# Conception d'observateurs pour un modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables

Dalil Ichalal, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR7039, Nancy-Université, CNRS
2, Avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandœuvre-Lès-Nancy Cedex, France

Huitième conférence internationale des Sciences et Techniques de l'Automatique STA'2007
05 – 07 novembre 2007, Sousse, Tunisie

Nancy-Université
INPL

# Plan


1. Introduction
   - Structure multi-modèle
   - Contexte de l'étude
2. Estimation d'état
3. Amélioration des performances de l'observateur
4. Exemple
5. Conclusion

# Plan


1. Introduction
   - Structure multi-modèle
   - Contexte de l'étude
2. Estimation d'état
3. Amélioration des performances de l'observateur
4. Exemple
5. Conclusion

# Plan


1. Introduction
   - Structure multi-modèle
   - Contexte de l'étude
2. Estimation d'état
3. Amélioration des performances de l'observateur
4. Exemple
5. Conclusion

# Plan

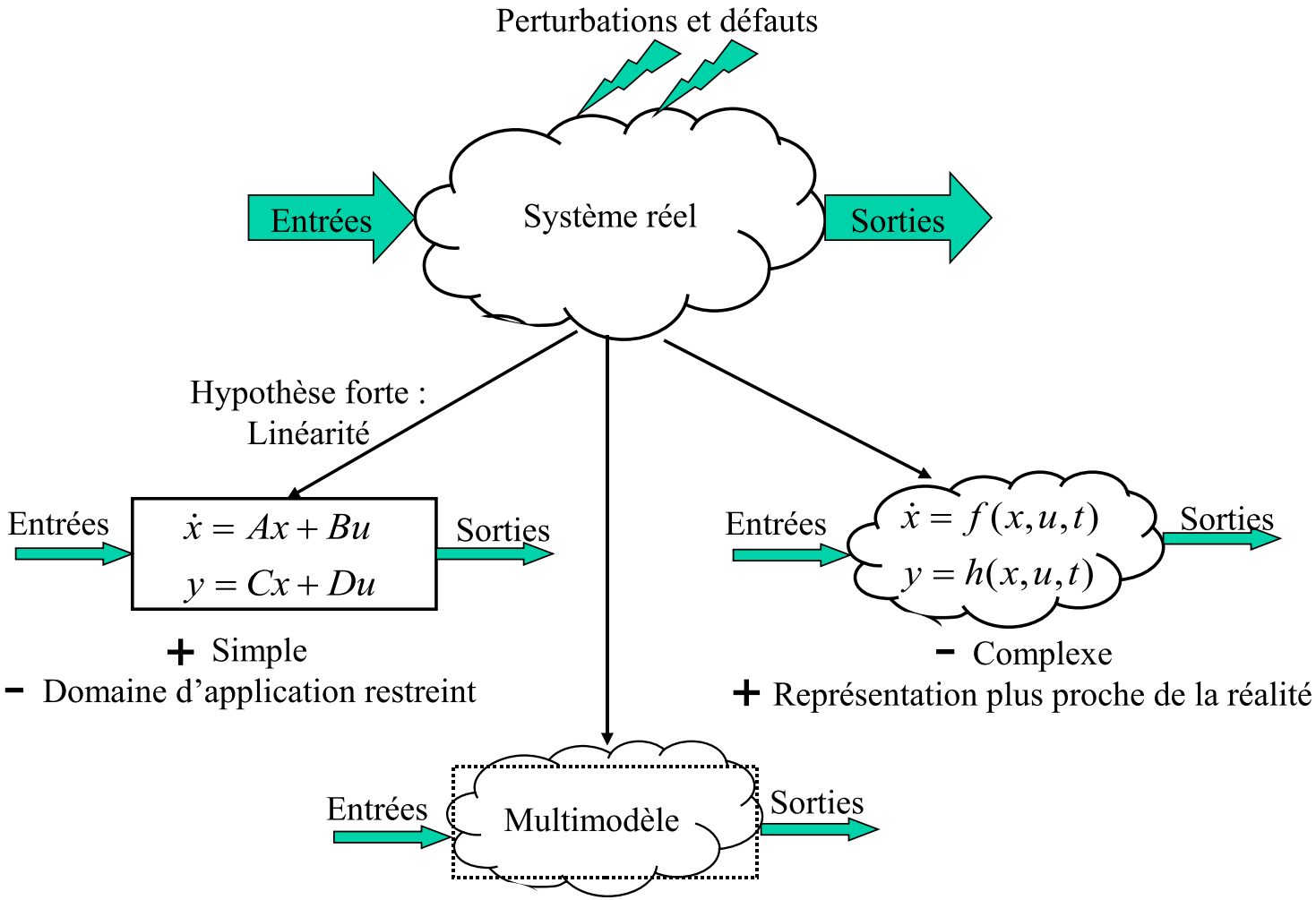

1. Introduction
   - Structure multi-modèle
   - Contexte de l'étude
2. Estimation d'état
3. Amélioration des performances de l'observateur
4. Exemple
5. Conclusion

# Plan


1. Introduction
   - Structure multi-modèle
   - Contexte de l'étude
2. Estimation d'état
3. Amélioration des performances de l'observateur
4. Exemple
5. Conclusion

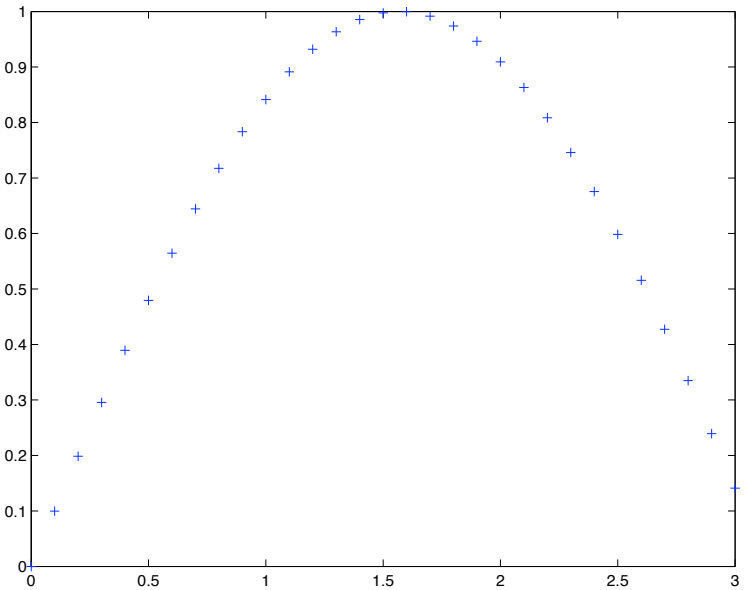
# Introduction

# Introduction

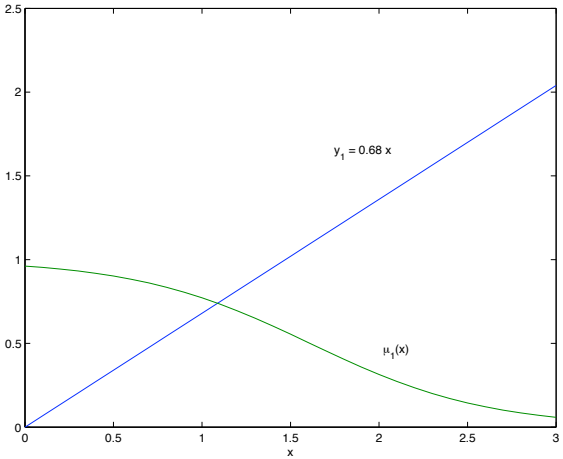


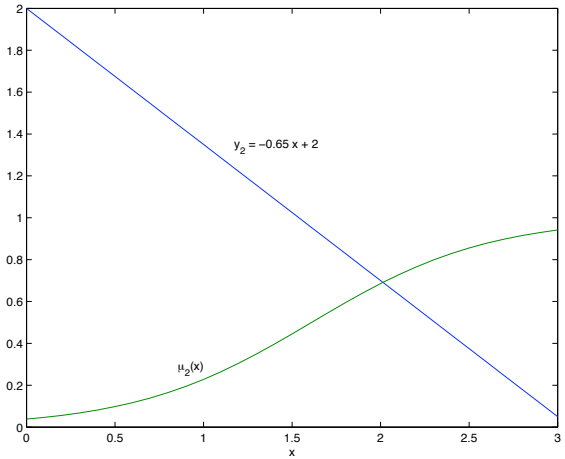
# Introduction: exemple cas statique

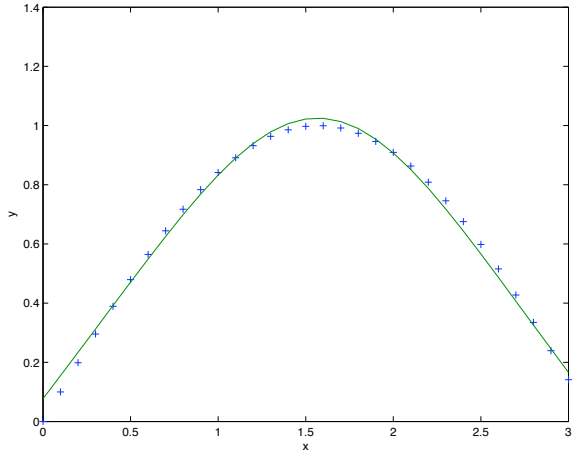
$$y = \sin(x)$$



# Introduction: exemple cas statique




$$y = \mu_1(x)y_1 + \mu_2(x)y_2$$

$$\mu_1(x) + \mu_2(x) = 1$$

$$0 \leq \mu_i(x) \leq 1$$

# Structure multimodèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

$$0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, i = 1, ...., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) = 1, \forall t$$

# Structure multimodèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

$$0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, i = 1, ...., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) = 1, \forall t$$

# Structure multimodèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

$$0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, i = 1, ...., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) = 1, \forall t$$

# Structure multimodèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

$$0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, i = 1, ...., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) = 1, \forall t$$

## Intérêt des multi-modèles

- Structure simple inspirée des systèmes linéaires.
- Possibilité de transposer les outils élaborés dans le cas des systèmes linéaires au cas non linéaire.

# Contexte de l'étude

## Conception d'observateur

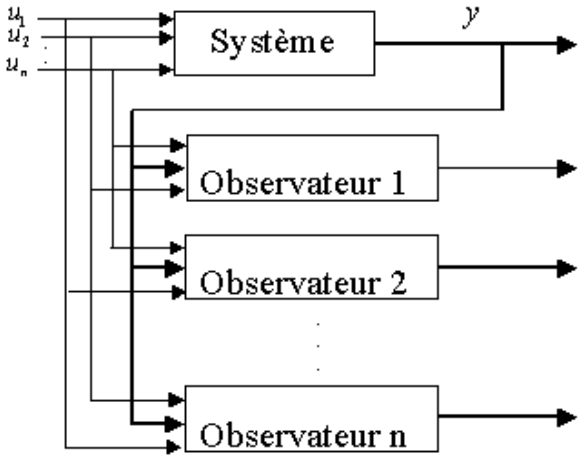
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) \left(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)\right) \end{cases}$$

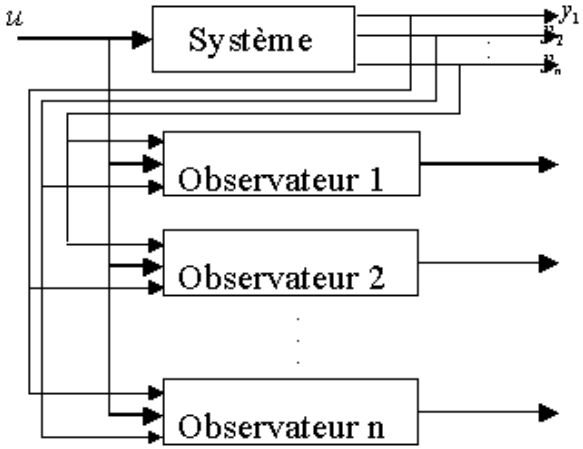
## Objectif

Synthétiser des observateurs pour pouvoir comparer le fonctionnement réel du système à son fonctionnement sain.

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

# Contexte de l'étude




## Défauts actionneurs

$$\xi(t) = y(t)$$

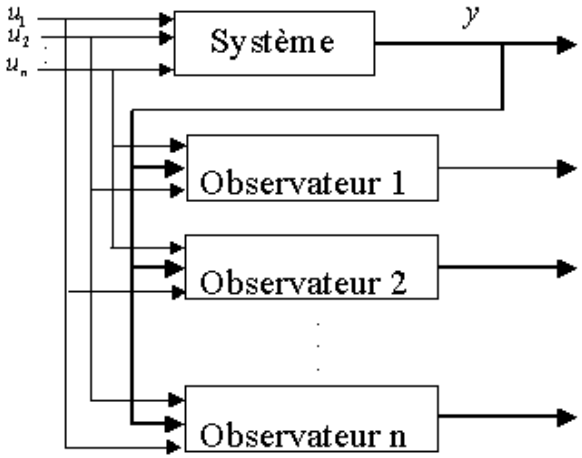
## Défauts capteurs

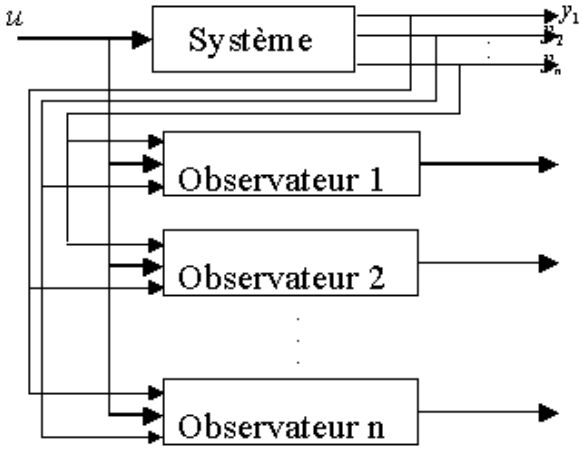
$$\xi(t) = u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t)\right)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) \left(C_i x(t) + D_i u(t)\right)$$

# Contexte de l'étude




## Défauts actionneurs

$$\xi(t) = y(t)$$

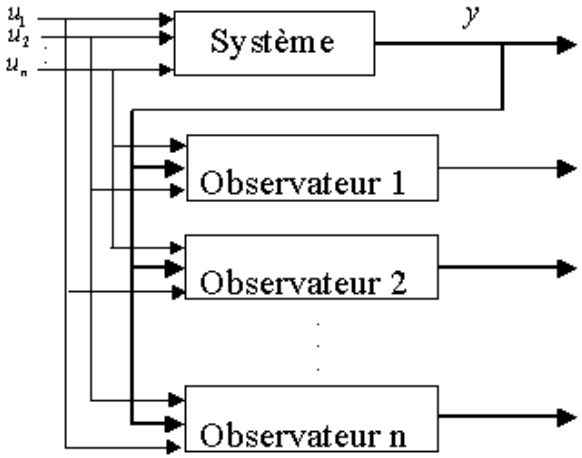
## Défauts capteurs

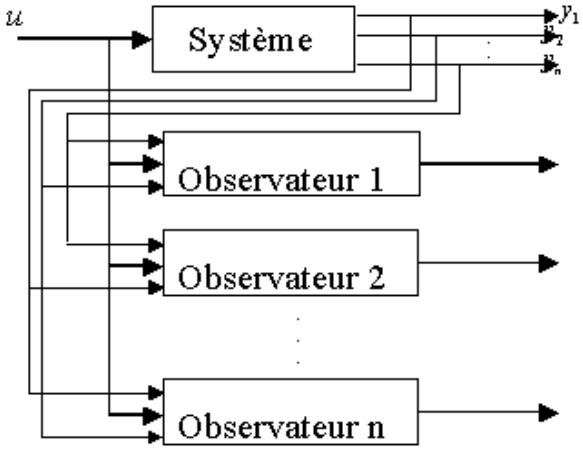
$$\xi(t) = u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) (C_i x(t) + D_i u(t))$$

# Contexte de l'étude




## Défauts actionneurs

$$\xi(t) = y(t)$$

## Défauts capteurs

$$\xi(t) = u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t))$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t))$$

# Contexte de l'étude

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t))$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t))$$

## Intérêt du multimodèle à variables de décision non mesurables

- Représentation d'une classe plus large de systèmes non linéaires.
- Un seul multimodèle suffit pour la conception de bancs d'observateurs pour la détection et la localisation de défauts de capteurs et d'actionneurs.

# Objectifs de l'étude

## Objectifs principaux

- Estimation d'état à base de multi-modèle à variables de décision non mesurables pour le diagnostic i.e. : $\xi(t) = x(t)$.
- Amélioration des performances de l'observateur par placement des pôles.

# Estimation d'état

## Multi-modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

## Multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

# Réécriture du multimodèle

- La borne sur l'état n'est pas souvent connue, d'où la nécessité de réécrire le système sous une autre forme.

## Réécriture du multimodèle sous une forme équivalente

$$A_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i = A_i - A_0 + A_0 \quad = \overline{A}_i + A_0$$

Le système s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))(\overline{A}_i x(t) + B_i u(t))$$
$$y(t) = Cx(t)$$

# Réécriture du multimodèle

- La borne sur l'état n'est pas souvent connue, d'où la nécessité de réécrire le système sous une autre forme.

## Réécriture du multimodèle sous une forme équivalente

$$A_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i = A_i - A_0 + A_0 \quad = \overline{A}_i + A_0$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))(\overline{A}_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad .$$

## Multi-modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))(\overline{A}_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

## Multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}(t))(\overline{A}_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

# Estimation d'état

l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d"état est :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x})(A_0 - G_i C)e + (\overline{A}_i(\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}) + B_i(\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u)$$

## Hypothèses 1

$$|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| \leq N_i |x - \hat{x}|$$
$$|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| \leq M_i |x - \hat{x}|$$
$$\|u(t)\| \leq \beta_2$$

## Deuxième méthode de Lyapunov

Considérons la fonction candidate de Lyapunov V(e(t)), où e(t) représente l'erreur d'estimation d'état

$$V(e(t)) = e(t)^T P e(t).$$

La convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro est assurée si:

1. $V(e(t)) > 0, \forall t$
2. $\dot{V}(e(t)) < 0, \forall t$

## Théorème 1 : Convergence asymptotique

L'erreur d'estimation d'état tend asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, $K_i$ et des scalaires positifs $\gamma$, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ tel que:

$$A_0^T P + P A_0 - C^T K_i^T - K_i C < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 M_i^2 I & P\bar{A}_i & PB_i & N_i \gamma I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ N_i \gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\gamma - \beta_2 \lambda_2 \geq 0$$

Les gains $G_i$ sont déduits à partir de $G_i = P^{-1} K_i$.

# Démonstration 1/3

## Fonction de Lyapunov quadratique

$$V(e) = e^T P e$$

## Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \Big( (A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) \Big) e \\ &+ 2e^T P \overline{A}_i \delta_i + 2e^T P B_i \Delta_i \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta_i &= \mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x} \\ \Delta_i &= (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u \end{aligned}$$

## Lemme

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \quad avec \quad \lambda > 0$$

# Démonstration 1/3

## Fonction de Lyapunov quadratique

$$V(e) = e^T P e$$

## Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \Big( (A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) \Big) e \\ &+ 2e^T P \overline{A}_i \delta_i + 2e^T P B_i \Delta_i \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta_i &= \mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x} \\ \Delta_i &= (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u \end{aligned}$$

Lemme

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \text{ avec } \lambda > 0$$

# Démonstration 1/3

## Fonction de Lyapunov quadratique

$$V(e) = e^T P e$$

## Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \Big( (A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) \Big) e \\ &+ 2e^T P \overline{A}_i \delta_i + 2e^T P B_i \Delta_i \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta_i &= \mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x} \\ \Delta_i &= (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u \end{aligned}$$

## Lemme

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \quad avec \quad \lambda > 0$$

# Démonstration 2/3

## Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \Big( (A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) \Big) e \\ &+ \lambda_1^{-1} e^T P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P e + \lambda_1 \delta_i^T \delta_i + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e + \lambda_2 \delta_i^T \delta_i\end{aligned}$$

La négativité de $\dot{V}$ est assurée si

$$\mu_i(\hat{x})((A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C)) + \lambda_1^{-1} P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta^2) I + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P < 0$$

En applicant le complément de Schur on obtient

$$(A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta^2) I & P\overline{A}_i & PB_i \\ \overline{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

# Démonstration 2/3

## Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \Big( (A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) \Big) e \\ &+ \lambda_1^{-1} e^T P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P e + \lambda_1 \delta_i^T \delta_i + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e + \lambda_2 \delta_i^T \delta_i\end{aligned}$$

## La négativité de $\dot{V}$ est assurée si

$$\mu_i(\hat{x})((A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C)) + \lambda_1^{-1} P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta^2) I + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P < 0$$

## En applicant le complément de Schur on obtient

$$(A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta^2) I & P\overline{A}_i & PB_i \\ \overline{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

# Démonstration 2/3

## Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \left( (A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) \right) e \\ &+ \lambda_1^{-1} e^T P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P e + \lambda_1 \delta_i^T \delta_i + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e + \lambda_2 \delta_i^T \delta_i\end{aligned}$$

## La négativité de $\dot{V}$ est assurée si

$$\mu_i(\hat{x})((A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C)) + \lambda_1^{-1} P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta^2) I + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P < 0$$

## En applicant le complément de Schur on obtient

$$(A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta^2) I & P\overline{A}_i & PB_i \\ \overline{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

# Démonstration 3/3

Pour ajouter un degré de liberté à l'algorithme, on considère la borne de l'entrée comme variable à déterminer. Par un changement de variable $\gamma = \lambda_2 \rho$, on obtient la condition sur la borne de l'entrée :

$$\gamma - \lambda_2 \beta_2 \geq 0$$

Et finalement un changement de variable $K_i = PG_i$, et l'application du complement de Schur permettent d'avoir les conditions de convergence données sous forme d'inégalités linéaires matricielles du théorème 1, qu'on peut résoudre avec les logiciels classiques (Matlab: toolbox LMI).

# Amélioration des performances de l'observateur

# Placement des pôles

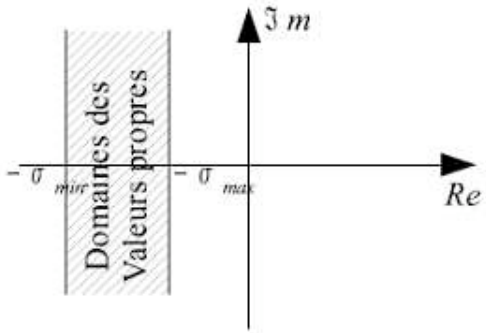



Fig.1 : Région S1

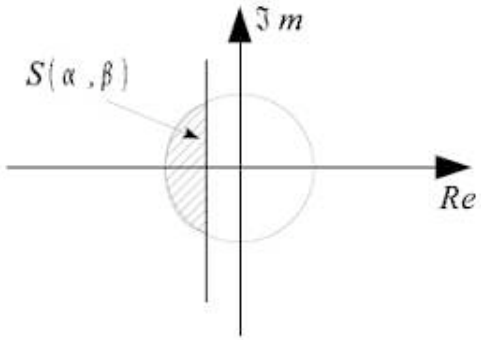


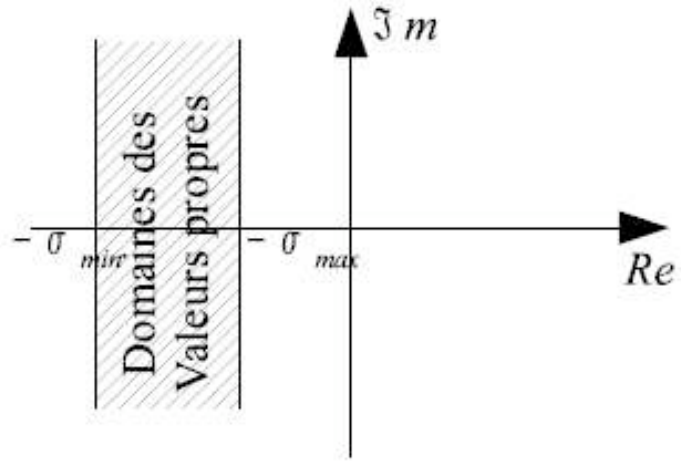

Fig.2 : Région S2

## Objectif

Permettre de placer les valeurs propres de l'observateur dans les régions LMI pour pouvoir :

1. Augmenter la vitesse de convergence de l'observateur et d'éviter la reconstruction du bruit de mesure
2. Limiter les parties imaginaires des pôles pour limiter le phénomène oscillatoire

# Placement des pôles dans la région $S_1$




Les valeurs propre de la matrice X sont dans la région $S_1$ si :

$$(X - \sigma_{\min} I)^T P + P(X - \sigma_{\min} I) < 0$$
$$-(X - \sigma_{\max} I)^T P - P(X - \sigma_{\max} I) < 0$$

## Théorème 2 : Placement des pôles dans la région $S_1$

L'erreur d'estimation d'état tend asymptotiquement vers zéro et $\lambda(A_0 - G_i C) \in S_1$, s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, $K_i$, et des scalaires positifs $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\gamma$ tels que :

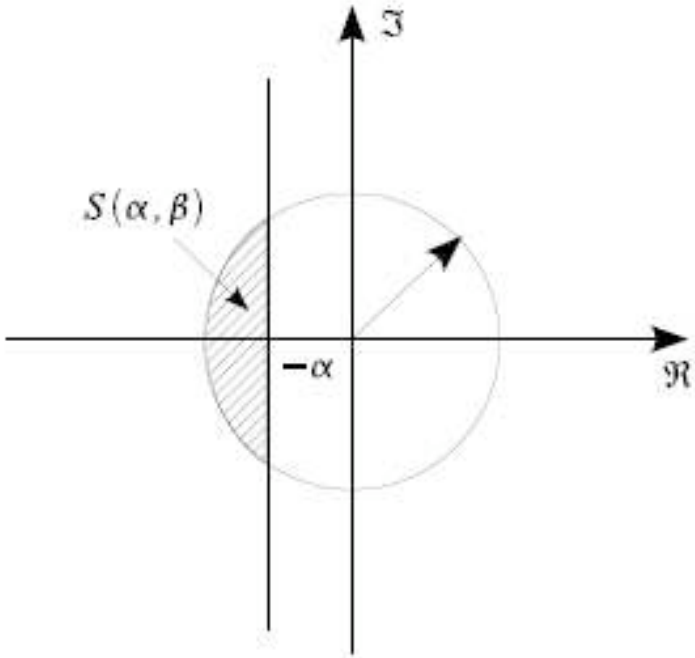
$$A_0^T P + P A_0 - K_i^T P - P K_i + 2\sigma_{max} P < -Q$$

$$-\left(A_0^T P + P A_0 - K_i^T P + P K_i + 2\sigma_{min} P\right) < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 M_i^2 I & P\bar{A}_i & PB_i & N_i \gamma I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ N_i \gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\gamma - \beta_1 \lambda_2 > 0$$

# Placement des pôles dans la région $S_2$




Les valeurs propre de la matrice X sont dans la région $S_2$ si :

$$(X-\alpha I)^T P + P(X-\alpha I) < 0$$

$$\begin{bmatrix} \beta P & PX \\ X^T P & \beta P \end{bmatrix} < 0$$

## Théorème 3 : Placement des pôles dans la région $S_2$

L'erreur d'estimation d'état tend asymptotiquement vers zéro et $\lambda(A_0 - G_i C) \in S_2$, s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, $K_i$, et des scalaires positifs $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\gamma$ tels que :

$$\begin{bmatrix} \beta P & P(A_0 - G_i C) \\ (A_0 - G_i C)^T P & \beta P \end{bmatrix} > 0$$

$$A_i^T P + P A_i - C^T K_i^T - K_i C + 2\alpha P < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 M_i^2 I & P\overline{A_i} & PB_i & N_i \gamma I \\ \overline{A_i}^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ N_i \gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\gamma - \beta_1 \lambda_2 \geq 0$$

# Exemple

# Exemple

Considérons le multimodèle suivant avec $n = 2$ modèles locaux, défini par les matrices $A_i$, $B_i$ et $C$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T, B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.25 \end{bmatrix}^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Exemple

Considérons le multimodèle suivant avec $n = 2$ modèles locaux, défini par les matrices $A_i$, $B_i$ et $C$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T, B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.25 \end{bmatrix}^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Fonctions d'activation :

$$\mu_1(x) = \frac{1-\tanh(x_1)}{2}$$
$$\mu_2(x) = 1 - \mu_1(x)$$

# Exemple

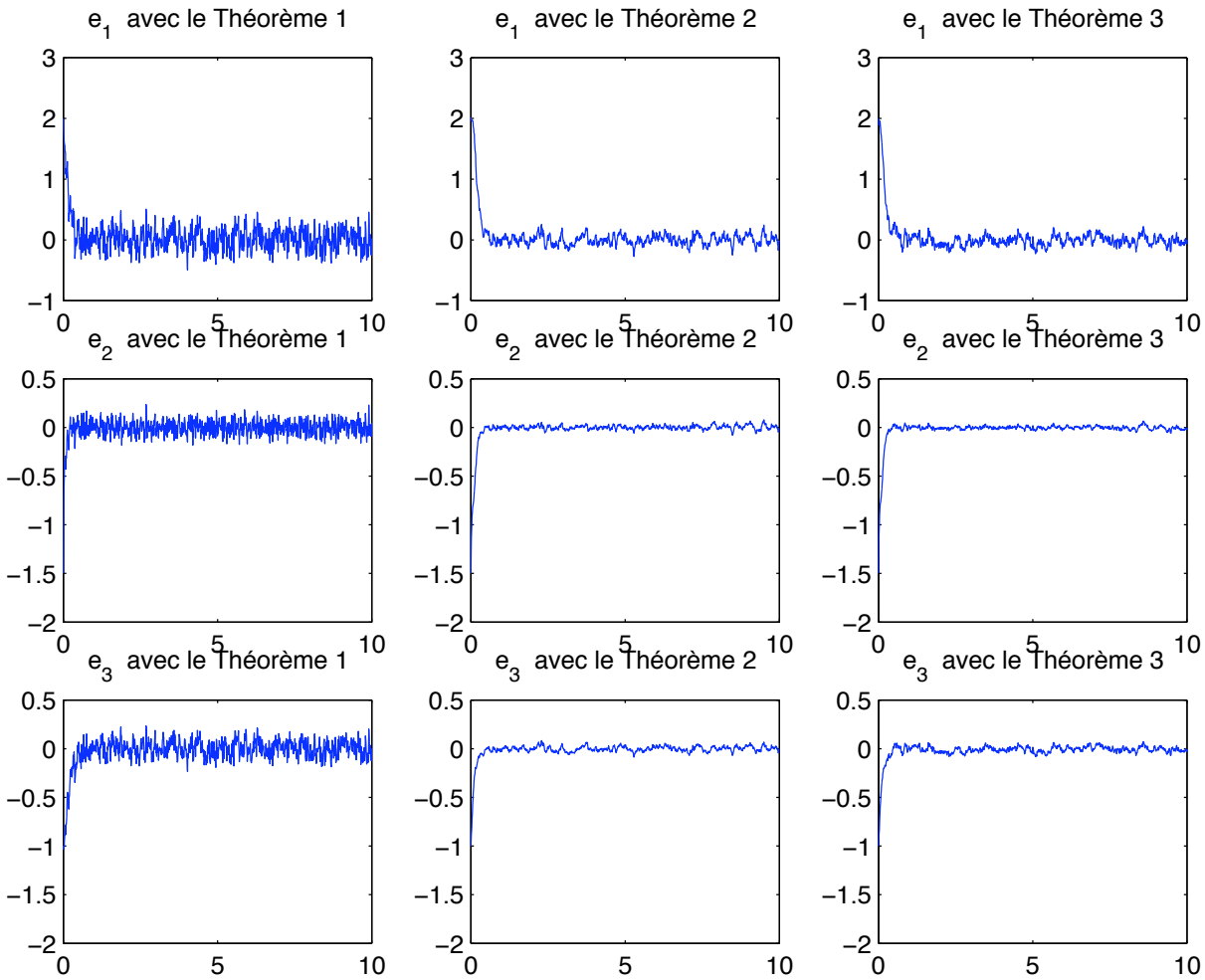



Figure: Erreur d'estimation d'état

## Conclusions

- Représentation des systèmes non linéaires sous forme multi-modèle à variables de décisions non mesurables pour l'élaboration d'observateurs non linéaires.
- Des conditions suffisantes de convergence de l'observateurs ont été présentées sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMI).
- Amélioration des performances de l'observateur par placement des pôles (vitesse de convergence, limitation de la reconstruction du bruit de mesure, limitation du phénomène oscillatoire).

# Conclusions et perspectives

## Perspectives

- Applications du multi-observateur au diagnostic des systèmes non linéaires.
- Extension de la méthode au cas des systèmes à temps discret.
- Élaboration d'une méthode d'estimation d'état qui s'affranchit des problèmes induits par l'apparition des constantes de Lipschitz ainsi que la borne sur l'entrée.
- Extension de l'observateur pour l'estimation des entrées inconnues.

**Merci beaucoup de votre attention!**