 4.3 et 4.4 montrent que les valeurs propres fournies par la méthode d'ACP classique sont encadrées par les valeurs propres issues de la méthode proposée tenant compte des incertitudes de modélisation.

L'utilisation des valeurs propres de type intervalle lève toute ambiguïté quant au choix du nombre de composantes principales à retenir dans le modèle ACP puisque l'analyse de ces valeurs donne le nombre correct de composantes, par contre l'analyse des valeurs propres de type singleton fournit un nombre inférieur au nombre correct (quatre composantes principales).

Ainsi, il est plus légitime de tenir compte des incertitudes des valeurs et des vecteurs propres pour avoir un modèle ACP robuste vis-à-vis de la variation des bruits de mesures ainsi que des valeurs numériques des données.

Le modèle ACP intervalle ainsi obtenu sera utilisé, par la suite, dans le diagnostic c'est-à-dire pour la détection et la localisation de défauts.

### 4.4.3 Détection de défauts

Le système est simulé de nouveau et des défauts ont été ajoutés aux variables  $\mathbf{x}_2$  et  $\mathbf{x}_9$  des instants 101 à 300 (zone  $Z_1$ ) et aux variables  $\mathbf{x}_4$  et  $\mathbf{x}_{12}$  des instants 601 à 800 (zone  $Z_2$ ). Chaque défaut représente un biais d'amplitude de 20% de la plage de variation des données.

L'objectif dans cette partie est de détecter la présence de ces défauts en utilisant le modèle ACP de type intervalle.

La figure 4.8 montre l'évolution des sept résidus intervalles  $[\tilde{\mathbf{t}}^i](k)$  pour  $i = 1, \dots, 7$  du vecteur  $[\tilde{\mathbf{t}}](k)$  (3.23). Ces résidus présentent une sensibilité plus ou moins importante aux défauts dans les zones  $Z_1$  et  $Z_2$  où leurs enveloppes ne contiennent pas la valeur 0. Le cinquième graphe de cette figure, associé au résidu  $[\tilde{\mathbf{t}}^5](k)$ , montre clairement la présence de défauts durant les deux intervalles de temps où ils ont été introduits puisque ses deux enveloppes ne contiennent pas la valeur 0 durant ces deux zones.

Cette phase de détection est complétée par une phase de localisation de défauts.

### 4.4.4 Localisation de défauts

Pour localiser les défauts, nous analysons, en premier lieu, les conditions d'existence de la reconstruction afin de réduire le nombre de scénarii de défauts multiples à considérer comme ces directions sont a priori inconnues. Ensuite, la génération des résidus à l'aide du principe de reconstruction par intervalle, puis leur projection dans l'espace résiduel permet d'identifier la variable ou l'ensemble des variables effectivement en défaut.

#### 4.4.4.1 Analyse des directions de reconstruction utiles

L'analyse de conditions d'existence de la reconstruction permet de déterminer les directions utiles de reconstruction. Compte tenu de l'inégalité structurelle (3.60), le nombre maximal de variables reconstruites simultanément est 7 et par conséquent le nombre maximum de reconstructions  $n_{max}$  selon l'expression (3.61) vaut 1893. Le tableau 4.6 présente les valeurs des rapports de reconstruction  $\mathbf{Q}_R$  (3.64) pour les 12 combinaisons possibles constituées d'une variable pour  $r = 1$ .

TABLE 4.5 – Valeurs de  $\mathbf{Q}_R$  pour  $r = 1$

$\mathbf{R}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{Q}_R$	1.64	0.13	8.42	0.09	0.01	0.01	0.05	0.01	0.01	0.05	0.01	0.12

A partir de ce tableau, on remarque que toutes les variables sont reconstructibles puisqu'elles admettent des rapports de reconstruction  $\mathbf{Q}_R$  largement inférieurs à 1 à l'exception de la première et la troisième variables qui ont deux rapports supérieurs à 1.

Pour expliquer ce résultat, nous présentons dans le tableau 4.6 les valeurs des matrices  $[\mathbf{A}]$  (3.44) relatives aux 12 directions possibles pour  $r = 1$ . Cette table montre que les deux valeurs de  $[\mathbf{A}]$  associées à la première et la troisième variables contiennent 0 ce qui explique qu'elles admettent deux rapports de reconstruction supérieurs à 1 et par conséquent ces

deux variables ne peuvent pas être reconstruites. Le nombre de directions de défauts affectant une variable vaut alors 10. La combinaison avec les variables non reconstructibles (1 et 3) de deux variables simultanément est impossible.

TABLE 4.6 – Valeurs de  $[\mathbf{A}]$  pour  $r = 1$ 

$\mathbf{R}$	1	2	3	4	5	6
$[\mathbf{A}]$	[-0.01 0.15]	[0.32 0.45]	[0 0.14]	[0.49 0.63]	[0.81 0.83]	[0.78 0.83]
$\mathbf{R}$	7	8	9	10	11	12
$[\mathbf{A}]$	[0.71 0.80]	[0.74 0.88]	[0.76 0.81]	[0.68 0.75]	[0.76 0.94]	[0.55 0.63]

Pour l'analyse de défauts multiples, les rapports de reconstruction sont calculés pour l'ensemble de directions théoriquement possible de  $r = 2$  à  $r = 7$ .

Pour le cas de défauts affectant deux variables simultanément (pour  $r = 2$ ), le nombre maximal de reconstructions est 45. La table 4.7 présente les valeurs des rapports  $\mathbf{Q}_R$  pour ces directions. L'analyse de ce tableau montre que 4 couples de variables ( $\{7, 12\}$ ,  $\{9, 12\}$ ,  $\{10, 12\}$  et  $\{11, 12\}$ ) admettent des rapports proches de 1. Ces sous-ensembles ne sont pas alors reconstructibles et la combinaison avec eux n'est pas possible. Ainsi, seulement 41 combinaisons de deux variables sont alors réellement reconstructibles.

TABLE 4.7 – Valeurs de  $\mathbf{Q}_R$  pour  $r = 2$ 

$\mathbf{R}$	$\{2, 4\}$	$\{2, 5\}$	$\{2, 6\}$	$\{2, 7\}$	$\{2, 8\}$	$\{2, 9\}$	$\{2, 10\}$	$\{2, 11\}$	$\{2, 12\}$
$\mathbf{Q}_R$	0.41	0.16	0.15	0.23	0.15	0.15	0.23	0.15	0.33
$\mathbf{R}$	$\{4, 5\}$	$\{4, 6\}$	$\{4, 7\}$	$\{4, 8\}$	$\{4, 9\}$	$\{4, 10\}$	$\{4, 11\}$	$\{4, 12\}$	
$\mathbf{Q}_R$	0.19	0.18	0.25	0.19	0.19	0.25	0.19	0.33	
$\mathbf{R}$	$\{5, 6\}$	$\{5, 7\}$	$\{5, 8\}$	$\{5, 9\}$	$\{5, 10\}$	$\{5, 11\}$	$\{5, 12\}$		
$\mathbf{Q}_R$	0.17	0.14	0.11	0.25	0.1	0.25	0.47		
$\mathbf{R}$	$\{6, 7\}$	$\{6, 8\}$	$\{6, 9\}$	$\{6, 10\}$	$\{6, 11\}$	$\{6, 12\}$			
$\mathbf{Q}_R$	0.13	0.05	0.06	0.13	0.06	0.14			
$\mathbf{R}$	$\{7, 8\}$	$\{7, 9\}$	$\{7, 10\}$	$\{7, 11\}$	$\{7, 12\}$				
$\mathbf{Q}_R$	0.04	0.07	0.07	0.07	0.67				
$\mathbf{R}$	$\{8, 9\}$	$\{8, 10\}$	$\{8, 11\}$	$\{8, 12\}$					
$\mathbf{Q}_R$	0.04	0.04	0.04	0.20					
$\mathbf{R}$	$\{9, 10\}$	$\{9, 11\}$	$\{9, 12\}$						
$\mathbf{Q}_R$	0.12	0.18	0.65						
$\mathbf{R}$	$\{10, 11\}$	$\{10, 12\}$							
$\mathbf{Q}_R$	0.07	1.13							
$\mathbf{R}$	$\{11, 12\}$								
$\mathbf{Q}_R$	0.96								

Pour la reconstruction de 3 variables simultanément, le nombre de reconstruction théoriquement possible vaut 94. Le tableau 4.8 indique les valeurs de rapports de reconstruction qui leur sont associées. A partir de ce tableau, nous constatons que 71 combinaisons sont reconstructibles.

TABLE 4.8 – Valeurs de  $Q_R$  pour  $r = 3$

$R$	{2, 4, 5}	{2, 4, 6}	{2, 4, 7}	{2, 4, 8}	{2, 4, 9}	{2, 4, 10}	{2, 4, 11}
$Q_R$	1.33	1.36	1.50	1.32	1.45	1.50	1.45
$R$	{2, 4, 12}	{2, 5, 6}	{2, 5, 7}	{2, 5, 8}	{2, 5, 9}	{2, 5, 10}	{2, 5, 11}
$Q_R$	2.84	0.90	0.99	0.85	0.95	0.99	0.95
$R$	{2, 5, 12}	{2, 6, 7}	{2, 6, 8}	{2, 6, 9}	{2, 6, 10}	{2, 6, 11}	{2, 6, 12}
$Q_R$	1.28	0.42	0.36	0.37	0.42	0.37	0.44
$R$	{2, 7, 8}	{2, 7, 9}	{2, 7, 10}	{2, 7, 11}	{2, 8, 9}	{2, 8, 10}	{2, 8, 11}
$Q_R$	0.30	0.28	0.35	0.28	0.52	1.25	0.52
$R$	{2, 8, 12}	{2, 9, 10}	{2, 9, 11}	{2, 10, 11}	{4, 5, 6}	{4, 5, 7}	{4, 5, 8}
$Q_R$	0.86	0.29	0.42	0.78	0.08	0.10	0.08
$R$	{4, 5, 9}	{4, 5, 10}	{4, 5, 11}	{4, 5, 12}	{4, 6, 7}	{4, 6, 8}	{4, 6, 9}
$Q_R$	0.09	0.10	0.08	0.35	0.19	0.15	0.16
$R$	{4, 6, 10}	{4, 6, 11}	{4, 6, 12}	{4, 7, 8}	{4, 7, 9}	{4, 7, 10}	{4, 7, 11}
$Q_R$	0.19	0.16	0.48	0.20	0.23	0.24	0.23
$R$	{4, 8, 9}	{4, 8, 10}	{4, 8, 11}	{4, 8, 12}	{4, 9, 10}	{4, 9, 11}	{4, 10, 11}
$Q_R$	0.37	0.39	0.37	2.10	0.40	0.41	0.21
$R$	{5, 6, 7}	{5, 6, 8}	{5, 6, 9}	{5, 6, 10}	{5, 6, 11}	{5, 6, 12}	{5, 7, 8}
$Q_R$	0.27	0.05	0.07	0.27	0.07	1.08	0.14
$R$	{5, 7, 9}	{5, 7, 10}	{5, 7, 11}	{5, 8, 9}	{5, 8, 10}	{5, 8, 11}	{5, 8, 12}
$Q_R$	0.13	0.22	0.13	0.13	0.13	0.13	0.17
$R$	{5, 9, 10}	{5, 9, 11}	{5, 10, 11}	{6, 7, 8}	{6, 7, 9}	{6, 7, 10}	{6, 7, 11}
$Q_R$	0.09	0.08	0.12	0.06	0.08	0.08	0.08
$R$	{6, 8, 9}	{6, 8, 10}	{6, 8, 11}	{6, 8, 12}	{6, 9, 10}	{6, 9, 11}	{6, 10, 11}
$Q_R$	0.19	0.20	0.19	0.53	0.19	0.24	0.08
$R$	{7, 8, 9}	{7, 8, 10}	{7, 8, 11}	{7, 9, 10}	{7, 9, 11}	{7, 10, 11}	{8, 9, 10}
$Q_R$	0.12	0.12	0.12	0.33	0.22	0.09	0.18
$R$	{8, 9, 11}	{8, 10, 11}	{9, 10, 11}				
$Q_R$	0.09	0.14	0.22				

Pour  $r = 4$ , le nombre de directions, théoriquement, possibles est 75. Le tableau 4.9 présente les valeurs de rapport de reconstruction pour ces directions. Le nombre de directions pouvant être reconstruites, selon ce tableau, est 54.

Pour  $r = 5$ , le nombre de combinaisons théoriquement possibles est 18. Le tableau 4.10 fournit les valeurs de reconstruction qui leur sont associées. Pratiquement, 5 combinaisons sont seulement reconstructibles et par conséquent isolables.

Pour  $r = 6$ , aucune combinaison n'est possible.

Ainsi, le nombre de reconstructions possibles est alors réduit à 181 et donc seules ces combinaisons permettent d'isoler les défauts.

TABLE 4.9 – Valeurs de  $Q_{\mathbf{R}}$  pour  $r = 4$ 

$\mathbf{R}$	{2, 6, 7, 8}	{2, 6, 7, 9}	{2, 6, 7, 10}	{2, 6, 7, 11}	{4, 5, 6, 7}	{4, 5, 6, 8}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.87	0.91	0.88	0.92	0.47	0.39
$\mathbf{R}$	{4, 5, 6, 9}	{4, 5, 6, 10}	{4, 5, 6, 11}	{4, 5, 7, 8}	{4, 5, 7, 9}	{4, 5, 7, 10}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.38	0.47	0.38	0.27	0.29	0.30
$\mathbf{R}$	{4, 5, 7, 11}	{4, 5, 8, 9}	{4, 5, 8, 10}	{4, 5, 8, 11}	{4, 5, 9, 10}	{4, 5, 9, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.29	0.23	0.33	0.23	0.19	0.24
$\mathbf{R}$	{4, 5, 10, 11}	{4, 6, 7, 8}	{4, 6, 7, 9}	{4, 6, 7, 10}	{4, 6, 7, 11}	{4, 7, 8, 9}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.14	0.35	0.69	0.44	0.59	0.19
$\mathbf{R}$	{4, 6, 8, 9}	{4, 6, 8, 10}	{4, 6, 8, 11}	{4, 6, 9, 10}	{4, 6, 9, 11}	{4, 6, 10, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.36	0.37	0.36	0.59	0.67	0.21
$\mathbf{R}$	{4, 7, 8, 10}	{4, 7, 8, 11}	{4, 7, 9, 10}	{4, 7, 9, 11}	{4, 7, 10, 11}	{4, 8, 9, 10}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.27	0.19	0.31	0.22	1.38	0.24
$\mathbf{R}$	{4, 8, 9, 11}	{4, 9, 10, 11}	{5, 6, 7, 8}	{5, 6, 7, 9}	{5, 6, 7, 10}	{5, 6, 7, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.16	0.60	0.26	0.31	0.31	0.31
$\mathbf{R}$	{5, 7, 8, 9}	{5, 7, 8, 10}	{5, 7, 8, 11}	{5, 8, 9, 10}	{5, 8, 9, 11}	{5, 8, 10, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.19	0.30	0.18	0.64	0.74	3.04
$\mathbf{R}$	{5, 6, 8, 9}	{5, 6, 8, 10}	{5, 6, 8, 11}	{5, 6, 9, 10}	{5, 6, 9, 11}	{5, 9, 10, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.26	0.16	0.26	0.16	0.16	0.22
$\mathbf{R}$	{5, 7, 9, 10}	{5, 7, 9, 11}	{5, 7, 10, 11}	{6, 7, 9, 11}	{6, 7, 8, 9}	{6, 7, 8, 10}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.21	0.30	0.83	0.22	0.20	0.16
$\mathbf{R}$	{6, 7, 8, 11}	{6, 7, 9, 10}	{6, 7, 10, 11}	{6, 8, 9, 10}	{6, 8, 9, 11}	{6, 9, 10, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.20	0.22	3.57	0.29	0.65	0.25
$\mathbf{R}$	{6, 8, 10, 11}	{7, 8, 9, 10}	{7, 8, 9, 11}	{7, 9, 10, 11}	{8, 9, 10, 11}	{7, 8, 10, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.21	0.14	0.14	0.15	0.73	4.63
$\mathbf{R}$	{4, 8, 10, 11}	{2, 7, 9, 10}	{4, 7, 8, 9}			
$Q_{\mathbf{R}}$	0.56	1.03	0.89			

TABLE 4.10 – Valeurs de  $Q_{\mathbf{R}}$  pour  $r = 5$ 

$\mathbf{R}$	{4, 5, 6, 7, 8}	{4, 5, 6, 7, 10}	{4, 5, 7, 8, 10}	{4, 5, 7, 8, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.24	0.29	3.70	2.49
$\mathbf{R}$	{4, 5, 6, 8, 9}	{4, 5, 6, 8, 10}	{4, 5, 6, 8, 11}	{4, 5, 6, 10, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	1.41	1.16	1.41	0.64
$\mathbf{R}$	{4, 5, 7, 9, 10}	{4, 5, 7, 9, 11}	{4, 6, 7, 8, 10}	{5, 6, 7, 8, 9}
$Q_{\mathbf{R}}$	0.30	0.30	3.70	0.88
$\mathbf{R}$	{5, 6, 7, 8, 11}	{5, 6, 7, 8, 11}	{5, 6, 7, 9, 10}	{5, 6, 7, 9, 11}
$Q_{\mathbf{R}}$	1.71	0.88	0.30	0.99
$\mathbf{R}$	{5, 6, 9, 10, 11}	{6, 7, 8, 9, 10}		
$Q_{\mathbf{R}}$	1.19	0.52		

#### 4.4.4.2 Isolation de défauts

Après avoir déterminé les directions de reconstruction utiles, les résidus intervalles  $[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k)$  (3.50) vont être générés en projetant les reconstructions associées à ces directions

dans l'espace résiduel pour mettre en évidence les défauts.

Comme les directions de défauts sont a priori inconnues, commençons par la reconstruction d'une variable pour l'ensemble des directions définies par le tableau 4.6. La projection des reconstructions dans l'espace résiduel de type intervalle génère les résidus structurés  $[\tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{R}}](k)$  selon l'expression (3.51).

Les indicateurs  $[\Delta_{\mathbf{R}}](k)$  (3.59) sont déterminés à partir de ces résidus, puis, ils sont normalisés : les valeurs supérieures de ces indicateurs sont divisées par leurs seuils de détection correspondants (fixés par apprentissage). Les figures 4.9 à 4.18 présentent les indicateurs normalisés  $[\Delta_2]$  à  $[\Delta_{12}]$  c'est-à-dire après reconstruction puis projection de toutes les variables sauf la deuxième, quatrième, ..., douzième. Ces dix indicateurs sont sensibles aux défauts durant les intervalles de temps où les défauts sont introduits. En effet, les valeurs inférieures et supérieures de ces indicateurs dépassent respectivement 0 et 1 durant  $Z_1$  et  $Z_2$  témoignant ainsi de la présence de défauts. Ceci permet de dire que, durant les deux zones concernées, l'une des deux variables non reconstituables 1 ou 3 peut être incriminée ou que le défaut est multiple.

Nous faisons alors la reconstruction simultanée des deux variables pour l'ensemble de directions possibles mentionnées dans le paragraphe précédent. Pour cela, nous avons recours à la décomposition  $[\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T$  pour la résolution du système d'équations de type intervalle (3.42).

Les figures 4.19 à 4.24 tracent l'évolution de quelques indicateurs ;  $[\Delta_{2,5}]$  (sans utiliser les variables 2 et 5),  $[\Delta_{4,12}]$  (obtenu après reconstruction des variables 4 et 12),  $[\Delta_{2,9}]$  (obtenu après reconstruction des variables 2 et 9),  $[\Delta_{2,12}]$  (obtenu après reconstruction de deux variables 2 et 12),  $[\Delta_{4,6}]$  (obtenu après reconstruction des variables 4 et 6) et  $[\Delta_{4,9}]$  (obtenu après reconstruction des variables 4 et 9).

A partir de ces figures, nous constatons que :

- l'élimination simultanée des variables 2 et 9 donne un indicateur insensible aux défauts entre les instants 101 et 300 (zone  $Z_1$ ) selon la figure 4.21.
- la reconstruction des variables 4 et 12 élimine l'effet de défauts entre les instants 601 et 800 (zone  $Z_2$ ). En effet, les valeurs supérieures de l'indicateur  $[\Delta_{4,12}]$ , présenté par la figure 4.20, ne dépassent pas 1 pendant la zone  $Z_2$  ce qui révèle l'absence de défauts dans cette zone.
- les valeurs inférieures de certains indicateurs comme  $[\Delta_{4,12}]$ ,  $[\Delta_{2,9}]$  et  $[\Delta_{4,9}]$  ne pouvant pas être représentées comme elles sont très proches de 0, seules leurs valeurs supérieures sont lisibles et permettent d'isoler les défauts.

Notons que dans le cas où les défauts ne sont pas isolables, nous passons à la reconstruction simultanée de trois variables, puis de quatre et de cinq variables. Mais afin de confirmer la décision précédente concernant les variables défectueuses, nous pouvons reconstruire trois variables simultanément.

Les figures 4.25, 4.26, 4.27 et 4.28 tracent l'évolution respective des indicateurs  $[\Delta_{2,7,9}]$ ,  $[\Delta_{2,9,10}]$ ,  $[\Delta_{4,5,12}]$  et  $[\Delta_{4,6,12}]$ . Les indicateurs  $[\Delta_{2,7,9}]$  (obtenu après élimination simultanée de trois variables 2, 7 et 9) et  $[\Delta_{2,9,10}]$  (obtenu après élimination simultanée des variables 2, 9 et 10) sont insensibles aux défauts dans la zone  $Z_1$ . Ceci montre bien que durant cette zone, les deux variables 2 et 9 sont défectueuses.

Les indicateurs  $[\Delta_{4,5,12}]$  (obtenu après élimination simultanée des variables 4, 5 et 12) et  $[\Delta_{4,6,12}]$  (obtenu après élimination simultanée des variables 4, 6 et 12) sont insensibles

aux défauts dans la zone  $Z_2$ . Ceci montre que durant cette zone, les deux variables 4 et 12 sont défectueuses.

Ainsi, l'utilisation du modèle ACP intervalle permet d'isoler correctement les variables en défaut malgré la présence de quelques fausses alarmes liées au rapport de reconstruction élevé.

L'utilisation du modèle ACP de type singleton donne une localisation erronée. Rappelons que le nombre de composantes principales retenu par ce modèle est inférieur au nombre de composantes correct et qu'on avait, précédemment, mentionné l'impact de ce nombre sur la détection et la localisation de défauts [86].

Les figures 4.29 et 4.30 visualisent respectivement l'évolution des deux indicateurs  $\Delta_{2,5}$  et  $\Delta_{4,9}$  en utilisant le modèle ACP certain. Ces deux indicateurs montrent que, pour la zone  $Z_1$ , les deux variables 2 et 5 sont défectueuses et que, pour la zone  $Z_2$ , les deux variables 4 et 9 sont défectueuses alors que, réellement, les deux variables 2 et 9 sont en défaut pour  $Z_1$  et pour  $Z_2$ , les deux variables 4 et 12 sont défectueuses.

Ceci prouve l'intérêt de la méthode d'ACP avec prise en compte des incertitudes d'estimation du modèle par intervalle en termes de localisation de défauts comparée à la méthode d'ACP classique.

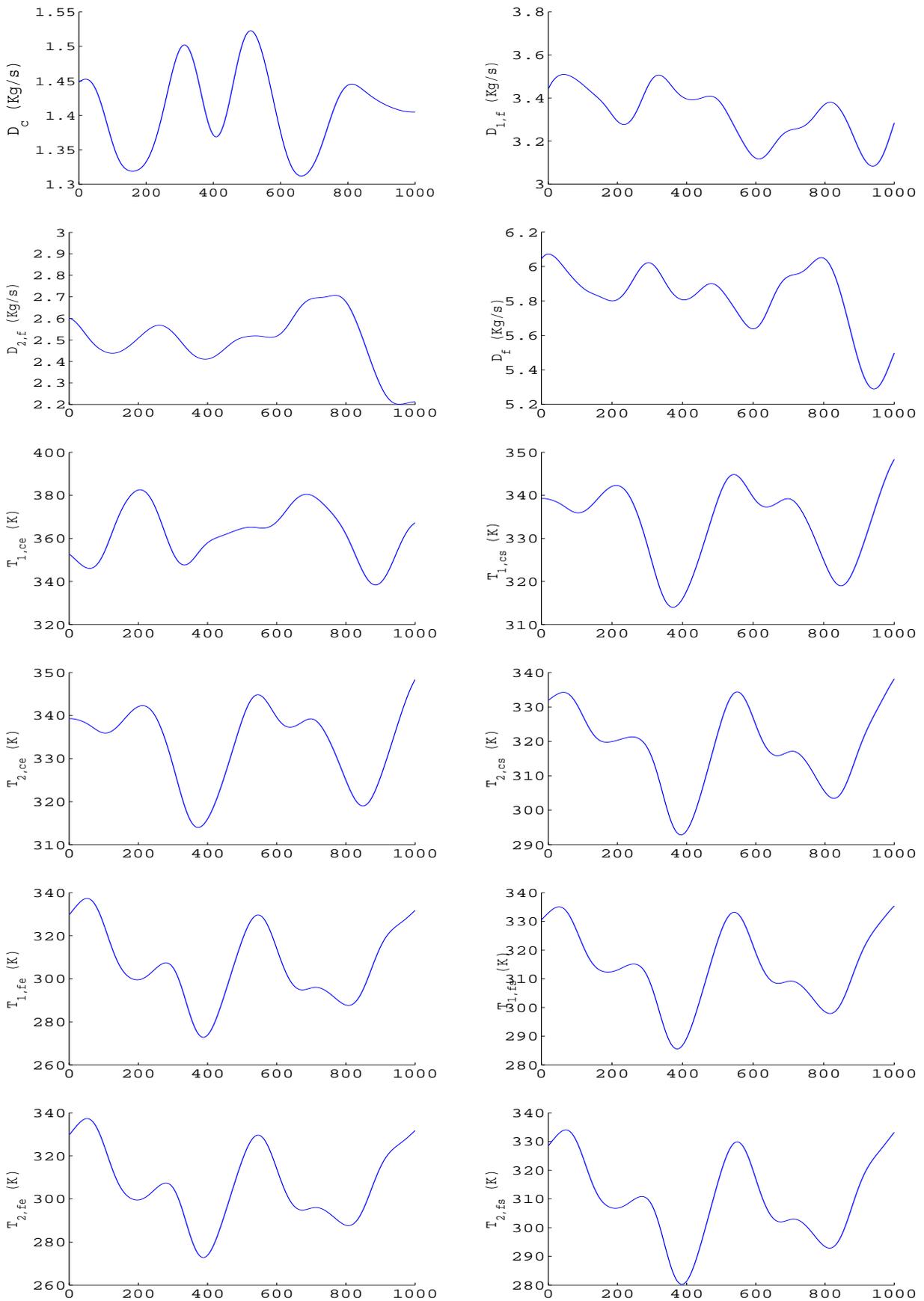
Des nombreux essais non relatés, ici, ont été réalisés confirment les conclusions données sur cet exemple.

## 4.5 Conclusion

Les différentes propositions du chapitre précédent ont été appliquées sur un double échangeurs thermiques à contre-courant et en série sur le circuit primaire. La modélisation de ce système a conduit à des équations non linéaires. Pour le diagnostic par ACP intervalle, ces équations ont été linéarisées autour de leurs points de fonctionnement.

Le modèle ACP intervalle ainsi déterminé a servi au diagnostic. La détection de défauts affectant les mesures certaines est réalisée par génération des résidus intervalles. Pour la localisation de défauts, les conditions d'existence de la reconstruction intervalle ont été analysées afin de réduire le nombre de combinaisons de défauts multiples à considérer. Suite à cette stratégie, les résidus intervalles sont structurés permettant ainsi la localisation de défauts.

L'étude comparative (ACP intervalle, ACP classique) a montré que le diagnostic par ACP intervalle est plus performant que le diagnostic par ACP classique comme le nombre de composantes principales retenu dans le modèle ACP certain est inférieur au nombre correct. En effet, concernant la détection, les deux méthodes ont conduit aux mêmes résultats par contre pour la localisation, l'ACP classique n'a pas permis d'identifier systématiquement et correctement les variables en défaut, alors que l'ACP intervalle a donné les résultats attendus.



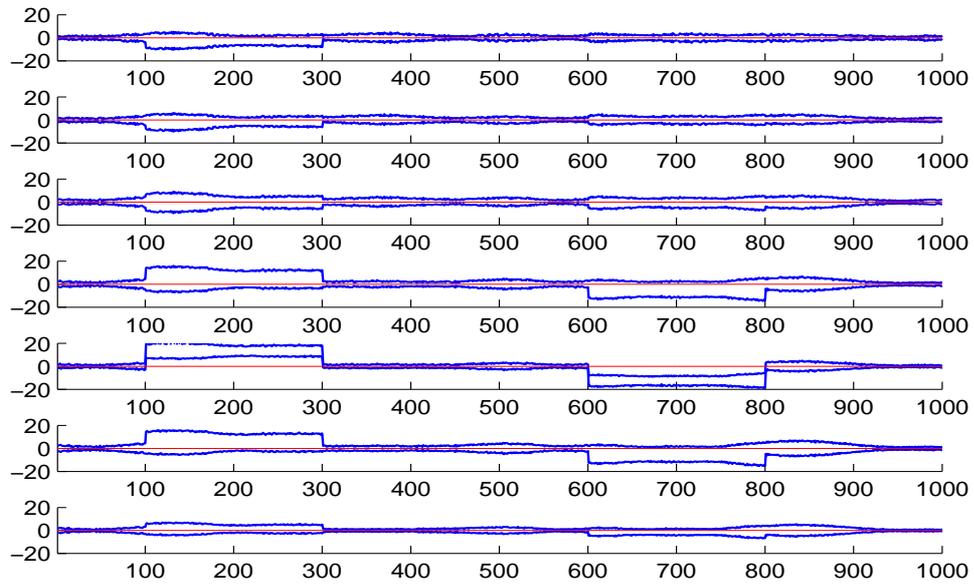


FIGURE 4.8 – Résidus  $[\tilde{t}](k)$

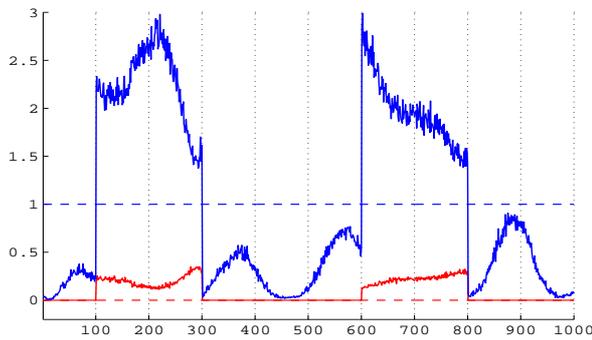


FIGURE 4.9 – Indicateur  $[\Delta_2](k)$

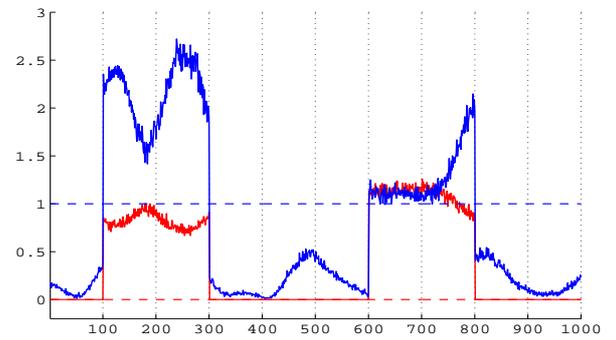


FIGURE 4.10 – Indicateur  $[\Delta_4](k)$

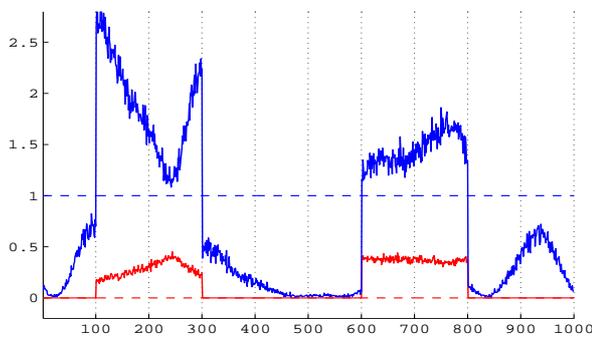


FIGURE 4.11 – Indicateur  $[\Delta_5](k)$

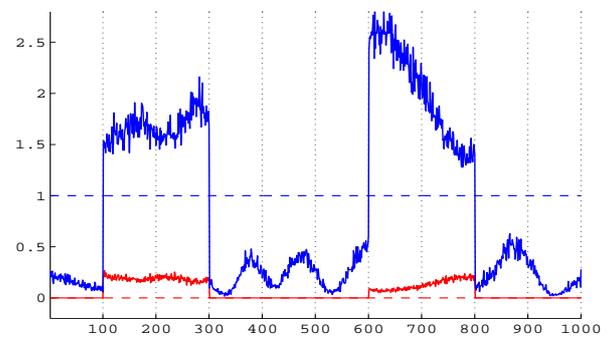


FIGURE 4.12 – Indicateur  $[\Delta_6](k)$

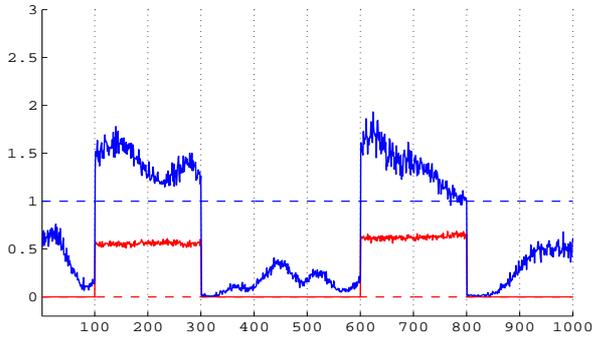


FIGURE 4.13 – Indicateur  $[\Delta_7](k)$

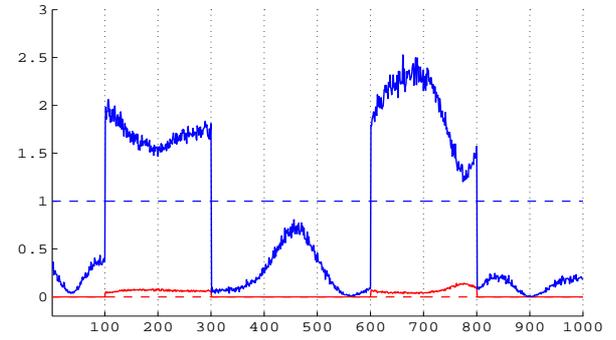


FIGURE 4.14 – Indicateur  $[\Delta_8](k)$

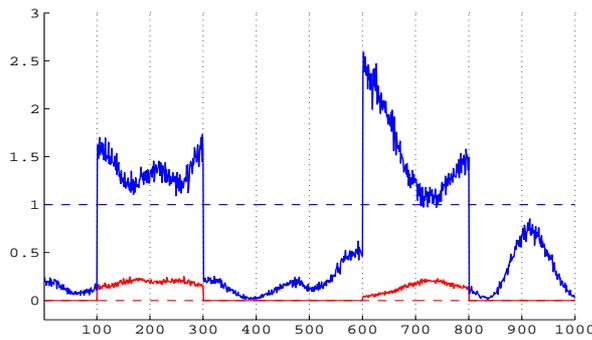


FIGURE 4.15 – Indicateur  $[\Delta_9](k)$

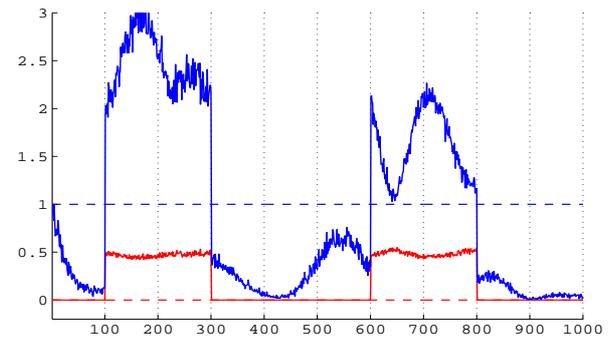


FIGURE 4.16 – Indicateur  $[\Delta_{10}](k)$

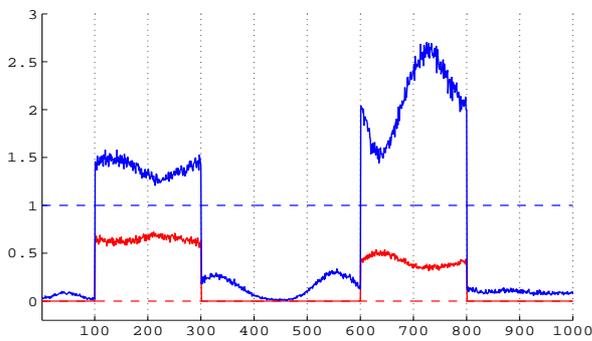


FIGURE 4.17 – Indicateur  $[\Delta_{11}](k)$

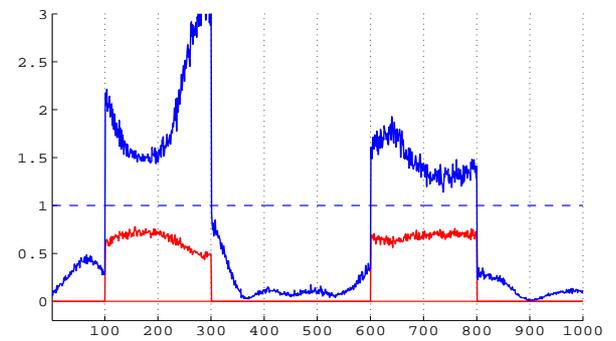


FIGURE 4.18 – Indicateur  $[\Delta_{12}](k)$

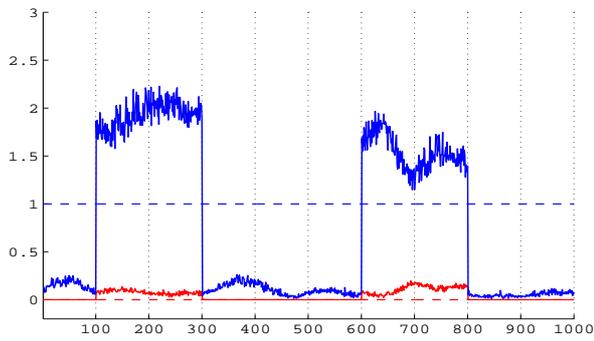


FIGURE 4.19 – Indicateur  $[\Delta_{2,5}](k)$

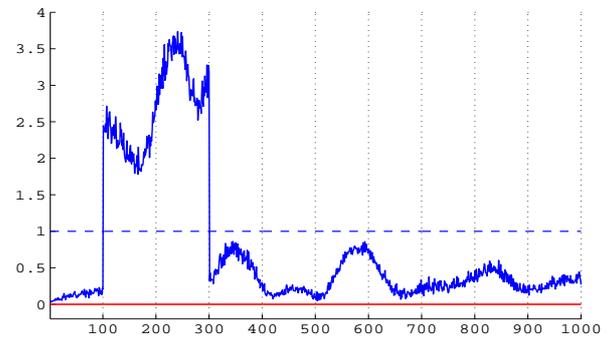


FIGURE 4.20 – Indicateur  $[\Delta_{4,12}](k)$

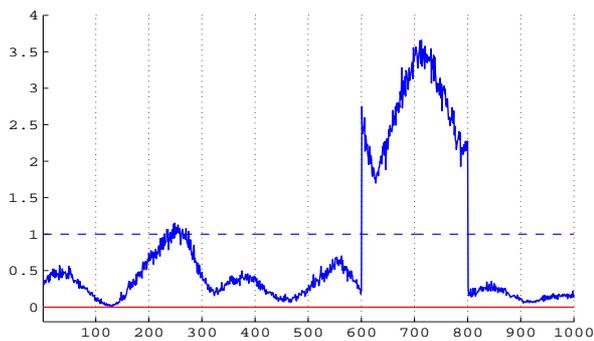


FIGURE 4.21 – Indicateur  $[\Delta_{2,9}](k)$

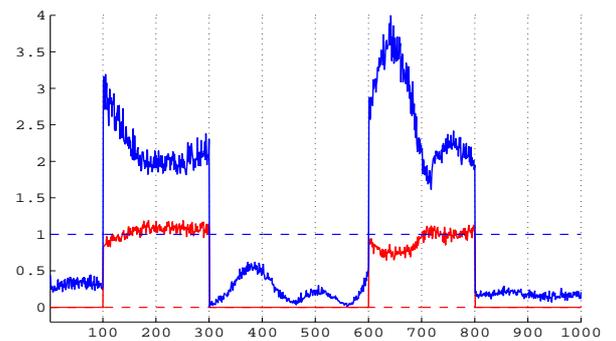


FIGURE 4.22 – Indicateur  $[\Delta_{2,12}](k)$

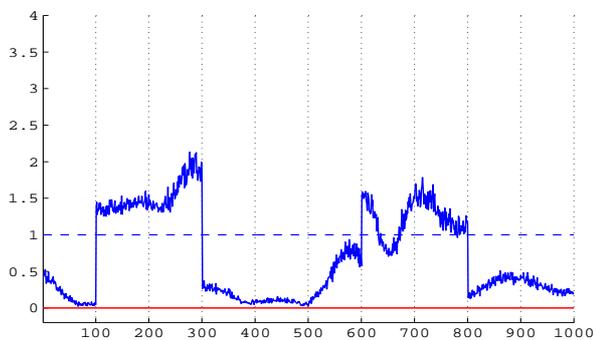


FIGURE 4.23 – Indicateur  $[\Delta_{4,6}](k)$

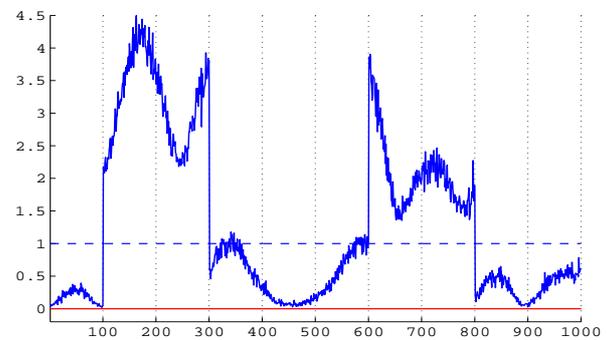


FIGURE 4.24 – Indicateur  $[\Delta_{4,9}](k)$

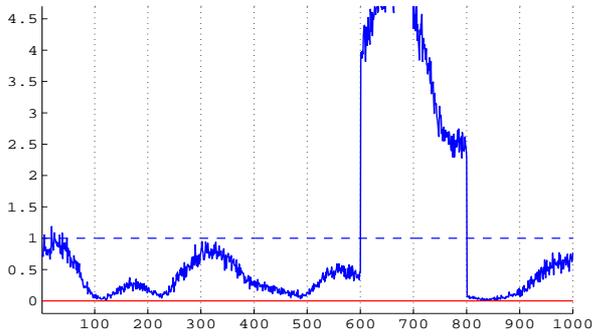


FIGURE 4.25 – Indicateur  $[\Delta_{2,7,9}](k)$

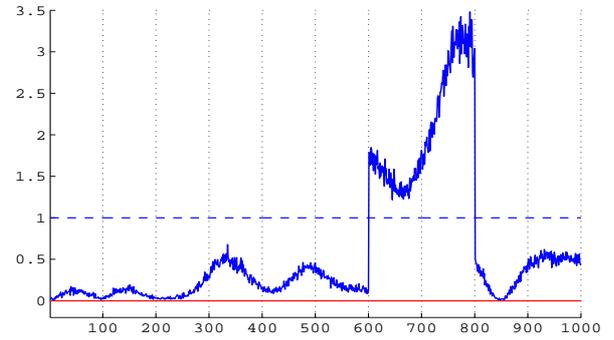


FIGURE 4.26 – Indicateur  $[\Delta_{2,9,10}](k)$

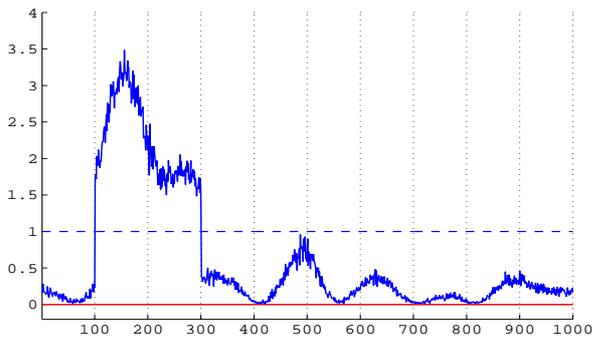


FIGURE 4.27 – Indicateur  $[\Delta_{4,5,12}](k)$

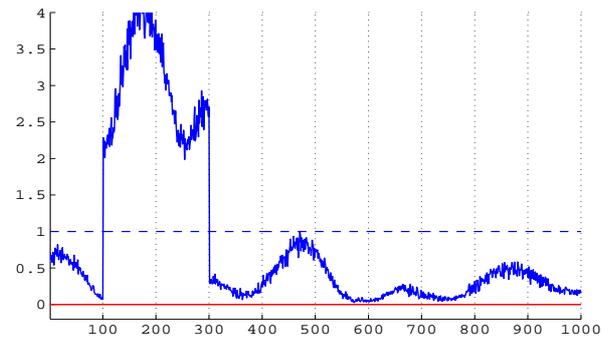


FIGURE 4.28 – Indicateur  $[\Delta_{4,6,12}](k)$

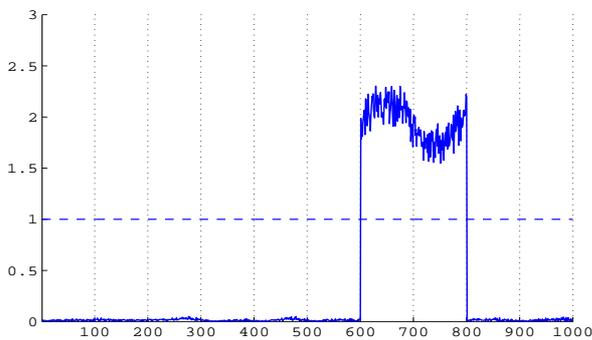


FIGURE 4.29 – Indicateur  $\Delta_{2,5}(k)$  déterminé par ACP certaine

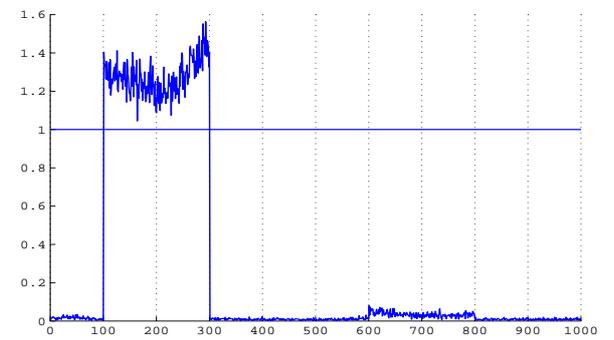


FIGURE 4.30 – Indicateur  $\Delta_{4,9}(k)$  déterminé par ACP certaine

## Conclusion générale

Le diagnostic basé sur l'ACP repose sur le nombre de composantes principales à retenir dans le modèle ACP. Diverses méthodes ont été proposées dans la littérature pour la sélection de ce nombre [84], [90]. Celles concernant le diagnostic cherchent seulement à maximiser la détection de défauts [76], [86]. L'utilisation des modèles ainsi obtenus pour la localisation de défauts peut conduire à des localisations erronées.

A cet effet, une nouvelle méthode de détermination des modèles ACP optimisant la détection et la localisation de défauts simples ou multiples sur les variables redondantes ou non a été proposée dans ce travail. Cette méthode détermine le nombre de composantes principales du modèle ACP adapté à chaque défaut par optimisation de la trace de la variance de l'erreur de reconstruction des variables. La méthode de reconstruction d'un ensemble de variables par ACP a été généralisée à l'indicateur de détection *SWE* pour des espaces résiduels de dimensions différentes. Les résultats obtenus sur un exemple de simulation ont montré l'intérêt de notre méthode par rapport aux méthodes existantes (*SNR* et *VNR*).

Dans le cas de défauts multiples, cette méthode de sélection nécessite de considérer un grand nombre de combinaisons de un à plusieurs capteurs en défaut, notamment pour un système de grande dimension. Cependant, la réduction du nombre des directions de défauts à prendre en compte est tout à fait envisageable par analyse des conditions d'existence de la reconstruction [78]. De plus, lorsqu'on développe une stratégie de surveillance de système, on définit généralement un cahier des charges des objectifs à atteindre ; ce cahier des charges prévoit la liste de défauts simples et de défauts multiples à détecter et par conséquent le nombre des directions de défauts à prendre en compte est bien défini et en général couvre un nombre limité de situations concernant des capteurs critiques.

Généralement, le modèle ACP obtenu ne peut être qu'approximatif. Pour tenir compte de cette approximation, il serait judicieux de tenir compte des incertitudes relatives au modèle. A cet effet, une nouvelle méthode est proposée. Elle tient compte des incertitudes du modèle ACP sous forme intervalle par estimation des valeurs et vecteurs propres intervalles.

Le modèle ACP intervalle ainsi obtenu permet la détection de défauts sur les variables par la génération de résidus intervalles ; quant à la localisation, elle est effectuée par extension du principe de reconstruction à l'ACP par intervalle. Les variables reconstruites sont obtenues par résolution directe d'un système d'équations linéaires par intervalle à l'aide de la décomposition matricielle de type  $[\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T$ .

Le principal inconvénient lié à l'examen de défauts multiples est l'augmentation du nombre de combinaisons de variables à reconstruire simultanément. Une stratégie de localisation

est proposée par analyse des conditions de reconstruction par intervalle afin de réduire ce nombre toutefois fini et directement lié au nombre de variables du système.

Les résidus structurés sont ensuite générés par projection des reconstructions suivant les directions utiles dans l'espace résiduel intervalle. L'analyse de ces résidus identifie les variables incriminées.

Pour la validation de nos propositions, un exemple de simulation est utilisé. Les résultats obtenus, vecteurs et valeurs propres, par ACP intervalle contiennent ceux fournis par ACP classique. L'utilisation du modèle ACP intervalle pour le diagnostic a permis d'identifier correctement l'ensemble de variables défectueuses malgré la présence de fausses alarmes liées au rapport de reconstruction élevé  $Q_R$ . Ces fausses alarmes peuvent être supprimées par la synthèse d'un filtre capable de rejeter les détections dont la durée est en dessous d'un certain seuil de persistance [69].

Nos différentes propositions ont été appliquées sur un système d'échangeurs thermiques. Le système en question comprend deux échangeurs à contre-courant et en série, sa modélisation a conduit à un système d'équations non linéaires. Pour le diagnostic par ACP, ces équations ont été linéarisées autour de points de fonctionnement.

Le modèle ACP intervalle ainsi déterminé a servi au diagnostic. La détection de défauts affectant les mesures est réalisée par génération des résidus intervalles. Pour la localisation de défauts, les conditions d'existence de la reconstruction intervalle ont été analysées afin de réduire le nombre de combinaisons de défauts multiples à considérer.

Suite à cette stratégie, les résidus intervalles sont structurés permettant ainsi la localisation de défauts.

L'étude comparative (ACP intervalle, ACP classique) a montré que le diagnostic par ACP intervalle est plus performant que le diagnostic par ACP classique. En effet, concernant la détection, les deux méthodes ont conduit aux mêmes résultats par contre pour la localisation, l'ACP classique n'a pas permis d'identifier systématiquement et correctement les variables en défaut, alors que l'ACP intervalle a donné les résultats attendus. Ceci s'explique par le fait que la méthode de modélisation proposée avec prise en compte des incertitudes garantit le nombre correct de composantes principales à retenir dans le modèle ACP, alors que la méthode d'ACP classique donne un nombre inférieur à ce nombre. Les suites des travaux de recherche portent sur l'extension de la méthode de modélisation pour des fins de diagnostic à l'ACP intervalle et de valider sa performance sur le système d'échangeurs thermiques.

# Annexe A : Opérations arithmétiques sur les intervalles

Un intervalle est un ensemble fermé et borné de nombres réels [60], [62]. Si  $x$  désigne une variable réelle bornée, alors l'intervalle  $[x]$  auquel elle appartient, est défini par :

$$[x] = [ \underline{x} \quad \bar{x} ] = \{x \in \mathbb{R} / \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (45)$$

où  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  sont des nombres réels représentant respectivement la borne inférieure  $\inf(x)$  et la borne supérieure  $\sup(x)$  de  $x$ .

$\mathbb{IR}$  désigne l'ensemble des intervalles fermés bornés sur  $\mathbb{R}$ .

Les intervalles peuvent être aussi considérés comme des couples de réels. Les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) sur les variables réelles peuvent être reformulées dans le cadre de l'analyse par intervalles, d'où le terme, largement employé dans la littérature internationale, d'arithmétique des intervalles.

Le tableau 11 résume ces principales opérations.

TABLE 11 – Opérations arithmétiques sur les variables intervalles

Opération arithmétique	Calcul des bornes de l'intervalle obtenu
Addition	$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y} \quad \bar{x} + \bar{y}]$
Négation	$-[x] = [-\bar{x} \quad -\underline{x}]$
Soustraction	$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y} \quad \bar{x} + \underline{y}]$
Multiplication	$[x] [y] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}) \quad \max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y})]$
Carré	$[x]^2 = \begin{cases} [\underline{x}^2 \quad \bar{x}^2] & \text{si } x \leq 0 \\ [0 \quad \bar{x}^2] & \text{si } 0 \in x \\ [\underline{x}^2 \quad \bar{x}^2] & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
Valeur absolu	$ [x]  = \begin{cases} [-\bar{x} \quad -\underline{x}] & \text{si } x \leq 0 \\ [0 \quad \max(\underline{x}^2, \bar{x}^2)] & \text{si } 0 \in x \\ [\underline{x} \quad \bar{x}] & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
Inversion	$\frac{1}{[x]} = \left[ \frac{1}{\bar{x}} \quad \frac{1}{\underline{x}} \right] \quad \text{si } 0 \notin x$
Division	$\frac{[x]}{[y]} = \left[ \min\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) \quad \max\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) \right] \quad \text{si } 0 \notin y$

La notion d'intervalle peut être étendue au cas d'un vecteur  $X$  constitué de  $n$  variables réelles. Le vecteur intervalle  $[X] \in \mathbb{IR}^n$  contenant  $X$  se définit comme suit :

$$[X] = [ [x_1] \quad \dots \quad [x_n] ]^T \quad (46)$$

Pour tout  $i = 1 \dots n$ , l'intervalle  $[x_i] = [\underline{x}_i \ \bar{x}_i]$  correspond à la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $[X]$ .

Les notions introduites pour les intervalles sont étendues pour le vecteur intervalles. Le tableau 12 présente les expressions des principales caractéristiques d'un vecteur intervalle.

TABLE 12 – Expressions des principales caractéristiques d'un vecteur intervalle

	Vecteur intervalle $[X]$
Centre ou milieu (midpoint)	$X^c = mid([X]) = [x_1^c \ \dots \ x_n^c]^T$
Rayon (radius)	$X^r = rad([X]) = [x_1^r \ \dots \ x_n^r]^T$
Longueur ou taille ( $w$ pour width)	$w([X]) = \max [w([x_1]), \dots, w([x_n])]$
Norme	$\ [X]\  = \max [ [x_1] , \dots,  [x_n] ]$
Distance	$d([X], [Y]) = \sqrt{\sum_{j=1}^n d^2([x_j], [y_j])}$

La notion d'intervalle peut également être reformulée au cas des matrices.

Soit  $[A]$  une matrice intervalle de dimension  $(m \times n)$ . On note  $[a_{ij}]$  l'élément de  $[A]$  situé à la  $i^{\text{ème}}$  ligne et à la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

De façon similaire au cas vectoriel, les définitions s'étendent aux matrices intervalles composante par composante, à l'exception de la longueur  $w([A])$ , qui a une définition particulière :

$$w([A]) = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} w([a_{ij}]) \quad (47)$$

La matrice centre  $A^c$  (48) et la matrice rayon  $A^r$  (49) sont données par :

$$A^c = mid([A]) = \underset{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}{mid}([a_{ij}]) \quad (48)$$

$$A^r = rad([A]) = \underset{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}{rad}([a_{ij}]) \quad (49)$$

Les opérations d'addition et de multiplication (interne, par un scalaire de  $\mathbb{IR}$ , par un vecteur) sont définies en appliquant les lois arithmétiques scalaires dans  $\mathbb{IR}$  de la même manière que pour les matrices réelles. En particulier, si  $[A]$  et  $[B]$  sont deux matrices intervalles carrées de dimension  $(n \times n)$ ,  $[X]$  un vecteur intervalle de dimension  $n$  et  $\alpha$  un scalaire intervalle, alors :

$$\begin{aligned} [A] + [B] &= ([a_{ij}] + [b_{ij}])_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \\ [A][B] &= \left( \sum_{k=1}^n [a_{ik}] [b_{kj}] \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \\ [A][X] &= \left( \sum_{j=1}^n [a_{ij}] [x_j] \right)_{1 \leq i \leq n} \\ \alpha [A] &= \alpha [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \end{aligned} \quad (50)$$

## Annexe B : Méthodes de résolution d'un système d'équations linéaires intervalles

Dans le cas où la matrice  $[\mathbf{A}]$  est symétrique c'est-à-dire  $[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{A}]$ , certaines approches basées sur la prise en compte de cette propriété peuvent être utilisées pour la résolution d'un système d'équations linéaires par intervalles :

### Décomposition $[\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T$

Le principe de cette méthode consiste à transformer la matrice  $[\mathbf{A}]$  (de dimension  $r \times r$ ) en une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité  $[\mathbf{L}]$  et une matrice diagonale  $[\mathbf{D}]$  avec :

$$[\mathbf{A}] \subseteq [\mathbf{L}] [\mathbf{D}] [\mathbf{L}]^T \quad (51)$$

Les éléments  $[l_{ih}]$  de la matrice  $[\mathbf{L}]$  pour  $h = 1 \dots r$  et  $i = h+1 \dots r$  s'explicitent par :

$$[l_{ih}] = \frac{\left( [a_{ih}] - \sum_{j=1}^{h-1} [l_{ij}] [a_{jj}] [l_{jh}] \right)}{[a_{hh}]} \quad (52)$$

Compte tenu de la notation suivante :

$$[\mathbf{Q}] = [\mathbf{D}] [\mathbf{L}]^T \quad (53)$$

on résout par descente triangulaire en commençant par le sous-système  $[\mathbf{L}] [\mathbf{z}] = [\mathbf{b}]$  puis par remontée  $[\mathbf{Q}] [\mathbf{y}] = [\mathbf{z}]$ .

La solution  $[\mathbf{z}]$  du premier sous-système triangulaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ [l_{21}] & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ [l_{r1}] & \dots & [l_{r(r-1)}] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [z_1] \\ [z_2] \\ \vdots \\ [z_r] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [b_1] \\ [b_2] \\ \vdots \\ [b_r] \end{pmatrix} \quad (54)$$

s'explicitite :

$$[z_i] = [b_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [l_{ij}] [y_j] \quad i = 1, \dots, r \quad (55)$$

La solution  $[y]$  du deuxième sous-système triangulaire :

$$\begin{pmatrix} [a_{11}] & [q_{12}] & \cdots & [q_{1r}] \\ 0 & [a_{22}] & \cdots & [q_{2r}] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & [a_{rr}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [y_1] \\ [y_2] \\ \vdots \\ [y_r] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [z_1] \\ [z_2] \\ \vdots \\ [z_r] \end{pmatrix} \quad (56)$$

s'explique :

$$[y_i] = \frac{1}{[a_{ii}]} \left( [z_i] - \sum_{j=i+1}^r [q_{ij}] [y_j] \right) \quad i = r, \dots, 1 \quad (57)$$

où  $[q_{ij}] = [a_{ij}] \cdot [l_{ij}]$

### Méthode de Cholesky par intervalle

Cette méthode exige aussi que les éléments diagonaux de la matrice  $[A]$  sont positifs c'est-à-dire que ses bornes inférieures vérifient la relation suivante [2] :

$$\underline{a}_{ii} > 0$$

Le principe de cette approche consiste à faire la décomposition suivante :

$$[A] \subseteq [L] [L]^T \quad (58)$$

où  $[L]$  est une matrice triangulaire inférieure; ses éléments  $[l_{ij}]$  avec  $j = 1 \dots r$  et  $i = j + 1 \dots r$  sont donnés par :

$$[l_{ij}] = \frac{\left( [a_{jj}] - \sum_{k=1}^{j-1} [l_{ik}] [l_{jk}] \right)}{[l_{jj}]} \quad (59)$$

où les éléments diagonaux de la matrice  $[L]$  s'explicitent par :

$$[l_{jj}] = \left( [a_{jj}] - \sum_{k=1}^{j-1} [l_{jk}]^2 \right)^{1/2} \quad (60)$$

La résolution avec cette méthode se fait en deux étapes.

Tout d'abord, on résout le premier sous-système  $[L][z] = [b]$  ayant pour solution :

$$[z_i] = \frac{\left( [b_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [l_{ij}] [y_j] \right)}{[l_{ii}]} \quad i = 1, \dots, r \quad (61)$$

Puis, on résout le deuxième sous-système  $[L]^T[y] = [z]$  ayant pour solution :

$$[y_i] = \frac{\left( [z_i] - \sum_{j=1+1}^r [l_{ji}] [x_j] \right)}{[l_{ii}]} \quad i = r, \dots, 1 \quad (62)$$

# Bibliographie

- [1] Alcalá C. F., Qin S. J., 'Reconstruction-based contribution for process monitoring', *Automatica*, vol. 45, pp. 1593-1600, 2009.
- [2] Alefeld G., Mayer G., 'The Cholesky method for interval data', *Linear Algebra Application*, vol. 194, pp. 161-182, 1993.
- [3] Babamoradi H., Berg van den F., Rinnan A., 'Bootstrap based confidence limits in principal component analysis - A case study', *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 120, pp. 97-105, 2013.
- [4] Benaïcha A., 'Diagnostic de systèmes par Analyse en Composantes Principales ACP', *Mastère de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir ENIM*, Tunisie, Juillet 2008.
- [5] Benaïcha A., Mourot G., Guerfel M., Benothman K., Ragot J., 'A new method for determining PCA models for system diagnosis', *18th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, Marrakech, Morocco, June 23-25, 2010.
- [6] Benaïcha A., Mourot G., Guerfel M., Benothman K., Ragot J., 'Nouvelle méthode de détermination d'un modèle ACP à des fins de diagnostic', *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*, Nancy, France, 2-4 Juin 2010.
- [7] Benaïcha A., Mourot G., Benothman K., Ragot J., 'Détermination de modèles ACP pour la détection et la localisation de défauts de capteurs', *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, vol. 46, n° 1, pp. 103-126, 2012.
- [8] Benaïcha A., Mourot G., Benothman K., Ragot J., 'Determination of Principal Component Analysis models for sensor fault detection and isolation', *International Journal of Control, Automation, and Systems (IJCAS)*, vol. 11, n° 2, pp. 296-305, 2013.
- [9] Bourret B., 'Les échangeurs de chaleur, Cours de département de Génie Civil', INSA Toulouse, France, disponible sur <http://moodle.insa-toulouse.fr/file.php/20/content/Echangeurs.pdf>.
- [10] Box G. E. P., 'Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems : Effect of inequality of variance in one-way classification', *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 25, pp. 290-302, 1954.
- [11] Cao J., Gertler J., 'Partial PCA-based optimal structured residual design for fault isolation', *Processing of the American Control Conference*, Boston, MA, USA, 2004.
- [12] Cattell R. B., 'The scree test for the number of factors', *Journal of Multivariate Behavioral Research*, vol. 1, pp. 245-276, 1966.
- [13] Cazes P., Chouakria A., Diday E., Schektman Y., 'Extension de l'analyse en composantes principales à des données de type intervalle', *Revue de la statistique appliquée*, tome 45, pp. 5-24, 1997.

- [14] Cherry G., Qin S. J., 'Multiblock principal component analysis based on a combined index for semiconductor fault detection and diagnosis', *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, vol. 19, n° 2, pp. 159-172, 2006.
- [15] Chouakria A., 'Extension des méthodes d'analyse factorielle à des données de type intervalle', *Thèse de Doctorat de l'Université Paris IX Dauphine*, France, Septembre 1998.
- [16] Chiang L. H., Russell E. L., Braatz R. D., 'Fault diagnosis in chemical processes using Fisher discriminant analysis, discriminant partial least squares, and principal component analysis', *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 50, pp. 243-252, 2000.
- [17] Delrot S., 'Détection d'encrassement dans les échangeurs thermiques par observateurs de type Takagi-Sugeno', *Thèse de Doctorat de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis*, France, 2012.
- [18] Dunia R., Qin S. J., 'A unified geometric approach to process and sensor fault identification and reconstruction : the unidimensional fault case', *Computers and Chemical Engineers*, vol. 22, pp. 927-943, 1997.
- [19] Dunia R., Qin S. J., 'A subspace approach to multidimensional fault identification and reconstruction', *American Institute of Chemical Engineers Journal*, vol. 44, pp. 1813-1831, 1998.
- [20] Domlan E. A., 'Diagnostic des systèmes à changement de régime de fonctionnement', *Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine*, France, Octobre 2006.
- [21] Efron E., 'Better bootstrap confidence intervals', *Journal of the American Statistical Association*, vol. 82, pp. 171-185, 1987.
- [22] Efron B., Tibshirani R. J., 'An introduction to the Bootstrap', *Monographs on Statistics and Applied Probability*, Chapman Hall/CRC, 1993.
- [23] Gertler J., McAvoy T., 'Principal component analysis and parity relations a strong duality', *IFAC conference SAFEPROCESS*, Hull, UK, pp. 837-842, 1997.
- [24] Gertler J., Weihua, L., Huang Y., McAvoy T., 'Isolation enhanced principal component analysis', *3rd IFAC Workshop on On-line Fault Detection and Supervision in the Chemical Process Industries*, Lyon, Juin 4-5, France, 1998.
- [25] Gertler J., Li W., Huang Y., McAvoy T., 'Isolation enhanced principal component analysis', *AICHE Journal*, vol. 45, pp. 323-334, 1999.
- [26] Gertler J., Cao J., 'PCA-based fault diagnosis in the presence of control and dynamics', *AICHE Journal*, vol. 50, pp. 388-402, 2004.
- [27] Gertler J., Cao J., 'Design of optimal structured residuals from partial principal component models for fault diagnosis in linear systems', *Journal of Process Control*, vol. 15, pp. 585-603, 2005.
- [28] Guerfel M., Benaïcha A., Benothman K., 'Sensor Fault Detection and Localization methodology using Principal Component Analysis', *International Review of Automatic Control, IREACO*, vol. 4, n° 5, pp. 620-629, Septembre 2011.

- 
- [29] Guomundsson O., 'Detection of fouling in heat exchangers', *PhD of the University of Iceland*, Reykjavik, 2008.
- [30] Golub G. H., Van Loan C. F., 'Matrix Computations', *London : The Johns Hopkins University Press*, 1996.
- [31] Hagenblad A., Gustafsson F., Klein I., 'A comparison of two methods for stochastic fault detection : the parity space and principal component analysis', *13 th IFAC Symposium on system identification*, 2003.
- [32] Hall P., Lee Young K., Park Byeong U., Paul D., 'Tie-respecting bootstrap methods for estimating distributions of sets and functions of eigenvalues', *Bernoulli*, vol. 15, pp. 380-401, 2009.
- [33] Harkat M. F., Mourot G., Ragot J., 'Différentes méthodes de localisation de défauts basées sur les dernières composantes principales', *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*, Nantes, France, 6-8 Juillet 2002.
- [34] Harkat M. F., 'Détection et localisation de défauts par Analyse en Composantes Principales', *Thèse de Doctortat de L'Institut National Ploytechnique de Lorraine*, France, Juin 2003.
- [35] Harkat M. F., Mourot G., Ragot J., 'Diagnostic de fonctionnement de capteurs d'un réseau de surveillance de la qualité de l'air par analyse en composantes principales', *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, vol. 39, pp. 417-436. 2005.
- [36] Harkat M. F., Mourot G., Ragot J., 'An improved PCA scheme for sensor FDI : application to an air quality monitoring network', *Journal of Process Control*, vol. 16, pp. 625-634, 2006.
- [37] Hansen E., Walster W. G., 'Global optimization using interval analysis', second edition, *Revised and Expanded*, New York, 2004.
- [38] Hansen E., Walster G. W., 'Solving Overdetermined Systems of Interval Linear Equations', *Reliable Computing*, vol. 12, pp. 239-243, 2006.
- [39] Huang Y., Gertler J., McAvoy T., 'Sensor and actuator fault isolation by structured partial PCA with nonlinear extensions', *Journal of Process Control*, vol. 10, pp. 444-459, 2000.
- [40] Hladik M., 'A contractor for the symmetric solution set', *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2010.
- [41] Jackson J. E., Mudholkar G. S., 'Control procedures for residuals associated with principal component analysis', *Technometrics*, 1979.
- [42] Jackson D. A., 'Stopping rules in principal component analysis : a comparison of heuristical and statistical approaches', *Journal of Ecology*, vol. 74, pp. 2204-2214, 1993.
- [43] Jansson C., Harburg H., 'Interval linear systems with symmetric matrices, skew-symmetric matrices and dependencies in the right hand side', *Computing*, vol. 46, pp. 265-274, 1991.
- [44] Jannot Y., 'Introduction aux échangeurs de chaleur', disponible sur [www.thermique55.com/principal/chapitre6.pdf](http://www.thermique55.com/principal/chapitre6.pdf).

- [45] Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E., 'Applied interval analysis', *Springer Verlag*, 2001.
- [46] Jiang N., Wang H., Yang D., 'Process monitoring in Principal Component Analysis. Part 1. Fault reconstruction study', *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, The Hague, The Netherlands, October 10-13, 2004.
- [47] Jolliffe I. T., 'Principal component analysis', *Springer-Verlag*, New York, 1986.
- [48] Jonsson G. R., Lalot S., Palsson O. P., Desmet B., 'Use of extended Kalman filtering in detecting fouling in heat exchangers', *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 50, pp. 2643-2655, 2007.
- [49] Kano M., Shinji H., Hashimoto I., 'Contribution plots for fault identification based on the dissimilarity of process data'. *AIChE Annual Meeting*, Los Angeles, CA, 2000.
- [50] Kano M., Nagao K., Hasebe S., Hashimoto I., Ohno H., Strauss R., 'Comparison of multivariate statistical process control monitoring methods with applications to the Eastman challenge problem', *Computers and Chemical Engineering*, vol. 26, pp. 161-174, 2002.
- [51] Kourti T., MacGregor J. F., 'Multivariate SPC methods for process and product monitoring', *Journal of Quality Technology*, vol. 28, pp. 409-428, 1996.
- [52] Lebart L., Morineau A., Piron M., 'Statistique Exploratoire Multidimensionnelle', *Dunod*, Paris, France, 2004.
- [53] Li W., Qin S. J., 'Consistent dynamic pca based on errors in variables subspace identification', *Journal of Process Control*, vol. 11, n° 6, pp. 661-678, 2001.
- [54] Lin W., Qin S. J., 'Optimal structured residual approach for improved faulty sensor diagnosis', *Industrial and Engineering Chemistry Research*, vol. 44, pp. 2117-2124, 2005.
- [55] Lieftucht D., Kruger U., Irwin G., Treasure R., 'Fault reconstruction in linear dynamic systems using multivariate statistics', *Control Theory and Applications, IEEE Proceedings*, vol. 153, n° 4, pp. 437-446, 2006.
- [56] Malinowski E. R., 'Factor Analysis in Chemistry', *Wiley-Interscience*, New York, 1991.
- [57] MacGregor J. F., Jaeckle C., Kiparissides C., Koutoudi M., 'Process monitoring and diagnosis by multiblock PLS methods', *AIChE Journal*, vol. 40, pp. 826-828, 1994.
- [58] Miller P., Swanson R. E., Heckler C. F., 'Contribution plots : The missing link in multivariate quality control', *Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 8, n° 4, pp. 775-792, 1998.
- [59] Mishmast N. H., Allahdadi M., 'Interval linear equations system', *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, vol. 5, pp. 259-269, 2010.
- [60] Moore R., 'Interval analysis', *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- [61] Narasimhan S, Shah S. L., 'Model identification and error covariance matrix estimation from noisy data using pca', *Control Engineering Practice*, vol. 16, n° 1, pp. 146-155, 2008.
- [62] Neumaier A., 'Interval methods for systems of equations', *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge, Angleterre, 1990.

- 
- [63] Nomikos P., 'Statistical monitoring of batch processes', *Preprints of Joint Statistical Meeting*, Anaheim, CA, 1997.
- [64] Oxby P., Shah S., 'A critique of the use of PCA for fault detection and diagnosis', *Technical report*, Matrikon, Edmonton, Alberta, Canada, 1998.
- [65] Qin S. J., Dunia R., 'Determining the number of principal components for best reconstruction', *Journal of Process Control*, vol. 10, pp. 245-250, 2000.
- [66] Qin S. J., Valle S., Piovoso M., 'On unifying multiblock analysis with applications to decentralized process monitoring', *Journal of Chemometrics*, vol. 15, pp. 715-742, 2001.
- [67] Qin S. J., 'Statistical process monitoring : basis and beyond', *Journal of Chemometrics*, vol. 17, pp. 480-502, 2003.
- [68] Radhouani M. S., 'Transferts thermiques', *Collection M/Sciences de l'Ingénieur*, Centre de publication universitaire, Tunis, Tunisie, 2001.
- [69] Ragot J., Mourot G., Ben Aicha A., Benothman K., 'Application de l'ACP par intervalles au diagnostic', *9ième congrès international pluridisciplinaire en Qualité et Sécurité de Fonctionnement QUALITA*, Angers, France, Mars 2011.
- [70] Rump S. M., 'Verification methods for dense and sparse systems of equations', *Journal of Herzberger*, Topics in Validated Computations - Studies in Computational Mathematics, pp. 63-135, Elsevier, Amsterdam, Pays-Bas, 1994.
- [71] Rohn J., 'VERINVERSE : Verified inverse interval matrix', 2007, available at <http://www.cs.cas.cz/rohn/matlab/verinverse.html>.
- [72] Rohn J., 'VERSOFT : Verification software in Matlab/Intlab', 2009, available at <http://univtx.cs.cas.cz/rohn/matlab/verintervalhull.htm>.
- [73] Rohn J., 'A Handbook of results on interval linear problems', Czech Academy of Sciences Prague, Czech Republic, European Union, 2010, available at [www.cs.cas.cz/rohn](http://www.cs.cas.cz/rohn).
- [74] Shahriari K., 'Analyse de Sécurité de Procédés Multi-Modes par des Méthodes à base d'Intervalles', *Thèse de Doctorat de Université Joseph Fourier*, Grenoble I, France, 2007.
- [75] Stork C. L., Veltkamp D. J., Kowalski B. R., 'Identification of multiple sensor disturbances during process monitoring', *Journal of Analytical Chemistry*, vol. 69, pp. 5031-5036, 1997.
- [76] Tamura M., Tsujita S., 'A study on the number of principal components and sensitivity of fault detection using PCA', *Journal of Computers and Chemical Engineering*, vol. 31, pp. 1035-1046, 2007.
- [77] Tharrault Y., 'Diagnostic de fonctionnement par analyse en composantes principales : Application à une station de traitement des eaux usées', *Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine*, Nancy, France, Décembre 2008.
- [78] Tharrault Y., Mourot G., Ragot J., Maquin D., 'Fault detection and isolation with robust principal component analysis', *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science (AMCS)*, vol. 18, n° 4, pp. 429-442, 2008.

- [79] Tharrault Y., Mourot G., Ragot J., Maquin D., 'Sensor fault detection and isolation by robust principal component analysis', *Fault Detection, Wei Zhang (Ed.), In-Tech*, Chap. 16, 2010.
- [80] Tobaly P., 'Echangeurs de chaleur', Cours de Licence Professionnelle GPI option MISM, IUT de St Denis, Mars 2002, disponible sur [ptob.free.fr/enseignement/thermo/licence/Echangeurs.pdf](http://ptob.free.fr/enseignement/thermo/licence/Echangeurs.pdf).
- [81] Timmerman M. E., Kiers H. A. L., Smilde A. K., 'Estimating confidence intervals for principal component loadings : A comparison between the bootstrap and asymptotic results', *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, vol. 60, pp. 295-314, 2007.
- [82] Triboulet P., 'Cours de Lycée Niepce- Chalons sur Saône', disponible sur [www.educnet.education.fr/rnchimie/gen-chim/triboulet/rtf/thermiq.pdf](http://www.educnet.education.fr/rnchimie/gen-chim/triboulet/rtf/thermiq.pdf).
- [83] Tong H., Crowe C. M., 'Detection of Gross Errors in Data Reconciliation by Principal Component Analysis', *AIChE Journal*, vol. 41, pp. 1712-1722, 1995.
- [84] Valle S., Weihua L., Qin S. J., 'Selection of the number of principal components : The variance of the reconstruction error criterion with a comparison to other methods', *Industrial and Engineering Chemistry Research*, vol. 38, pp. 4389-4401, 1999.
- [85] Wang J., Qin S. J., 'A new subspace identification approach based on principal component analysis', *Journal of Process Control*, vol. 12, pp. 841-855, 2002.
- [86] Wang H., Jiang N., Yang D., 'Process monitoring in principal component subspace : part 1 - fault reconstruction study', *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, The Hague, Pays-Bas, October 2004.
- [87] Westerhuis J. A., Gurden S., Smilde A., 'Generalized contribution plots in multivariate statistical process monitoring'. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 51, pp. 95-114, 2000.
- [88] Wise B. M., 'Adapting Multivariate Analysis for Monitoring and Modeling of Dynamic Systems', *PhD of University of Washington, USA*, 1991.
- [89] Wise B. M., Gallagher, N. B., Bro, R., Shaver J. M., Winding W., Koch R. S., 'PLS<sub>Toolbox</sub>Version4.0forusewithMATLAB', *Eigenvector Research, MAUSA*, 2006.
- [90] Wold S., 'Cross-validatory estimation of the number of components in factor and principal components models', *Technometrics*, vol. 20, n° 4, pp. 397-405, 1978.
- [91] Yoon S., MacGregor J. F., 'Fault diagnosis with multivariate statistical models, part I : Using steady state fault signatures', *Journal of Process Control*, vol. 11, pp. 387-400, 2001.
- [92] Yue H. H., Qin S. J., 'Reconstruction-Based Fault Identification Using a Combined Index', *Industrial and Engineering Chemistry Research*, vol. 40, pp. 4403-4414, 2001.
- [93] Zaghdoudi M. C., 'Amelioration des transferts de chaleur en ebullition sous l'action d'un champ électrique', *Thèse de Doctorat de l'INSA de Lyon, France*, 1996.
- [94] Zhimin D., Xin Q., 'Detection and diagnosis for multiple faults in VAV systems', *Journal of Energy and Buildings*, vol. 39, n° 4, pp. 923-934, 2006.

- 
- [95] Zwingelstein G., 'Diagnostic des défaillances- théorie et pratique pour les systèmes industriels, *Traité des Nouvelles technologies, série Diagnostic et Maintenance*, Hermès, Paris, France, 1995.