

# Identification par la méthode des sous-espaces : utilisation des paramètres de Markov

K. MIDZODZI PEKPE, KOMI GASSO, GILLES MOUROT ET JOSE RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy-CNRS UMR 7039  
2, Avenue de la Forêt de Haye 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex France  
(33) 3 83 59 57 04, Fax (33) 3 83 59 56 44

{kpekpe, ggasso, gmourot, jragot}@ensem.inpl-nancy.fr

**Résumé**— Contrairement à la plupart des méthodes des sous-espaces qui se basent sur l'estimation de la matrice d'observabilité et/ou des séquences d'état, cet article propose une nouvelle approche, qui se base uniquement sur une estimation de la matrice de Toeplitz inférieure. Cette approche utilisant les paramètres de Markov conduit à une réalisation minimale et équilibrée. Une technique utilisant la méthode des variables instrumentales est aussi présentée. Des simulations de Monte Carlo illustrant les performances des méthodes terminent l'article.

**Mots clés**— identification, systèmes linéaires discrets, projections oblique et orthogonale, variable instrumentale, paramètres de Markov.

## I. INTRODUCTION

Les techniques d'identification dites des sous-espaces permettent d'identifier un modèle d'état des systèmes linéaires MIMO directement à partir des mesures des entrées et des sorties. Se basant sur les projections des sous-espaces engendrés par les lignes des matrices de Hankel d'entrée et de sortie (construites à partir des données), les techniques des sous-espaces permettent de déterminer l'ordre et une réalisation du système.

La plupart des méthodes des sous-espaces passent par une étape de détermination de la matrice d'observabilité et de la matrice des séquences d'état [5].

Cet article présente une nouvelle approche des méthodes des sous-espaces. Elle s'appuie uniquement sur la détermination de la matrice de Toeplitz inférieure obtenue par les projections des sous-espaces engendrés par les données. L'identification du système se fait en utilisant les paramètres de Markov contenus dans cette matrice. L'utilisation des paramètres de Markov pour l'identification des systèmes a été étudiée par Bingulac et Al-Muthairi [1]. Mais l'approche utilisée ici n'est pas la même et en outre, leur technique est itérative et d'une mise en œuvre difficile.

Après avoir introduit le problème de l'identification, on définit les notations et les matrices du système. Dans un premier temps, la résolution du problème est faite dans le cas déterministe, puis dans le cas stochastique. Dans ce dernier cas deux méthodes d'identification sont proposées dont l'une d'elle, de type variable instrumentale, est applicable dans le cas où les bruits du système et de sorties sont colorés centrés. Enfin, les deux techniques d'identification des systèmes stochastiques établies dans cet article sont testées sur un exemple de simulation et comparées aux résultats obtenus par une variante de l'algorithme MOESP (une des techniques classiques des

sous-espaces), appelé algorithme d'identification robuste proposé dans [5].

## II. POSITION DU PROBLEME

On suppose qu'on dispose de  $h$  mesures des entrées  $u_k \in \mathbb{R}^m$  et des sorties  $y_k \in \mathbb{R}^1$  d'un système linéaire discret d'ordre  $n$  inconnu :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fe_k \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + Ge_k \quad (2)$$

avec  $e_k \in \mathbb{R}^1$  bruit blanc décorrélé avec  $u_k$ . L'objectif est de déterminer :

- ♦ l'ordre inconnu  $n$  du système,
- ♦ une réalisation  $(A, B, C, D)$  du système.

L'identification de ce système par la méthode des sous-espaces nécessite des écritures matricielles obtenues par "empilement" des équations d'état. Ces écritures font appel à des matrices particulières dont la définition est précisée dans la section qui suit. On y expose aussi les méthodes de projections.

## III. DEFINITIONS

### A. Matrices du système

#### 1. Matrices de Hankel relatives aux signaux

Disposant de  $h = j+2i-2$  mesures des entrées, on construit la matrice de Hankel des entrées  $U \in \mathbb{R}^{2mi \times j}$ . Cette matrice est subdivisée en deux matrices de dimensions égales  $U_p \in \mathbb{R}^{mi \times j}$  (matrice de Hankel du passé) et  $U_f \in \mathbb{R}^{mi \times j}$  (matrice de Hankel du futur) :

$$U \equiv \begin{pmatrix} U_p \\ U_f \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_j \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ u_{i-1} & u_i & \dots & u_{i+j-2} \\ u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+j} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ u_{2i-1} & u_{2i} & \dots & u_{2i+j-2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Une définition similaire est donnée pour la sortie  $Y_p \in \mathbb{R}^{1i \times j}$ ,  $Y_f \in \mathbb{R}^{1i \times j}$  et pour le bruit  $E_p \in \mathbb{R}^{1i \times j}$ ,  $E_f \in \mathbb{R}^{1i \times j}$ .

#### 2. Matrice des séquences d'état

La matrice des séquences d'état  $X_k$  est définie par un empilement des états sur un horizon d'amplitude  $j$  et débutant à l'instant  $k$  :

$$X_k \equiv (x_k \ x_{k+1} \ \dots \ x_{k+j-2} \ x_{k+j-1}) \in \mathbb{R}^{n \times j}. \quad (4)$$

La matrice des séquences d'état passé  $X_p$  correspond à  $k=0$  et celle des séquences d'état futur  $X_f$  est obtenue en posant  $k=i$ .

### 3. Matrices liées aux paramètres du système

Les matrices de contrôlabilité rebours d'ordre  $i$  de la partie déterministe du système  $\Delta_i^d$  et de la partie stochastique du système  $\Delta_i^s$  sont respectivement définies par :

$$\Delta_i^d \equiv (A^{i-1}B \ A^{i-2}B \ \dots \ AB \ B) \in \mathbb{R}^{n \times mi} \quad (5)$$

$$\Delta_i^s \equiv (A^{i-1}G \ A^{i-2}G \ \dots \ AG \ G) \in \mathbb{R}^{n \times li} \quad (6)$$

La paire  $\{A, B\}$  sera supposée commandable ce qui implique que la matrice de contrôlabilité  $\Delta_i^d$  est de plein rang ligne.

Noter que les inscriptions 's' et 'd' mises en exposant signifient respectivement stochastique et déterministe.

La matrice de commandabilité d'ordre  $i$  est définie par :

$$C_i = (B \ AB \ \dots \ A^{i-2}B \ A^{i-1}B) \quad (7)$$

On notera par  $\Gamma_i$ , la matrice d'observabilité d'ordre  $i$  :

$$\Gamma_i = (C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^{i-1})^T)^T \in \mathbb{R}^{li \times n}. \quad (8)$$

Dans la suite, la paire  $\{A, C\}$  sera supposée observable, ce qui implique que la matrice d'observabilité  $\Gamma_i$  est de plein rang colonne.

Les matrices de Toeplitz inférieure de la partie déterministe du système  $H_i^d$  et de la partie stochastique du système  $H_i^s$  sont respectivement définies par :

$$H_i^d = \mathcal{H}_i^d(A, B, C, D) \quad (9)$$

$$H_i^s = \mathcal{H}_i^s(A, F, C, G) \quad (10)$$

$$\text{avec : } \mathcal{H}_i(A, B, C, D) \equiv \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & D & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & CB & D \end{pmatrix}$$

### B. Définition des projections

La projection orthogonale de l'espace engendré par les lignes de la matrice  $A$  sur le noyau des lignes de la matrice  $B$  sera notée par :

$$A / B^\perp = A \Pi_{B^\perp} \quad (11)$$

$$\Pi_{B^\perp} = I - B^T (BB^T)^{(-)} B \quad (12)$$

où  $G^{(-)}$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de  $G$ .

La projection oblique de l'espace engendré par les lignes de la matrice  $A$  sur l'espace engendré par les lignes de la matrice  $B$  parallèlement à l'espace engendré par les lignes de la matrice  $C$  est donnée par :

$$A /_C B = A \Pi_{C^\perp} (B \Pi_{C^\perp})^{(-)} B \quad (13)$$

## IV. EMPILEMENT DES EQUATIONS D'ETAT

Des équations (1) et (2), on déduit les relations suivantes qui font appel aux matrices définies précédemment [5] :

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i^d U_p + H_i^s E_p \quad (14)$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f + H_i^d U_f + H_i^s E_f \quad (15)$$

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i^d U_p + \Delta_i^s E_p \quad (16)$$

D'autre part, on peut écrire la matrice des séquences d'état  $X_f$  comme étant :

$$X_f = L_p W_p + L_p^s E_p \quad (17)$$

$$W_p = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{mi} & 0 & 0 \\ H_i^d & \Gamma_i & H_i^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p \\ X_p \\ E_p \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$L_p = (\Delta_i^d - A^i \Gamma_i^{(-)} H_i^d \mid A^i \Gamma_i^{(-)}) \quad (19)$$

$$L_p^s = \Delta_i^s - A^i \Gamma_i^{(-)} H_i^s \quad (20)$$

## V. ESTIMATION DE LA MATRICE DE TOEPLITZ

L'objectif de l'approche proposée est d'extraire la matrice  $H_i^d$  de l'équation (15) par une projection appropriée permettant d'éliminer les états et de réduire l'effet du bruit. La connaissance de cette matrice permet d'identifier aisément le système. En effet, la matrice  $H_i^d$  contient la matrice  $D$  et les paramètres de Markov du système, à partir desquels on déduit l'ordre et les autres matrices ( $A, B, C$ ) du système. Les méthodes classiques des sous-espaces quant à elles se basent sur l'estimation du terme  $\Gamma_i X_f$  [5]. On s'intéressera dans cette section à l'estimation de la matrice de Toeplitz inférieure  $H_i^d$ .

### A. Cas déterministe

Dans cette partie, l'estimation de la matrice de Toeplitz  $H_i^d$  est faite dans le cas purement déterministe. Cela entraîne que les matrices  $E_p$  et  $E_f$  sont nulles dans les équations (14) à (18).

La proposition qui suit nous permet d'obtenir la matrice  $H_i^d$ .

#### Proposition 1

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) l'entrée est d'excitation persistante d'ordre  $2i$  (voir [5]),
- 2) l'intersection des espaces engendrés par les lignes de  $U_f$  et de  $X_p$  est vide,

alors nous avons :

$$H_i^d = Y_f \Pi_{W_p^\perp} (U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)} \quad (21)$$

#### Démonstration

En remplaçant  $X_f$  par son expression de l'équation (17) dans l'équation (15), on trouve :

$$Y_f = \Gamma_i L_p W_p + H_i^d U_f$$

En multipliant cette expression par  $\Pi_{W_p^\perp}$ , on trouve :

$$Y_f \Pi_{W_p^\perp} = \Gamma_i L_p W_p \Pi_{W_p^\perp} + H_i^d U_f \Pi_{W_p^\perp}$$

Pour obtenir la matrice  $H_i^d$  il suffit de multiplier cette nouvelle relation par  $(U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)}$  :

$$Y_f \Pi_{W_p^\perp} (U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)} = H_i^d \quad (22)$$

L'égalité :  $U_f \Pi_{W_p^\perp} (U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)} = I$  utilisée dans la ligne précédente est démontrée ci-dessous.

D'après l'équation (18), comme les lignes de  $U_f$  sont indépendantes de celles de  $U_p$  et que l'intersection des espaces engendrés par les lignes de  $U_f$  et de  $X_p$  est vide, on a :  $\text{rang}(U_f) = \text{rang}(U_f \Pi_{W_p^\perp})$ .

Comme  $U_f$  est de plein rang ligne (condition de persistance de l'entrée),  $U_f \Pi_{W_p^\perp}$  l'est aussi, d'où :  $U_f \Pi_{W_p^\perp} (U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)} = I$ .

### B. Cas stochastique

Nous supposons dans cette partie le bruit  $e_k$  ergodique et stationnaire, et l'entrée  $u_k$  sera pris comme étant une séquence arbitraire stationnaire et ergodique.

#### 1. Première méthode

Dans le cas stochastique, l'estimation de la matrice de Toeplitz donnée par la proposition 1 est altérée par un terme dépendant du bruit, c'est ce que prouve la démonstration suivante.

De (15) et (17), on a :

$$Y_f = \Gamma_i L_p W_p + H_i^d U_f + H_i^s E_f + \Gamma_i L_p^s E_p \quad (23)$$

Posons :  $\Gamma_i L_p^s E_p + H_i^s E_f = L^s E$ ,

avec :  $E = \begin{pmatrix} E_p \\ E_f \end{pmatrix}$  et  $L^s = (\Gamma_i L_p^s \quad H_i^s)$ .

L'équation (23) se réécrit alors :

$$Y_f = \Gamma_i L_p W_p + H_i^d U_f + L^s E \quad (24)$$

En multipliant l'équation (24) par  $\Pi_{W_p^\perp}$ , on obtient :

$$Y_f \Pi_{W_p^\perp} = \Gamma_i L_p W_p \Pi_{W_p^\perp} + H_i^d U_f \Pi_{W_p^\perp} + L^s E \Pi_{W_p^\perp}$$

Si on multiplie cette nouvelle expression par  $(U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)}$ , on

obtient :  $Y_f \Pi_{W_p^\perp} (U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)} = H_i^d + L^s E \Pi_{W_p^\perp} (U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)}$

$$\tilde{H}_i^d = H_i^d + L^s E \Pi_{W_p^\perp} (U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)} \quad (25)$$

Le terme  $L^s E \Pi_{W_p^\perp} (U_f \Pi_{W_p^\perp})^{(-)}$  montre l'influence du bruit dans l'estimation de la matrice  $H_i^d$ .

#### Remarque

On peut démontrer dans le cas où le signal d'entrée  $u_k$  est un bruit blanc ou a une fonction d'autocorrélation périodique, la convergence de la matrice  $\tilde{H}_i^d$  vers  $H_i^d$  quand  $j$  tend vers l'infini.

#### 2. Deuxième méthode (variable instrumentale)

L'objectif recherché ici est d'éliminer asymptotiquement les effets du bruit par une projection appropriée. Les entrées étant supposées déterministes et décorréliées des bruits, il est approprié de les utiliser comme instrument.

En remplaçant  $X_f$  par son expression (16) dans l'équation (15), on obtient en posant  $L = (\Gamma_i \Delta_i^s \quad H_i^s)$  :

$$Y_f = \Gamma_i A^i X_p + \Gamma_i \Delta_i^d U_p + H_i^d U_f + L E \quad (26)$$

Si on projette l'espace engendré par les lignes de  $Y_f$  parallèlement à l'espace engendré par les lignes de  $U_p$  sur l'espace formé par les lignes de  $U_f$ , le terme  $\Gamma_i \Delta_i^d U_p$  dans l'équation (26) est annulé (propriété de la projection oblique) alors que le terme  $\Gamma_i A^i X_p$  demeure. L'idée est de trouver une projection qui réduit la contribution de ce terme. Pour cela on exprime la matrice des séquences d'état passé  $X_p$  en fonction des entrées. Pour se faire nous allons écrire d'abord les états en fonction des entrées.

Soit  $x_q = x_q^d + x_q^s$ . En supposant l'état initial  $x_0$  nul, on peut écrire pour  $q > 0$  :

$$x_q^d = A^{q-1} B u_0 + A^{q-2} B u_1 + \dots + A B u_{q-2} + B u_{q-1}$$

$$\text{ou : } x_q^d = \Delta_q^d \begin{pmatrix} u_0 \\ \mathbf{M} \\ u_{q-1} \end{pmatrix}; \text{ on a de même : } x_q^s = \Delta_q^s \begin{pmatrix} e_0 \\ \mathbf{M} \\ e_{q-1} \end{pmatrix} \quad (27)$$

avec les définitions (5) et (6) de  $\Delta_q^d$  et  $\Delta_q^s$ .

La matrice des séquences d'état passé  $X_p^d = (x_0^d \quad x_1^d \quad \dots \quad x_{j-1}^d)$  devient alors :

$$X_p^d = \begin{pmatrix} A^{j-2} B & A^{j-1} B & \dots & B \end{pmatrix} \bar{U} \quad (28)$$

avec :

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & u_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & u_0 & u_1 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_0 & \dots & u_{j-k-4} & u_{j-k-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_0 & u_1 & \dots & u_{j-k-3} & u_{j-k-2} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & u_0 & \dots & u_{k-2} & u_{k-1} & \dots & u_{j-4} & u_{j-3} \\ 0 & u_0 & u_1 & \dots & u_{k-1} & u_k & \dots & u_{j-3} & u_{j-2} \end{pmatrix}$$

$$X_p^d = \Delta_{j-1}^d \begin{pmatrix} \bar{U}_k \\ \bar{U}_k \end{pmatrix} = \Delta_{j-1}^d \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{U}_k \end{pmatrix} + \Delta_{j-1}^d \begin{pmatrix} \bar{U}_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $\bar{U}_k$  contient les  $j-k$  premières lignes de  $\bar{U}$  et  $\bar{U}_k$  ses  $k$  dernières.

Or pour un système stable,  $A^q$  tend vers zéro quand  $q$  tend vers l'infini. Les termes  $A^q B$  deviennent donc négligeables à partir d'un ordre  $k$  donné et donc les lignes correspondantes ont une contribution négligeable dans l'écriture de  $X_p$ .

Calculons l'erreur commise si on tronque à un ordre  $k$  donné le calcul d'un état  $x_r^d$  quelconque :

$$x_r^d = A^{r-1} B u_0 + A^{r-2} B u_1 + \dots + A^k B u_{r-k} + A^{k-1} B u_{r-k+1} + \dots + A B u_{r-2} + B u_{r-1}$$

$$\text{avec : } \|\varepsilon_r^k\| < (\|A\|^{r-k-1} + \|A\|^{r-k-2} + \dots + I)\|A\|^k\|B\|u_{\max}$$

$$\|\varepsilon_r^k\| < (I - \|A\|)^{-1}\|A\|\|B\|u_{\max} = \varepsilon_k$$

Avec  $\|\cdot\|$  une norme multiplicative. On peut donc rendre le terme  $\varepsilon^k$  aussi petit que l'on veut par un choix approprié de  $k$ . Ceci entraîne qu'on peut écrire pour la matrice des séquences d'état :

$$\|X_p^d - \bar{X}_p^k\|_{\infty} < \varepsilon_k \quad (29)$$

Si on néglige les termes inférieurs à  $\varepsilon_k$  on peut écrire :

$$X_p^d \approx \bar{X}_p^k = \Delta_{j-1}^d \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{U}_k \end{pmatrix}.$$

L'objectif recherché dans la suite est de projeter l'espace engendré par les lignes de  $Y_f$  parallèlement à l'espace engendré par  $\bar{U}_k$  afin d'éliminer  $\bar{X}_p^k$ ; il ne restera qu'un terme majoré par  $\varepsilon_k$ . Nous utiliserons alors comme instrument la matrice de Hankel des sorties passées  $U_p$  et la matrice  $\bar{U}_k$  qui sont décorréliées avec les bruits. Adoptons la notation :  $\tilde{U}_p^k = (\bar{U}_k^T \ U_p^T)^T$ . Il faut préciser que les lignes de  $\tilde{U}_p^k$  doivent être indépendantes de celles de  $U_f$  pour pouvoir réaliser la projection oblique.

$$Y_f \approx \Gamma_i A^i \Delta_{j-1}^d \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{U}_k \end{pmatrix} + \Gamma_i \Delta_i^d U_p + H_i^d U_f + LE + \Gamma_i A^i X_p^s$$

En multipliant cette ligne par  $\Pi_{\tilde{U}_p^\perp}$ , on a :

$$\begin{aligned} Y_f \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} &\approx \Gamma_i A^i \Delta_{j-1}^d \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{U}_k \end{pmatrix} \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} + \Gamma_i \Delta_i^d U_p \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} \\ &+ H_i^d \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} + (LE + \Gamma_i A^i X_p^s) \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} \\ \tilde{H}_i^d &\approx H_i^d + (LE + \Gamma_i A^i X_p^s) \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} (U_f \Pi_{\tilde{U}_p^\perp})^{(-)} \end{aligned} \quad (30)$$

Calculons à présent le terme  $b$  suivant puis considérons sa limite quand  $j$  tend vers l'infini :

$$b = LE \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} (U_f \Pi_{\tilde{U}_p^\perp})^T (U_f \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} \Pi_{\tilde{U}_p^\perp}^T U_f^T)^{-1} \quad (31)$$

En notant que la matrice  $\Pi_{\tilde{U}_p^\perp}$  est symétrique on trouve :

$$b = LE \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} U_f^T (U_f \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} U_f^T)^{-1}$$

Comme  $\Pi_{\tilde{U}_p^\perp} \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} = \Pi_{\tilde{U}_p^\perp}$  (idempotence), on obtient :

$$b = LE \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} U_f^T (U_f \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} U_f^T)^{-1}$$

Posons  $\beta = \tilde{U}_p^k \tilde{U}_p^{kT}$  et développons l'expression de  $\Pi_{\tilde{U}_p^\perp}$  en se basant sur la définition (12).

$$\begin{aligned} b &= L \left( \frac{1}{j} E U_f^T - \frac{1}{j} E \tilde{U}_p^k \tilde{U}_p^{kT} \left( \frac{1}{j} \beta \right)^{-1} \frac{1}{j} \tilde{U}_p^k U_f^T \right) \\ &\times \left( \frac{1}{j} U_f U_f^T - \frac{1}{j} U_f \tilde{U}_p^k \tilde{U}_p^{kT} \left( \frac{1}{j} \beta \right)^{-1} \frac{1}{j} \tilde{U}_p^k U_f^T \right)^{-1} \end{aligned}$$

En utilisant l'ergodicité et la stationnarité des signaux on a :

~~474~~ ~~6174B~~

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (b) = L(E[U_f U_f^T] - E[U_f \tilde{U}_p^k \tilde{U}_p^{kT}] E[\beta]^{-1} E[\tilde{U}_p^k U_f^T])$$

$$\times (E[U_f U_f^T] - E[U_f \tilde{U}_p^k \tilde{U}_p^{kT}] E[\beta]^{-1} E[\tilde{U}_p^k U_f^T])^{-1},$$

car les entrées sont supposées déterministes et décorréliées avec le bruit. Ce qui prouve que le terme  $b$  tend vers zéro quand  $j$  tend vers l'infini.

On a de la même manière :  $\lim_{j \rightarrow \infty} \Gamma_i A^i X_p^s \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} (U_f \Pi_{\tilde{U}_p^\perp})^{(-)} = 0$

### Proposition 2

Sous les conditions de la proposition 1 et si :

- ♦  $j$  tend vers l'infini,
- ♦ les termes inférieurs à  $\varepsilon_k$  sont négligeables,
- ♦  $k$  est suffisamment grand,
- ♦ les lignes de  $\tilde{U}_p$  sont indépendantes de celles de  $U_f$ ,
- ♦ l'état initial  $x_0$  est nul,

alors :  $\tilde{H}_i^d$  tend vers  $H_i^d$

$$Y_f \Pi_{\tilde{U}_p^\perp} (U_f \Pi_{\tilde{U}_p^\perp})^{(-)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} H_i^d \quad (32)$$

### Remarque

q Cette proposition reste vraie même si  $e_k$  est un bruit coloré centré.

q Pour réduire la complexité du calcul dans l'estimation de la matrice  $H_i^d$  une décomposition QR peut être utilisée.

## VI. ESTIMATION DES PARAMETRES ET DE L'ORDRE DU SYSTEME

Disposant de la matrice de Toeplitz inférieure  $H_i^d$ , on peut déterminer aisément l'ordre et une réalisation minimale du système en formant la matrice de Hankel contenant les paramètres de Markov et en utilisant l'algorithme de Zeiger et McEwen [6], de Kung [4], de Ho et Kalman [2], d'Era [3] ou tout autre algorithme permettant la détermination des matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  à partir des paramètres de Markov. Pour cela disposant de  $i = 2v + 1$  paramètres de Markov on forme la matrice de Hankel  $H_v^q$  suivante :

$$H_v^q = \begin{pmatrix} CA^q B & CA^{q+1} B & \dots & CA^{q+v-1} B \\ CA^{q+1} B & CA^{q+2} B & \dots & CA^{q+v} B \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ CA^{q+v-1} B & CA^{q+v} B & \dots & CA^{q+2v-1} B \end{pmatrix} \quad (33)$$

Noter qu'on ne peut identifier le système que si  $v$  est supérieure ou égale à l'ordre du système, ce qui nous oblige à prendre  $i$  supérieure strictement au double de l'ordre maximal a priori choisi. Dans le cas stochastique, il est judicieux de prendre  $v$  suffisamment large. Ceci se justifie par la méthode d'estimation des paramètres de Markov et de la matrice  $D$  à partir de la matrice  $H_i^d$ . En effet après l'estimation de la matrice de Toeplitz  $H_i^d$ , la matrice  $D$  et les paramètres de Markov sont prises égales à la moyenne des paramètres correspondants obtenus dans la matrice de Toeplitz.

En vue de déterminer les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  nous allons adopter dans la suite l'algorithme d'Era [3] qui conduit à une réalisation minimale et équilibrée du système étudié (cf. [3]).

Ø On forme les matrices de Hankel  $H_v^0$  et  $H_v^1$ .

Ø On effectue une décomposition en valeurs singulières de la matrice de Hankel  $H_v^0$ . L'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières dominantes.

$$H_v^0 = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \approx U_1 S_1 V_1^T \quad (34)$$

où  $S_2$  contient les valeurs singulières négligeables.

Ø On détermine la matrice d'observabilité d'ordre  $v$ ,  $\Gamma_v = U_1 S_1^{1/2}$  et la matrice de commandabilité d'ordre  $v$ ,  $C_v = S_1^{1/2} V_1^T$  ceci du fait que  $H_v^0 = \Gamma_v C_v$  [3].

Ø La matrice  $C$  est alors égale aux  $\mathbf{I}$  premières lignes de  $\Gamma_v$  (voir l'équation (8)). La matrice  $B$  est obtenue en prenant les  $m$  premières colonnes de  $C_v$  (voir l'équation (7)).

Ø La matrice  $A$  est donnée par la formule suivante [3] :  $A = S_1^{-1/2} U_1^T H_v^1 V_1 S_1^{-1/2}$  (35)

## VII. APPLICATION

Les deux méthodes d'identification des systèmes stochastiques établies dans cet article sont testées sur un exemple de simulation ; et comparées à l'algorithme robuste d'identification ('robust identification algorithm') proposé dans [5] (page 128-131) qu'on peut classer dans les algorithmes MOESP une technique classique des sous-espaces [5]. L'exemple présenté ici est tiré de [5]. Le système étudié est d'ordre 3 et décrit par l'équation suivante :

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1.6161 \\ -0.3481 \\ 2.6319 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} -1.1472 \\ -1.5204 \\ -3.1993 \end{pmatrix} e_k,$$

$$y_k = (-0.4373 \quad -0.5046 \quad 0.0936) x_k - 0.7759 u_k + e_k.$$

Le bruit  $e_k$  est un bruit blanc uniforme centré et de variance  $\sigma = 0.5$ .

Trois types d'entrées sont utilisés :

- ♦ une SBPA d'amplitude 1,
- ♦ un bruit blanc gaussien de variance 1,
- ♦ un bruit blanc gaussien (de variance 1) filtré par un filtre de Butterworth d'ordre 2 (fréquence de coupure égale à 0.3 fois la fréquence de Nyquist,  $T=1$ ) auquel à été ajouté un bruit blanc gaussien de variance 0.01.

Pour les deux méthodes proposées ici, l'indice  $i$  est fixé à 32 et l'indice d'approximation  $k$  est fixé à 64 dans la deuxième méthode. Dans cette partie, nous allons réaliser le tracé des valeurs singulières déterminant l'ordre du système, analyser les performance en sortie puis tracer la dispersion des pôles du système obtenu par chaque algorithme dans l'identification du système décrit ci-dessus.

On a tracé (figure 2a, 2b et 2c) pour le second type de signal d'entrée (bruit blanc), les valeurs singulières qui déterminent l'ordre pour les trois algorithmes. Le tracé a été réalisé pour 50000 données lors d'une réalisation (pour plusieurs expériences réalisées les résultats étaient similaires). La détermination de l'ordre par la méthode MOESP donne trois valeurs singulières proches les unes des autres et une quatrième non négligeable ; par contre avec les méthodes proposées, on distingue plus aisément trois valeurs singulières dominantes

(figures 2b et 2c), les autres étant de même ordre et négligeables.

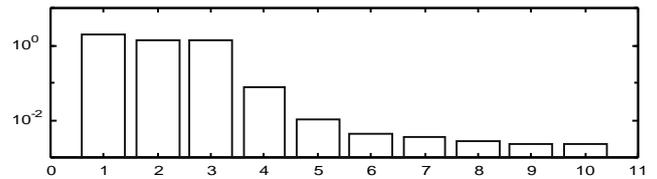


Figure 2a : algorithme MOESP (l'algorithme robuste [5]).

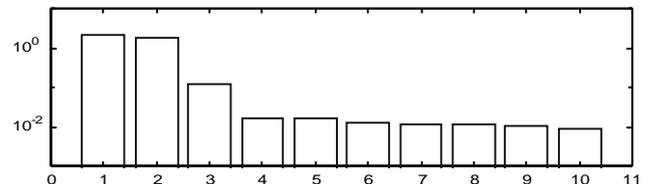


Figure 2b : première méthode.

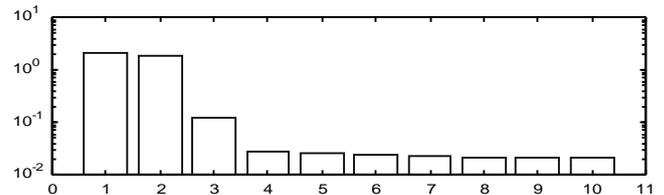


Figure 2c : deuxième Méthode.

À présent pour chaque type de signal, nous avons effectué une simulation de Monte Carlo : nous avons réalisé deux cent expériences et tracé la courbe moyenne du critère  $J = \|y - \hat{y}\| / \|y\|$  en fonction du nombre de données.  $y$  est la sortie mesurée et  $\hat{y}$  la sortie obtenue par le système estimé.

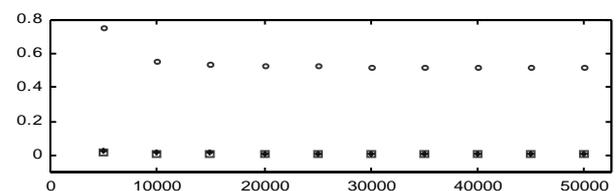


Figure 3 : le signal d'entrée est une SBPA

Algorithme MOESP (l'algorithme robuste [5]) (o), première méthode (□) et deuxième méthode (\*).

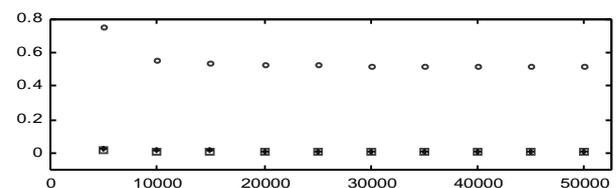


Figure 4 : le signal d'entrée est un bruit blanc gaussien.

Algorithme MOESP (l'algorithme robuste [5]) (o), première méthode (□) et deuxième méthode (\*).

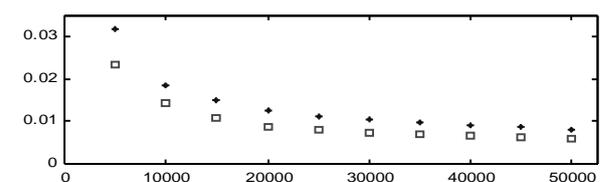


Figure 5 : l'entrée correspond au troisième signal d'excitation.

Algorithme MOESP (l'algorithme robuste [5]) (o), première méthode (□) et deuxième méthode (\*). (Les méthodes MOESP conduisent à une réalisation instable pour ce signal d'entrée).

Sur ces 3 figures les méthodes proposées dans cet article donnent des résultats meilleurs que la méthode MOESP. Dans le cas où le signal d'entrée est un bruit blanc gaussien filtré, la méthode MOESP fournit une réalisation instable (figure 5).

Dans la suite nous montrerons la position des pôles réels et estimés par les trois méthodes pour deux cents expériences réalisées et 50000 données. On utilisera le second type d'entrée c'est à dire le bruit blanc.

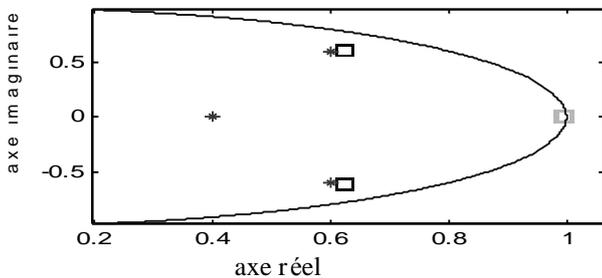


figure 4a : pôles obtenus par l'algorithme MOESP (l'algorithme robuste [5]) ; pôles exacts (\*), pôles estimés (□ (couleur noire pôles complexes conjugués, couleur grise pôle réel)).

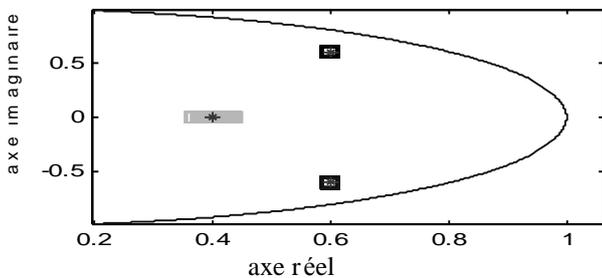


figure 4b : pôles obtenus par le premier algorithme ; pôles exacts (\*), pôles estimés (□ (couleur noire pôles complexes conjugués, couleur grise pôle réel)).

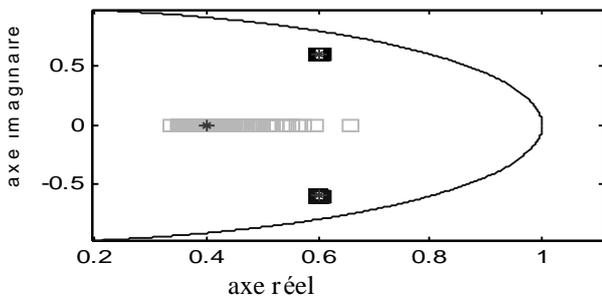


figure 4c : pôles obtenus par le second algorithme ; pôles exacts (\*), pôles estimés (□ (couleur noire pôles complexes conjugués, couleur grise pôle réel)).

Le tracé des pôles montre que le premier algorithme détermine efficacement les pôles complexes conjugués et un peu moins efficacement le pôle réel (puisque'on note une légère dispersion sur l'axe réel dans l'estimation de ce pôle). De même le second algorithme donne une bonne estimation des pôles complexes mais détermine le pôle réel avec beaucoup d'incertitude (on notera que l'estimation de ce troisième pôle est toujours réelle). Par contre on voit que l'estimation fournie par l'algorithme robuste (du MOESP) est biaisée sur les pôles complexes conjugués et que l'estimation du pôle réel conduit à une valeur qui est à la limite de la stabilité ; noter qu'il n'y a pratiquement pas de dispersion sur les pôles estimés par ce troisième algorithme. Ceci est dû au fait que cet algorithme rend cohérents des paramètres(A et C d'une part et B et D

d'autre part) calculés en deux étapes différentes, en recalculant la matrice d'observabilité  $\Gamma_1$  (cf. [5]).

Par manque de place nous ne pouvons faire qu'un bref commentaire sur la dispersion des zéros. On dispose de deux zéros complexes et d'un troisième réel. La première méthode donne une estimation non biaisée de ces trois zéros, il en est de même pour les deux zéros complexes estimés par la deuxième méthode ; par contre on note une dispersion sur l'axe réel, dans l'estimation du troisième zéro (réel). On pourra l'interpréter comme une compensation du troisième pôle estimé dont l'estimation est aussi dispersée. En ce qui concerne l'algorithme comparaison MOESP, l'estimation donne trois zéros réels au lieu de deux zéros complexes conjugués et un troisième réel.

## VIII. CONCLUSION

Cet article présente deux méthodes d'identification des systèmes stochastiques se situant dans le contexte de projection oblique. Elles sont basées sur des méthodes de projection oblique permettant d'estimer la matrice de Toeplitz inférieure à partir de laquelle, on détermine l'ordre et une réalisation du système. Dans le cas stochastique, l'effet du bruit altère l'estimation de la matrice de Toeplitz. En proposant une approche de type variable instrumentale, il a été établi que l'effet du bruit s'annule asymptotiquement moyennant une approximation. Les résultats du test des méthodes en simulation semblent révéler que les algorithmes proposés sont supérieurs en terme de performances à l'algorithme d'identification robuste appartenant à la famille MOESP. Une étude plus poussée sera menée ultérieurement pour analyser ce constat. Une perspective reste également l'analyse du terme de biais dû au bruit dans la première méthode.

## IX. REFERENCES

- [1] Bingulac, S. and Al-Muthairi, N., « Determination of Markov Parameters Directly From noise free Input-Output Samples of MIMO Systems », *Proc. of 2nd NICONET Workshop, Vol. I, Paris, France*, pp. 11-15, 1999.
- [2] Ho, B. et Kalman, R. E., « Effective construction of linear state-variate models from input/output functions », *Proc. of 3rd Annual Allerton Conf. Circuit and System Theory*, pp. 449-459, 1966.
- [3] Juang, C., *Applied system identification*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [4] Kung, S. Y., « A new Identification and model reduction algorithm via singular value decompositions », *Proc. Twelfth Asilomar Conf. on Circuits, Systems and Computers.*, pp. 705-714, 1978.
- [5] Van Overschee, P. et De Moor, B., *Subspace identification for linear systems-Theory, implementation, applications*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [6] Zeiger, H. P. et McEwen, A. J., « Approximate linear realisations of given dimension via Ho's algorithm », *IEEE Trans. on Auto. Control*, pp. 153-155, 1974.