

SITC & Environnement 2006

**Diagnostic de fonctionnement de capteurs d'un
réseau de surveillance de la qualité de l'air par
analyse en composantes principales itérative**

Yvon THARRAULT
Gilles MOUROT
José RAGOT



Plan

- L'Analyse en Composantes Principales
- L'Analyse en Composantes Principales Itérative
- Détection de défauts
- Application
 - Détection de défauts d'un réseau de surveillance de la qualité de l'air

Principe de l' ACP

- Maximisation de la variance des projections :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_m]$$

Principe de l' ACP

- Maximisation de la variance des projections :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z}\mathbf{P} \qquad \mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_m]$$

→ Décomposition en valeurs/vecteurs propres de Σ :

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$$

Principe de l' ACP

- Maximisation de la variance des projections :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z}\mathbf{P} \qquad \mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_m]$$

→ Décomposition en valeurs/vecteurs propres de Σ :

$$\Sigma = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T = [\mathbf{P}_\ell \quad \mathbf{P}_{\mathbf{m}-\ell}] \begin{bmatrix} \Lambda_\ell & 0 \\ 0 & \Lambda_{\mathbf{m}-\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\ell^T \\ \mathbf{P}_{\mathbf{m}-\ell}^T \end{bmatrix}$$

Principe de l' ACP

- Maximisation de la variance des projections :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z}\mathbf{P} \qquad \mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_m]$$

→ Décomposition en valeurs/vecteurs propres de Σ :

$$\Sigma = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T = [\mathbf{P}_\ell \quad \mathbf{P}_{\mathbf{m}-\ell}] \begin{bmatrix} \Lambda_\ell & 0 \\ 0 & \Lambda_{\mathbf{m}-\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\ell^T \\ \mathbf{P}_{\mathbf{m}-\ell}^T \end{bmatrix}$$

- Décomposition des données $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{T}}_\ell \hat{\mathbf{P}}_\ell^T + \tilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}-\ell} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{m}-\ell}^T = \hat{\mathbf{Z}} + \mathbf{E}$$

Principe de l'ACP

- Maximisation de la variance des projections :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z}\mathbf{P} \qquad \mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_m]$$

→ Décomposition en valeurs/vecteurs propres de Σ :

$$\Sigma = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T = [\mathbf{P}_\ell \quad \mathbf{P}_{\mathbf{m}-\ell}] \begin{bmatrix} \Lambda_\ell & 0 \\ 0 & \Lambda_{\mathbf{m}-\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\ell^T \\ \mathbf{P}_{\mathbf{m}-\ell}^T \end{bmatrix}$$

- Décomposition des données $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{T}}_\ell \hat{\mathbf{P}}_\ell^T + \tilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}-\ell} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{m}-\ell}^T = \hat{\mathbf{Z}} + \mathbf{E}$$

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{C}} \qquad \text{avec} \qquad \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{P}}_\ell \hat{\mathbf{P}}_\ell^T$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}})$$

Principe de l' ACP

- Maximisation de la variance des projections :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z}\mathbf{P} \qquad \mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_m]$$

→ Décomposition en valeurs/vecteurs propres de Σ :

$$\Sigma = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T = [\mathbf{P}_\ell \quad \mathbf{P}_{m-\ell}] \begin{bmatrix} \Lambda_\ell & 0 \\ 0 & \Lambda_{m-\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\ell^T \\ \mathbf{P}_{m-\ell}^T \end{bmatrix}$$

- Décomposition des données $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{T}}_\ell \hat{\mathbf{P}}_\ell^T + \tilde{\mathbf{T}}_{m-\ell} \tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}^T = \hat{\mathbf{Z}} + \mathbf{E}$$

$$\text{Sans bruit} \quad \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{T}}_{m-\ell} \tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}^T = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{T}}_{m-\ell} = \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell} = 0$$

- On cherche $\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}$

ACP itérative

■ Hypothèse :

- ◆ ℓ connu
- ◆ bruits de mesure $\rightarrow$ gaussien

■ Méthode itérative

- ◆ Matrice V connue
 - Estimation du modèle $\tilde{P}_{m-\ell}$
- ◆ Matrice du modèle $\tilde{P}_{m-\ell}$ connue
 - Estimation des variances des bruits V

ACP itérative

- Estimation du modèle $\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}$ (V connue)

◆ Avec le changement de variables

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \qquad \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}\mathbf{L}^{-T}$$

→ Cas optimal de l'ACP

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{N-1} \bar{\mathbf{Z}}^T \bar{\mathbf{Z}} = \frac{1}{N-1} \mathbf{L}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^T \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{L}^{-T} + \frac{1}{N-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{L}^{-T}$$

$$\text{avec } \mathbf{V} = \frac{1}{N-1} \mathbf{E}^T \mathbf{E} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{N-1} \mathbf{L}^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^T \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{L}^{-T} + \mathbf{I}$$

→ Les v.p. $(\bar{\Sigma})$ de l'espace résiduel ≈ 1

ACP itérative

- Estimation du modèle $\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}$ (V connue)

- ◆ Avec le changement de variables

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \qquad \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}\mathbf{L}^{-T}$$

→ Cas optimal de l'ACP

→ Décomposition en valeurs/vecteurs propres:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell} = \mathbf{L}^{-T} \tilde{\bar{\mathbf{P}}}_{m-\ell}$$

- Détection et de localisation dans l'espace transformé

ACP itérative

- Estimation de la matrice de variance V des bruits de mesures
 - ◆ Modèle $\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}$ connu

$$\tilde{\mathbf{T}}_{m-\ell} = \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell} \Rightarrow \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{T}}_{m-\ell}} = \tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}^T \mathbf{V} \tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}$$

→ Résolution d'un système linéaire en V

ACP itérative

- Estimation de la matrice de variance V des bruits de mesures
 - ◆ Modèle $\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}$ connu

$$\tilde{\mathbf{T}}_{m-\ell} = \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell} \Rightarrow \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{T}}_{m-\ell}} = \tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}^T \mathbf{V} \tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}$$

→ Résolution d'un système linéaire en V

- Nombre d'équations



$(m-\ell) \times (m-\ell)$

ACP itérative

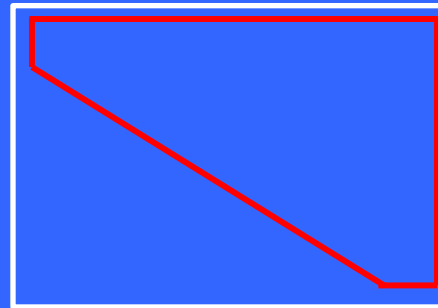
- Estimation de la matrice de variance V des bruits de mesures

- ◆ Modèle $\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}$ connu

$$\tilde{\mathbf{T}}_{m-\ell} = \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell} \Rightarrow \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{T}}_{m-\ell}} = \tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}^T \mathbf{V} \tilde{\mathbf{P}}_{m-\ell}$$

→ Résolution d'un système linéaire en V

- Nombre d'équations



$$\frac{(m-\ell) \times (m-\ell+1)}{2}$$

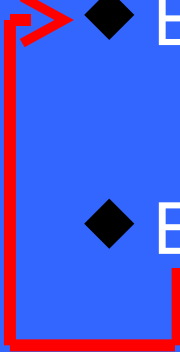
ACP itérative

■ Algorithme

- ◆ Initialisation du modèle par ACP

- ◆ Estimation de la matrice de variance V des bruits

- ◆ Estimation du modèle



Synthèse

- Avantages:
 - ◆ méthode plus générale que l'ACP
 - ◆ variances des bruits de mesure estimées

- Inconvénient:
 - ◆ solution itérative

- Difficultés non résolues
 - ◆ convergence?
 - ◆ méthode biaisée?

Exemple

■ On considère:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_1 = \mathbf{u}_1 + \varepsilon_1 \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{u}_1 + \varepsilon_2 \\ \mathbf{x}_3 = \mathbf{u}_1 + \varepsilon_3 \\ \mathbf{x}_4 = \mathbf{u}_2 + \varepsilon_4 \\ \mathbf{x}_5 = \mathbf{u}_2 + \varepsilon_5 \\ \mathbf{x}_6 = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \varepsilon_6 \\ \mathbf{x}_7 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \varepsilon_7 \end{array} \right.$$

$x_{1..7}$ mesures

u_1 et u_2 entrées

$\varepsilon_{1..7}$ bruits de mesure

$N = 1000$ observations

$\ell = 2$ nb de composantes principales

Matrice V diagonale

Exemple

- Estimation de la variance des bruits de mesures

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
Réel	0.13	0.8	0.5	0.3	0.2	0.4	0.5
Estimé	0.13	0.79	0.51	0.29	0.20	0.42	0.49

- ◆ Estimation correcte

λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
1.09	1.03	0.98	0.96	0.94

- Dernières valeurs propres proche de 1

Détection de défaut dans l'espace transformé

- Décomposition d'une nouvelle observation :

$$\bar{z}(k) = L^{-1} z(k) \qquad \bar{z}(k) = \hat{\bar{z}}(k) + \bar{e}(k)$$

- Projection sur l'espace résiduel:

$$\bar{e}(k) = \left(I - \hat{\bar{C}} \right) \bar{z}(k) = \tilde{\bar{P}}_{m-\ell} \tilde{\bar{t}}_{m-\ell}(k)$$

- Détection de défauts : $\mathbf{SPE}(k) = \bar{e}^T(k) \bar{e}(k) = \tilde{\bar{t}}_{m-\ell}^T(k) \tilde{\bar{t}}_{m-\ell}(k)$

$$\bar{D}_i(k) = \tilde{\bar{t}}_i^T(k) \tilde{\bar{t}}_i(k) = \sum_{j=m-i+1}^m \bar{t}_j^2(k) \qquad i = 1, 2, \dots, (m-\ell)$$

$$\bar{D}_i(k) < \delta_{i,\alpha}^2 \text{ seuil de détection}$$

Application → Réseau de surveillance de la qualité de l'air

- Réseau AIRLOR
- Mesure de NO, NO₂ et O₃ sur 6 stations autour de Nancy
- Relation non-linéaire entre les variables
- ACP appliquée avec succès → Biaisée
 - ◆ Harkat, Mourot, Ragot (2005)
- OBJECTIF :
 - ◆ Amélioration du diagnostic par ACPI ?

Application→ Réseau de surveillance de la qualité de l'air

■ Hypothèses

- ◆ Structure de V diagonale
- ◆ Variance identique par type de capteur

■ Détermination du nombre de composantes principales

- ◆ $\ell = 7$
- ◆ identique ACP-ACPI

Application → Réseau de surveillance de la qualité de l'air

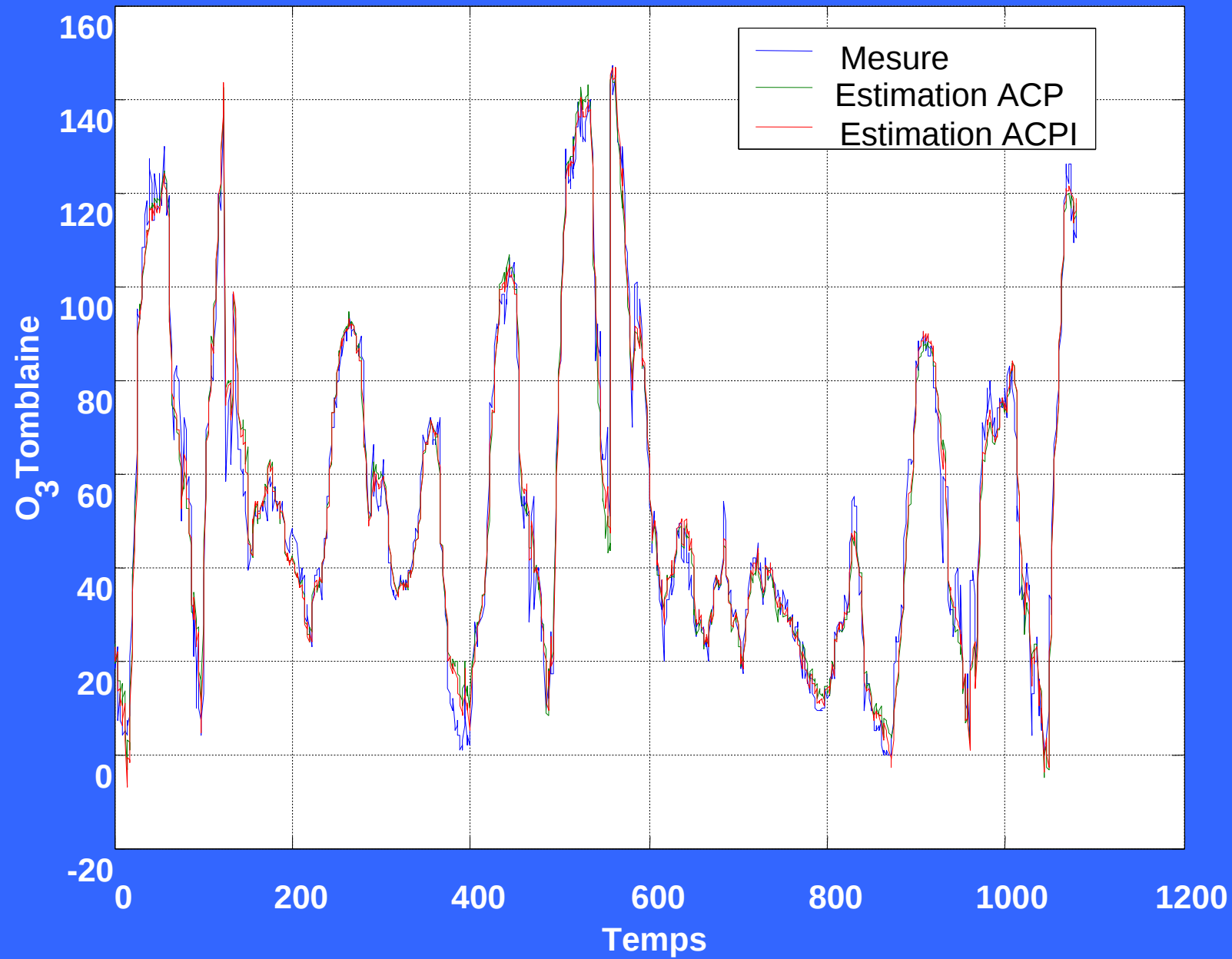
■ Ecart-types des erreurs d'estimation

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
ACP	9,8	15	9,2	5,3	5,2	11	6,1	5,9	8,7
ACPI	8,4	11	8,5	2,6	5,5	16	6,1	5,4	9,7

	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}
ACP	5,8	2,8	3,4	5,6	3	1,2	7,2	3,7	9
ACPI	5,2	2,1	4,9	4,7	2,1	1,9	5,3	3	13

◆ Ecart-types proches

Courbe



Application → Réseau de surveillance de la qualité de l'air

■ Modèle ACPI

◆ ℓ -m dernière valeurs propres

λ_t	2,5	1,8	1,4	1,1	0,99	0,93	0,74	0,6	0,58	0,33	0,03
-------------	-----	-----	-----	-----	------	------	------	-----	------	------	------

$\neq 1 \Rightarrow$ modèle biaisé

■ Structure non diagonale?

Application → Réseau de surveillance de la qualité de l'air

■ Comparaison des conditions de détectabilité

$$v_{i,j} = \frac{\delta_{i,\alpha}^{ACP}}{\|\tilde{\xi}_j^{(i) ACP}\|} \frac{\|\tilde{\xi}_j^{(i) ACPI}\|}{\delta_{i,\alpha}^{ACPI}}$$

Sensibilité ACP Sensibilité ACPI

Application → Réseau de surveillance de la qualité de l'air

■ Comparaison des conditions de détectabilité

$$v_{i,j} = \frac{\delta_{i,\alpha}^{ACP} \left\| \tilde{\xi}_j^{(i) ACPI} \right\|}{\left\| \tilde{\xi}_j^{(i) ACP} \right\| \delta_{i,\alpha}^{ACPI}}$$

$\left. \begin{matrix} \delta_{i,\alpha}^{ACP} \\ \delta_{i,\alpha}^{ACPI} \end{matrix} \right\} \text{seuil de détection}$
 ξ_j : direction du défaut
 $j^{i\text{ème}} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_j^{(i) ACP} = \left(I - \hat{C}^{(i)} \right) \xi_j \\ \tilde{\xi}_j^{(i) ACPI} = L \left(I - \hat{C}^{(i)} \right) L^{-1} \xi_j \end{cases}$$

$\hat{C}^{(i)}$ et $\hat{\bar{C}}^{(i)}$

Modèle construit avec
les i premiers vecteurs
propres

Application → Réseau de surveillance de la qualité de l'air

■ Comparaison des conditions de détectabilité

$$v_{i,j} = \frac{\delta_{i,\alpha}^{ACP} \left\| \tilde{\xi}_j^{(i) ACPI} \right\|}{\left\| \tilde{\xi}_j^{(i) ACP} \right\| \delta_{i,\alpha}^{ACPI}}$$

$v_{i,j} < 1$, ACP plus sensible que ACPI

$v_{i,j} > 1$, ACPI plus sensible que ACP

Application→ Réseau de surveillance de la qualité de l'air

	d13	d14	d15	d16	d17	d18
1	0.2	0.22	0.28	0.16	0.31	0.2
2	0.06	0.07	0.06	0.08	0.09	0.13
3	0.07	0.11	0.15	0.03	0.05	0.25
4	0.07	0.1	0.17	0.07	0.08	0.26
5	0.15	0.24	0.25	0.16	0.37	2.3
6	0.2	0.23	0.37	0.15	0.36	2.7
7	0.17	0.27	0.26	0.13	0.3	0.96
8	0.18	0.29	0.3	0.13	0.16	0.18
9	0.13	0.11	0.16	0.12	0.12	0.13
10	0.13	0.11	0.14	0.13	0.11	0.13

- ACPI pas plus sensible aux défauts

Conclusion

- ACP
 - ◆ Biaisée
- ACPI
 - ◆ Itérative
- ACPI apporte rien par rapport ACP pour la détection
- Choix de la structure de V
- Compromis : nombre d'observations / non linéarité