

# Diagnostic de systèmes non linéaires par approche multimodèle

Projet COSMOS (CRAN, CRESTIC, ICD, LAGIS).  
Dalil Ichalal, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR7039, Nancy-Université, CNRS  
2, Avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandœuvre-Lès-Nancy Cedex, France

Workshop Surveillance, Sûreté et Sécurité des Grands Systèmes  
04 – 05 juin 2008, Troyes, France



Nancy-Université  
INPL



- 1 **Introduction**
  - Structure des multimodèles
  - Contexte de l'étude
- 2 Estimation d'état et des défauts
- 3 Diagnostic à base de banc d'observateurs
  - Détection et localisation des défauts d'actionneurs
  - Détection et localisation des défauts de capteurs
- 4 Conclusions et perspectives

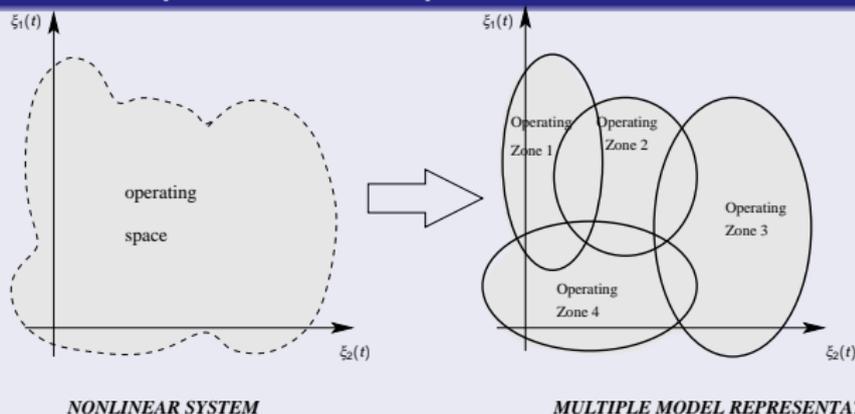
- 1 Introduction
  - Structure des multimodèles
  - Contexte de l'étude
- 2 Estimation d'état et des défauts
- 3 Diagnostic à base de banc d'observateurs
  - Détection et localisation des défauts d'actionneurs
  - Détection et localisation des défauts de capteurs
- 4 Conclusions et perspectives

- 1 Introduction
  - Structure des multimodèles
  - Contexte de l'étude
- 2 Estimation d'état et des défauts
- 3 Diagnostic à base de banc d'observateurs
  - Détection et localisation des défauts d'actionneurs
  - Détection et localisation des défauts de capteurs
- 4 Conclusions et perspectives

- 1 Introduction
  - Structure des multimodèles
  - Contexte de l'étude
- 2 Estimation d'état et des défauts
- 3 Diagnostic à base de banc d'observateurs
  - Détection et localisation des défauts d'actionneurs
  - Détection et localisation des défauts de capteurs
- 4 Conclusions et perspectives

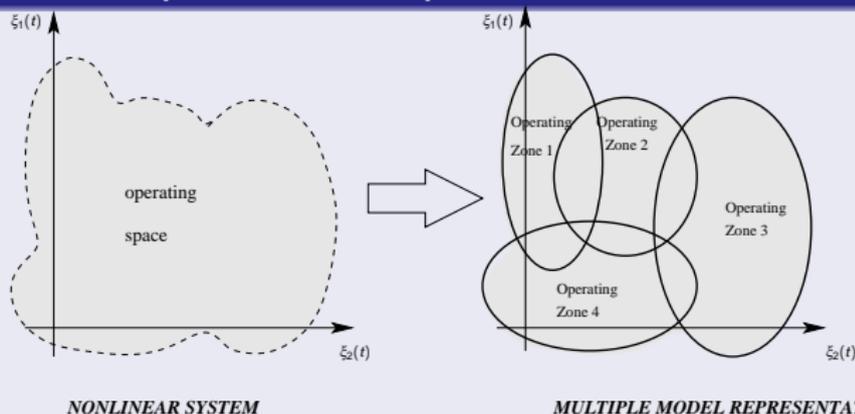
# Introduction

## Principe de la représentation par multimodèle



- Décomposition de l'espace en zones de fonctionnement
- Caractérisation de chaque zone par un sous-modèle linéaire
- Quantification de la contribution de chaque sous-modèle par un poids

## Principe de la représentation par multimodèle



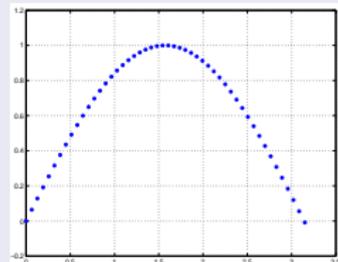
- Décomposition de l'espace en zones de fonctionnement
- Caractérisation de chaque zone par un sous-modèle linéaire
- Quantification de la contribution de chaque sous-modèle par un poids

## Intérêts des multimodèles

- Moyen « intuitif » et « simple » de représenter un système complexe
- Utilisation des résultats de l'automatique linéaire

## Fonction non linéaire

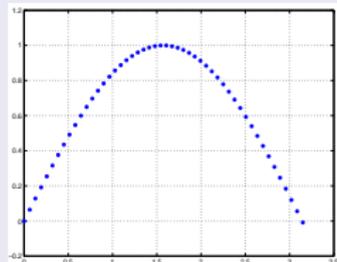
- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$



## Approximation par un multimodèle

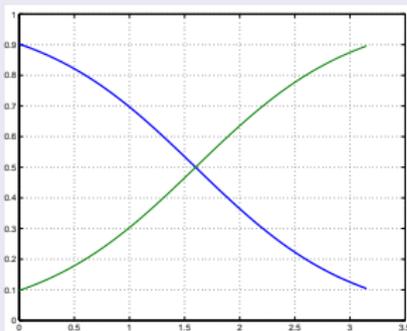
## Fonction non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$

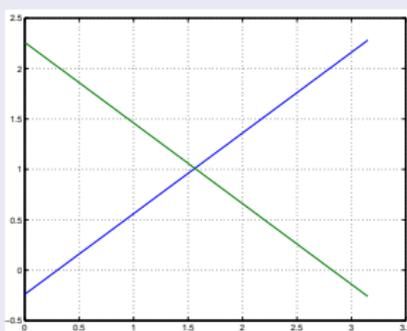


## Approximation par un multimodèle

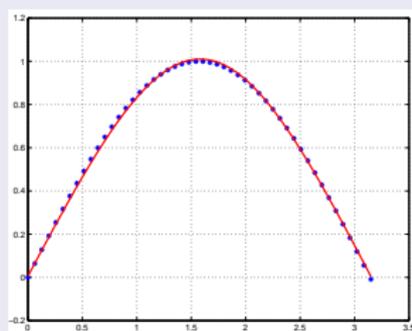
Fonctions de pondération :  $\mu_i(x)$



Sous-modèles :  $f_i(x)$



$\hat{y}(x) = \mu_1(x)f_1(x) + \mu_2(x)f_2(x)$



# Structure des multimodèles

## Multimodèle de Takagi-Sugeno

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) A_i \right\} x(t) + \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) B_i \right\} u(t) , \\ y(t) &= \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) C_i \right\} x(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

## Multimodèle de Takagi-Sugeno

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) A_i \right\} x(t) + \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) B_i \right\} u(t) , \\ y(t) &= \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) C_i \right\} x(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

## Commentaires

- A comparer à un modèle à paramètres variables dans le temps
- Le système est un barycentre de sous-modèles linéaires.
- La contribution de chaque modèle est quantifiée par  $\mu_i(\xi(t))$ .

## Multimodèle de Takagi-Sugeno

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) A_i \right\} x(t) + \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) B_i \right\} u(t) , \\ y(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) C_i \right\} x(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

## Commentaires

- A comparer à un modèle à paramètres variables dans le temps
- Le système est un barycentre de sous-modèles linéaires.
- La contribution de chaque modèle est quantifiée par  $\mu_i(\xi(t))$ .

## Estimation d'état à base de multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

## Estimation d'état à base de multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

## Application

Génération de résidus indicateurs de défaillance.

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

$$\begin{cases} r(t) = 0 & \text{en l'absence de défaut} \\ r(t) \neq 0 & \text{en présence de défaut} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

## Objectif

- Estimation d'états et de défauts à base de multimodèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

## Objectif

- Estimation d'états et de défauts à base de multimodèle

## Difficulté

- Variables de décision non mesurables i.e. :  $\xi(t) = x(t)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

## Objectif

- Estimation d'états et de défauts à base de multimodèle

## Difficulté

- Variables de décision non mesurables i.e. :  $\xi(t) = x(t)$ .

## Applications

- Application : diagnostic de défauts de capteurs (bancs d'observateurs)
- Application : diagnostic de défauts d'actionneurs (bancs d'observateurs)

# Estimation d'état et des défauts

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}) (A_i x + B_i u + E_i f) \quad y = Cx + Df + W\omega$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}) (A_i \mathbf{x} + B_i u + E_i f) \quad y = Cx + Df + W\omega$$

## Ré-écriture du multimodèle

$$\dot{x}_a = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\mathbf{x}}) (\bar{A}_i x_a + \bar{B}_i u + \bar{\Gamma} \bar{\omega}) \quad y = \bar{C} x_a + \bar{W} \bar{\omega}$$

où :

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix}, \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = [C \quad D], \bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\omega}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \bar{W} = [0 \quad W]$$

$$v = \sum_{i=1}^r (\mu_i(\mathbf{x}) - \mu_i(\hat{\mathbf{x}})) (A_i \mathbf{x} + B_i u + E_i f)$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}) (A_i x + B_i u + E_i f) \quad y = Cx + Df + W\omega$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}) (A_i x + B_i u + E_i f) \quad y = Cx + Df + W\omega$$

## Structure du multi-observateur PI

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_a &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}) (\bar{A}_i \hat{x}_a + \bar{B}_i u + K_i (y - \hat{y})) \\ \hat{y} &= \bar{C} \hat{x}_a \end{aligned}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{Pi} \\ K_{Ii} \end{bmatrix}, \quad x_a = \begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix}$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}) (A_i x + B_i u + E_i f) \quad y = Cx + Df + W\omega$$

## Structure du multi-observateur PI

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_a &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}) (\bar{A}_i \hat{x}_a + \bar{B}_i u + K_i (y - \hat{y})) \\ \hat{y} &= \bar{C} \hat{x}_a \end{aligned}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{Pi} \\ K_{Ii} \end{bmatrix}, \quad x_a = \begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix}$$

## Erreur d'estimation

$$\dot{e}_a = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}) \left( (\bar{A}_i - K_i \bar{C}) e_a + \bar{\Gamma} \omega \right)$$

## Théorème

- L'erreur d'estimation d'état (entre le multi-observateur et le multimodèle augmenté) converge asymptotiquement, s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X$ , des matrices  $M_i$  et un scalaire positif  $\bar{\sigma}$  telles :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T X + X \bar{A}_i - M_i \bar{C} - \bar{C}^T M_i + I & X \bar{\Gamma} - M_i \bar{W} \\ X \bar{\Gamma}^T - \bar{W}^T M_i^T & -\bar{\sigma} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r$$

- Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$K_i = X^{-1} M_i \quad (1)$$

- Le taux d'atténuation du bruit de mesure et de la perturbation sur l'erreur d'estimation d'état est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\bar{\sigma}} \quad (2)$$

- Dynamique de l'erreur d'estimation d'état :

$$\dot{e}_a = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}) \left( (\bar{A}_i - \mathcal{K}_i \bar{C}) e_a + \bar{\Gamma} \bar{w} \right) \quad (3)$$

- Analyse de l'erreur (fonction de Lyapunov) :

$$V(t) = e_a(t)^T X e_a(t), \quad X = X^T > 0 \quad (4)$$

- Le système (3) est stable avec une atténuation  $\sigma > 0$  de la norme  $\mathcal{L}_2$  du transfert de  $\bar{w}(t)$  vers  $e_a(t)$  si :

$$\dot{V}(t) + e_a(t)^T e_a(t) - \sigma^2 \bar{w}(t)^T \bar{w}(t) < 0 \quad (5)$$

- Dynamique de l'erreur d'estimation d'état :

$$\dot{e}_a = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}) \left( (\bar{A}_i - K_i \bar{C}) e_a + \bar{\Gamma} \bar{w} \right) \quad (3)$$

- Analyse de l'erreur (fonction de Lyapunov) :

$$V(t) = e_a(t)^T X e_a(t), \quad X = X^T > 0 \quad (4)$$

- Le système (3) est stable avec une atténuation  $\sigma > 0$  de la norme  $\mathcal{L}_2$  du transfert de  $\bar{w}(t)$  vers  $e_a(t)$  si :

$$\dot{V}(t) + e_a(t)^T e_a(t) - \sigma^2 \bar{w}(t)^T \bar{w}(t) < 0 \quad (5)$$

- Dynamique de l'erreur d'estimation d'état :

$$\dot{e}_a = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}) \left( (\bar{A}_i - K_i \bar{C}) e_a + \bar{\Gamma} \bar{w} \right) \quad (3)$$

- Analyse de l'erreur (fonction de Lyapunov) :

$$V(t) = e_a(t)^T X e_a(t), \quad X = X^T > 0 \quad (4)$$

- Le système (3) est stable avec une atténuation  $\sigma > 0$  de la norme  $\mathcal{L}_2$  du transfert de  $\bar{w}(t)$  vers  $e_a(t)$  si :

$$\dot{V}(t) + e_a(t)^T e_a(t) - \sigma^2 \bar{w}(t)^T \bar{w}(t) < 0 \quad (5)$$

Après calcul de  $\dot{V}$  et sa substitution dans : [Voir actes du colloque]

$$\dot{V}(t) + \mathbf{e}_a(t)^T \mathbf{e}_a(t) - \sigma^2 \bar{\mathbf{w}}(t)^T \bar{\mathbf{w}}(t) < 0 \quad (6)$$

on obtient :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \bar{\mathbf{w}} \end{bmatrix}^T \mathcal{M}_i \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \bar{\mathbf{w}} \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

où :

$$\mathcal{M}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i^T X + X \bar{\Phi}_i + I & X \bar{\Gamma} - X \bar{K}_i \bar{W} \\ \bar{\Gamma}^T X - \bar{W}^T \bar{K}_i^T X & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \quad (8)$$

Après calcul de  $\dot{V}$  et sa substitution dans : [Voir actes du colloque]

$$\dot{V}(t) + \mathbf{e}_a(t)^T \mathbf{e}_a(t) - \sigma^2 \bar{\mathbf{w}}(t)^T \bar{\mathbf{w}}(t) < 0 \quad (6)$$

on obtient :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \bar{\mathbf{w}} \end{bmatrix}^T \mathcal{M}_i \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \bar{\mathbf{w}} \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

où :

$$\mathcal{M}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i^T X + X \bar{\Phi}_i + I & X \bar{\Gamma} - X \bar{K}_i \bar{W} \\ \bar{\Gamma}^T X - \bar{W}^T \bar{K}_i^T X & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \quad (8)$$

- En utilisant la propriété de convexité des fonctions d'activation, la condition

$$\sum_{i=1}^r \mu_i \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \bar{\omega} \end{bmatrix}^T \mathcal{M}_i \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

est assurée si :

$$\begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{K}}_i \bar{\mathbf{C}})^T \mathbf{X} + \mathbf{X}(\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{K}}_i \bar{\mathbf{C}}) + I & \mathbf{X} \bar{\Gamma} - \mathbf{X} \bar{\mathbf{K}}_i \bar{\mathbf{W}} \\ \bar{\Gamma}^T \mathbf{X} - \bar{\mathbf{W}}^T \bar{\mathbf{K}}_i^T \mathbf{X} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} < 0, i \in \{1, \dots, r\} \quad (10)$$

- En utilisant les changements de variables :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{X} \bar{\mathbf{K}}_i \quad (11)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma^2 \quad (12)$$

on obtient les LMIs du théorème.

# Diagnostic à base de banc d'observateurs

- Considérons le multimodèle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + W\omega(t) \end{cases} \quad (13)$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

- Fonctions d'activation :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1 - \tanh((x_1 - 44)/11)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) \end{cases}$$

- Bruit de mesure  $\omega(t)$ , centré et d'amplitude maximale 0.5.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i^1 u_1(t) + B_i^2 u_2(t)) \\ y(t) = Cx(t) + W\omega(t) \end{cases} \quad (14)$$

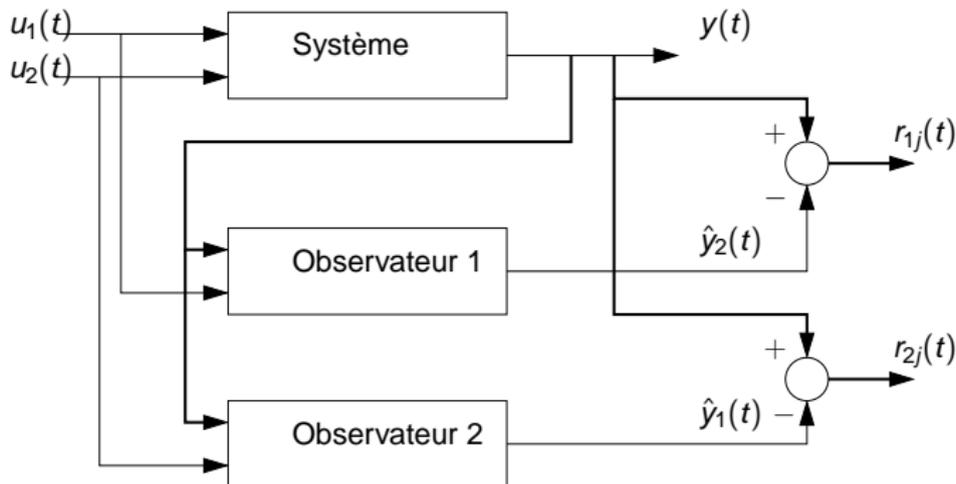


Figure: Schéma de détection et localisation de défauts d'actionneurs

- Génération des défauts

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.4u_1(t) & 15 < t < 25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0.4u_2(t) & 35 < t < 45 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Calcul des résidus à partir de l'observateur et des mesures

$$r_{ij}(t) = y_j(t) - \hat{y}_j^i(t)$$

où  $j \in \{1, 2\}$  désigne le numéro de l'observateur  
et  $i \in \{1, 2\}$  désigne le numéro de la sortie.

- Table de signatures théoriques des défauts actionneur

	Observateur 1		Observateur 2	
	$r_{11}$	$r_{21}$	$r_{12}$	$r_{22}$
défaut $f_1$ sur $u_1$	×	×	$\sim 0$	$\sim 0$
défaut $f_2$ sur $u_2$	$\sim 0$	$\sim 0$	×	×

- Génération des défauts

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.4u_1(t) & 15 < t < 25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0.4u_2(t) & 35 < t < 45 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Calcul des résidus à partir de l'observateur et des mesures

$$r_{ij}(t) = y_j(t) - \hat{y}_j^i(t)$$

où  $j \in \{1, 2\}$  désigne le numéro de l'observateur  
et  $i \in \{1, 2\}$  désigne le numéro de la sortie.

- Table de signatures théoriques des défauts actionneur

	Observateur 1		Observateur 2	
	$r_{11}$	$r_{21}$	$r_{12}$	$r_{22}$
défaut $f_1$ sur $u_1$	×	×	$\sim 0$	$\sim 0$
défaut $f_2$ sur $u_2$	$\sim 0$	$\sim 0$	×	×

- Génération des défauts

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.4u_1(t) & 15 < t < 25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0.4u_2(t) & 35 < t < 45 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Calcul des résidus à partir de l'observateur et des mesures

$$r_{ij}(t) = y_j(t) - \hat{y}_j^i(t)$$

où  $j \in \{1, 2\}$  désigne le numéro de l'observateur  
et  $i \in \{1, 2\}$  désigne le numéro de la sortie.

- Table de signatures théoriques des défauts actionneur

	Observateur 1		Observateur 2	
	$r_{11}$	$r_{21}$	$r_{12}$	$r_{22}$
défaut $f_1$ sur $u_1$	×	×	$\sim 0$	$\sim 0$
défaut $f_2$ sur $u_2$	$\sim 0$	$\sim 0$	×	×

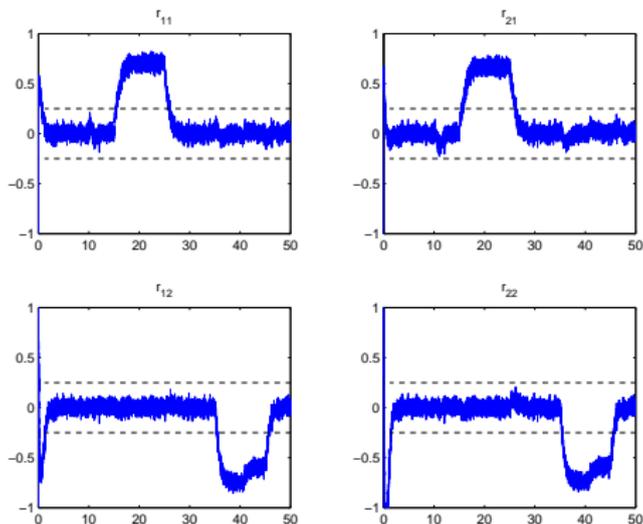


Figure: Résidus en présence des défauts  $f_1$  et  $f_2$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.3 & 10 < t < 20 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0.3 & 30 < t < 40 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

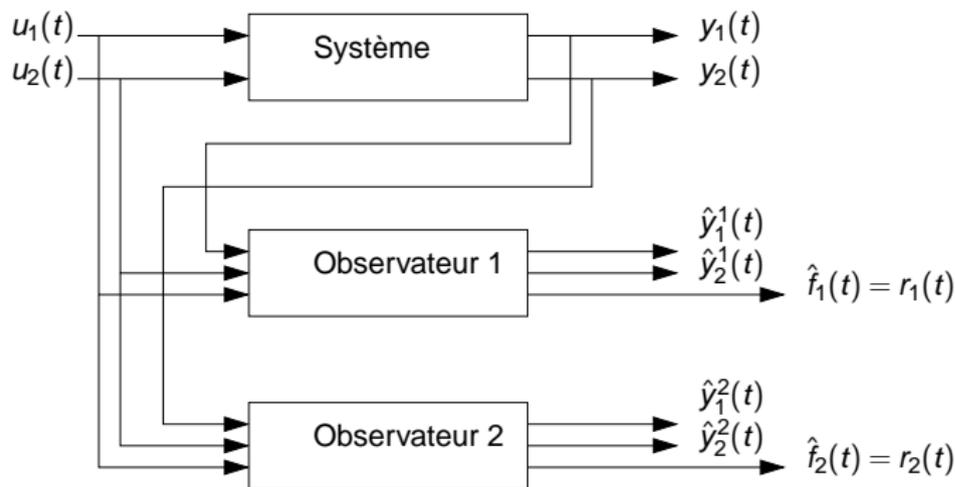


Figure: Schéma de détection et localisation de défauts de capteurs

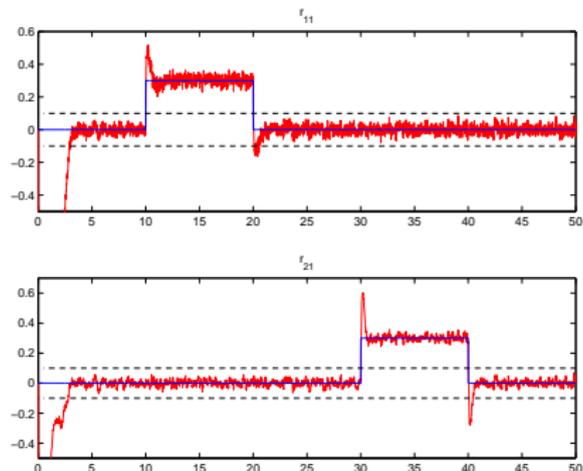


Figure: Résidus en présence des défauts capteurs  $f_1$  et  $f_2$

## Conclusions

- Conditions suffisantes de convergence de l'observateur sous forme LMI
- Estimation des états d'un système
- Génération d'indicateurs de défaillances par banc d'observateur
- Estimation des défauts d'un système.

## Perspectives

- Extension de la méthode aux systèmes à temps discret
- Conservatisme de la solution (utilisation d'autres fonctions de Lyapunov)
- Application à la surveillance d'un processus technologique.

## Conclusions

- Conditions suffisantes de convergence de l'observateur sous forme LMI
- Estimation des états d'un système
- Génération d'indicateurs de défaillances par banc d'observateur
- Estimation des défauts d'un système.

## Perspectives

- Extension de la méthode aux systèmes à temps discret
- Conservatisme de la solution (utilisation d'autres fonctions de Lyapunov)
- Application à la surveillance d'un processus technologique.

**Merci beaucoup de votre attention!**