



Institut National
Polytechnique de Lorraine

Département de formation doctorale en automatique

École doctorale IAEM Lorraine

Stabilité et Commande de Systèmes décrits par des Multimodèles

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 09 décembre 2002

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
(spécialité automatique et traitement numérique du signal)

par

Mohammed CHADLI

Composition du jury

<i>Président :</i>	Benoît BERGEON	Professeur à l'Université de Bordeaux I : LAP
<i>Rapporteurs :</i>	Pierre BORNE Germain GARCIA	Professeur à l'École Centrale de Lille : LAIL Professeur à l'INSA de Toulouse : LAAS
<i>Examineurs :</i>	José RAGOT Didier MAQUIN Jamel DAAFOUZ	Professeur à l'INPL, Nancy : CRAN Maître de Conférences (HDR) à l'INPL, Nancy : CRAN Maître de Conférences à l'INPL, Nancy : CRAN

À mes chers parents,
À mes soeurs et frères,
À Iman et Nacer,
À tous mes enseignants.

”Les sciences sont susceptibles d’atteindre un état d’achèvement, de perfection, au delà duquel elles n’évoluent plus guère que dans les détails.” Averroès, Discours décisif.

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL) au Centre de Recherche d'Automatique de Nancy (CRAN) dirigé par Monsieur Francis Lepage.

Je tiens à remercier Monsieur José Ragot, directeur de l'équipe diagnostic et Robustesse au CRAN, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche, pour sa constante disponibilité et ses précieux conseils. Je remercie également Monsieur Didier Maquin pour son soutien et ses encouragements. Je leur suis très reconnaissant pour la liberté et la confiance qu'ils m'ont témoignées tout au long de mes travaux de recherche.

J'exprime ma gratitude à Messieurs Pierre Borne et Germain Garcia d'avoir accepté de rapporter mon mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail. Leur lecture approfondie du mémoire, leurs remarques et interrogations judicieuses m'ont été très précieuses.

Je remercie aussi Monsieur Benoît Bergeon d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'assurer la présidence du jury. Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Jamal Daafouz pour sa participation au jury et pour ses remarques fructueuses.

Merci à tous les collègues que j'ai côtoyés pendant les trois années de cette thèse, pour l'ambiance cordiale qu'ils ont su faire régner au sein de l'équipe et tout particulièrement à Marjorie Schwartz pour sa constante disponibilité et sa serviabilité.

Enfin je ne saurais oublier de trop remercier mes parents, mes soeurs et frères qui, malgré la distance, m'ont accompagné moralement tout au long de ce parcours.

Table des matières

Notations	11
Références personnelles	13
Introduction	15
1 Vers les multimodèles	19
1.1 Représentation multimodèle	19
1.1.1 Méthodes d'obtention d'un multimodèle	20
1.1.1.1 Par identification	20
1.1.1.2 Par linéarisation	21
1.1.1.3 Par transformation d'un système non linéaire affine en la commande	22
1.1.2 Inclusions différentielles linéaires	29
1.2 Analyse de stabilité	30
1.2.1 Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe	30
1.2.2 Fonctions de Lyapunov "types"	31
1.3 Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles	33
1.3.1 Analyse convexe	33
1.3.2 Problèmes classiques \mathcal{LMI}	34
1.3.3 Techniques d'analyse et de réduction	36
1.3.4 Extensions	37
1.3.4.1 Les \mathcal{LMI} non strictes	37
1.3.4.2 Les inégalités matricielles bilinéaires	37
2 Stabilité et stabilisation quadratique des multimodèles	41
2.1 Introduction	41
2.2 Stabilité quadratique	42
2.2.1 Stabilité globale	42
2.2.2 Stabilité locale	43
2.2.2.1 Ellipsoïde invariant	43

2.2.2.2	Maximisation du volume d'un ellipsoïde contenu dans un polytope	44
2.2.3	Autre approche	45
2.2.4	Multimodèle discret	48
2.3	Stabilisation par retour d'état	49
2.3.1	Stabilisation des multimodèles continus	53
2.3.1.1	Loi de commande PDC	53
2.3.1.2	Taux de décroissance	56
2.3.1.3	Autre loi de commande	58
2.3.2	Multimodèle discret	60
2.4	Synthèse des multiobservateurs	63
2.4.1	Variables de décision mesurables	63
2.4.2	Variables de décision non mesurables	66
2.5	Conclusion	69
3	Stabilité et stabilisation non quadratique	71
3.1	Introduction	71
3.2	Stabilité non quadratique des multimodèles continus	72
3.2.1	Analyse par fonctions polyquadratiques	73
3.2.2	Analyse par fonctions quadratiques par morceaux	76
3.2.3	Exemple illustratif	80
3.3	Stabilité non quadratique des multimodèles discrets	82
3.3.1	Analyse par fonctions polyquadratiques	82
3.3.2	Analyse par fonctions quadratiques par morceaux	84
3.3.3	Exemple illustratif	84
3.4	Stabilisation non quadratique par retour d'état	85
3.4.1	Approche utilisant des fonctions polyquadratiques	85
3.4.1.1	Cas des multimodèles continus	85
3.4.1.2	Cas des multimodèles discrets	91
3.4.2	Approche utilisant des fonctions quadratiques par morceaux	93
3.4.2.1	Cas des multimodèles continus	94
3.4.2.2	Extension aux multimodèles discrets	97
3.5	Synthèse de multiobservateurs	99
3.5.1	Cas des multimodèles continus	99
3.5.2	Extension aux multimodèles discrets	101
3.6	Conclusion	103
4	Stabilisation par retour de sortie	105
4.1	Introduction	105
4.2	Stabilisation quadratique par retour de sortie	106
4.2.1	Loi de commande OPDC et formulation \mathcal{LMI}	106

TABLE DES MATIÈRES

4.2.1.1	α -stabilité	109
4.2.1.2	Améliorations	110
4.2.2	Extension au cas discret	112
4.2.3	Formulation par complémentarité sur le cône	116
4.2.3.1	Élimination des variables du régulateur	116
4.2.3.2	Reconstruction des variables du régulateur	118
4.3	Stabilisation non quadratique par retour de sortie	120
4.3.1	Cas des fonctions polyquadratiques	120
4.3.2	Exemple illustratif	125
4.3.3	Cas des fonctions quadratiques par morceaux	126
4.3.4	Conclusion	128
Conclusions et perspectives		129
Annexes		131
A Régions \mathcal{LMI}		133
A.1	Définition d'une région \mathcal{LMI}	133
A.2	Exemples de régions \mathcal{LMI} intéressantes	134
B Problème de complémentarité sur le cône		137
B.1	Linéarisation et algorithme	138
B.2	Propriétés de l'algorithme	138
C Propriétés des M-matrices		139
D Différentes formes de multimodèles		141
D.1	Modèles locaux couplés	141
D.2	Modèles locaux découplés	143
Bibliographie		145

Notations

– Matrices et opérateurs

$M > 0$ ($M \geq 0$)	Matrice carrée symétrique définie (resp. semi-définie) positive,
$M < 0$ ($M \leq 0$)	Matrice carrée symétrique définie (resp. semi-définie) négative,
$M < N$	Matrice $M - N < 0$ carrée symétrique définie négative,
\mathcal{I}_p (\mathcal{I})	Matrice identité de dimension p (resp. de dimension appropriée),
$\det(M)$	Déterminant de la matrice carrée M ,
$\text{rang}(M)$	Rang de la matrice M ,
M^{-1}	Inverse de la matrice carrée M ,
M^T (M^{-T})	Transposée de M , resp. de l'inverse de M ,
M^-	Inverse généralisée de Moore-penrose de M ,
M_\perp	Matrice Z telle que $MZ = 0$ et la matrice $(M^T \ M_\perp)$ de rang maximal,
M_h	Partie Hermitienne de la matrice M à coefficients réels, $M_h = \frac{1}{2}(M + M^T)$
$M_{\bar{h}}$	Partie non Hermitienne de la matrice M à coefficients réels, $M_{\bar{h}} = \frac{1}{2}(M - M^T)$
$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{pmatrix}$	Matrice symétrique, le symbole $*$ représente M_{12}^T ,
$\lambda(M)$	Valeurs propres de la matrice M ,
$\lambda_{\min}(M)$	Valeur propre minimale de la matrice M ,
$\lambda_{\max}(M)$	Valeur propre maximale de la matrice M ,
$\Re(\lambda(M))$	Parties réelles des valeurs propres de la matrice M ,
$\Im(\lambda(M))$	Parties imaginaires des valeurs propres de la matrice M ,
$\ M\ $	Norme euclidienne de la matrice carrée M ,
$\ x\ $	Norme euclidienne du vecteur x de dimension p , $\ x\ ^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2$,
$\langle x, y \rangle$	Produit scalaire, $\langle x, y \rangle = x^T y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$
\otimes	Produit de Kroneker,

– Ensembles et domaines

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels,
\mathbb{R}^+ (\mathbb{R}^{+*})	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls (resp. strictements positifs),
\mathbb{R}^p	Espace réel euclidien de dimension p ,
$\mathbb{R}^{p,q}$	Ensemble des matrices de dimension $(p \times q)$ à éléments réels,
I_n	Ensemble des entiers naturels allant de 1 à n , $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$
C^1	Ensemble des fonctions continûments dérivables,

– **Acronymes**

\mathcal{LMI}	Linear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Linéaire)
\mathcal{BMI}	Bilinear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Bilinéaire)
LTI	Linéaire à Temps Invariant
GEVP	Generalised EigenValues Problem (Problème de Valeurs Propres Généralisées)
IDLP	Inclusion Différentielle Linéaire Polytopique
MIMO	Multiple Input Multiple Output (Entrée Multiple Sortie Multiple)
SIMO	Single Input Multiple Output (Entrée Simple Sortie Multiple)

– **Notations relatives aux multimodèles**

PDC	Parallel Distributed Compensation (loi de commande basée sur le retour d'état)
CDF	Compensation et Division pour modèles Flous
OPDC	Output PDC (loi de commande basée sur le retour de sortie)
$x(\cdot), u(\cdot), y(\cdot)$	Respectivement, état, entrée et sortie du système, $(x(\cdot), u(\cdot), y(\cdot)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$
A_i, B_i, C_i	Respectivement, matrices d'état, d'entrée et de sortie du $i^{\text{ème}}$ modèle local LTI $(A_i, B_i, C_i) \in \mathbb{R}^{p,p} \times \mathbb{R}^{p,m} \times \mathbb{R}^{l,p}$
$\mu_i(\cdot)$	$i^{\text{ème}}$ fonction d'activation correspondant au $i^{\text{ème}}$ modèle local LTI tel que $\mu_i(\cdot) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \mu_i(\cdot) = 1$
n	Nombre de modèles locaux LTI (correspondant au nombre de règles dans la terminologie des modèles Takagi-Sugeno)
r	Nombre maximal de fonctions d'activation $\mu_i(\cdot)$ actives à chaque instant, i. e. $\mu_k(\cdot) \cdot \mu_{k+1}(\cdot) \dots \mu_{k+r}(\cdot) \neq 0, k \in I_n, k+r \leq n$
$\sum_{\substack{i \neq j:1 \\ n}}^n x_i x_j$	Cette expression représente $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n x_i x_j$
$\sum_{i < j:1}^n x_i x_j$	Cette expression représente $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i < j}^n x_i x_j$
$\mathcal{L}_c(\cdot, \cdot)$	Expression utilisée dans le cas continu, $\mathcal{L}_c(X_{ij}, Y) = \frac{(X_{ij} + X_{ji})^T}{2} Y + Y \frac{(X_{ij} + X_{ji})}{2}$
$\mathcal{L}_d(\cdot, \cdot)$	Expression utilisée dans le cas discret, $\mathcal{L}_d(X_{ij}, Y) = \frac{(X_{ij} + X_{ji})^T}{2} Y \frac{(X_{ij} + X_{ji})}{2} - Y$

Références personnelles

Congrès internationaux avec comité de lecture et actes

- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems", IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC'2000), Nashville, Etats-Unis, pages 3514-3519, Oct. 2000.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "On the stability analysis of multiple model systems", European Conference control (ECC'2001), Porto, Portugal, pages 1894-1899, Sep. 2001.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Output stabilisation in multiple model approach", IEEE CSC Conference on Control Application (CCA'2002), Glasgow, Scotland, pages 1315-1320, Sep. 18-20, 2002.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Static output feedback for Takagi-Sugeno systems : An \mathcal{LMI} approach", 10th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'2002), Lisboa, Portugal, Juil. 9-12, 2002.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Observer-based controller for Takagi-Sugeno modèles", IEEE International Conference on SMC, Tunisie, Dec. 2002.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Non quadratic stability analysis of Takagi-Sugeno systems ", Proceedings of the IEEE 41th CDC, Las Vegas, Nevada, pages 2143-2148, Dec. 2002.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "An \mathcal{LMI} formulation for output feedback stabilisation in multiple model approach ", Proceedings of the IEEE 41th CDC, Las Vegas, Nevada, pages 311-316, Dec. 2002.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Multiple observers for discrete-time multiple model", IFAC Congres, Safeprocess, Washington, June 2003.
- Abdelkader Akhenak, Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "State estimation via multiple observer with unknown inputs : Application to the three tank system", IFAC Congres, Safeprocess, Washington, June 2003.

Congrès nationaux avec comité de lecture et actes

- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Stabilité et stabilisation des modèles T-S continus", Journées Doctorales de l'Automatique (JDA'2001), pages 85-88, Toulouse, France, Sep. 2001.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Commande des modèles Takagi-Sugeno continus", Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA), pages 171-178, Montpellier, Oct. 2002.
- AbdelKader Akhenak, Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Estimation d'état d'un système à entrées inconnues, représenté sous forme multimodèle" IAR annual meeting, Grenoble, France, Nov. 2002.

Travaux soumis : Revues internationales avec comité de lecture

- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "On relaxed \mathcal{LMZ} -based analysis and designs for continuous Takagi-Sugeno systems", IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, Soumis.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Stability analysis of multiple model systems", International Journal of Systems Science, 2002, Soumis.
- Mohammed Chadli, Didier Maquin, José Ragot, "Sur la stabilité des modèles de Takagi-Sugeno", Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA), 2002, Soumis.

Introduction

– Contexte et motivation

L'automatique repose sur la notion de système, représentant un ensemble d'éléments pour former un tout structuré. L'automaticien construit un schéma théorique qui vise à rendre compte du comportement dynamique interne de ce système. On obtient alors un modèle, représentation mathématique qui doit tendre à ressembler le mieux possible à la réalité du processus. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle avec le processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématiquement exploitable. Les lois définissant un système relient entre elles un certain nombre de grandeurs : les entrées ($u(t)$) qui reflètent l'action de l'environnement sur le système, les sorties ($y(t)$) qui représentent l'action du système sur l'environnement ainsi que les mesures extraites du système, et enfin les états ($x(t)$) qui décrivent le système à un moment donné. Par exemple, un système se modélise par une loi mathématique $g(u(t), y(t)) = 0$ du comportement entrées/sorties ou par une loi $dx(t)/dt = f(x(t), u(t))$ de l'évolution de son état. Ces lois doivent être les plus complètes possibles et représenter tous les modes de fonctionnement, ainsi que toutes les interactions entre les différentes grandeurs. Devant la difficulté de la tâche, l'automaticien est souvent amené, à partir de considérations physiques, à considérer certaines classes de systèmes manipulables par des outils mathématiques existants. Des restrictions structurelles (linéarité vis-à-vis de l'entrée, platitude, convexité) produisant des approximations de modèles sont considérées. Au début de cette démarche, la tendance a été d'utiliser des modèles LTI. Cette approche est d'ailleurs probante dans la mesure où nombre de systèmes, en première approximation et au voisinage d'un point de fonctionnement, sont bien représentés par leur modèle LTI ; le modèle non linéaire est alors représenté par un seul modèle linéaire (linéarisé tangent autour d'un point d'équilibre). L'inconvénient d'une telle approche est son aspect uniquement local, le modèle linéaire n'étant qu'une description locale du comportement du système. Une approche globale basée sur de multiples modèles LTI (linéaires ou affines) autour de différents points de fonctionnement a été élaborée ces dernières années. Cette approche, dite multimodèle, est une représentation polytopique convexe pouvant être obtenue soit directement à partir d'un modèle mathématique non linéaire par transformation directe d'un modèle affine en l'état [Wan96][Tan96] [Mor00a] (voir paragraphe 1.1.1.3) ou par linéarisation autour de différents points de

fonctionnement [Joh92][Mur97], soit à partir de données sur les entrées et les sorties [Sug88][Gas00].

Ces dernières années, l'approche multimodèle a attiré l'attention de la communauté des automaticiens et en particulier les problèmes de stabilité ont suscité un intérêt certain. Ce choix est motivé par le désir d'asseoir les problèmes d'analyse et de synthèse (de lois de commande et d'estimation d'état) sur des bases numériques. De telles possibilités sont devenues envisageables grâce à la représentation polytopique convexe de l'approche multimodèle et le développement d'outils numériques de résolution efficaces. L'avancée récente des outils informatiques et mathématiques basés sur les programmes d'optimisation convexe permettent de résoudre une large classe de problèmes d'analyse et de commande multi-critère.

De nombreux travaux, concernant la stabilité des multimodèles ont été publiés ces dernières années. La plupart de ces travaux se sont inspirés des techniques de commande rencontrées dans la littérature. C'est dans ce sens que des études utilisant l'approche de Lyapunov, l'approche géométrique, le critère de Popov ou le critère du cercle, ont été développées. Ainsi dans [Tan98b][Bla01b][Tei01][Cha01a], l'analyse de la stabilité par des fonctions de Lyapunov quadratiques a été étudiée, dans [Mor00b][Gue01a][Cha02c][Bla01b] [Tan01a] des fonctions non quadratiques ont été utilisées, dans [Gue99b] ce problème est abordé par transformation en un problème de type Lur'e alors que dans [Aka00][Aka98][Che96] l'analyse de la stabilité a été étudiée en utilisant les propriétés des M-matrices. L'étude de la stabilité constitue une phase importante dans l'analyse des comportements dynamiques d'un système en boucle fermée. Dans la littérature, de nombreuses approches ont été développées pour étudier la stabilité des différentes catégories de systèmes : systèmes incertains, systèmes non linéaires, systèmes bilinéaires, systèmes à paramètres variants, systèmes à retard...[Fos93][Kha96][Bar01][Mag99]. Dans le cadre des multimodèles, la synthèse de régulateurs est traitée par les techniques de systèmes incertains [Zak99][Cao96] [Fen01] [Tan96][Kir96][Tei99], par les techniques des systèmes interconnectés [Che96] [Aka98] [Aka00], par modes glissant [Bla01b], par les techniques de synthèse de lois de commande adaptative [Pag01], par passivité [Gor98].

Notre sujet de thèse ne prétend pas traiter toutes les approches pour toutes les classes de systèmes, il concerne uniquement l'analyse de la stabilité et la synthèse de lois de commande pour les multimodèles. Notre démarche est exclusivement basée sur la deuxième méthode de Lyapunov et sa formulation \mathcal{LMZ} . L'étude que nous avons menée est organisée autour de deux axes : le premier traite l'analyse de la stabilité par des fonctions de Lyapunov quadratiques, le deuxième fait appel aux fonctions de Lyapunov non quadratiques.

L'intérêt de la méthode quadratique vient du fait que la recherche d'une fonction de Lyapunov (et des gains de retour d'état dans le cas de la stabilisation) est facile à mettre en oeuvre et peut être énoncée comme un problème d'optimisation convexe en

terme de \mathcal{LMI} résolu efficacement. Cependant, la méthode quadratique s'est avérée très conservatrice du fait que cette approche néglige toutes les informations contenues dans les fonctions d'activation¹. Ces contraintes deviennent plus conservatrices encore si l'on ajoute des contraintes de performances du système corrigé.

Pour réduire le pessimisme de la méthode quadratique, nous avons mené l'étude de stabilité des multimodèles en considérant deux types de fonction de Lyapunov non quadratiques. La première, dite polytopique ou multiquadratique, est de la forme $V(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) P_i x(t)$, $P_i > 0$. Elle est construite par interpolation de fonctions de Lyapunov quadratiques locales à travers les mêmes fonctions d'activation que le multimodèle lui-même. Le deuxième type de fonction de Lyapunov non quadratique est de la forme $V(x) = \max(V_1(x), \dots, V_n(x))$ avec $V_i(x) = x(t)^T P_i x(t)$, $P_i > 0, i \in I_n$. Il s'agit de fonctions de Lyapunov quadratique par morceaux utilisées conjointement avec la procédure S pour réduire le pessimisme des résultats quadratiques.

– Organisation

Ce mémoire, décomposé en quatre chapitres, est organisé de la façon suivante :

Chapitre 1 : Ce chapitre est consacré aux notions et aux outils utilisés le long de ce document. On y trouve une présentation des différentes méthodes d'obtention d'un multimodèle et un rappel de définitions de stabilité au sens de Lyapunov. Il présente également l'outil \mathcal{LMI} et différentes techniques d'analyse et de réduction utilisées dans ce mémoire.

Chapitre 2 : Le chapitre 2 est dédié à la méthode quadratique de Lyapunov. Nous y présentons quelques conditions suffisantes de stabilité des multimodèles. L'accent est mis sur une classe de multimodèles acceptant des fonctions quadratiques. Ainsi, en se basant sur les propriétés des M-matrices, des conditions suffisantes de stabilité sont proposées. La stabilisation par retour d'état non linéaire a ensuite été considérée pour le cas continu. Les conditions obtenues s'expriment sous forme d'Inégalités Matricielles Bilinéaires (\mathcal{BMT}). Des algorithmes permettant de résoudre ce genre de problème non convexe sont utilisés. Après un bref rappel de l'état de l'art des lois de commande existantes, la stabilisation par retour d'état, basée essentiellement sur les lois de commande PDC² et CDF³, est étudiée. Dans ce cadre nous présentons des conditions suffisantes permettant de maximiser le degré de stabilité (taux de décroissance) en réduisant le pessimisme des méthodes existantes. L'estimation d'état est ensuite considérée. Le des

¹Comme on le verra dans la section 1.1, les fonctions d'activation, dite aussi de pondération ou d'interpolation, sont des fonctions normalisées vérifiant la propriété de convexité. Le modèle global non linéaire est obtenu par la somme pondérée des modèles LTI.

²Parallel Distributed and Compensation

³Compensation et Division pour modèles Flous

variables de décision non mesurables (partiellement ou complètement) est traité et le principe de séparation est abordé.

Chapitre 3 : Le chapitre 3 est intégralement consacré à l'approche non quadratique. L'analyse de stabilité ainsi que la synthèse de lois de commande par retour d'état et d'observateurs (dit également multiobservateurs) y sont traités. L'organisation adoptée consiste à étudier chacun de ces aspects (analyse puis synthèse) successivement par fonctions polyquadratiques et quadratiques par morceaux. Pour ce dernier type de fonction non quadratique, la procédure S est utilisée en vue d'étendre les résultats de synthèse de la méthode quadratique. Des problèmes numériques se sont posés auxquels nous avons proposés des méthodes de résolution.

Chapitre 4 : La synthèse de lois de commande par retour de sortie statique utilisant des fonctions quadratiques et non quadratiques est l'objet du chapitre 4. Dans le cadre de la stabilisation quadratique deux méthodes sont proposées. La première, basée sur une transformation directe en \mathcal{LMI} , se fait sous certaines restrictions sur la matrice de Lyapunov. La deuxième propose de résoudre le problème de synthèse par formulation en complémentarité sur le cône. S'inspirant des résultats issus de la stabilisation non quadratique par retour d'état, des conditions suffisantes de stabilisation par retour de sortie sont proposées dans la deuxième partie de ce chapitre.

Chapitre 1

Vers les multimodèles

”La grande barrière ne se situe pas entre le linéaire et le non linéaire, mais entre le convexe et le non convexe” R. T. Rockafellar. Convex analysis, Princeton univ. press, second edition, 1970.

1.1 Représentation multimodèle

La logique floue, depuis les travaux de Zadeh [Zad73] a connu un réel succès non seulement dans la modélisation mais aussi dans la commande de systèmes complexes non linéaires [Tak85]. Dans le cas de la commande floue, la question de l’approximation universelle est primordiale : un modèle flou peut-il uniformément approximer n’importe quelle fonction réelle sur un sous-ensemble compact avec un degré de précision arbitraire ? La capacité de l’approximation universelle d’un modèle flou est la base de presque toutes les recherches théoriques et de leurs applications en commande et en identification floue. De nombreux chercheurs se sont intéressés à cette notion pour donner une justification théorique aux succès rencontrés au niveau des applications [Buc92][Buc93] [Cas95].

Dans la littérature, on peut dénombrer de nombreux modèles flous. Cependant, on peut distinguer deux classes principales de modèles flous : le modèle flou de Mamdani et le modèle de Takagi-Sugeno (T-S) [Tak85][Sug88]. La principale différence entre ces deux modèles réside dans la partie conséquence. Le modèle flou de Mamdani utilise des sous-ensembles flous dans la partie conséquence alors que le modèle flou de T-S utilise des fonctions (linéaires ou non linéaires) des variables d’entrées. Dans le modèle linéaire de T-S, la partie conséquence est un modèle linéaire (représentation d’état, modèle autorégressif). Le modèle de T-S en représentation d’état est de loin le plus utilisé en commande (et également en identification) car choisir des fonctions non linéaires dans la partie conséquence complique l’analyse et la synthèse des modèles flous [Zen00].

1.1.1 Méthodes d'obtention d'un multimodèle

Les modèles T-S représentent les systèmes non linéaires sous forme d'une interpolation entre des modèles linéaires locaux. Chaque modèle local est un système dynamique LTI valide autour d'un point de fonctionnement. Trois méthodes distinctes peuvent être employées pour l'obtention d'un modèle T-S : par identification, par linéarisation autour de différents points de fonctionnement (dans ce cas il s'agit de modèles locaux affines dû à la présence de la constante de linéarisation) ou par transformation polytopique convexe. Dans la première situation, à partir de données sur les entrées et les sorties, on peut identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement. Dans la deuxième et la troisième situation, on suppose disposer d'un modèle mathématique non linéaire.

1.1.1.1 Par identification

Les modèles de type "boîte noire" sont identifiés à partir des données sur les entrées et sur les sorties autour de différents points de fonctionnement. Indépendamment du type de modèle choisi, cette identification requiert la recherche d'une structure "optimale", l'estimation des paramètres et la validation du modèle final [Sug88][Gas00]. Les travaux portant sur l'analyse de stabilité des multimodèles MIMO adoptent souvent la représentation d'état (plutôt qu'un modèle sous forme entrée-sortie). De même, la synthèse de lois de commande des processus modélisés grâce à l'approche multimodèle utilisent la représentation d'état afin d'étendre au cas non linéaire les techniques de commande par retour d'état. La construction d'observateurs non linéaires dits multiobservateurs à partir de structures multimodèles utilise également la représentation d'état en se basant sur l'observateur de type Luenberger.

Les modèles flous T-S sont assimilables à des multimodèles. En effet, un modèle T-S réalise une partition floue de l'espace caractéristique \mathbb{Z} dit aussi espace de décision¹. Les zones de fonctionnement sont définies en termes de propositions sur les variables de prémisse. Le modèle flou T-S coïncide exactement avec un multimodèle en prenant l'opérateur produit comme opérateur de conjonction [Sug88]. Le caractère flou disparaît alors de la formulation du modèle T-S car la partie conséquence d'une règle est une fonction mathématique. Le modèle T-S a donc plus de rapport avec le multimodèle qu'avec les modèles linguistiques de Mamdani ou les modèles à relation floue. Les notions suivantes sont par conséquent équivalentes et expriment les mêmes idées :

- degré de véracité normalisé \iff fonction d'activation ou d'interpolation,
- espace de prémisse \iff espace caractéristique (ou espace de décision),
- variables de prémisse \iff variables de décision (ou variables caractéristiques),
- partie conséquence \iff modèle local.

¹C'est l'espace caractérisé par l'ensemble des variables caractéristiques (de décision) $z(t)$ qui peuvent être des variables d'état mesurables et/ou la commande.

La forme généralement retenue des modèles T-S est

$$(cas\ continu) \quad \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (1.1)$$

$$(cas\ discret) \quad x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) (A_i x(k) + B_i u(k)) \quad (1.2)$$

où $z(\cdot) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des variables de décision et $\mu_i(\cdot)$, $i \in I_n$ sont les fonctions d'activation.

Dorénavant les modèles non linéaires de T-S seront simplement appelés "multimodèles". D'autres formes de multimodèles sont répertoriées en annexe D.

1.1.1.2 Par linéarisation

Dans ce cas, on suppose disposer d'un modèle mathématique non linéaire du processus physique qu'on linéarise autour de différents points de fonctionnement judicieusement choisis. Considérons le système non linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.3)$$

avec $f(\cdot) \in C^1$. La linéarisation du système (1.3) autour d'un point de fonctionnement arbitraire $(x_i, u_i) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ est :

$$\dot{x}(t) = A_i (x(t) - x_i) + B_i (u(t) - u_i) + f(x_i, u_i) \quad (1.4)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + d_i \quad (1.5)$$

avec

$$A_i = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad B_i = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad d_i = f(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i \quad (1.6)$$

D'un point de vue mathématique, ceci correspond à approximer la fonction $f(\cdot)$ par son plan tangent au point (x_i, u_i) .

En supposant que les modèles locaux (dits aussi sous-modèles) sont issus d'une linéarisation autour de n points de fonctionnement (x_i, u_i) , la formulation multimodèle aboutit à

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + d_i) \quad (1.7)$$

où $\mu_i(z(t))$, $i \in I_n$ sont les fonctions d'activation et $z(t)$ est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables et éventuellement de la commande $u(t)$. Notons que dans ce cas, le nombre de modèles locaux (n) dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation.

1.1.1.3 Par transformation d'un système non linéaire affine en la commande

Nous proposons d'étudier cette transformation dans le cas général d'un système non linéaire affine en la commande :

$$(cas\ continu) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = g(x(t)) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

$$(cas\ discret) \begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) + B(x(k))u(k) \\ y(k) = g(x(k)) + D(x(k))u(k) \end{cases} \quad (1.9)$$

avec $x(\cdot) \in \mathbb{R}^p$, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$, $y(\cdot) \in \mathbb{R}^l$, $f(x(\cdot)) \in \mathbb{R}^p$, $g(x(\cdot)) \in \mathbb{R}^l$, $B(x(\cdot)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ et $D(x(\cdot)) \in \mathbb{R}^{l \times m}$.

La méthode de transformation exposée a été initiée par Tanaka et al [Wan96][Tan96]. Elle est basée sur une transformation polytopique convexe de fonctions scalaires originaires de la non linéarité. L'avantage de cette méthode est de ne pas engendrer d'erreur d'approximation et de réduire le nombre de modèles locaux par rapport à la méthode de linéarisation. En effet, dans le contexte de l'analyse de stabilité des multimodèles et la synthèse de régulateurs, le nombre de contraintes matricielles se trouve généralement réduit par la méthode de transformation, ce qui est synonyme de moins de conservatisme².

Dans cette section, deux méthodes de transformation de modèles non linéaires affines en la commande en multimodèles seront présentées. La première est basée uniquement sur la bornitude des termes non linéaires. La deuxième est plutôt orientée commande, elle se soucie de la structure des matrices d'entrée issues de la transformation.

Dans ce qui suit, seul le cas continu est présenté sachant que les deux méthodes s'appliquent également au cas discret.

– Première méthode - sur le nombre de modèles locaux

Dans [Mor00a], une méthode de transformation de système non linéaire affine en la commande est proposée. La méthode est basée sur la bornitude de fonctions continues.

Lemme 1.1 : soit $h(x(t))$ une fonction bornée de $[-a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $x \in [-a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$. Alors il existe deux fonctions

$$F^i(\cdot) : [-a, b] \rightarrow [0, 1], i \in I_2 \quad (1.10)$$

$$x(t) \mapsto F^i(x(t))$$

avec $F^1(x(t)) + F^2(x(t)) = 1$ et deux scalaires α et β tels que

$$h(x(t)) = F^1(x(t))\alpha + F^2(x(t))\beta \quad (1.11)$$

²Une condition est dite **conservative** lorsqu'elle est trop **contraignante** ou **pessimiste** par rapport au problème considéré.

Bien évidemment, cette décomposition n'est pas unique. Une décomposition évidente de $h(x(t))$ est de considérer sur $[-a, b]$

$$\beta \leq h(x(t)) \leq \alpha \quad (1.12)$$

avec

$$\beta = \min_{x \in [-a, b]} (h(x(t))), \quad \alpha = \max_{x \in [-a, b]} (h(x(t))) \quad (1.13)$$

$$F^1(x(t)) = \frac{h(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta}, \quad F^2(x(t)) = \frac{\alpha - h(x(t))}{\alpha - \beta} \quad (1.14)$$

Cette méthode de décomposition sera utilisée par la suite. En revenant aux définitions (1.8), sous l'hypothèse que $f(x(t))$ et $g(x(t))$ sont continues et bornées sur $U \subset \mathbb{R}^p$ avec $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, ces fonctions peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$f(x(t)) = A(x(t))x(t), \quad g(x(t)) = C(x(t))x(t) \quad (1.15)$$

Le modèle (1.8) devient

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(x(t)) & B(x(t)) \\ C(x(t)) & D(x(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Par la suite, on pose

$$E(x(t)) = \begin{pmatrix} A(x(t)) & B(x(t)) \\ C(x(t)) & D(x(t)) \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Sous l'hypothèse que $E(x(t))$ est continue et bornée, le lemme 1.1 permet de borner chaque terme non constant de la matrice $E(x(t))$ et de la transformer sous la forme suivante :

$$E(x(t)) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) E_i \quad (1.18)$$

avec

$$E_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Le nombre de modèles locaux n issus de la transformation se trouve par conséquent dépendre du nombre des non linéarités des variables d'état. L'exemple suivant illustre la méthode.

Exemple 1.1 .

Considérons le modèle non linéaire affine en la commande (1.16) avec :

$$\begin{aligned} A(x(t)) &= \begin{pmatrix} 1 & \sin(x_1(t)) \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B(x(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2^2(t) \end{pmatrix} \\ C(x(t)) &= (x_2^2(t) \ 0), D(x(t)) = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

L'objectif est d'écrire $E(x(t))$ définie en (1.17) sous la forme (1.18)-(1.19) avec :

$$E_i = \begin{pmatrix} 1 & e_{12}^{(i)} & 1 \\ 2 & -3 & e_{23}^{(i)} \\ e_{31}^{(i)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Les scalaires $e^{(i)}$ sont les bornes issues de la transformation des termes non constants de la matrice $E(x(t))$. Cette dernière présente $s = 2$ termes non constants :

$$h_1(x_1(t)) = \sin(x_1(t)), \quad h_2(x_2(t)) = x_2^2(t) \quad (1.22)$$

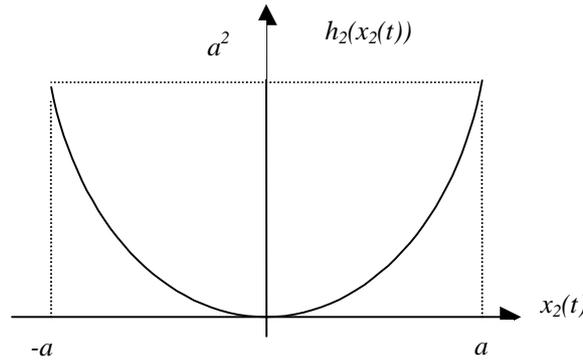


FIG. 1.1: Le terme non constant $h_2(x_2(t))$.

Remarquons que le terme non constant $h_1(x_1(t))$ est borné $\forall x(t) \in \mathbb{R}^p$ alors que le terme $h_2(x_2(t))$ ne peut l'être que sur un compact borné $[-a, a]$, $a > 0$ (figure 1.1). Ainsi, on peut transformer les termes non linéaires $h_1(x_1(t))$ et $h_2(x_2(t)) \forall x(t) \in U$ avec $U = \mathbb{R} \times [-a, a]$, $a > 0$ tels que :

$$h_1(x_1(t)) = F_1^1(x_1) \cdot 1 + F_1^2(x_1) \cdot (-1) \quad (1.23)$$

$$h_2(x_2(t)) = F_2^1(x_2) \cdot a^2 + F_2^2(x_2) \cdot 0 \quad (1.24)$$

avec

$$F_1^1(x_1) = \frac{1}{2}(1 + \sin(x_1(t))), \quad F_1^2(x_1) = \frac{1}{2}(1 - \sin(x_1(t))) \quad (1.25)$$

$$F_2^1(x_2) = \frac{x_2(t)^2}{a^2}, \quad F_2^2(x_2) = 1 - \frac{x_2(t)^2}{a^2} \quad (1.26)$$

Ainsi, on aboutit à 4 modèles locaux, obtenus à partir des 4 combinaisons possibles des bornes des termes non constants $h_1(x_1(t))$ et $h_2(x_2(t))$, décrits par les matrices E_i (1.21) suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & -3 & \mathbf{a}^2 \\ \mathbf{a}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & -3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{1} & 1 \\ 2 & -3 & \mathbf{a}^2 \\ \mathbf{a}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{1} & 1 \\ 2 & -3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

En prenant l'opérateur produit comme opérateur de conjonction, les fonctions d'activation, au nombre de 4, sont obtenues à partir des produits : $F_1^{1 \text{ ou } 2} . F_2^{1 \text{ ou } 2}$

$$\mu_1(x(t)) = F_1^1(x_1) . F_2^1(x_2), \mu_2(x(t)) = F_1^1(x_1) . F_2^2(x_2) \quad (1.29)$$

$$\mu_3(x(t)) = F_1^2(x_1) . F_2^1(x_2), \mu_4(x(t)) = F_1^2(x_1) . F_2^2(x_2) \quad (1.30)$$

Remarquons que la transformation de $A(x(t))$, $B(x(t))$ et $C(x(t))$ conduit à un certain nombre de modèles locaux LTI dépendant du nombre de termes non constants contenus dans ces matrices. En règle générale, si la matrice $E(x(t))$ présente s termes non constants alors le multimodèle est constitué d'au plus 2^s modèles locaux. Notons également que la transformation adoptée conditionne fortement les résultats d'analyse puisque les matrices des modèles locaux en dépendent directement.

Dans l'exemple 1.1, la description multimodèle du système non linéaire (1.20) n'est valide que dans le domaine $U = \mathbb{R} \times [-a, a]$ de l'espace d'état. En effet $\forall x(t) \in U$, le multimodèle correspondant à (1.20) est

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \mu_i(x(t)) \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

où les matrices A_i , B_i et C_i sont définies en (1.27)-(1.28) et les fonctions d'activations en (1.29)-(1.30). Par conséquent, l'analyse de la stabilité de (1.20) basée sur son multimodèle (1.31) n'est que locale même si la stabilité établie pour ce dernier est globale. Cependant, si la matrice $E(x(t))$ est bornée $\forall x(t) \in \mathbb{R}^p$, les résultats (relatifs à la stabilité) établis pour le multimodèle se confondent avec ceux du système non linéaire puisqu'il s'agit exactement du même modèle. Pour éviter toute confusion, nous précisons que les résultats d'analyse et de synthèse qui seront établis le long de ce mémoire concerneront le multimodèle.

– Deuxième méthode - transformation structurelle en vue de la commande

La partie qui précède a montré comment représenter un système non linéaire affine en la commande par un multimodèle avec réduction du nombre des modèles locaux (par rapport aux méthodes basées sur la linéarisation autour de différents points de fonctionnement). Il est bien connu que les résultats d'analyse et de synthèse de lois de commande formulés en termes d'inégalités matricielles dépendent du nombre de modèles locaux ; comme on le verra aux chapitres suivants, la réduction de ces derniers est synonyme de moins de pessimisme.

En plus du nombre de modèles locaux, il est particulièrement question de la structure des matrices d'entrée. Il a été montré que la structure de ces dernières conditionne fortement les conditions de synthèse de lois de commande en terme de réduction du nombre de contraintes à résoudre. Ainsi, dans le cas de la "colinéarité positive" des matrices d'entrée (i. e. $B_i = \alpha_i B, \alpha_i > 0, i \in I_n$) et plus particulièrement le cas des matrices d'entrée identiques ($B_i = B, i \in I_n$), une loi de commande dite CDF (voir paragraphe 2.3) permet de réduire le nombre des \mathcal{LMI} à n au lieu de $\frac{n(n+1)}{2}$ pour la loi de commande PDC.

Dans ce qui suit une méthode basée sur une transformation de type difféomorphisme permet une mise sous forme régulière des modèles non linéaires affines en la commande [Mor00a][Bla01a].

La forme régulière correspondant au système non linéaire décrit en (1.8) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\eta_1) \\ f_2(\eta_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_r(\eta_2) \end{pmatrix} u(t) \quad (1.32)$$

avec $\eta_1 \in \mathbb{R}^{p-d}$, $\eta_2 \in \mathbb{R}^d$, $d < m$ et $B_r(\eta_2) \in \mathbb{R}^{d,d}$ une matrice inversible de rang d .

Dans [Utk92], il a été montré que si $\text{rang}(B(x(t))) = m$, $B(x(t))$ étant la matrice d'entrée du modèle (1.8), alors ce dernier peut être transformé sous la forme régulière (1.32). Le cas général a été traité dans [Per97] où il a été montré qu'on peut toujours remplir cette condition de rang avec un retour d'état statique. Sans perte de généralité, considérons le cas classique où $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{p,m}$ avec $\text{rang}(B(x(t))) = m$.

Pour construire le difféomorphisme

$$\varphi(x) = \left(\lambda_1(x) \quad \cdots \quad \lambda_{p-m}(x) \quad \cdots \quad \lambda_p(x) \right)^T \quad (1.33)$$

transformant le modèle (1.8) en la forme régulière (1.32), on impose les conditions :

$$\frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x} b_j(x) = 0, \quad i \in I_{p-m}, \quad j \in I_m \quad (1.34)$$

avec

$$B(x) = (b_1(x) \quad \cdots \quad b_m(x)), b_j(x) \in \mathbb{R}^p \quad (1.35)$$

Les m fonctions restantes : $\lambda_{p-m}(x), \dots, \lambda_p(x)$ sont déterminées de manière à compléter le difféomorphisme $\varphi(x)$ et assurer la régularité de la jacobienne de $\varphi(x)$. Afin d'obtenir un modèle représentatif du procédé, il a été montré qu'il est nécessaire de compléter ce difféomorphisme par transformation, non linéaire ou non, du vecteur de sortie $y(t) = C(x(t))$ [Sel91]. Cette transformation non linéaire a été utilisée dans [Hen01] pour la conception d'observateurs non linéaires à entrées inconnues. La synthèse de régulateur par mode glissant pour les systèmes linéaires à retard [Gou02] et des multimodèles à retard [Bla01a] est également basée sur la transformation du système d'origine sous une forme régulière. L'exemple suivant illustre cette méthode de transformation.

Exemple 1.2 .

Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} a_1(x(t)) \\ a_2(x(t)) \\ a_3(x(t)) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ x_1^2(t) \\ \sin(x_1(t)) \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (1.36)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^3, a_i(x)^T \in \mathbb{R}^3, i \in I_3$ et $\text{rang}(B(x(t))) = 1$. La résolution de l'équation :

$$\frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x} B(x(t)) = 0, \quad i \in I_2 \quad (1.37)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x_2} x_1^2(t) + \frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x_3} \sin(x_1(t)) = 0, \quad i \in I_2 \quad (1.38)$$

aboutit aux fonctions suivantes

$$\lambda_1(x) = \cos(x_1(t)) + x_3(t), \quad \lambda_2(x) = -\frac{x_1^3(t)}{3} + x_2(t) \quad (1.39)$$

Pour compléter le difféomorphisme $\varphi(x)$ et assurer la régularité de sa jacobienne, on choisit

$$\lambda_3(x) = x_1(t) \quad (1.40)$$

On obtient la transformation non linéaire suivante :

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ \lambda_3(x) \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

dont la jacobienne :

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\sin(x_1(t)) & 0 & 1 \\ -x_1^2(t) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

est régulière quelque soit $x(t)$. En effet avec la transformation non linéaire

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_1(t)) + x_3(t) \\ -\frac{x_1^3(t)}{3} + x_2(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

la forme régulière correspondante à (1.36) est obtenue en dérivant par rapport au temps (1.43) ; elle est de la forme

$$\dot{\eta}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin x_1(t) \cdot a_1(x(t)) + a_3(x(t)) \\ x_1^2(t) \cdot a_1(x(t)) + a_2(x(t)) \\ a_1(x(t)) \end{pmatrix}}_{=A(\eta(t))\eta(t)} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (1.44)$$

$$y(t) = \eta_3(t)$$

Sachant que $x = \varphi^{-1}(\eta)$, la matrice $A(\eta(t))\eta(t)$ est obtenue en substituant $x_1(t)$ par $\eta_3(t)$, $x_2(t)$ par $\left(\eta_2(t) + \frac{\eta_3^3(t)}{3}\right)$ et $x_3(t)$ par $(\eta_1(t) - \cos(\eta_3(t)))$. Le modèle (1.44) est ensuite écrit sous la forme

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\eta(t)) A_i + Bu(t) \quad (1.45)$$

$$y(t) = C\eta(t) \quad (1.46)$$

avec $B = (0 \ 0 \ 1)^T$ et $C = (0 \ 0 \ 1)$.

Notons que si ce type de mise sous forme régulière peut s'avérer intéressant dans certains cas, il ne peut l'être dans un contexte général. La raison est simplement due au fait que, si ce type de transformation permet d'obtenir de bonnes propriétés sur les matrices d'entrée, elle peut rendre plus complexe le reste du modèle. Ainsi on peut introduire plus de non linéarité et donc un nombre de modèles locaux plus important. Dans ce sens on peut même rendre la tâche de synthèse de multiobservateurs plus difficile : dans (1.36) $y(t) = Cx(t)$, avec $C = (1 \ 0 \ 0)$, la synthèse de multiobservateurs par la méthode quadratique dans ce cas est aisée, elle nécessite la résolution de $n \mathcal{LMI}$ (avec n le nombre de modèle locaux). Cependant si $C = (0 \ 1 \ 0)$, avec la transformation non linéaire (1.43), la sortie du modèle sous forme régulière devient $y(t) = \eta_2(t) + \frac{\eta_3^3(t)}{3}$ qui contient un terme non linéaire, sa représentation multimodèle est $y(t) = \sum_{i=1}^{n-2} \mu_i(\eta(t)) C_i \eta(t)$. La synthèse de multiobservateurs, comme on le verra dans le chapitre suivant, demande alors la résolution de $n \frac{n+1}{2} \mathcal{LMI}$. Ainsi, il faut garder à l'esprit que les variables choisies pour compléter la transformation non linéaire peuvent également rendre complexe la structure du vecteur de sortie.

1.1.2 Inclusions différentielles linéaires

Une inclusion différentielle linéaire (IDL) est définie par [Boy94] :

$$\dot{x}(t) \in \Omega x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.47)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^p$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^{p \times p}$. Une IDL peut décrire, par exemple, une famille de systèmes LTV. Dans ce cas, toute trajectoire de l'IDL satisfait

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.48)$$

Quand Ω est un polytope, l'IDL est dite polytopique (IDLp), i. e.

$$A(t) \in \Omega, \quad \Omega = \text{co} \{A_1, \dots, A_n\} \quad (1.49)$$

Dans ce cas, la matrice $A(t)$ est une combinaison convexe des sommets A_i du polytope :

$$A(t, x(t)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t, x) A_i \quad (1.50)$$

où les matrices A_i sont connues et les scalaires positifs $\alpha_i(\cdot)$, $i \in I_n$ satisfont la propriété :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(t, x) = 1, \quad \alpha_i(t, x) \geq 0 \quad (1.51)$$

La linéarisation globale [Boy94] permet de représenter un système non linéaire variant dans le temps par une IDLP. En effet considérons le système :

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad (1.52)$$

Si la jacobienne $A(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}$ appartient à l'enveloppe convexe définie en (1.50), alors toute trajectoire du système non linéaire (1.52) est aussi trajectoire de l'IDLp définie par Ω . Bien évidemment nous devons garder à l'esprit qu'il s'agit d'une approximation source de conservatisme : de nombreuses trajectoires de l'IDLp ne sont pas des trajectoires du système non linéaire.

Dans le cadre de la stabilité quadratique, l'analyse de la stabilité ainsi que la synthèse de lois de commande par retour d'état linéaire ne dépend pas des fonctions d'activation $\mu_i(\cdot)$. Dans ce sens, l'étude de la stabilité du multimodèle (1.1) est identique à celle de l'IDLp (1.49). Ce constat permet de qualifier la commande multimodèle de robuste du moment où les fonctions $\mu_i(\cdot)$, ne participant pas à l'élaboration de lois de commande ni à l'analyse de stabilité, peuvent être considérées comme des incertitudes polytopiques. Par contre, lorsqu'une loi de commande de type CDF, PDC ou de structures dérivées (voir paragraphe 2.3) sont utilisées, la connaissance des fonctions d'activation est fondamentale. Les résultats qui découlent de ces lois de commande permettent de tenir compte des propriétés structurelles du multimodèle (phénomène de croisement des modèles locaux LTI, fonctions d'activation ou leurs supports, matrices d'entrées linéairement dépendantes).

1.2 Analyse de stabilité

1.2.1 Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe

La méthode directe de Lyapunov s'appuie sur une observation physique fondamentale : si l'énergie totale (qui est scalaire) d'un système, linéaire ou non linéaire, est continûment dissipée (on parle de système dissipatif), alors on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. Ainsi l'idée de Lyapunov est d'examiner la variation d'une fonction scalaire pour étudier la stabilité d'un système donné.

Considérons tout d'abord le système non linéaire en régime libre décrit par

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.53)$$

avec $f(x(t)) \in C^1, x(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Le système (1.53) est dit en équilibre autour de x_0 si, en l'absence d'influence externe, son état ne varie pas au cours du temps, x_0 est alors appelé point d'équilibre.

Définition 1.1 (*point d'équilibre*) : x_0 est appelé point d'équilibre du système (1.53) si $f(x_0) = 0, \forall t > 0$.

Par la suite, on considérera que l'origine de l'espace d'état est point d'équilibre ($x_0 = 0$) du système (1.53). Cette hypothèse très classique ne nuit en rien à la généralité du propos car si $x_0 \neq 0$ est point d'équilibre de (1.53) alors $x_0 = 0$ est point d'équilibre du système $\dot{z} = f(z(t) + x_0)$.

Définition 1.2 : une fonction continue $\alpha(r) : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe κ si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. Si $a = \infty$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$, la fonction est dite de classe κ_∞ .

Théorème 1.1 [Isi99][Vid93] : soit une fonction scalaire $V(x(t)) \in C^1$ telle que

$$\alpha_1(x(t)) \leq V(x(t)) \leq \alpha_2(x(t)) \quad (1.54)$$

$\forall \|x\| < d$ où $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont des fonctions de classe κ définies sur $[0, d), d \in \mathbb{R}^{+*}$

- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0, \forall \|x\| < d$ alors le point d'équilibre ($x_0 = 0$) de (1.53) est localement stable (il est globalement stable si, de plus, $d = \infty$ et les fonctions $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont de classe κ_∞).
- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|), \forall \|x\| < d$ avec $\alpha_0(\cdot)$ fonction de classe κ définie sur $[0, d)$, alors le point d'équilibre de (1.53) est localement asymptotiquement stable.
- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|), \forall x (d = \infty)$ et les fonctions $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont de classe κ_∞ alors le point d'équilibre de (1.53) est globalement asymptotiquement stable.

- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|) \forall x$ ($d = \infty$) et les fonctions $\alpha_0(\cdot)$, $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont de classe κ_∞ de la forme :

$$\alpha_1(\|x\|) = a \|x\|^p, \alpha_2(\|x\|) = b \|x\|^p, \alpha_0(\|x\|) = c \|x\|^p$$

telles que $a, b, c \geq 0, p \geq 1$, alors le point d'équilibre de (1.53) est globalement exponentiellement stable.

Pour des définitions relatives aux systèmes non linéaires discrets, le lecteur peut se référer par exemple à [Bor93].

1.2.2 Fonctions de Lyapunov "types"

Dans le cas général, il n'existe pas de méthode pour trouver toutes les fonctions candidates de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à la fonction $V(x(t))$ et de la structure du système. Cependant, il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier (systèmes linéaires, systèmes continus par morceaux, systèmes à retard, systèmes linéaires incertains,...).

Fonction quadratique : le choix le plus classique consiste à utiliser une forme quadratique :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), P > 0 \quad (1.55)$$

L'étude de la stabilité à l'aide de ce type de fonction a constitué la base de très nombreux travaux jusqu'à maintenant (par exemple : [Gar97][Boy94]). Dans le cas des systèmes incertains, quand aucune information n'est connue sur la vitesse d'évolution des paramètres incertains, c'est pratiquement la seule méthode possible. Ce type de fonction, adoptée pour étudier la stabilité des systèmes linéaires, est aussi utilisée dans le cas des multimodèles [Tan98a]. Sa forme générale est celle utilisée dans le cas des systèmes de type Lur'e [Kha96]. Trouver une telle fonction revient à trouver une matrice définie positive. Dans le cas de l'approche multimodèle, la formulation convexe du problème permet aisément l'extraction d'une telle fonction lorsqu'elle existe. L'inconvénient de la méthode réside dans l'obtention de conditions de stabilité très conservatives comme on le verra dans le chapitre 2. Une autre variante de ces fonctions est de la forme

$$V(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x(t) \quad (1.56)$$

avec $P_i > 0$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}^{+*}$. Ces fonctions quadratiques sont utilisées dans le cas des systèmes interconnectés [Lun92][Sez88] et récemment dans le cas des multimodèles

[Aka00][Aka98][Che96]. Ces fonctions feront l'objet d'étude aux paragraphes 2.2.3 et 2.2.4.

De manière à aller au delà du pessimisme de la stabilité quadratique, il est nécessaire d'envisager d'autres fonctions candidates de Lyapunov.

Fonction polyquadratique : cette fonction est de la forme

$$V(x(t), z(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) P_i x(t) \quad (1.57)$$

avec $P_i > 0$, $\mu_i(z(t)) > 0$, $\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) = 1$. Elle permet, dans le cas de l'approche multimodèle, de relaxer les contraintes imposées par la méthode quadratique. Ce type de fonctions est également utilisé dans le cadre des systèmes discrets à paramètres incertains bornés variants dans le temps [Daa01a]. Faisant appel à l'optimisation convexe, une procédure est proposée par Johansen [Joh00] pour extraire de telles fonctions pour les systèmes non linéaires continûment différentiables de la forme $\dot{x}(t) = f(x, \theta)$ où $x(t)$ est la variable d'état et θ est un paramètre éventuellement variant dans le temps. Ce type de fonction est aussi plus général dans le sens où il inclut le cas quadratique, car il suffit de choisir $P_i = P$, $i \in I_n$ pour se ramener au cas des fonctions quadratiques. Il est aussi intéressant de noter que, par opposition à la méthode quadratique, ce type de fonction tient compte de la vitesse de variation des variables de décision du multimodèle continu ce qui explique la réduction du conservatisme de la méthode [Jad99][Cha00][Mor00b][Bla01b][Tan01a]. Dans le cas discret, ce type de fonction a permis à Morère et al. [Mor00a] d'obtenir des conditions suffisantes moins conservatives que les résultats issus de la méthode quadratique [Wan96]. Dans le cadre des systèmes discrets à incertitudes polytopiques, les travaux de Daafouz et al [Daa01a] ont abouti à des conditions nécessaires et suffisantes pour que de telles fonctions existent. Ce type de fonction sera étudiée au chapitre 3.

Fonction affine paramétrique : ce type de fonction de la forme

$$V(x(t)) = x(t)^T P(\theta) x(t) \quad (1.58)$$

avec $P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \dots + \theta_k P_k > 0$ est souvent utilisé pour étudier les systèmes linéaires à paramètres incertains variants dans le temps du type :

$\dot{x}(t) = A(\theta) x(t)$ avec $A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \dots + \theta_k A_k$ où les paramètres θ_i et leurs variations sont bornés.

L'expression (1.58) généralise les fonctions de Lyapunov quadratiques qui correspondent à $P_1 = \dots = P_k = 0$. Elles sont moins conservatives³ que les fonctions quadratiques car elles tiennent compte des variations des paramètres (voir par exemple [Gah96][Bar01]. Pour illustrer ce propos, considérons le cas d'un système LPV incertain à un seul paramètre θ_1 i.e. $A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1$. La condition de stabilité de ce système incertain est $A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) + \frac{d(P(\theta))}{dt} < 0$, ce qui est équivalent, dans le cas d'un seul paramètre à : $A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) + \dot{\theta}_1 P_1 < 0$.

Ainsi la stabilité ne sera vérifiée, pour une vitesse de variation $\dot{\theta}_1$ non bornée, que si $P_1 = 0$, ce qui correspond à la fonction de Lyapunov quadratique $V(x(t)) = x(t)^T P_0 x(t)$. Par conséquent la stabilité quadratique se veut une stabilité à vitesse de variation paramétrique arbitraire. La non prise en compte de la vitesse de variation paramétrique $\dot{\theta}_1$ explique en partie le conservatisme de la méthode quadratique. Cet exemple montre en effet que la qualité des résultats obtenus dépend du choix du type de fonction de Lyapunov relativement à la nature du système étudié.

Fonctions continues par morceaux : on peut distinguer les fonctions de Lyapunov linéaires continues par morceaux et les fonctions de Lyapunov quadratiques continues par morceaux [Oht01][Fen02][Pet97][Joh99b][Has98]. Ces fonctions non quadratiques ont fait aussi l'objet d'applications dans le cas des systèmes flous [Cao99][Zha01][Joh99b]. On peut distinguer également les fonctions quadratiques par morceaux de la forme

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_n(x(t))) \quad (1.59)$$

avec

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t), P_i > 0, i \in I_n \quad (1.60)$$

Ce type de fonctions a fait l'objet d'étude dans le cas des systèmes LTV [Boy94] et présente l'avantage d'être moins conservatives que les fonctions quadratiques. Nous les utiliserons dans le cadre des multimodèles au chapitre 3 et au chapitre 4.

1.3 Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles

1.3.1 Analyse convexe

La notion de convexité tient dans ce mémoire une place importante étant données les orientations choisies. En effet, les problèmes d'analyse et de synthèse dont il est question sont formulés en termes d'optimisation, convexe si possible. La convexité d'un problème d'optimisation a un double avantage :

³Par abus de langage, on dira qu'une fonction est moins conservative qu'une autre si elle conduit à des solutions moins restrictives (conservatives) que celles issues de l'autre.

- les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables ;
- il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser ; le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

Cependant, si un problème n'est pas convexe au départ, le transformer en une formulation convexe peut parfois entraîner des domaines de validité très restrictifs et des contraintes très conservatives. La solution ainsi obtenue par optimisation convexe est optimale au sens du nouveau problème mais pas nécessairement au sens du problème initial. Cette remarque est fondamentale pour l'interprétation des résultats obtenus par des méthodes d'optimisation. Cependant, si la transformation non convexe / convexe se fait par des équivalences, la solution obtenue est également optimale pour le problème initial.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas.

Définition 1.1 : *ensemble convexe*

Soit un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, E est un ensemble convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in E^2, \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in E \quad (1.61)$$

Définition 1.2 : *fonction convexe*

Soit une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec E un ensemble convexe, alors f est convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \quad (1.62)$$

Un problème d'optimisation convexe s'énonce donc comme suit : $\min_{x \in E} (f(x))$, où E est un ensemble convexe et f une fonction convexe.

Une formulation particulière retiendra notre attention, il s'agit de l'optimisation sous contraintes définies par des inégalités matricielles linéaires. Dans ce qui suit, on rappelle les principaux résultats de ce formalisme.

1.3.2 Problèmes classiques \mathcal{LMI}

Depuis quelques années, de nombreux travaux ayant pour principal but de réduire une grande variété de problèmes de synthèse ou d'analyse à des problèmes d'optimisation convexe impliquant des \mathcal{LMI} ont vu le jour. Parallèlement, des méthodes efficaces de résolution des problèmes d'optimisation convexe ont été développées. Ces méthodes appelées méthodes de point-intérieur développées initialement par Karmakar [Kar84] pour la programmation linéaire furent étendues ensuite par Nesterov et Nemirovskii [Nes94] au cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives.

Parmi les raisons qui ont fait de cette approche une des plus appliquées dans le domaine de la commande, on peut citer : l'existence de méthodes de résolution numérique efficaces ou la possibilité de traiter la commande multicritère. Dans cette partie, on présente les idées de base de l'approche \mathcal{LMI} [Boy94][Ric01].

Définition 1.3 : étant donnée une famille de matrices symétriques P_0 et $P_i, i \in I_n$ de $\mathbb{R}^{p \times p}$ et un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, une \mathcal{LMI} stricte (resp. non stricte) en $x_i, i \in I_n$ s'écrit sous la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i > 0 \quad (\text{resp. } \geq 0) \quad (1.63)$$

Remarquons que l'ensemble E défini par $E = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > 0\}$ est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte \mathcal{LMI} comme une contrainte convexe.

Les trois problèmes d'optimisation convexe les plus rencontrés sous forme de \mathcal{LMI} sont :

- **Problème de réalisabilité**⁴ : il s'agit de trouver un vecteur x tel que la contrainte convexe $F(x) > 0$ est satisfaite. Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur x minimisant le scalaire t tel que :

$$-F(x) < t\mathcal{I} \quad (1.64)$$

Si la valeur minimale de t est négative, le problème est réalisable.

- **Problème de valeurs propres (EVP)** : il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type \mathcal{LMI} :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \lambda \\ & \text{sous les contraintes } \begin{cases} \lambda\mathcal{I} - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.65)$$

- **Problème de valeurs propres généralisées (GEVP)** : il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices, par rapport à une contrainte \mathcal{LMI} :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \lambda \\ & \text{sous les contraintes } \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Ces problèmes d'optimisation convexe peuvent alors être résolus par différents types de méthodes :

⁴Par abus de langage, on dira d'un système d'inégalités matricielles qu'il est **réalisable** (l'équivalent du mot anglo-saxon **feasible**) s'il admet une solution.

- Méthode des plans sécants
- Méthode de l'ellipsoïde
- Méthode du type "simplexe"
- Méthode des points intérieurs (Méthode des centres, Méthode primale-duale, Méthode projectives de Nemirovskii)

1.3.3 Techniques d'analyse et de réduction

Parmi les exemples les plus classiques de contraintes de type \mathcal{LMI} dont nous aurons besoin tout au long de ce mémoire, citons :

1. *Complément de Schur* : soient trois matrices $R(x) = R(x)^T$, $Q(x) = Q(x)^T$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x . Les \mathcal{LMI} suivantes sont équivalentes :

$$i) \begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} > 0$$

$$ii) R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0$$

2. *Contraintes quadratiques convexes* : la contrainte sur la norme $\|Z(x)\| < 1$, où $Z(x) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ est affine par rapport la variable $x \in \mathbb{R}^p$ est représentée par

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_p & Z(x) \\ Z(x)^T & \mathcal{I}_q \end{pmatrix} > 0 \quad (1.67)$$

3. *Procédure-S* : cette procédure est souvent utilisée en synthèse par approche \mathcal{LMI} . Il s'agit d'une technique qui permet d'approcher un ensemble de contraintes convexes ou non par une contrainte convexe.

Lemme 1.2 : soient F_0, \dots, F_q des fonctions quadratiques dépendantes des variables $\xi \in \mathbb{R}^p$:

$$F_i(\xi) = \xi^T T_i \xi + 2u_i \xi + v_i, i \in I_q \quad (1.68)$$

où $T_i = T_i^T \in \mathbb{R}^p$. Alors la proposition (1) implique la proposition (2).

$$(1) \quad \delta_0 \geq 0, \dots, \delta_q \geq 0 \text{ tel que } F_0(\xi) - \sum_{i=1}^q \delta_i F_i(\xi) \geq 0$$

$$(2) \quad F_0(\xi) \geq 0 \forall \xi \neq 0 \text{ tel que } F_i(\xi) \geq 0, i \in I_q$$

Si $q = 1$, alors la réciproque est vraie également.

4. *Lemme de projection* : le lemme suivant, dit aussi lemme d'élimination, est un des outils utilisés pour la synthèse de régulateur.

Lemme 1.3 : pour des matrices réelles $W = W^T$, M , N de tailles appropriées, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- Il existe une matrice réelle K telle que :

$$W + MKN^T + NK^T M^T < 0 \quad (1.69)$$

- Il existe un scalaire σ tel que :

$$W < \sigma MM^T \text{ et } W < \sigma NN^T \quad (1.70)$$

- Les compléments orthogonaux M^\perp et N^\perp de M et N , respectivement, vérifient :

$$M^{\perp T} W M^\perp < 0 \text{ et } N^{\perp T} W N^\perp < 0 \quad (1.71)$$

1.3.4 Extensions

1.3.4.1 Les \mathcal{LMI} non strictes

La \mathcal{LMI} $F(x(t)) \geq 0$ est strictement réalisable si $F(x(t)) > 0$ est réalisable. Quand une \mathcal{LMI} est réalisable mais ne peut l'être strictement, la solution du problème sous sa version stricte peut être différente de sa version non stricte. Pour illustrer cette situation, considérons l'exemple suivant :

$$F(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \quad (1.72)$$

La contrainte stricte $F(x) > 0$ est non réalisable alors que $F(x) \geq 0$ a pour solution unique $x = 0$.

Une méthode basée sur la réduction aux \mathcal{LMI} strictes est proposée en [Boy94]. La méthode est basée sur l'élimination de l'égalité implicite du problème non strict.

Parmi les logiciels permettant la résolution des inégalités matricielles non strictes, on peut citer la \mathcal{LMI} TOOL de [Nik95]. Notons que la toolbox \mathcal{LMI} Control de matlab [Gah95] qui permet de résoudre les problèmes de GEVP et d'EVP, ne permet pas de résoudre les \mathcal{LMI} non strictes.

1.3.4.2 Les inégalités matricielles bilinéaires

Un nombre important de problèmes de commande et d'observation s'expriment sous forme d'inégalités matricielles bilinéaires (\mathcal{BMI} suivant l'acronyme anglo-saxon) qui peuvent être vues comme une généralisation des \mathcal{LMI} . Il n'existe pas aujourd'hui de méthode exacte pour résoudre ce genre de problèmes, mais des heuristiques ont été mises en place dans différents cadres.

Définition 1.3 : on appelle \mathcal{BMT} en $x_i, i \in I_n$, une contrainte de la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j P_{ij} > 0 \text{ (resp. } \geq 0) \quad (1.73)$$

où les matrices P_i et P_{ij} appartenant à $\mathbb{R}^{p \times p}$ sont symétriques.

Les \mathcal{BMT} , qui ne sont pas convexes, peuvent avoir plusieurs solutions locales et ne peuvent pas être résolues par les techniques d'optimisation convexe développées pour la résolution des \mathcal{LMT} . De telles contraintes apparaissent dans de nombreux problèmes ; des méthodes itératives permettent, sans garantir la convergence, de résoudre certaines classes de \mathcal{BMT} . Ces dernières années des algorithmes aboutissant à des solutions locales [Has99] et globales [Ber97] ont été proposés pour résoudre ces problèmes non convexes. Certaines \mathcal{BMT} peuvent être converties en un problème \mathcal{LMT} équivalent avec une contrainte de rang. La résolution de ce genre de problème apparaît fréquemment dans les formulations d'analyse et de synthèse. Il s'agit d'un problème non convexe difficile. Cependant, il existe des méthodes heuristiques permettant de trouver des solutions à ce genre de problèmes. Des algorithmes d'optimisation locale ou globale peuvent être employés. À titre d'exemple, dans [Hen99] les auteurs ont proposé un algorithme heuristique pour résoudre un problème \mathcal{LMT} avec une contrainte de rang-1. Dans [Apk00] une méthode basée sur celle de Frank et Wolfe permet de garantir l'optimalité globale de la solution lorsqu'elle existe.

Cependant, certains problèmes \mathcal{BMT} peuvent se ramener facilement à des \mathcal{LMT} . Plusieurs méthodes sont alors envisageables :

a) Par un *changement de variable judicieux*. Cette astuce mathématique est fréquemment utilisée dans le cas du retour d'état statique (cas des lois de commande PDC et CDF dans le cadre des multimodèles) où le produit de deux variables qui apparaît dans les conditions de synthèse est remplacé par une nouvelle variable.

b) Par les *techniques d'élimination des variables* en utilisant le lemme de projection. La motivation principale de ce lemme est de traduire les problèmes sous forme de conditions \mathcal{LMT} afin de les résoudre efficacement à l'aide des outils numériques. Cette technique est souvent utilisée dans le cas du retour de sortie ou les inégalités matricielles associées ne sont pas linéaires mais bilinéaires par rapport aux inconnues.

Ces techniques de linéarisation seront utilisées au cours des chapitres suivants. Elles sont illustrées par le problème \mathcal{BMT} en K_i et P suivant :

$$P > 0, (A_i + B_i K_i)^T P + P (A_i + B_i K_i) < 0, \forall i \in I_n \quad (1.74)$$

En pré- et post-multipliant les inégalités (1.74) par $P^{-1} = Q$ on obtient

$$Q > 0, Q (A_i + B_i K_i)^T + (A_i + B_i K_i) Q < 0 \quad (1.75)$$

- Résolution par changement de variable

En posant $Y_i = K_i Q$ on obtient les \mathcal{LMI} suivantes en Y_i et Q

$$Q > 0, A_i Q + Q A_i^T + B_i Y_i + Y_i^T B_i^T < 0 \quad (1.76)$$

- Résolution par élimination de variable

En pré- et post-multipliant les inégalités (1.76) par B_i^\perp , le complément orthogonal de B_i , on obtient les \mathcal{LMI} équivalentes suivantes :

$$Q > 0, B_i^{\perp T} (A_i Q + Q A_i^T) B_i^\perp < 0 \quad (1.77)$$

Une fois les variables K_i éliminées et Q^{opt} calculée à partir de (1.77), les variables K_i sont obtenues en résolvant les \mathcal{LMI} (1.74).

Chapitre 2

Stabilité et stabilisation quadratique des multimodèles

2.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est de faire le point sur quelques approches permettant l'étude de stabilité des multimodèles et la synthèse de lois de commande.

Ces dernières années, de nombreux travaux concernant l'analyse et la synthèse de régulateurs ont été publiés. La plupart de ces travaux sont inspirés des techniques de commande rencontrées dans la littérature. Par exemple, dans [Tan98b][Gue01b][Bla01b] des résultats ont été obtenus en se basant sur des fonctions de Lyapunov quadratiques, dans [Gue99b] ces problèmes ont été abordés par transformation en un problème de type Lur'e alors que dans [Aka00][Aka98][Che96] l'analyse et la synthèse de lois de commande ont été étudiées en utilisant les techniques des systèmes interconnectés et les propriétés des M-matrices. La synthèse de lois de commande a été également traitée par les techniques de systèmes incertains [Zak99][Cao96][Fen01] [Tan96] [Kir96][Tei99]. Ce chapitre est intégralement consacré à l'approche quadratique de Lyapunov. Il est organisé de la façon suivante.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons quelques conditions suffisantes de stabilité des multimodèles. En se basant sur les propriétés des M-matrices, une classe de multimodèles acceptant des fonctions de Lyapunov quadratiques est étudiée.

Dans le paragraphe 2.3, après un bref rappel de l'état de l'art des lois de commande existantes, la stabilisation par retour d'état est abordée essentiellement par les lois de commande PDC et CDF. Des résultats moins contraignants que ceux existants et permettant de maximiser le degré de stabilité (taux de décroissance) des multimodèles en boucle fermée sont ensuite proposés.

Le paragraphe 2.4 est consacré à l'étude des multiobservateurs. Le cas des variables de décision non mesurables est traité et le principe de séparation est également abordé.

2.2 Stabilité quadratique

L'approche proposée dans ce chapitre repose sur les fonctions de Lyapunov quadratiques. Il s'agit de chercher une matrice symétrique définie positive et sa fonction de Lyapunov quadratique associée telles que certaines conditions simples garantissent les propriétés de stabilité. Bien que conduisant à des conditions parfois conservatives, cette méthodologie est, d'un point de vue pratique, facile à mettre en œuvre.

2.2.1 Stabilité globale

Considérons le multimodèle continu de la forme

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.1)$$

avec

$$\mu_i(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) = 1 \quad (2.2)$$

Le multimodèle en boucle ouverte correspondant à (2.1) est

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) A_i x(t) \quad (2.3)$$

Le multimodèle (2.3) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que les \mathcal{LMI} suivantes sont réalisables [Boy94][Tan98b] :

$$P > 0, \quad A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i \in I_n \quad (2.4)$$

Ce résultat est obtenu en dérivant, le long de la trajectoire du multimodèle (2.3), la fonction quadratique (1.55). L'existence de P dépend de deux conditions :

- la première est liée à la stabilité de tous les modèles locaux. Il est nécessaire que chaque matrice A_i soit de Hurwitz¹.
- la deuxième condition est relative à l'existence d'une fonction de Lyapunov commune aux n modèles locaux. Elle exige que la somme $\sum_{i=1}^n A_i$ soit de Hurwitz. La preuve peut être obtenue en sommant les \mathcal{LMI} (2.4).

Cette dernière condition peut être formulée par la proposition suivante.

Proposition 2.1 : *s'il existe deux matrices telles que leur somme $A_i + A_j, \forall (i, j) \in I_n^2$ n'est pas stable, alors le multimodèle(2.3) ne peut être quadratiquement stable.*

¹une matrice dont les valeurs propres appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

La proposition suivante généralise la précédente et fournit une méthode systématique permettant de tester la non existence d'une matrice symétrique définie positive commune.

Proposition 2.2 [Boy94] : *déterminer si une matrice P vérifiant (2.4) n'existe pas est équivalent à trouver des matrices Q_i non toutes nulles telles que*

$$Q_1 \geq 0, \dots, Q_n \geq 0, \sum_{i=1}^n (Q_i A_i^T + A_i Q_i) \geq 0 \quad (2.5)$$

Stabilité exponentielle

Le degré de stabilité, ou le taux de décroissance (decay rate) du système (2.3), est le plus grand scalaire α tel que, quelque soit la trajectoire vérifiant (2.3), on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0 \quad (2.6)$$

En d'autres termes, le taux de décroissance peut être défini, sur toutes les trajectoires non nulles, par $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln \|x(t)\|}{t}$. Prouver la stabilité exponentielle du système revient à assurer que, pour toutes les trajectoires $x(t)$ vérifiant (2.3), on a pour $\alpha > 0$:

$$\exists P > 0 : \frac{dV(x(t))}{dt} + 2\alpha V(x(t)) < 0 \quad (2.7)$$

En effet, dans ce cas, (2.7) implique que $V(x(t)) \leq V(x(0)) e^{-2\alpha t}$ et que pour toutes les trajectoires vérifiant (2.3) on a

$$\|x(t)\| \leq e^{-\alpha t} (\kappa(P))^{1/2} \|x(0)\| \text{ avec } \kappa(P) = \left(\frac{\lambda_{\max}(P^T P)}{\lambda_{\min}(P^T P)} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

Le système est alors dit α -stable où α est bien un minorant du taux de décroissance des trajectoires du système (2.3) qu'il serait important de maximiser. Notons que maximiser le minorant du taux de décroissance est un problème de GEVP en P et α . Sa formulation est la suivante [Boy94] :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } \alpha \\ & \text{sous les contraintes } \begin{cases} P > 0 \\ A_i^T P + P A_i + 2\alpha P < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2.2 Stabilité locale

2.2.2.1 Ellipsoïde invariant

Les fonctions quadratiques de Lyapunov ont une interprétation géométrique très intéressante en terme d'ellipsoïdes invariants². Soit une matrice symétrique définie positive

²Un ellipsoïde (ε_Q) est dit invariant dans le sens où $x(0) \in \varepsilon_Q$ implique $x(t) \in \varepsilon_Q, \forall t > 0$

Q et l'ellipsoïde centré sur zéro défini par

$$\varepsilon_Q = \{x \in \mathbb{R}^p : x^T Q^{-1} x \leq 1\}$$

Si la fonction de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T Q^{-1} x(t)$ vérifie, pour toute trajectoire $x(t)$, la condition

$$\frac{dV(x(t))}{dx(t)} < 0 \quad (2.10)$$

alors toute trajectoire de condition initiale $x(0) \in \varepsilon_Q$ ne s'échappe pas de l'ellipsoïde.

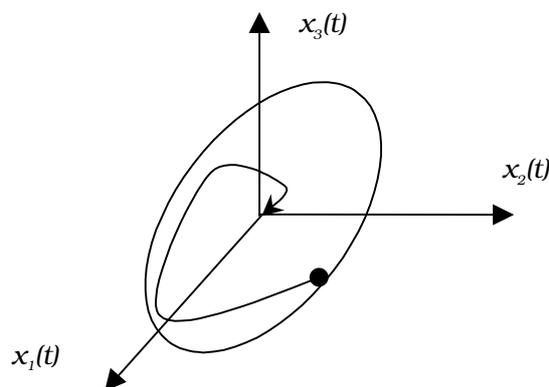


FIG. 2.1: Ellipsoïde invariant dans le cas d'un système à trois dimensions.

L'ellipsoïde ε_Q représente le domaine d'attraction qu'on peut estimer utilisant la fonction de Lyapunov quadratique et dont il faut maximiser le volume.

2.2.2.2 Maximisation du volume d'un ellipsoïde contenu dans un polytope

Considérons le polytope décrit par

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^p : a_k^T x \leq 1, k \in I_q\} \quad (2.11)$$

L'ellipsoïde ε_Q est contenu dans le polytope \mathcal{P} si et seulement si :

$$\max \{a_k^T x : x \in \varepsilon_Q\} \leq 1, k \in I_q \quad (2.12)$$

ce qui est équivalent aux inégalités linéaires en Q suivantes :

$$a_k^T Q a_k \leq 1, k \in I_q \quad (2.13)$$

Ainsi l'idée est de maximiser le volume de l'ellipsoïde ε_Q en maximisant le déterminant de la matrice Q ($\det(Q)$) sous la contrainte (2.13).

La proposition suivante établit la stabilité locale exponentielle du point d'équilibre ($x_0 = 0$) d'un multimodèle valide dans le domaine polytopique \mathcal{P} de la forme (2.11) et évalue également le domaine d'attraction le plus large contenu dans \mathcal{P} [Boy94].

Proposition 2.3 : soit le multimodèle (2.3) valide dans le polytope \mathcal{P} décrit en (2.11). L'origine du multimodèle (2.3) est exponentiellement stable si le problème convexe suivant en Q est vérifié :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } \det(Q) \\ & \text{sous les contraintes } \begin{cases} Q > 0 \\ QA_i^T + A_iQ + 2\alpha Q < 0, i \in I_n \\ a_k^T Q a_k \leq 1, k \in I_q \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

De plus l'ellipsoïde ε_Q est le domaine d'attraction le plus large contenu dans \mathcal{P} qu'on peut estimer par une fonction quadratique de Lyapunov.

Preuve : voir [Boy94], paragraphe 5.2. ■

2.2.3 Autre approche

En général, il n'existe pas de méthode systématique permettant l'obtention d'une fonction de Lyapunov quadratique. Cependant, dans le cas particulier où les matrices A_i sont de Hurwitz et commutatives par paire, il est possible de construire, de manière systématique, une fonction de Lyapunov quadratique [Nar94]. Par la suite, nous proposons une approche basée sur les propriétés des M-matrices. Cette approche met l'accent sur une autre classe de multimodèles acceptant des matrices de Lyapunov communes. Cette étude est basée sur les fonctions candidate sde Lyapunov de la forme :

$$V(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x(t), P_i > 0, \alpha_i \in \mathbb{R}^{*+} \quad (2.15)$$

Il s'agit d'une fonction de classe κ_∞ :

$$c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq c_2 \|x(t)\|^2 \quad (2.16)$$

avec $c_1 = \lambda_{\min}(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) > 0$ et $c_2 = \lambda_{\max}(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i) > 0$.

Théorème 2.1 [Cha02g] : supposons qu'il existe des matrices symétriques $P_i > 0$, $S_{ii} > 0$ et S_{ij} telles que :

1. $A_i^T P_i + P_i A_i \leq -S_{ii}, \forall i \in I_n$
2. $A_j^T P_i + P_i A_j \leq S_{ji}, \forall (i, j) \in I_n^2, i \neq j$
3. Φ est une M-matrice

avec

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(S_{11}) & -|\lambda_{\max}(S_{12})| & \cdots & -|\lambda_{\max}(S_{1n})| \\ -|\lambda_{\max}(S_{21})| & \lambda_{\min}(S_{22}) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -|\lambda_{\max}(S_{(n-1)n})| \\ -|\lambda_{\max}(S_{n1})| & \cdots & -|\lambda_{\max}(S_{n(n-1)})| & \lambda_{\min}(S_{nn}) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

alors le multimodèle (2.3) est globalement exponentiellement stable.

Preuve : considérons la fonction de Lyapunov (2.15). Sa dérivée le long du multimodèle (2.3) donne

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x(t)^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \mu_j(z(t)) (A_j^T P_i + P_i A_j) x(t) \\ &= x(t)^T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i(z(t)) (A_i^T P_i + P_i A_i) + \sum_{i \neq j:1}^n \alpha_i \mu_j(z(t)) (A_j^T P_i + P_i A_j) \right) x(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec les conditions 1) et 2) du théorème 2.1, l'égalité (2.18) devient

$$\dot{V}(x(t)) \leq x(t)^T \left(-\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i(z(t)) S_{ii} + \sum_{i \neq j:1}^n \alpha_i \mu_j(z(t)) S_{ij} \right) x(t) \quad (2.19)$$

Sachant que [Wei91] :

$$\forall x(t) : |\lambda_{\min}(S_{ij})| \|x(t)\|^2 \leq \left| x(t)^T S_{ij} x(t) \right| \leq |\lambda_{\max}(S_{ij})| \|x(t)\|^2 \quad (2.20)$$

l'inégalité (2.19) entraîne

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i(z(t)) \lambda_{\min}(S_{ii}) \|x(t)\|^2 + \sum_{i \neq j:1}^n \alpha_i \mu_j(z(t)) |\lambda_{\max}(S_{ij})| \|x(t)\|^2 \\ &= -\mu(z(t)) \Phi \alpha \|x(t)\|^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

avec Φ définie en (2.17) et

$$\mu(z(t)) = \left(\mu_1(z(t)) \quad \mu_2(z(t)) \quad \cdots \quad \mu_n(z(t)) \right), \quad \alpha = \left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n \right)^T \quad (2.22)$$

Finalement comme Φ est une M-matrice, alors il existe un vecteur positif α tel que le vecteur $\beta = \Phi \alpha$ est positif (voir annexe C). Posons $\beta = \left(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n \right)^T$, nous pouvons écrire

$$\mu(z(t)) \beta \geq \beta_{\min} > 0 \quad (2.23)$$

avec $\beta_{\min} = \min(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Ainsi avec les conditions (2.23) et la propriété (2.16), l'inégalité (2.21) devient

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\delta V(x(t)) \quad (2.24)$$

où $\delta = \frac{1}{2} \frac{\beta_{\min}}{c_2} > 0$ est le degré de stabilité du système. Ce qui permet d'écrire

$$\dot{V}(x(t)) \leq V(x(t_0)) \exp(-2\delta(t - t_0)), \forall t \geq t_0, \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^p \quad (2.25)$$

Ainsi la stabilité globale exponentielle du multimodèle (2.3) est prouvée. ■

Le résultat obtenu utilisant la fonction de Lyapunov (2.15) permet d'obtenir une autre classe de multimodèle admettant une matrice de Lyapunov commune P .

La difficulté majeure de la méthode réside dans le fait que l'obtention d'une M-matrice n'est pas directe et qu'il n'y a pas, à notre connaissance, de méthodes qui permettent d'imposer cette propriété à une matrice. Une idée pourrait être de remplacer la matrice S_{ii} par $S_{ii} + \tau \mathcal{I}$ où τ est un paramètre réel et \mathcal{I} la matrice identité de dimension appropriée, et par itération sur τ , chercher une M-matrice si elle existe.

Exemple 2.1 .

Considérons le multimodèle décrit par les deux modèles locaux suivants :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.06 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2.04 \\ -0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

L'application directe des conditions du théorème 2.1 n'aboutissent pas à une M-matrice. Ainsi, on ne peut rien conclure quant à la stabilité du système. Cependant, en remplaçant les matrices S_{ii} par $S_{ii} + \tau I$, on obtient le système \mathcal{LMI} :

$$P_1 > 0, P_2 > 0, S_{11} + \tau I > 0, S_{22} + \tau I > 0 \quad (2.27)$$

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 \leq -(S_{11} + \tau I) \quad (2.28)$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 \leq -(S_{22} + \tau I) \quad (2.29)$$

$$A_1^T P_2 + P_2 A_1 \leq S_{12} \quad (2.30)$$

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 \leq S_{21} \quad (2.31)$$

Par itération sur τ , on obtient :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.0944 & 1.0115 \\ 1.0115 & 1.6493 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0.8462 & 0.6593 \\ 0.6593 & 1.3542 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$\tau = 0.3, S_{11} = \begin{pmatrix} 60.5371 & 7.9986 \\ 7.9986 & 637.6728 \end{pmatrix}, S_{22} = \begin{pmatrix} 329.5031 & -30.1390 \\ -30.1390 & 686.1743 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$S_{12} = \begin{pmatrix} 666.8745 & 105.6867 \\ 105.6867 & -643.8083 \end{pmatrix}, S_{21} = \begin{pmatrix} -265.4610 & -109.2164 \\ -109.2164 & -75.1089 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

et

$$\Phi = \begin{pmatrix} 60.7263 & -675.3418 \\ -25.4171 & 327.2742 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

qui est une M-matrice. On conclut que le multimodèle (2.26) est globalement exponentiellement stable et il a comme fonction de Lyapunov

$$V(x(t)) = x(t)^T (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) x(t) \quad (2.36)$$

avec, par exemple, $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_1 \in [11.1211 \quad 12.8761]$. Les matrices P_1 et P_2 sont définies en (2.32).

2.2.4 Multimodèle discret

Considérons le multimodèle discret suivant

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) (A_i x(k) + B_i u(k)) \quad (2.37)$$

où $\mu_i(\cdot)$ sont les fonctions d'activation respectant les propriétés (2.2). Le multimodèle (2.37) en boucle ouverte s'écrit

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) A_i x(k) \quad (2.38)$$

Le multimodèle discret (2.38) est quadratiquement asymptotiquement stable s'il vérifie les conditions suivantes :

$$P > 0, A_i^T P A_i - P < 0, \forall i \in I_n \quad (2.39)$$

Ces conditions obtenues en considérant, le long de la trajectoire du multimodèle (2.38), la variation de la fonction de Lyapunov $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$, donne une condition suffisante de stabilité asymptotique du multimodèle discret (2.38). Néanmoins, l'existence de la matrice $P > 0$ dépend de deux conditions :

- la première est liée à la stabilité de tous les modèles locaux : chaque matrice doit être de Schur³.
- la deuxième condition nécessaire exige que le produit matriciel $\prod_{i=1}^n A_i$ soit également de Schur [Ngu98].

Notons que dans le cas particulier où les matrices A_i sont de Schur et commutatives par paire, il est possible de construire, de manière systématique, une fonction de Lyapunov quadratique [Nar94]. Utilisant les propriétés des M-matrices, nous pouvons également étendre le résultat que nous avons obtenu dans le domaine continu (théorème 2.1) au cas discret, ce résultat n'est pas présenté dans ce manuscrit.

Certains travaux ont essayé de réduire le conservatisme de la méthode quadratique [Oli99][Kim95][Mar95][Joh99b]. Par exemple Kim et al [Kim95] supposent la connaissance à chaque instant des fonctions d'activation, ils considèrent le multimodèle comme un système linéaire avec des incertitudes de modélisation. La procédure S est aussi utilisée pour tenir compte du support des fonctions d'activation et réduire le pessimisme des résultats quadratiques d'un multimodèle affine [Mar95][Joh99b]. Dans [Bla01b], il est montré que lorsque les fonctions d'activation $\mu_i(\cdot)$ vérifient l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.1 : *il existe n point x_i tels que $\mu_i(x_i) = 1, i \in I_n$.*

alors les deux propositions suivantes sont équivalentes

- $Q(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) (A_i^T P + P A_i) < 0$
- $Q_i = A_i^T P + P A_i < 0, i \in I_n$

Quand cette hypothèse n'est pas vérifiée, pour assurer $Q(x) < 0$, il est possible de trouver des conditions suffisantes meilleures que $Q_i < 0$ et ainsi réduire le conservatisme de la méthode quadratique. Pour plus de détails et des exemple illustratifs de la méthode, le lecteur peut consulter [Bla01a]. Il est important de noter que dans le cas de fonctions d'activation vérifiant l'hypothèse 2.1, le résultat de [Bla01b] se réduit à la stabilité quadratique classique, i.e. $A_i^T P + P A_i < 0, i \in I_n$. Le résultat obtenu est également étendu au domaine discret.

2.3 Stabilisation par retour d'état

Les conditions de synthèse s'obtiennent fréquemment en utilisant formellement les conditions d'analyse et en remplaçant les matrices de la représentation d'état du système en boucle ouverte par celles du système bouclé. Le problème ne se formule pas directement comme un problème \mathcal{LMI} , mais s'appuie sur des contraintes de type

³Une matrice dont le module de chacune de ses valeurs propres appartient au disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

BMI. C'est le cas de la stabilisation par retour d'état et retour de sortie. Comme il a été décrit au chapitre précédent, plusieurs méthodes sont alors envisageables pour se ramener à des *LM*.

Nous présentons tout d'abord certaines techniques mises en oeuvre pour élaborer des lois de commande dans le cadre des multimodèles.

1. Loi de commande PDC et ses dérivées

La méthode PDC [Wan96] est utilisée pour élaborer une loi de commande pour les multimodèles. L'idée est de construire un régulateur par retour d'état relatif à chaque modèle local LTI. De façon similaire à la technique utilisée pour interpoler les modèles locaux, la loi de commande globale est obtenue par interpolation des lois de commande linéaires locales. Elle est de la forme

$$u(t) = - \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) K_i x(t) \quad (2.40)$$

On s'aperçoit facilement que ce type de loi de commande fait intervenir des termes croisés : le modèle local (A_i, B_i) avec le gain de retour linéaire K_j .

Pour résoudre cette difficulté, un retour d'état linéaire est utilisé où les fonctions d'activation sont omises [Kim95] [Kir96][Zak99] : $u(t) = Kx(t)$. Cependant la méthode s'avère très pessimiste car il est facile de trouver des exemples où il n'existe pas de loi de commande linéaire stabilisante alors qu'une loi de commande PDC existe. Ce constat est justifié par le fait que la variable commune K doit stabiliser n modèles locaux alors que, dans le cas de la commande PDC, on tient compte du taux du recouvrement à travers les fonctions d'activation. Les résultats issus de cette loi de commande seront exposés au paragraphe suivant.

– Loi de commande PPDC

La loi de commande PPDC (Proportional PDC), dérivée de la loi de commande PDC, est également proposée dans [Lin01]. Elle est de la forme :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) k_i K x(t) \quad (2.41)$$

où $K \in \mathbb{R}^{m \cdot p}$ est le gain de retour commun à tous les modèles locaux et $k_i \in \mathbb{R}$ est un coefficient de proportionnalité relatif à chacun des modèles locaux. L'avantage de telle loi de commande est la réduction du nombre des inconnues à $(n + mp)$ au lieu de (nmp) pour la loi de commande PDC.

– Loi de commande PDC augmentée du terme $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu_i(z(t))}{\partial t} F_i x(t)$

Il s'agit d'une loi de commande qui tient compte de la variation des fonctions d'activation ; elle est définie comme suit

$$u(t) = - \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) k_i K x(t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu_i(z(t))}{\partial t} F_i x(t) \quad (2.42)$$

Cette loi de commande qui impose des fonctions d'activation continûment dérivables, permet de réduire le conservatisme de la stabilisation quadratique [Tan01b].

2. Loi de commande CDF

Dans le cadre des systèmes SIMO, Guerra et al [Gue99a] ont proposé une loi de commande dite CDF. L'avantage de cette loi de commande, inspirée des travaux de Peterson [Pet87], est d'éviter l'utilisation des modèles croisés.

Dans le cas des matrices d'entrée (B_i) positivement linéairement dépendantes, i.e. $\exists \alpha_i > 0 : B_i = \alpha_i B, \forall i \in I_n$, la loi de commande CDF s'applique aussi aux systèmes MIMO et s'écrit [Gue01b] :

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \alpha_i K_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \alpha_i} x(t) \quad (2.43)$$

Dans le cas particulier de la colinéarité positive des matrices d'entrée, la boucle fermée s'écrit sans les modèles croisés et les conditions de stabilisation sont celles de la stabilité (en substituant A_i par $A_i - B_i K_i$), ce qui permet de réduire le degré de conservatisme des résultats quadratiques par rapport à la loi de commande PDC ; il n'y a en effet que n \mathcal{LMI} à vérifier au lieu de $\frac{n(n+1)}{n}$. Cependant, dans le cas général où les matrices d'entrée ne vérifient pas la propriété de colinéarité positive, la synthèse d'une loi de commande CDF stabilisante de la forme (2.43) produit des \mathcal{BMI} difficiles à linéariser ; un algorithme est proposé en [Mor00a]. Dans ce manuscrit, cette loi de commande sera utilisée uniquement pour illustrer le cas de la colinéarité positive des matrices d'entrée.

3. Autres lois de commande

Les auteurs de [Par01] ont proposé deux lois de commande, la première est légèrement différente de la commande CDF (2.43), la deuxième peut être vue comme une loi de commande PDC (2.40) filtrée par un filtre passe bas.

– La première loi de commande, issue de la commande CDF, est de la forme :

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) K_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \alpha_i} x(t) \quad (2.44)$$

Remarquons que si $\alpha_i = 1, \forall i \in I_n$, cette loi de commande ainsi que la commande CDF se résument à la commande PDC. Sous l'hypothèse de la colinéarité positive des matrices d'entrée, cette loi permet également d'éviter les modèles croisés.

- La loi de commande suivante inspirée des travaux d'Apkarian et al sur les systèmes LPV [Apk95] a aussi été proposée :

$$\dot{u}(t) = A_c u(t) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) K_i x(t)}_{\text{commande PDC}} \quad (2.45)$$

où $A_c \in \mathbb{R}^{m.m}$ et $K_i \in \mathbb{R}^{m.p}$. Il s'agit de la loi de commande PDC filtrée par $G(s) = (sI - A_c)^{-1}$. Les résultats qui en découlent seront exposés au paragraphe suivant.

4. Lois de commande basées sur le retour de sortie

- **Loi de commande DPDC**

Il s'agit d'une loi de commande dynamique non linéaire basée sur le retour de sortie. Elle est construite comme suit [Li 00] :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_{cij} x_c(t) + B_{ci} y(t)) \\ u(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (C_{ci} x_c(t) + D_c y(t)) \end{cases} \quad (2.46)$$

Les conditions de stabilisation quadratique obtenues sont des \mathcal{BMT} en les paramètres du régulateur DPDC ($A_{cij}, B_{ci}, C_{ci}, D_c$). Pour résoudre ces \mathcal{BMT} , une méthode de linéarisation basée sur celle proposée par Chilali et al [Chi96b] est utilisée.

- **Loi de commande OPDC**

La loi de commande OPDC est de la forme [Cha02a] :

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) F_i y(t) \quad (2.47)$$

Il s'agit d'une loi de commande statique basée sur le retour de sortie, généralement non linéaire. Dans le cas particulier où les matrices d'entrée B_i sont linéairement dépendantes, la loi de commande ci-dessus est modifiée en s'inspirant de la loi de commande CDF. La loi de commande OPDC modifiée s'explique [Cha02h] :

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \alpha_i F_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \alpha_i} y(t) \quad (2.48)$$

Il s'agit d'une loi de commande continue du fait que : $\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \alpha_i \geq \min_{i \in I_n}(\alpha_i) > 0$. Cette dernière permet de réduire le conservatisme de la loi de commande (2.47). Ces deux lois de commande feront l'objet d'études détaillées au chapitre 4.

2.3.1 Stabilisation des multimodèles continus

Durant ces dernières années, de nombreux travaux concernant la synthèse de lois de commande pour les multimodèles ont été publiés [Tan98b][Gue01b][Bla01b] [Kim00] [Cha01a]. La synthèse de régulateurs par la méthode quadratique exige l'existence d'une matrice symétrique définie positive P satisfaisant l'équation de Lyapunov pour tous les termes dominants et les termes croisés⁴. Des relaxations ont été apportées à la loi de commande PDC [Kim00]. En comparaison avec cette dernière, l'usage de la loi de commande CDF dans le cas de la colinéarité positive des matrices d'entrée produit des conditions moins pessimistes.

Définition 2.1 : si les paires (A_i, B_i) sont commandables (stabilisables), alors le multimodèle (2.1) est dit localement commandable (stabilisable).

Définition 2.2 : si les paires (A_i, C_i) sont observables (détectables), alors le multimodèle (2.1) est dit localement observable (détectable).

Par la suite, le multimodèle (2.1) est supposé localement commandable.

2.3.1.1 Loi de commande PDC

Le multimodèle continu (2.1) en boucle fermée dans le cas de la loi de commande PDC (2.40) est donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) G_{ij} x(t) \quad (2.49)$$

avec

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (2.50)$$

Le multimodèle décrit en (2.49) est globalement asymptotiquement stabilisé via la loi de commande PDC (2.40) s'il existe une matrice symétrique définie positive P et des matrices $K_i, i \in I_n$ qui vérifient [Tan98a] :

$$\mathcal{L}_c(G_{ii}, P) < 0, \forall i \in I_n \quad (2.51)$$

$$\mathcal{L}_c(G_{ij}, P) \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.52)$$

⁴Le terme $A_i - B_i K_j$ est dit croisé quand $i \neq j$ et dominant quand $i = j$.

avec $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$ ⁵, G_{ij} défini en (2.50) et

$$\mathcal{L}_c(G_{ij}, P) = \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \quad (2.53)$$

Les conditions de stabilité (2.51)-(2.52) sont assez conservatives car elles demandent la stabilité de tous les modèles (dominants et croisés). Le théorème suivant permet de réduire ce conservatisme en tenant compte des interactions entre les modèles locaux voisins (caractérisés par le nombre r de modèles locaux actifs à chaque instant). Les conditions obtenues n'imposent que la stabilité des modèles dominants.

Théorème 2.2 : *s'il existe des matrices symétriques $P > 0$, $Q \geq 0$ et des matrices $K_i, i \in I_n$ qui vérifient*

$$\mathcal{L}_c(G_{ii}, P) + (r-1)Q < 0, \forall i \in I_n \quad (2.54)$$

$$\mathcal{L}_c(G_{ij}, P) - Q \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.55)$$

avec $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$, $G_{ij} = A_i - B_iK_j$ et r étant le nombre maximal de modèles locaux activés simultanément, alors le mulimodèle décrit en (2.49) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : voir [Tan98b]. ■

Pour réduire d'avantage le degré de conservatisme des résultats ci-dessus, le théorème suivant est proposé [Kim00].

Théorème 2.3 : *s'il existe des matrices symétriques $P > 0$, Q_{ij} et des matrices $K_i, i \in I_n$ qui vérifient*

$$\mathcal{L}_c(G_{ii}, P) + Q_{ii} < 0, \forall i \in I_n \quad (2.56)$$

$$\mathcal{L}_c(G_{ij}, P) + Q_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.57)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1n} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.58)$$

avec $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$ et $G_{ij} = A_i - B_iK_j$, alors le mulimodèle décrit en (2.49) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : La preuve est obtenue en dérivant le long du multimodèle (2.49) la fonction candidate de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ en tenant compte des conditions (2.56)-(2.58). ■

⁵Ceci veut dire qu'il faut vérifier ces inégalités matricielles pour tout $i < j$, $(i, j) \in I_n^2$ sauf pour les paires (i, j) telles que $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) = 0$, ce qui permet de réduire le nombre de contraintes à satisfaire.

Remarques 2.1 .

1. *Preuve de la relaxation apportée par le théorème 2.3 par rapport au théorème 2.2 quand $r = n$:* s'il existe des matrices $P > 0$ et $Q \geq 0$ qui satisfont (2.54)-(2.55), alors on peut toujours trouver une matrice symétrique définie positive suffisamment voisine de 0, $Q_\varepsilon \approx 0$, telle que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (n-1)Q + Q_\varepsilon < 0, \forall i \in I_n \quad (2.59)$$

Considérons la condition (2.58) avec $Q_{ij} = -Q$ et $Q_{ii} = (r-1)Q + Q_\varepsilon$, et sa forme quadratique suivante où $v_i \in \mathbb{R}^p$, $i \in I_n$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (n-1)Q + Q_\varepsilon & -Q & \cdots & -Q \\ -Q & (n-1)Q + Q_\varepsilon & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -Q \\ -Q & \cdots & -Q & (n-1)Q + Q_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n v_i^T Q v_i - 2 \sum_{i<j}^n v_i^T Q v_j + \sum_{i=1}^n v_i^T Q_\varepsilon v_i \\ &= \underbrace{\sum_{i<j}^n (v_i - v_j)^T Q (v_i - v_j)}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n v_i^T Q_\varepsilon v_i}_{> 0} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi on montre que quand les conditions du théorème 2.2 sont vérifiées, celles du théorème 2.3 le sont également, ce qui explique la relaxation apportée. Nous constatons toutefois peu de différence entre ces deux résultats quand $r < n$, i. e. dans le cas des fonctions d'activation à supports borné.

2. *Linéarisation des conditions du théorème 2.3 :* en pré- et post-multipliant par $P^{-1} = X$ les \mathcal{BMT} (2.56)-(2.58) en K_i et P , on obtient les \mathcal{LMT} suivantes en N_i et X :

$$X > 0 \quad (2.60)$$

$$X A_i^T + A_i X - N_i^T B_i^T - B_i N_i + Y_{ii} < 0, \forall i \in I_n \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} X A_i^T + A_i X + X A_j^T + A_j X - N_i^T B_i^T - B_i N_i - \\ N_i^T B_j^T - B_j N_i + 2Y_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1n} & \cdots & Y_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.63)$$

avec $Y_{ij} = X Q_{ij} X$ et $K_i = N_i X^{-1}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Dans le cas particulier où les multimodèles vérifient la propriété de la colinéarité positive des matrices d'entrée ($\exists \alpha_i > 0 : B_i = \alpha_i B, \forall i \in I_n$), la loi de commande CDF (2.43)

produit des conditions de stabilité moins conservatives que la commande PDC. Le multimodèle en boucle fermée (2.49) s'écrit ainsi sans termes croisés.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i - B_i K_i) x(t) \quad (2.64)$$

Les conditions de stabilité obtenues aux théorèmes 2.2 et 2.3 sont réduites à la stabilité des modèles dominants :

$$P > 0, \quad (A_i - B_i K_i) P + P (A_i - B_i K_i) < 0, \quad i \in I_n \quad (2.65)$$

La loi de commande (2.44) aboutit elle aussi à des conditions similaires (il suffit de substituer B_i par B).

Remarquons que si les paires (A_i, B_i) , $i \in I_n$ sont commandables, alors il existe des gains de retour d'état K_i permettant de placer les valeurs propres des modèles locaux dominants $(A_i - B_i K_i)$ au même endroit. Dans ce cas, il est probable qu'une matrice commune à tous les modèles dominants existe.

2.3.1.2 Taux de décroissance

Les théorèmes 2.2 et 2.3 garantissent uniquement la stabilité globale du multimodèle décrit en (2.49). Afin de garantir un certain taux de décroissance, les auteurs de [Tan98a] ont proposé des contraintes supplémentaires faisant intervenir les termes dominants (G_{ii}) et les termes croisés (G_{ij}). Ces contraintes additives au niveau des termes croisés conduisent bien évidemment, à des conditions plus pessimistes.

Par la suite, le taux de décroissance est garanti en reportant le problème uniquement sur les termes dominants plus naturellement commandables. Ainsi l'idée de soulager les contraintes au niveau des termes croisés est maintenue. Nous proposons le résultat suivant :

Proposition 2.4 [Cha02i] : *s'il existe des matrices symétriques $P > 0$, $Q \geq 0$, des matrices $K_i, i \in I_n$ et un scalaire $\alpha \geq 0$ qui vérifient*

$$\mathcal{L}_c(G_{ii}, P) + (r - 1) Q + 2\alpha r P < 0, \forall i \in I_n \quad (2.66)$$

$$\mathcal{L}_c(G_{ij}, P) - Q \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.67)$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$, $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ et r étant le nombre maximal de modèles locaux activés simultanément, alors le multimodèle décrit en (2.49) est globalement exponentiellement stable avec une vitesse de décroissance au moins égale à α .

Preuve : multipliant les contraintes (2.66) et (2.67) respectivement par $\mu_i(z(t))^2$ et

$\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))$ puis en sommant, on obtient après sommation :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t))^2 (G_{ii}^T P + P G_{ii} + (r-1)Q + 2\alpha P) + \\ & \sum_{i < j:1}^n \mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \left((G_{ij} + G_{ji})^T P + P(G_{ij} + G_{ji}) - 2Q \right) < 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ce qui donne en tenant compte des propriétés des fonctions d'activation

$$G(z)^T P + P G(z) + \left(r \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t))^2 - 1 \right) Q + 2r\alpha P \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t))^2 < 0 \quad (2.69)$$

avec $G(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))G_{ij}$ et $G_{ij} = A_i - B_i K_j$. La propriété suivante :

$\sum_{i=1}^n \mu_i^2(z) \geq \frac{1}{r}$ (voir proposition 3.1, paragraphe 3.2.1) permet d'écrire

$$\begin{aligned} G(z)^T P + P G(z) + 2\alpha P & \leq G(z)^T P + P G(z) + \left(r \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t))^2 - 1 \right) Q + \\ & 2\alpha r P \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t))^2 < 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

ce qui correspond à $\dot{V}(x(t)) + 2\alpha V(x(t)) < 0$ avec $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$. Par conséquent la condition (2.8) est vérifiée. ■

Notons que le taux de décroissance maximum peut être obtenu en considérant le problème de GEVP en X et α [Cha02i] :

maximiser α

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} X > 0 \\ X A_i^T + A_i X - N_i^T B_i^T - B_i N_i + (r-1)Y + 2r\alpha X < 0, \forall i \in I_n \\ X A_i^T + A_i X + X A_j^T + A_j X - N_i^T B_i^T - B_i N_i - \\ N_i^T B_j^T - B_j N_i - 2Y \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \end{cases} \quad (2.71)$$

avec $Y = X Q X$ et $K_i = N_i X^{-1}, \forall i \in I_n$.

Notons également que le même résultat peut être obtenu en considérant le théorème 2.3. L'exemple suivant illustre la synthèse de la loi de commande PDC avec un certain degré de stabilité.

Exemple 2.2 .

Considérons le multimodèle suivant décrit par deux modèles locaux instables paramétrés par $a > 0$ et $b > 0$:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n=2} \mu_i(x_1(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.72)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1 = (1 \ 0) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} a & -10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 = (1 \ 0) \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\mu_1(x_1(t)) = 1 - \mu_2(x_1(t)) = \frac{(1 - \tanh(x_1(t)))}{2} \quad (2.74)$$

Le multimodèle (2.72) stabilisé via la loi de commande PDC s'écrit

$$\dot{x}(t) = G(x(t)) x(t) \quad (2.75)$$

avec $G(x(t)) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t)) (A_i - B_i K_j)$. La synthèse de cette loi de commande avec un degré de stabilité $\alpha = 15$ est obtenue en considérant les conditions linéarisées de la proposition 2.4. Pour $(a, b) = (10, 5)$ on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 0.0078 & 0.377 \\ 0.377 & 24.3090 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0.4 & 19.5 \\ 19.5 & 1092.4 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

$$K_1 = (170.4 \ 8307.5), K_2 = (49 \ 2325.4) \quad (2.77)$$

La figure 2.2 montre le domaine d'évolution des valeurs propres de la matrice $G(x(t))$. On vérifie que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $G(x(t))$ sont toutes à gauche de $-\alpha = -15$.

2.3.1.3 Autre loi de commande

Le multimodèle (2.1) avec la loi de commande (2.45) permet d'obtenir le système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \bar{A}_i \bar{x}(t) \quad (2.78)$$

avec

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t)^T, u(t)^T \end{pmatrix}^T, \bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

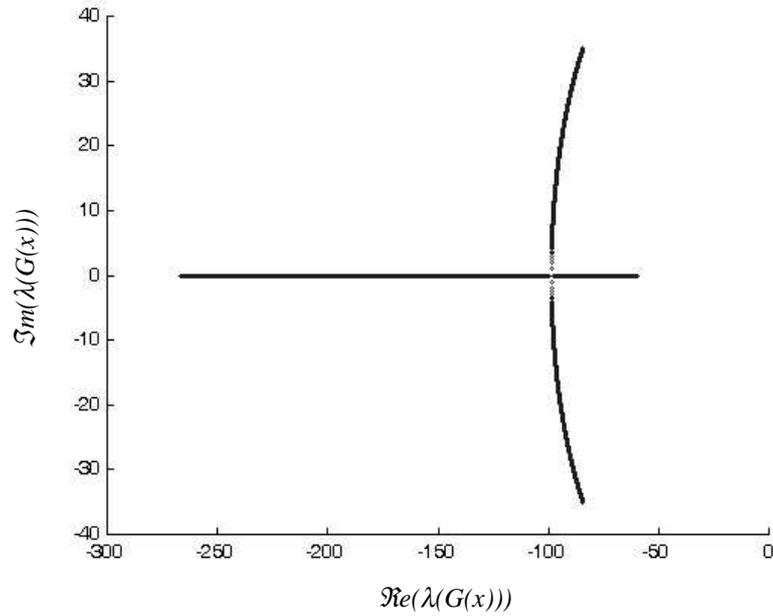


FIG. 2.2: Le domaine d'évolution des valeurs propres de la matrice $G(x(t))$.

Le système (2.78) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique $Q > 0$ telle que

$$\bar{A}_i Q + Q \bar{A}_i^T < 0, \forall i \in I_n \quad (2.80)$$

Il s'agit d'un problème non convexe en les variables Q , A_c et K_i , $i \in I_n$. Sous l'hypothèse que la matrice $\begin{pmatrix} K_i & A_c \end{pmatrix}$, $i \in I_n$ est de plein rang ligne, les auteurs de [Par01] ont appliqué la technique d'élimination des variables matricielles sur A_c et K_i . En pré-multipliant (2.80) par la matrice de rang maximal $N^T = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{p,p} & 0_{p,m} \end{pmatrix}$ et en la post-multipliant par la matrice N , on obtient le problème \mathcal{LMI} en Q :

$$Q > 0, \begin{pmatrix} A_i & B_i \end{pmatrix} Q N + N^T Q \begin{pmatrix} A_i & B_i \end{pmatrix}^T < 0 \quad (2.81)$$

Une fois la matrice $Q > 0$ calculée, elle est ensuite reportée dans (2.80). Le système d'inégalités matricielles obtenu est convexe en les paramètres du régulateur A_c et K_i , $i \in I_n$.

Remarquons que nous pouvons linéariser les inégalités (2.80) en choisissant la matrice symétrique $Q > 0$ de forme diagonale :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.82)$$

Les inégalités matricielles (2.80) deviennent des \mathcal{LMI} en Q_{11}, Q_{22}, Y_c et Y_i :

$$\begin{pmatrix} A_i Q_{11} + Q_{11} A_i^T & B_i Q_{22} + Y_i^T \\ * & Y_c + Y_c^T \end{pmatrix} < 0 \quad (2.83)$$

avec

$$K_i = Y_i Q_{11}^{-1}, A_c = Y_c Q_{22}^{-1}$$

Cependant, notons que choisir la matrice Q de structure diagonale est générateur de pessimisme.

2.3.2 Multimodèle discret

Le multimodèle discret (2.37) en boucle fermée dans le cas de la loi de commande PDC est donné par :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) G_{ij} x(k) \quad (2.84)$$

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (2.85)$$

Le multimodèle discret (2.84) est globalement asymptotiquement stabilisé via la commande PDC s'il existe des matrices symétriques $P > 0$ et $Q \geq 0$ qui vérifient [Tan98b]

$$\mathcal{L}_d(G_{ii}, P) + (r-1)Q < 0, \forall i \in I_n \quad (2.86)$$

$$\mathcal{L}_d(G_{ij}, P) - Q \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.87)$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$ et

$$\mathcal{L}_d(G_{ij}, P) = \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P \quad (2.88)$$

Afin de réduire le pessimisme des conditions (2.86)-(2.87), le théorème suivant utilise plusieurs matrices Q_{ij} au lieu d'une matrice commune Q [Kim00].

Théorème 2.4 : *s'il existe des matrices symétriques $P > 0$, Q_{ij} et des matrices K_i qui vérifient :*

$$\mathcal{L}_d(G_{ii}, P) + Q_{ii} < 0, \forall i \in I_n \quad (2.89)$$

$$\mathcal{L}_d(G_{ij}, P) + Q_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.90)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1n} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.91)$$

avec $\mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) \neq 0$ et $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, alors le multimodèle décrit en (2.84) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : Il suffit d'analyser le long de la trajectoire du multimodèle (2.84), la variation de la fonction de Lyapunov quadratique $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$. ■

La linéarisation des inégalités matricielles ci-dessus est obtenue en utilisant le complément de Schur et en pré- et post-multipliant par $P^{-1} = X$ les \mathcal{BMI} (2.89)-(2.91). On obtient :

$$X > 0 \quad (2.92)$$

$$\begin{pmatrix} X - Y_{ii} & * \\ A_i X - B_i N_i & X \end{pmatrix} > 0, \forall i \in I_n \quad (2.93)$$

$$\begin{pmatrix} X - Y_{ij} & * \\ \frac{1}{2}(A_i X + A_j X - B_j N_i - B_i N_j) & X \end{pmatrix} \geq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.94)$$

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1n} & \cdots & Y_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.95)$$

avec $Y_{ij} = X Q_{ij} X$ et $K_i = N_i X^{-1}, \forall i \in I_n$.

Remarquons que les autres résultats du domaine continu sont facilement transposables au domaine discret en substituant $\mathcal{L}_c(\cdot, \cdot)$ par $\mathcal{L}_d(\cdot, \cdot)$. En effet dans le cas de la loi de commande CDF et de la colinéarité positive des matrices d'entrée, le multimodèle en boucle fermée s'écrit sans modèles croisés :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) (A_i - B_i K_i) x(k) \quad (2.96)$$

La stabilité globale asymptotique de ce multimodèle est réduite à l'existence d'une matrice symétrique $P > 0$ et des matrices K_i telles que :

$$\mathcal{L}_d((A_i - B_i K_i), P) < 0, \forall i \in I_n \quad (2.97)$$

Afin d'améliorer les performances de la loi de commande PDC, nous allons considérer le taux de décroissance tout en maintenant les relaxations apportées aux niveaux des termes croisés.

Proposition 2.5 [Cha02i] : *s'il existe des matrices symétriques $P > 0, Q \geq 0$, des matrices $K_i, i \in I_n$ et un scalaire $0 \leq \alpha \leq 1$ qui vérifient*

$$\mathcal{L}_d(G_{ii}, P) + (r-1)Q + r(1-\alpha)P < 0, \forall i \in I_n \quad (2.98)$$

$$\mathcal{L}_d(G_{ij}, P) - Q \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.99)$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0, G_{ij} = A_i - B_i K_j$ et r étant le nombre maximal de modèles locaux activés simultanément, alors le multimodèle décrit en (2.84) est globalement exponentiellement stable avec une vitesse de décroissance au moins égale à $\alpha^{\frac{1}{2}}$.

Preuve : tenant compte des contraintes (2.98) et (2.99), de la définition de $\mathcal{L}_d(G_{ij}, P)$ et des propriétés des fonctions d'activation, l'expression suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k))^2 (G_{ii}^T P G_{ii} - P + (r-1)Q + r(1-\alpha)P) + \\ & 2 \sum_{i < j:1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) \left(\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P - Q \right) < 0 \end{aligned} \quad (2.100)$$

Ce qui donne en tenant compte des propriétés des fonctions d'activation

$$G(z)^T P G(z) - P + \left(r \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k))^2 - 1 \right) Q + r(1-\alpha)P \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k))^2 < 0 \quad (2.101)$$

avec $G(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) G_{ij}$ et $G_{ij} = A_i - B_i K_j$. La propriété suivante :

$\sum_{i=1}^n \mu_i^2(z) \geq \frac{1}{r}$ (voir proposition 3.1, paragraphe 3.2.1), permet d'écrire

$$G(z)^T P G(z) - \alpha P < 0 \quad (2.102)$$

ce qui correspond à $V(x(k+1)) - \alpha V(x(k)) < 0$ avec $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$. Finalement, on obtient : $\|x(k)\| \leq \alpha^{k/2} (\kappa(P))^{1/2} \|x(0)\|$ avec $\kappa(P) = \left(\frac{\lambda_{\max}(P^T P)}{\lambda_{\min}(P^T P)} \right)^{1/2}$.

■

Remarquons que pour garantir un certain degré de stabilité, les auteurs de [Tan98a] ont proposé des contraintes supplémentaires sur les contraintes faisant intervenir et les termes dominants (G_{ii}) et les termes croisés (G_{ij}). Le résultat que nous venons de présenter reporte le problème uniquement sur les termes dominants plus naturellement commandables, ce qui conduit bien évidemment, à des conditions moins pessimistes. Notons également que le taux de décroissance maximum peut être obtenu en considérant le problème de GEVP en X et α [Cha02i] :

minimiser α

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} X > 0 \\ \left(\begin{array}{cc} (1-r+r\alpha)X - (r-1)Y & * \\ A_i X - B_i N_i & X \end{array} \right) > 0, \forall i \in I_n \\ \left(\begin{array}{cc} X + Y & * \\ \frac{1}{2}((A_i + A_j)X - B_i N_j - B_j N_i) & X \end{array} \right) \geq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \end{cases} \quad (2.103)$$

avec $Y = X Q X$ et $K_i = N_i X^{-1}, \forall i \in I_n$. Rappelons que $\alpha = 1$ correspond à la stabilité asymptotique.

D'autres approches concernant la synthèse de régulateurs existent. Utilisant les propriétés des M-matrices, nous pouvons étendre le résultat d'analyse du théorème 2.1 à la synthèse de lois de commande. La commande multicritère (contraintes sur la borne de la commande, sur la borne de la sortie,...) des multimodèles est également traitée. Ces contraintes sont formulées en termes \mathcal{LMI} [Boy94][Tan98b].

2.4 Synthèse des multiobservateurs

Les techniques de synthèse basées sur le retour d'état (lois de commande PDC, CDF) nécessitent de disposer de tout le vecteur d'état. Comme cette condition est rarement vérifiée, l'usage d'un observateur devient nécessaire. Dans la littérature des multimodèles, le multiobservateur est construit par interpolation d'observateurs locaux d'ordre plein (ou réduit) de type Luenberger. Cependant, la plupart de ces travaux supposent disposer de variables de décision mesurables [Ma 98][Lop99][Mor00b][Yon00][Cha02f][Cha02b]. Certains travaux ont cependant traité le cas où les variables de décision ne sont pas toutes mesurables. Par exemple dans [Bla01a], une méthode basée sur la majoration de la partie non mesurable est proposée; dans [Cha02d] on trouve une procédure de résolution basée sur le découplage des variables de synthèse (K_i, L_i, P) par un choix classique de la matrice P de structure diagonale. Ce choix, souvent contraignant, a permis dans notre cas de synthétiser séparément mais non simultanément les gains de l'observateur (L_i) et ceux du régulateur (K_i). Cependant, le principe de séparation qui a été établi pour le premier cas, semble difficile à démontrer pour le deuxième cas. Dans cette section, nous rappelons tout d'abord quelques résultats sur les multiobservateurs et la propriété de séparation dans le cas des variables de décision mesurables. Dans ce cas, nous montrons que cette propriété garantit l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique pour le multimodèle augmenté. Nous proposons ensuite de traiter le cas des variables de décision non mesurables.

2.4.1 Variables de décision mesurables

A l'exception des lois de commande DPDC et OPDC (voir paragraphe 2.3), les lois de commande proposées auparavant étaient toutes basées sur un retour d'état. Cependant en pratique, les variables d'état ne sont pas toujours mesurables. Ainsi, sous l'hypothèse de la détectabilité locale du multimodèle (2.1), ce paragraphe propose la construction de multiobservateurs. On suppose que les variables de décision dépendent uniquement des variables d'état mesurables. Le multiobservateur est obtenu par interpolation de plusieurs observateurs locaux de type Luenberger :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.104)$$

où $\hat{x}(t)$ et $\hat{y}(t)$ représentent respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie reconstruits. Les fonctions d'activation sont les mêmes que celles caractérisant le multimodèle (2.1), elles obéissent aux propriétés (2.2). L'erreur d'estimation du vecteur d'état est notée

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.105)$$

Tenant compte des expressions (2.1) et (2.104), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \Theta_{ij} \tilde{x}(t) \quad (2.106)$$

avec

$$\Theta_{ij} = A_i - L_i C_j, (i, j) \in I_n^2 \quad (2.107)$$

La synthèse du multiobservateur consiste en la détermination des gains locaux $L_i, i \in I_n$ afin d'assurer la convergence vers zéro de la dynamique de l'erreur d'estimation (2.106). Les conditions de synthèse du multiobservateur (2.104) sont duales de celles du multirégulateur (2.49). Il suffit de substituer dans les théorèmes du paragraphe 2.3, les termes $\mathcal{L}_c(G_{ij}, P)$ par $\mathcal{L}_c(\Theta_{ij}, P)$ pour le cas continu et $\mathcal{L}_d(G_{ij}, P)$ par $\mathcal{L}_d(\Theta_{ij}, P)$ et pour le cas discret.

Les conditions obtenues sous forme \mathcal{BMI} sont immédiatement linéarisées par le changement de variables $Y_i = PL_i$. Ces conditions sont étendues à la convergence exponentielle globale.

Théorème 2.5 [Cha02f] : *s'il existe des matrices symétriques $P > 0$ et $Q > 0$ et des matrices $L_i, i \in I_n$ qui vérifient*

$$\mathcal{L}_c(\Theta_{ii}, P) + \left(r - \frac{1}{2}\right) Q < 0, i \in I_n \quad (2.108)$$

$$2\mathcal{L}_c(\Theta_{ij}, P) - Q \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.109)$$

avec $\mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) \neq 0$ et $\Theta_{ij} = A_i - L_i C_j$, alors le multiobservateur (2.104) est globalement exponentiellement convergent.

Preuve : La preuve est issue de la dérivation de la fonction quadratique $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, le long de la trajectoire du système (2.106). Après quelques opérations élémentaires, nous obtenons $\dot{V}(x(t)) < -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} V(x(t))$, ce qui prouve la stabilité exponentielle globale. ■

Le retour d'état reconstruit en utilisant une commande PDC est

$$u(t) = - \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) K_i \hat{x}(t) \quad (2.110)$$

Tenant compte de (2.110), l'observateur (2.104) devient

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (G_{ij} \hat{x}(t) + L_i C_j \tilde{x}(t)) \quad (2.111)$$

où $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ et $\tilde{x}(t)$ est définie en (2.105). Combinant (2.111) et (2.106), on obtient le système augmenté suivant

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \bar{G}_{ij} \bar{x}(t) \quad (2.112)$$

avec

$$\bar{G}_{ij} = \begin{pmatrix} G_{ij} & L_i C_j \\ 0 & \Theta_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}(t)^T & \tilde{x}(t)^T \end{pmatrix}^T \quad (2.114)$$

Ainsi, le système augmenté décrit en (2.112) est globalement exponentiellement stable s'il existe des matrices symétriques $P > 0$, $Q > 0$ et des matrices L_i , K_i , $i \in I_n$ qui vérifient

$$\mathcal{L}_c(\bar{G}_{ii}, P) + \left(r - \frac{1}{2}\right) Q < 0, i \in I_n \quad (2.115)$$

$$2\mathcal{L}_c(\bar{G}_{ij}, P) - Q \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (2.116)$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$. Il s'agit d'un problème non convexe dont les variables sont P , Q , L_i et K_i et qui n'est pas transformable en $\mathcal{LM}\mathcal{I}$ par les techniques classiques de changement de variables.

La propriété de séparation garantie pour les systèmes linéaires [Kha80] est également valide dans le cas des multimodèles dont les variables de décision sont mesurables [Ma 98]. Le théorème suivant sur la propriété de séparation est obtenu par application directe du résultat de [Ma 98]. Nous allons montrer que cette propriété garantit l'existence d'une fonction de Lyapunov, paramétrée par un scalaire positif σ , de la forme

$$V(x(t)) = (x(t))^T P(\sigma) (x(t)) \quad (2.117)$$

$$P(\sigma) = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \sigma P_2 \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

permettant de prouver la stabilité (globale exponentielle) du système augmenté (2.112). Une condition sur σ est obtenue.

Théorème 2.6 [Cha02f] : *s'il existe des matrices symétriques $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $Q_1 > 0$ et $Q_2 > 0$ qui vérifient*

$$(multirégulateur) \begin{cases} \mathcal{L}_c(G_{ii}, P_1) + \left(r - \frac{1}{2}\right) Q_1 < 0, i \in I_n \\ 2\mathcal{L}_c(G_{ij}, P_1) - Q_1 < 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \end{cases} \quad (2.119)$$

$$(\text{multiobservateur}) \begin{cases} \mathcal{L}_c(\Theta_{ii}, P_2) + (r - \frac{1}{2}) Q_2 < 0, i \in I_n \\ 2\mathcal{L}_c(\Theta_{ij}, P_2) - Q_2 < 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \end{cases} \quad (2.120)$$

alors la fonction (2.117) avec $\sigma \geq \max(\sigma_1, \sigma_2)$ respectant les conditions (2.121)-(2.122), est une fonction de Lyapunov qui prouve la stabilité globale exponentielle du système augmenté (2.112).

$$\sigma_1 = \frac{\lambda_{\min} \left(P_1 L_i C_i (\mathcal{L}_c(\Theta_{ii}, P_2) + (r - \frac{1}{2}) Q_2)^{-1} (P_1 L_i C_i)^T \right)}{\lambda_{\max} (\mathcal{L}_c(G_{ii}, P_1) + (r - \frac{1}{2}) Q_1)} \quad (2.121)$$

$$\sigma_2 = \frac{\lambda_{\min} \left(P_1 (L_i C_j + L_j C_i) (2\mathcal{L}_c(\Theta_{ij}, P_2) - Q_2)^{-1} (P_1 (L_i C_j + L_j C_i))^T \right)}{\lambda_{\max} (2\mathcal{L}_c(G_{ij}, P_1) - Q_1)} \quad (2.122)$$

Preuve : la stabilité du système augmenté décrit en (2.112) est assurée par la réalisabilité des conditions (2.115)-(2.116). Choisissons $Q(\sigma)$ de même structure que $P(\sigma)$ définie en (2.118)

$$Q(\sigma) = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & \sigma Q_2 \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

Substituant les matrices $P(\sigma)$ et $Q(\sigma)$ dans (2.115)-(2.116) et tenant compte de (2.113), on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_c(G_{ii}, P_1) & P_1 L_i C_i \\ * & \sigma \mathcal{L}_c(\Theta_{ii}, P_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r - \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & \sigma Q_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.124)$$

$$\begin{pmatrix} 2\mathcal{L}_c(G_{ij}, P_1) & P_1 (L_j C_i + L_i C_j) \\ * & 2\sigma \mathcal{L}_c(\Theta_{ij}, P_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & \sigma Q_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.125)$$

Le complément de Schur appliqué aux inégalités (2.124)-(2.125) permet de trouver respectivement, quand les inégalités (2.119) et (2.120) sont satisfaites, σ_1 et σ_2 définis en (2.121) et (2.122). Ainsi, il suffit de choisir σ suffisamment grand tel que $\sigma \geq \max(\sigma_1, \sigma_2)$ pour que la fonction (2.117) soit une fonction de Lyapunov du système augmenté (2.112). ■

La synthèse de multiobservateurs et la propriété de séparation pour le cas discret sont obtenus directement en substituant dans le théorème 2.6 $\mathcal{L}_c(\cdot, \cdot)$ par $\mathcal{L}_d(\cdot, \cdot)$. Notons également que pour obtenir un observateur avec une vitesse de convergence à définir, nous pouvons utiliser la proposition 2.4.

2.4.2 Variables de décision non mesurables

Dans cette section, nous supposons qu'une partie (ou la totalité) des variables de décision ne sont pas mesurables. On note $\hat{z}(t)$ une estimation des variables de décision

dépendant des variables d'état estimées $\hat{x}(t)$. Ainsi les fonctions d'activation du régulateur PDC sont différentes de celles du multimodèle (2.1). La loi de commande s'écrit :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{z}(t)) K_i \hat{x}(t) \quad (2.126)$$

Le multiobservateur (2.104) et le système augmenté (2.112) se réécrivent alors respectivement

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{z}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.127)$$

et

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(\hat{z}(t)) \mu_h(\hat{z}(t)) \tilde{G}_{ijh} \bar{x}(t) \quad (2.128)$$

avec

$$\tilde{G}_{ijh} = \begin{pmatrix} G_{ih} & B_i K_h \\ S_{ijh} & \Theta_{jh} + \Delta B_{ij} K_h \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

$$\Delta A_{ij} = A_i - A_j, \quad \Delta B_{ij} = B_i - B_j, \quad \Delta C_{hi} = C_h - C_i \quad (2.130)$$

$$G_{ih} = A_i - B_i K_h, \quad S_{ijh} = \Delta A_{ij} - \Delta B_{ij} K_h + L_j \Delta C_{hi} \quad (2.131)$$

Les expressions de $\bar{x}(t)$ et Θ_{ij} sont définies respectivement en (2.114) et (2.107). Le système augmenté (2.128) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique $P > 0$, et des matrices L_i et K_i qui vérifient

$$\tilde{G}_{ijj}^T P + P \tilde{G}_{ijj} < 0, \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (2.132)$$

$$\left(\tilde{G}_{ijh} + \tilde{G}_{ihj} \right)^T P + P \left(\tilde{G}_{ijh} + \tilde{G}_{ihj} \right) < 0, \forall (i, j, h) \in I_n^3, j < h \quad (2.133)$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(\hat{z}(t)) \mu_h(\hat{z}(t)) \neq 0$. Les contraintes obtenues sont non convexes et peuvent avoir, par conséquent, de nombreuses solutions locales. Elles sont difficiles à linéariser par les techniques classiques de changement de variables. Des algorithmes de linéarisation peuvent être appliqués à ce genre de contraintes (voir paragraphe 1.3.4.2). La méthode que nous proposons permet de synthétiser le régulateur PDC et l'observateur séparément mais non simultanément [Cha02b][Cha02d]. Sans perte de généralité, nous choisissons

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \quad (2.134)$$

En substituant (2.134) dans (2.132) et (2.133), nous obtenons respectivement

$$\begin{pmatrix} G_{ij}^T P_1 + P_1 G_{ij} & P_1 B_i K_j + S_{ijj}^T P_2 \\ * & \Xi_{ijj} \end{pmatrix} < 0, (i, j) \in I_n^2 \quad (2.135)$$

$$\begin{pmatrix} (G_{ih} + G_{ij})^T P_1 + P_1 (G_{ih} + G_{ij}) & P_1 B_i (K_j + K_h) + (S_{ijh} + S_{ihj})^T P_2 \\ * & \Xi_{ijh} + \Xi_{ihj} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.136)$$

$\forall (i, j, h) \in I_n^3, j < h$ avec

$$\Xi_{ijh} = (\Theta_{jh} + \Delta B_{ij} K_h)^T P_2 + P_2 (\Theta_{jh} + \Delta B_{ij} K_h) \quad (2.137)$$

Les inégalités matricielles (2.135) et (2.136) sont des \mathcal{BMT} en les variables P_1, P_2, L_i et K_i difficiles à résoudre simultanément. Cependant, remarquons que si ces inégalités (2.135) et (2.136) sont vérifiées, cela implique les \mathcal{BMT} en K_i et P_1 suivantes

$$G_{ij}^T P_1 + P_1 G_{ij} < 0, (i, j) \in I_n^2 \quad (2.138)$$

$$(G_{ih} + G_{ij})^T P_1 + P_1 (G_{ih} + G_{ij}) < 0, \forall (i, j, h) \in I_n^3, j < h \quad (2.139)$$

avec $G_{ih} = A_i - B_i K_h$, dont la linéarisation est facile à obtenir par les méthodes classiques de changement de variables. Les matrices P_1 et K_i sont ensuite remplacées dans (2.135) et (2.136) par leurs valeurs respectives P_1^{opt} et K_i^{opt} obtenues en résolvant les contraintes (2.138) et (2.139). Ainsi, le système d'inégalités matricielles obtenu devient linéaire en P_2 et Y_i avec $Y_i = P_2 L_i$. La procédure de calcul de L_i et K_i peut être résumée ainsi [Cha02b] :

1. Choisir la matrice P de la forme (2.134).
2. Calculer P_1^{opt} et K_i^{opt} à partir de (2.138) et (2.139). Si une solution existe aller à l'étape 3, sinon arrêter.
3. Les matrices P_1^{opt} et K_i^{opt} $i \in I_n$ sont reportées dans les contraintes (2.135) et (2.136). Ces dernières deviennent des \mathcal{LMT} en P_2 et $Y_i = P_2 L_i$. Après obtention de P_2 et Y_i , déduire $L_i = Y_i P_2^{-1}, i \in I_n$.

La méthode permet, quand les étapes (2) et (3) sont réalisables, de calculer les gains K_i et $L_i, i \in I_n$ séquentiellement.

Exemple 2.3 : Cas de variables de décision mesurables

Considérons le multimodèle de l'exemple 2.2 (page 52) avec $a = 49$ et $b = 10$. A partir des conditions (2.119), tenant compte de (2.50), on détermine

$$K_1 = \begin{pmatrix} 4.92 & -0.53 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 5.18 & -0.09 \end{pmatrix} \quad (2.140)$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.028 & 0.043 \\ 0.043 & 0.147 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 0.032 & 0.064 \\ 0.064 & 0.171 \end{pmatrix} \quad (2.141)$$

Les conditions (2.120) tenant compte de (2.107) permettent également de calculer

$$L_1 = \begin{pmatrix} 3.0398 & -9.0539 \end{pmatrix}^T, L_2 = \begin{pmatrix} 50.0398 & -9.0539 \end{pmatrix}^T \quad (2.142)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 29.9427 & 1.5509 \\ 1.5509 & 29.9427 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 8.4517 & 0.00 \\ 0.00 & 8.4275 \end{pmatrix} \quad (2.143)$$

Les conditions (2.121)-(2.122) permettent de calculer $\sigma_1 = 9.6869$ et $\sigma_2 = 1.9098$. En effet avec les matrices $P = P(10)$ et $Q = Q(10)$ où P_1, P_2, Q_1, Q_2 sont obtenues en (2.141) et (2.143), on peut facilement vérifier que les conditions (2.115)-(2.116), garantissant la stabilité globale exponentielle du système augmenté, sont respectées. Ces conditions ne sont pas respectées pour $\sigma = 1$ par exemple. Un exemple de simulation est donné en figure 2.3 avec les fonctions d'activation (2.144) :

$$\mu_1(x_1(t)) = 1 - \mu_2(x_1(t)) = \begin{cases} 1 - \frac{|x_1(t)|}{3}, \forall x_1(t) \in [-3, 3] \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (2.144)$$

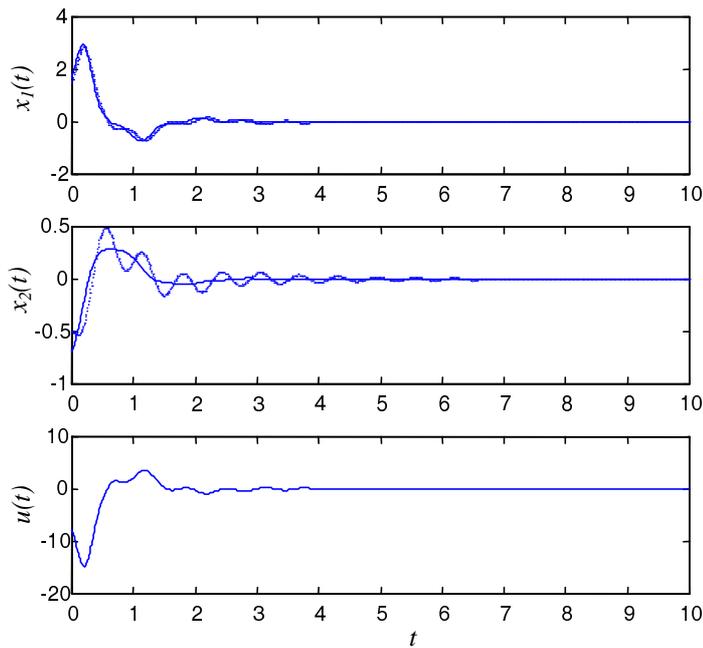


FIG. 2.3: Le système augmenté avec $x(0) = (1.7, -0.7)$ et $\hat{x}(0) = (1.5, -0.5)$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de la stabilité en se basant sur des fonctions de Lyapunov quadratiques est considéré. Nous avons proposé une approche basée sur les propriétés

des M-matrices. Cette approche met l'accent sur une classe de multimodèles acceptant des matrices de Lyapunov communes. La stabilisation des multimodèles basée sur ce résultat produit des résultats non convexes. Des algorithmes de linéarisation existants sont appliqués, ce qui permet de transformer le problème en \mathcal{LMI} résoluble par les outils numériques. L'approche proposée (théorème 2.1) n'apporte aucune relaxation par rapport au résultat classique de la méthode quadratique. La relaxation de la méthode en considérant la procédure S constitue une perspective de ce travail.

Afin d'améliorer les performances de la loi de commande PDC, nous avons également proposé des conditions suffisantes, formulées en un problème GEVP, permettant de maximiser le degré de stabilité du multimodèle en boucle fermée. Le résultat que nous avons obtenu reporte le problème uniquement sur les termes dominants, ce qui conduit à des conditions moins pessimistes.

L'estimation d'état à base de multiobservateurs est également considérée. Dans ce sens, la commande des multimodèles continus dans le cas des fonctions d'activation dépendantes de variables de décision non mesurables est considérée. Une méthode pour synthétiser séparément (mais non simultanément) les gains du retour d'état et les gains d'observation est proposée. Dans le cas des fonctions d'activation mesurables pour lequel la propriété de séparation a été établie, une méthode permettant de déterminer une fonction de Lyapunov prouvant la stabilité du système augmenté est proposée. Dans [Akh03], nous avons également considéré la construction de multiobservateur à entrées inconnues. L'application directe de cet observateur pourrait être, grâce à la prise en compte des entrées inconnues, la base de la conception d'une procédure de détection et de localisation de défauts d'actionneurs (ces résultats ne sont pas présentés dans ce manuscrit).

La puissance de la méthode quadratique vient du fait que la recherche d'une fonction de Lyapunov commune (et des gains de retour d'état dans le cas de la stabilisation) peut être énoncé comme un problème d'optimisation convexe en terme de \mathcal{LMI} résolu efficacement. Cependant, le défaut majeur réside dans l'obligation de satisfaire n \mathcal{LMI} vis-à-vis de la même matrice P . Ces contraintes deviennent encore plus difficiles à satisfaire si l'on ajoute des contraintes de performances. Ce conservatisme provient également du fait que cette approche omet toutes les informations contenues dans les fonctions d'activation.

Le chapitre suivant propose une autre voie, celle de l'analyse et la synthèse de lois de commande par des fonctions non quadratiques. Il s'agit particulièrement de deux types de fonctions : les fonctions polyquadratiques (1.57) et les fonctions quadratiques par morceaux (1.59).

Chapitre 3

Stabilité et stabilisation non quadratique

”Ce qui fait l’honneur de la science, ce n’est pas la possession de connaissances, d’irréfutables vérités, mais la quête obstinée et audacieusement critique de la vérité” Karl Popper. Les deux problèmes fondamentaux de la théorie de la connaissance.

3.1 Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à l’analyse de stabilité, la synthèse de régulateurs et l’estimation d’état des systèmes non linéaires décrits par des structures multimodèles. L’étude est basée sur les fonctions quadratiques de Lyapunov et les résultats qui en découlent sont souvent pessimistes. Ce chapitre propose l’utilisation d’une autre classe de fonctions, celle des fonctions de Lyapunov non quadratiques.

Parmi ces fonctions, on peut citer les fonctions quadratiques par morceaux (piecewise quadratic functions). L’analyse et la synthèse de lois de commande utilisant ce type de fonction ont été étudiées ces dernières années. Ainsi, supposant les fonctions d’activation connues, les multimodèles sont transformés en un ensemble de modèles LTI incertains à incertitudes bornées ; des conditions de stabilité sont obtenues en utilisant des fonctions quadratiques par morceaux [Cao99][Cao96][Zha01]. L’utilisation de ces fonctions a permis également à Johansen et al [Joh99b] d’étudier la stabilité des multimodèles continus affines (modèles locaux présentant des constantes). Cette approche permet de réduire le conservatisme de la méthode quadratique en tenant compte de la partition de l’espace d’état induite par les fonctions d’activation à support local borné (par exemple les fonctions trapézoïdales, triangulaires). Ainsi, l’idée est de partager l’espace d’état en régions de fonctionnement (operating regions) X_i correspondant chacune à une seule dynamique active (modèle local i) et en régions d’interpolation (interpolation regions) où différentes dynamiques sont actives simultanément. Une matrice P_i commune à tous les modèles actifs est à chercher dans chaque région. Cette approche, par opposition à celle citée précédemment, n’exige pas la connaissance des fonctions

d'activation à chaque instant, la connaissance de leurs supports est suffisante. Ce type de fonction a été également considéré par Petterson et al [Pet97]. Cependant, si dans [Cao99] [Cao96][Zha01] [Pet97] la discontinuité des fonctions de Lyapunov considérées est tolérée, les fonctions utilisées par Johanson et al [Joh99b] sont continues grâce à des contraintes supplémentaires sur les matrices P_i .

Un certain nombre de travaux proposent également des fonctions de Lyapunov non quadratiques de la forme $V(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) P_i x(t)$, $P_i > 0$, dite aussi polyquadratiques compte tenu des propriétés des fonctions d'activation (2.2) [Jad99][Cha02e] [Mor00b][Gue01a] [Bla01b][Tan01a][Daa01a][Joh00]. On peut noter que les résultats obtenus permettent de réduire le pessimisme de l'approche quadratique. Toutefois, il est intéressant de remarquer la grande différence entre les résultats du domaine continu et du domaine discret pour ce type de fonction. Si les résultats obtenus en discret sont globaux et sous forme \mathcal{LMI} [Gue01a][Daa01a], les résultats en continu sont souvent locaux et sous forme \mathcal{BMI} [Bla01b][Cha00][Tan01a]. Nous avons également considéré une autre classe de fonctions non quadratiques de la forme $V(x(t)) = \max(V_i(x(t)))$ avec $V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t)$, $P_i > 0$, $i \in I_n$ [Cha02c]. Les résultats obtenus en continu et en discret sont assez satisfaisants en comparaison avec ceux obtenus avec des fonctions quadratiques. La méthode proposée permet également de surmonter le pessimisme des fonctions quadratiques continues par morceaux [Joh99b] quand les fonctions d'activation sont à support global (i. e. le nombre de modèles locaux actifs à chaque instant (r) est égal au nombre total de modèles locaux (n), ce qui est par exemple le cas des fonctions d'activation gaussiennes).

3.2 Stabilité non quadratique des multimodèles continus

Bien que l'approche quadratique soit intéressante du point de vue mise en œuvre pratique, la démarche a montré ses limites dans le cas des systèmes saturés, des systèmes linéaires continus par morceaux [Joh99a], des systèmes linéaires incertains et également dans le cas des multimodèles. Parmi les causes de conservatisme de la méthode quadratique, on peut rappeler qu'un multimodèle est vu comme une IDLP : les fonctions d'activation généralement dépendantes de l'état sont totalement ignorées. Toute l'information contenue dans ces fonctions est non utilisée (supposée inconnue).

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont issus de [Cha02e][Cha00] pour l'approche polyquadratique et de [Cha02c] pour l'approche quadratique par morceaux.

3.2.1 Analyse par fonctions polyquadratiques

Dans cette section, la fonction candidate de Lyapunov considérée ne dépend que de l'état du système ; elle est de la forme :

$$V(x(t)) = x(t)^T P(x(t)) x(t) \quad (3.1)$$

avec

$$P(x(t)) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) P_i, P_i > 0 \quad (3.2)$$

Compte tenu des propriétés des matrices P_i et des fonctions d'activation (convexité), il est facile de vérifier que la fonction (3.1) est une fonction candidate de Lyapunov :

$$c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq c_2 \|x(t)\|^2 \quad (3.3)$$

avec

$$c_1 = \max_{i \in I_n} (\lambda_{\min}(P_i)) > 0, \quad c_2 = \min_{i \in I_n} (\lambda_{\max}(P_i)) > 0 \quad (3.4)$$

Ce type de fonction de Lyapunov a fait l'objet d'études dans le cas des multimodèles. Par exemple, dans [Bla01b][Jad99] [Tan01a], la méthode proposée demande a priori une borne sur la variation des variables d'état. Cette hypothèse implique, dans le cas des multimodèles continus, des dérivées de fonctions d'activation $\frac{d\mu_i(x(t))}{dt}$ bornées. Notons que dans [Tan01a], les variables de décision ($z(t)$) ne sont pas restreintes aux variables d'état et des conditions de stabilité sous formes d'inégalités matricielles sont obtenues sous l'hypothèse que les quantités $\frac{d\mu_i(z(t))}{dt}, i \in I_n$ sont bornées.

Hypothèse 3.1 : les fonctions d'activation $\mu_i(x(t))$ sont continûment dérivables.

Considérons la dérivée, par rapport au temps, de la fonction candidate de Lyapunov (3.1) :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P(x(t)) x(t) + x(t)^T P(x(t)) \dot{x}(t) + x(t)^T \dot{P}(x(t)) x(t) \quad (3.5)$$

Le dernier terme $x(t)^T \dot{P}(x(t)) x(t)$ peut être majoré comme suit

$$\begin{aligned} x(t)^T \dot{P}(x(t)) x(t) &= x(t)^T \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)}, \frac{\partial x(t)}{\partial t} \right\rangle P_i x(t) \\ &\leq x(t)^T \sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right)^T \dot{x}(t) \right| P_i x(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ainsi, dans le cas où le terme $\left| \left(\frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right)^T \dot{x}(t) \right|$ peut être majoré indépendamment de l'état (ou de sa variation), c'est-à-dire

Hypothèse 3.2 : il existe un scalaire $\nu > 0$ tel que $\left| \left(\frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right)^T \dot{x}(t) \right| \leq \nu, \forall x(t) \in \mathbb{R}^p, i \in I_n$

Alors cette hypothèse permet d'écrire

$$x(t)^T \dot{P}(x(t)) x(t) \leq x(t)^T \nu \sum_{i=1}^n P_i x(t) \quad (3.7)$$

Dans ces conditions, la dérivée (3.4) de la fonction candidate de Lyapunov s'explique :

$$\dot{V}(x(t)) \leq \dot{x}(t)^T P(x(t)) x(t) + x(t)^T P(x(t)) \dot{x}(t) + x(t)^T \nu \sum_{i=1}^n P_i x(t) \quad (3.8)$$

Quand l'hypothèse 3.2 est vérifiée¹, les conditions de stabilité obtenues sont globales, dans le cas contraire elles sont uniquement locales.

Les résultats que nous allons présenter par la suite en formulation \mathcal{LMI} sont basés sur la majoration de la dérivée temporelle de la fonction candidate polyquadratique (3.8) dépendant uniquement de l'état du multimodèle. Dans [Bla01a], l'analyse de la stabilité des systèmes T-S est abordée par ce type de fonctions. Le résultat développé dépend de la norme du vecteur d'état ce qui rend difficile son exploitation d'un point de vue numérique. Des majorations permettent de transformer ces conditions en \mathcal{LMI} .

Théorème 3.1 : supposons qu'il existe des matrices symétriques $R > 0, P_i > 0, i \in I_n$, et trois matrices symétriques U, V et P_0 qui vérifient :

$$A_i^T P_i + P_i A_i \leq U \quad i \in I_n \quad (3.9)$$

$$A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j \leq 2V, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (3.10)$$

$$U - V \leq 0 \quad (3.11)$$

$$-R \leq P_i - P_0 \leq R \quad i \in I_n \quad (3.12)$$

$$V + \sum_{i=1}^n \mu_i^2(x(t)) (U - V) + \|\dot{x}(t)\| \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right\| R < 0 \quad (3.13)$$

alors le multimodèle en boucle ouverte (2.3) est globalement asymptotiquement stable.

¹Par exemple, pour le multimodèle suivant : $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x(t)) A_i x(t)$ avec $\mu_1(x(t)) = 1 - \mu_2(x(t)) = e^{-\|x(t)\|^2}$, l'hypothèse 1.1 est vérifiée :

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right)^T \dot{x}(t) \right| &= 2 \left| e^{-\|x(t)\|^2} x(t)^T \sum_{i=1}^2 \mu_i(x(t)) A_i x(t) \right|, i \in I_2 \\ &\leq 2\alpha e^{-\|x(t)\|^2} \|x(t)\|^2 \leq 2\frac{\alpha}{e}, \forall x(t) \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

avec $\alpha = \max_{i \in I_2} (|\lambda_{\max}(A_i)|)$.

Preuve : voir [Bla01a]. ■

Notons que la stabilité globale établie au théorème 3.1 exige a priori d'une borne sur la variation de l'état $\|\dot{x}(t)\|$, $\forall x(t) \in \mathbb{R}^p$; si ce n'est pas le cas, ces conditions n'aboutissent qu'à une stabilité locale. Notons également que dans [Bla01a], pour exploiter numériquement la condition (3.13), le terme $\sum_{i=1}^n \mu_i^2(x(t))$ est minoré par n^{-1} (n étant le nombre de modèles locaux LTI).

Afin d'améliorer le résultat précédent (théorème 3.1), la majoration doit se faire le plus finement possible pour que les conditions de stabilité soient les moins contraignantes possibles. Pour atteindre cet objectif, la proposition suivante qui suppose une certaine connaissance a priori du couplage des fonctions d'activation, i. e. le nombre maximal de modèles locaux activés à chaque instant (r) permet de minimiser le terme $\sum_{i=1}^n \mu_i^2(x(t))$ par r^{-1} au lieu de n^{-1} [Cha02e][Cha00] :

Proposition 3.1 : *tenant compte des propriétés des fonctions d'activation (2.2), les inégalités suivantes sont vérifiées $\forall r \in \{2, \dots, n\}$:*

$$\sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z) \leq 1 - \frac{1}{r} \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2(z) \geq \frac{1}{r} \quad (3.15)$$

où r est le nombre maximal de modèles locaux activés à chaque instant.

Preuve : les propriétés des fonctions d'activation permettent d'écrire

$$1 = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(z) \right)^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i^2(z) + \sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z) \quad (3.16)$$

L'inégalité suivante [Tan98a] :

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2(z) \geq \frac{1}{r-1} \sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z) \quad (3.17)$$

permet de déduire la propriété (3.14). De même l'inégalité (3.15) se déduit directement à partir de l'inégalité (3.14) et de l'égalité (3.16). ■

Cette proposition va nous permettre de réduire le pessimisme du théorème 3.1 en tenant compte du nombre maximal de modèles locaux (r) activés à chaque instant. Le résultat suivant suppose la connaissance a priori d'une borne (ν) sur la variation d'état (hypothèse 3.2).

Théorème 3.2 [Cha02e] : supposons qu'il existe des matrices symétriques $Q > 0$ et $P_i > 0, i \in I_n$ et des matrices symétriques U et V qui vérifient les \mathcal{LMI} suivantes :

$$P_i > P_{j+r}, i \in I_r, j \in I_{n-r} \quad (3.18)$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i \leq U, \forall i \in I_n \quad (3.19)$$

$$A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j \leq 2V, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (3.20)$$

$$U - V \leq 0 \quad (3.21)$$

$$V + r^{-1}(U - V) + \nu \sum_{i=1}^r P_i < -Q \quad (3.22)$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$, r le nombre maximal de modèles locaux activés à chaque instant et ν une borne sur la variation d'état préalablement évaluée (hypothèse 3.2). Alors le point d'équilibre du multimodèle (2.3) est globalement exponentiellement stable.

Preuve : supposons que l'hypothèse 3.2 soit vérifiée, la dérivée (3.8) de la fonction de Lyapunov le long du multimodèle (2.3), tenant en compte des conditions (3.18), (3.19) et (3.20), s'exprime

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & x(t)^T \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(x(t))^2 U + 2 \sum_{i < j:1}^n \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t)) V \right) x(t) + \\ & x(t)^T \nu \sum_{i=1}^r P_i x(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

ou de façon équivalente :

$$\dot{V}(x(t)) \leq x(t)^T \nu \sum_{i=1}^r P_i x(t) + x(t)^T \left(V + \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t))^2 (U - V) \right) x(t) \quad (3.24)$$

La condition (3.21) et la propriété (3.15) de la proposition 3.1 permettent d'écrire

$$\dot{V}(x(t)) \leq x(t)^T \left(V + r^{-1}(U - V) + \nu \sum_{i=1}^r P_i \right) x(t) \quad (3.25)$$

par conséquent la condition (3.22) garantit la stabilité exponentielle du multimodèle (2.3). ■

Remarquons que lorsque les fonctions d'activation sont à support global i. e. $r = n$, la condition (3.18) est triviale. Dans [Cha00], nous avons également obtenu des conditions de stabilité locales et des contraintes sur l'état (ou sa variation) sont proposées.

3.2.2 Analyse par fonctions quadratiques par morceaux

Dans une structure multimodèle, les matrices d'état sont valides dans une région limitée de l'espace de fonctionnement (qui correspond à l'espace d'état quand le vecteur

des variables de décision dépend uniquement de l'état). Par conséquent, la condition quadratique ($A_i^T P + P A_i < 0$) peut n'être valide que dans la zone de fonctionnement correspondante. Pour réduire le pessimisme de la méthode quadratique, qui omet toute information contenue dans les fonctions d'activation, d'autres types de fonctions non quadratiques candidates de Lyapunov sont considérées. Par exemple, les fonctions considérées dans [Cao99][Cao96][Zha01] sont basées sur le découpage de l'espace d'état en n régions. La méthode utilise une heuristique pour déterminer des fonctions de Lyapunov quadratiques pour chaque région. Dans [Joh99b], pour tenir compte des propriétés structurelles des multimodèles, des fonctions de Lyapunov quadratiques continues par morceaux ont fait l'objet d'étude dans le cas des multimodèles affines. La méthode exige que les modèles locaux actifs sur les supports contenant l'origine soient linéaires. Les conditions de stabilité qui découlent de l'étude de ces fonctions sont sous forme \mathcal{LMI} , ce qui constitue un avantage par rapport à la méthode proposée dans [Cao99]. Cette procédure de construction est reprise récemment par Feng [Fen02] dans le cas discret pour l'analyse des systèmes linéaires par morceaux. Nous proposons par la suite de décrire la procédure de construction de ces fonctions [Joh99b].

Considérons le multimodèle affine suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + a_i) \quad (3.26)$$

où $a_i = 0$ pour les fonctions d'activation non nulles à l'origine. Le multimodèle (3.26) est réécrit comme suit :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) \bar{A}_i \bar{x}(t) \quad (3.27)$$

avec :

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & a_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t)^T & 1 \end{pmatrix}^T \quad (3.28)$$

L'analyse de stabilité du multimodèle affine (3.27) est basée sur la construction de fonctions de Lyapunov de la forme :

$$V(x(t)) = \begin{cases} x(t)^T P_i x(t), & x(t) \in X_i, i \in \mathbb{I}_0 \\ \bar{x}(t)^T \bar{P}_i \bar{x}(t), & \bar{x}(t) \in X_i, i \in \mathbb{I}_1 \end{cases} \quad (3.29)$$

avec \mathbb{I}_0 l'ensemble des indices de partitions de l'espace d'état $X_i \subset \mathbb{R}^p$ qui contiennent l'origine et \mathbb{I}_1 l'ensemble des indices de partitions X_i qui ne contiennent pas l'origine. Afin d'assurer la continuité des fonctions candidates de Lyapunov (3.29), les matrices P_i et \bar{P}_i sont paramétrées par la matrice T comme suit

$$P_i = F_i^T T F_i, \quad i \in \mathbb{I}_0 \quad (3.30)$$

$$\bar{P}_i = \bar{F}_i^T T \bar{F}_i, \quad i \in \mathbb{I}_1 \quad (3.31)$$

avec $\bar{F}_i = (F_i \ f_i)$ et $f_i = 0$ pour $i \in \mathbb{I}_0$, sont des matrices à construire, satisfaisant

$$\bar{F}_i \bar{x}(t) = \bar{F}_j \bar{x}(t), \quad x(t) \in X_i \cap X_j \quad (3.32)$$

On construit également les matrices $\bar{E}_i = (E_i \ e_i)$ avec $e_i = 0$ pour $i \in \mathbb{I}_0$ telles que $\bar{E}_i \bar{x}(t)$ est non négative² $\forall x(t) \in X_i$. La non négativité de $\bar{E}_i \bar{x}(t)$ implique que :

$$\bar{x}(t)^T \bar{E}_i^T W_i \bar{E}_i \bar{x}(t) > 0, \quad \forall x(t) \in X_i \quad (3.33)$$

pour toute matrice W_i non négative. Pour plus de détails sur la construction des matrices \bar{F}_i et \bar{E}_i le lecteur peut se référer à [Joh99b] section VI.

La notation $K(i)$, qui sera utilisée par la suite, représente l'ensemble des indices des matrices d'état des modèles actifs dans la partition X_i (par exemple quand X_i représente une région de fonctionnement, $K(i)$ contient un seul indice, celui associé à la matrice d'état active).

Théorème 3.3 : *s'il existe des matrices symétriques T, U_i et W_{ik} , avec U_i et W_{ik} non négatives telles que*

$$P_i = F_i^T T F_i, \quad i \in \mathbb{I}_0 \quad (3.34)$$

$$\bar{P}_i = \bar{F}_i^T T \bar{F}_i, \quad i \in \mathbb{I}_1 \quad (3.35)$$

et qui satisfont

$$\begin{cases} P_i - E_i^T U_i E_i > 0 \\ A_k^T P_i + P_i A_k + E_i^T W_{ik} E_i < 0, \quad i \in \mathbb{I}_0, k \in K(i) \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} \bar{P}_i - \bar{E}_i^T U_i \bar{E}_i > 0 \\ \bar{A}_k^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_k + \bar{E}_i^T W_{ik} \bar{E}_i < 0, \quad i \in \mathbb{I}_1, k \in K(i) \end{cases} \quad (3.37)$$

alors le multimodèle affine (3.27) est exponentiellement stable sur son domaine de validité $\bigcup X_i$.

Preuve : voir [Joh99b]. ■

Il est important de rappeler que, quand les fonctions d'activation sont à support global (fonctions gaussiennes par exemple), la partition suggérée dans [Joh99b] est impossible à réaliser et l'approche est réduite à la méthode quadratique, i. e. à chercher une matrice $P > 0$ commune, ce qui montre les limites de la méthode.

Dans [Cha02c], nous avons considéré un autre type de fonction de la forme :

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_n(x(t))) \quad (3.38)$$

²Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{p,p}$ est dite non négative si toutes ses composantes réelles a_{ij} sont non négatives ($a_{ij} \geq 0$).

avec

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t), P_i > 0, i \in I_n \quad (3.39)$$

Il s'agit de fonctions candidates de Lyapunov puisque $V(x(t)) > 0, \forall x(t) \neq 0$ et $V(0) = 0$. L'utilisation de ce type de fonction n'est pas nouveau et a fait l'objet d'étude dans le cadre des systèmes LTV [Boy94]. Compte tenu de la similitude de ces systèmes avec les multimodèles, nous avons abordé l'analyse de la stabilité des multimodèles en se basant sur ces fonctions de Lyapunov.

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes de stabilité du multimodèle

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) A_i x(t) \quad (3.40)$$

en utilisant le procédure S et la fonction candidate de Lyapunov (3.38).

Théorème 3.4 [Cha02c] : supposons qu'il existe des matrices $P_i > 0$ et des scalaires $\tau_{ijk} \geq 0$ tels que

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^n \tau_{ijk} (P_j - P_k) < 0 \quad \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (3.41)$$

alors le multimodèle (3.40) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : considérons la fonction candidate de Lyapunov (3.38) ; il s'ensuit

$$V(x(t)) = V_i(x(t)) \text{ si } V_i(x(t)) \geq V_j(x(t)), (i, j) \in I_n^2, j \neq i \quad (3.42)$$

Par conséquent

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{dV_i(x(t))}{dt} \text{ si } V_i(x(t)) \geq V_j(x(t)), (i, j) \in I_n^2, j \neq i \quad (3.43)$$

Pour des raisons de simplicité d'écriture $V_i(x(t))$ sera noté V_i . On obtient

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \begin{cases} \blacktriangleright x(t)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i^T P_1 + P_1 A_i) x(t) \text{ si } \forall x(t) : V_1 \geq V_{i+1}, i \in I_{n-1} \\ \vdots \\ \blacktriangleright x(t)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i^T P_n + P_n A_i) x(t) \text{ si } \forall x(t) : V_n \geq V_i, i \in I_{n-1} \end{cases} \quad (3.44)$$

La stabilité asymptotique de (3.40) est garantie si $\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$ pour toutes trajectoires non nulles vérifiant (3.40). Ainsi, si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} \blacktriangleright x(t)^T (A_i^T P_1 + P_1 A_i) x(t) < 0 \text{ si } \forall x(t) : x(t)^T (P_1 - P_{i+1}) x(t) \geq 0, i \in I_{n-1} \\ \vdots \\ \blacktriangleright x(t)^T (A_i^T P_n + P_n A_i) x(t) < 0 \text{ si } \forall x(t) : x(t)^T (P_n - P_i) x(t) \geq 0, i \in I_{n-1} \end{cases} \quad (3.45)$$

alors le multimodèle (3.40) est globalement asymptotiquement stable. Finalement l'application de la procédure S aux contraintes quadratiques (3.45) permet d'aboutir au résultat (3.41). ■

Remarques 3.1 .

1. Il est important de noter que les conditions de stabilité issues de l'approche quadratique sont incluses dans les conditions (3.41). Ainsi quand $P_i = P, i \in I_n$, la fonction (3.38) devient $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ et les conditions (3.41) sont réduites à $A_i^T P + P A_i < 0$.
2. Le théorème 3.4 peut également être démontré en considérant la fonction de Lyapunov candidate

$$V(x(t)) = \min(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_n(x(t))) \tag{3.46}$$

avec

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t), i \in I_n \tag{3.47}$$

3. L'utilisation de la procédure S et de la fonction candidate de Lyapunov (3.38) conduit à un problème non convexe (3.41). Cependant si on fixe les scalaires τ_{ijk} , les contraintes du théorème 3.4 deviennent linéaires en P_i et aboutissent à n^2 \mathcal{LMI} .

3.2.3 Exemple illustratif

Considérons le multimodèle (3.40) à trois modèles locaux stables

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(z(t)) A_i x(t) \tag{3.48}$$

où

$$n = 3, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.06 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1.94 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2.04 \\ -0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

et les fonctions d'activation sont définies par (figure 3.1)

$$\mu_1(x_1(t)) = \frac{\omega_1(x_1(t))}{\sum_{i=1}^3 \omega_i(x_1(t))}, \mu_2(x_1(t)) = \frac{\omega_2(x_1(t))}{\sum_{i=1}^3 \omega_i(x_1(t))}, \mu_3(x_1(t)) = \frac{\omega_3(x_1(t))}{\sum_{i=1}^3 \omega_i(x_1(t))} \tag{3.50}$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1(t)) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1(t) + 5}{2}\right)^2\right), \omega_2(x_1(t)) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1(t)}{2}\right)^2\right), \\ \omega_3(x_1(t)) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1(t) - 5}{2}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3.51}$$

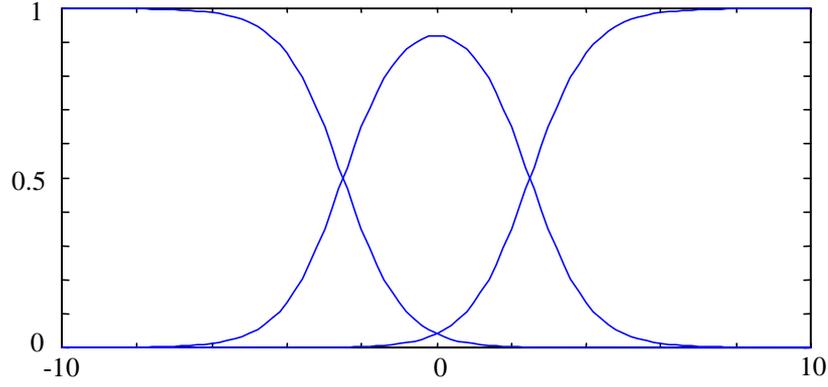


FIG. 3.1: Fonctions d'activation gaussiennes normalisées (3.50).

La méthode quadratique échoue à prouver la stabilité de ce modèle. Ceci peut être aisément vérifié en considérant le problème réalisable suivant (contraintes (2.5), proposition 2.2) :

$$Q_1 > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0 \quad (3.52)$$

$$Q_1 A_1^T + A_1 Q_1 + Q_2 A_2^T + A_2 Q_2 + Q_3 A_3^T + A_3 Q_3 > 0 \quad (3.53)$$

Les conditions du théorème 3.3 échouent également à prouver la stabilité de ce multimodèle car les fonctions d'activation sont à support global. Avec la méthode polyquadratique, les conditions de stabilité à satisfaire sont celles du théorème 3.2 avec $r = 3$. La résolution du système \mathcal{LMI} (3.18)-(3.22) montre que ce système n'est réalisable que pour $\nu \leq 0.084$. Par conséquent, le résultat du théorème 3.2 issu de la méthode polyquadratique aboutit uniquement à une stabilité locale.

Les conditions de stabilité que nous avons proposées au théorème 3.4 aboutissent à neuf inégalités bilinéaires en P_i et $\tau_{ijk} \geq 0$:

$$A_i^T P_1 + P_1 A_i + \sum_{k=2}^3 \tau_{i1k} (P_1 - P_k) < 0, \quad i \in I_3 \quad (3.54)$$

$$A_i^T P_2 + P_2 A_i + \sum_{k=1, k \neq 2}^3 \tau_{i2k} (P_2 - P_k) < 0, \quad i \in I_3 \quad (3.55)$$

$$A_i^T P_3 + P_3 A_i + \sum_{k=1}^2 \tau_{i3k} (P_3 - P_k) < 0, \quad i \in I_3 \quad (3.56)$$

Avec le choix suivant des paramètres

$$\tau_{112} = \tau_{113} = 0, \tau_{212} = \tau_{213} = 1, \tau_{312} = \tau_{313} = 0 \quad (3.57)$$

$$\tau_{121} = \tau_{123} = 0, \tau_{221} = \tau_{223} = 1, \tau_{321} = \tau_{323} = 0 \quad (3.58)$$

$$\tau_{131} = \tau_{132} = 1, \tau_{231} = \tau_{232} = 0, \tau_{331} = \tau_{332} = 1 \quad (3.59)$$

on obtient neuf \mathcal{LMI} en P_1, P_2 et P_3 réalisables :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 71.5815 & 49.0675 \\ 49.0675 & 78.6195 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 71.5815 & 49.0675 \\ 49.0675 & 78.6195 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 70.8724 & 14.7524 \\ 14.7524 & 69.1407 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Ainsi le multimodèle (3.48) est globalement asymptotiquement stable. Un exemple de simulation de ce multimodèle est présenté à la figure 3.2 avec différentes conditions initiales.

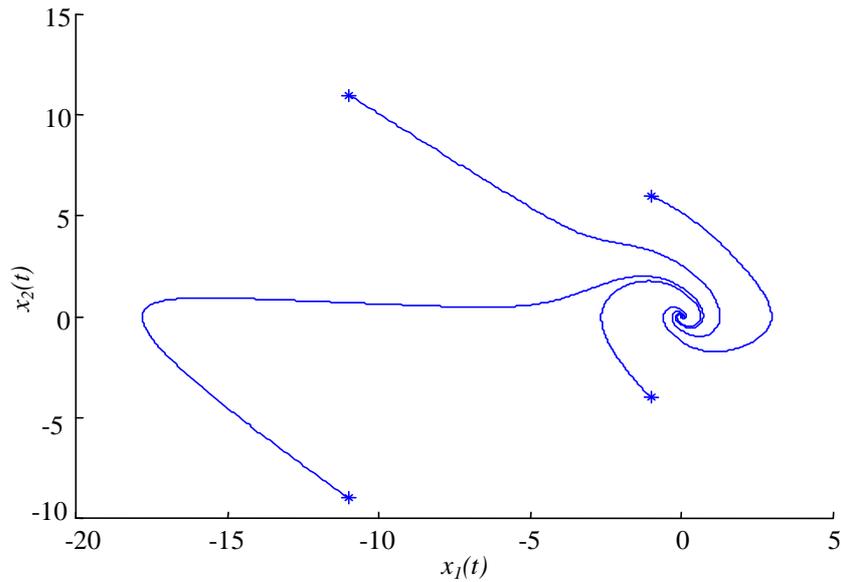


FIG. 3.2: Plan de phase du multimodèle (3.49)-(3.50) avec différentes conditions initiales.

3.3 Stabilité non quadratique des multimodèles discrets

3.3.1 Analyse par fonctions polyquadratiques

L'analyse de la stabilité des multimodèles discrets MIMO basée sur les fonctions candidates de Lyapunov de la forme :

$$V(x(k)) = x(k)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) P_i x(k), P_i > 0 \quad (3.61)$$

a abouti à des résultats assez satisfaisants en comparaison avec ceux du domaine continu. Les résultats de stabilité obtenus dans le domaine discret sont globaux, sous forme de \mathcal{LMI} et moins pessimistes que les résultats de la méthode quadratique.

Les travaux entrepris avec l'approche quadratique visant à réduire son degré de suffisance ont permis de développer une méthode assez avantageuse dans la mesure où elle permet, dans le cas discret, d'introduire une matrice permettant d'ajouter un degré de liberté supplémentaire très utile dans la synthèse de lois de commande [Oli99].

Théorème 3.5 : soit P une matrice symétrique définie positive. Les inégalités matricielles suivantes sont équivalentes :

1. $A^T P A - P < 0$
2. $\begin{pmatrix} P & * \\ G A & G + G^T - P \end{pmatrix} > 0$

La similitude avec les systèmes incertains [Oli99] a permis de montrer en se basant sur les fonctions polyquadratiques (3.61), que le multimodèle discret (2.38) est globalement asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques $P_i > 0$ et des matrices $G_i, i \in I_n$ telles que [Mor00a] :

$$\begin{pmatrix} P_i & * \\ G_j A_i & G_j + G_j^T + P_j \end{pmatrix} > 0, \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (3.62)$$

Dans [Daa01a], des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction de Lyapunov polyquadratique existe ont été démontrées. Ce résultat développé dans le cadre des systèmes incertains est directement applicable aux multimodèles discrets. Le théorème suivant est proposé.

Théorème 3.6 : les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une fonction de Lyapunov de la forme $V(x(k)) = x(k)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) P_i x(k)$ prouvant la stabilité globale asymptotique du multimodèle (2.38).
2. Il existe des matrices symétriques $P_i > 0, i \in I_n$ satisfaisant

$$\begin{pmatrix} P_i & * \\ P_j A_i & P_j \end{pmatrix} > 0, \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (3.63)$$

La fonction de Lyapunov est alors donnée par $V(x(k)) = x(k)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) P_i x(k)$.

3. Il existe des matrices symétriques S_i et des matrices $G_i, i \in I_n$ satisfaisant

$$\begin{pmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * \\ A_i G_i & S_i \end{pmatrix} > 0, \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (3.64)$$

La fonction de Lyapunov est alors donnée par $V(x(k)) = x(k)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) S_i^{-1} x(k)$.

Preuve : voir [Daa01a]. ■

L'apport majeur du théorème 3.6 est de fournir des conditions nécessaires et suffisantes sur l'existence d'une fonction polyquadratique de la forme (3.61). Il a également l'avantage de montrer que les deux conditions de stabilité (3.63) et (3.64) sont équivalentes

et présentent ainsi le même degré de conservatisme. En effet, à l'encontre de ce qu'on pourrait croire, du point de vue analyse de stabilité, la condition (3.64) n'apporte aucune "relaxation" par rapport à (3.63).

L'intérêt de cette formulation réside dans la synthèse de lois de commande. Comme on le verra par la suite, la méthode introduit la matrice G_i qui n'est pas forcément symétrique dans les conditions de synthèse de lois de commande, ce qui permet en plus de découpler les matrices de Lyapunov des gains du régulateur.

3.3.2 Analyse par fonctions quadratiques par morceaux

Dans [Cha02c], nous avons considéré la fonction candidate de Lyapunov de la forme :

$$V(x(k)) = \max(V_1(x(k)), \dots, V_i(x(k)), \dots, V_n(x(k))) \quad (3.65)$$

avec

$$V_i(x(k)) = x(k)^T P_i x(k), P_i > 0, i \in I_n \quad (3.66)$$

Utilisant la procédure S et la fonction candidate de Lyapunov (3.65), le résultat développé dans le domaine continu est étendu au cas discret.

Théorème 3.7 [Cha02c] : *supposons qu'il existe des matrices symétriques $P_i > 0$ et des scalaires $\tau_{ijk} \geq 0$ tels que*

$$A_i^T P_j A_i - P_j + \sum_{k=1}^n \tau_{ijk} (P_j - P_k) < 0, \quad \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (3.67)$$

alors le multimodèle (2.38) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : La preuve est identique à celle du théorème 3.4. ■

Les remarques 3.1 sont aussi valables dans le cas discret. Le théorème 3.7 produit des conditions suffisantes de stabilité mais toutefois moins conservatives que celles issues de la stabilité quadratique. Il faut noter également que lorsqu'aucune fonction polynomiale n'existe (théorème 3.6), une fonction quadratique continue par morceaux (théorème 3.7) peut exister comme le montre l'exemple suivant.

3.3.3 Exemple illustratif

Considérons le multimodèle suivant décrit par deux modèles locaux stables

$$n = 2, A_1 = \begin{pmatrix} 0.749 & -1 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0.932 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Les fonctions d'activation sont telles que

$$\mu_1(x_1(k)) = \frac{(1 - \tanh(x_1(k)))}{2}, \quad \mu_2(x_1(k)) = 1 - \mu_1(x_1(k)) \quad (3.69)$$

Les conditions de stabilité du théorème 3.6 échouent à prouver la stabilité de ce multimodèle, ce qui montre qu'aucune fonction polyquadratique de la forme (3.61) ne peut exister. Avec les conditions de stabilité que nous avons proposées au théorème 3.7, on obtient quatre inégalités bilinéaires en $P_i > 0$ et $\tau_{ijk} \geq 0$:

$$A_1^T P_1 A_1 - P_1 + \tau_{112} (P_1 - P_2) < 0 \quad (3.70)$$

$$A_2^T P_1 A_2 - P_1 + \tau_{212} (P_1 - P_2) < 0 \quad (3.71)$$

$$A_1^T P_2 A_1 - P_2 + \tau_{121} (P_2 - P_1) < 0 \quad (3.72)$$

$$A_2^T P_2 A_2 - P_2 + \tau_{221} (P_2 - P_1) < 0 \quad (3.73)$$

Avec le choix suivant des paramètres

$$\tau_{112} = 0, \quad \tau_{212} = 1, \quad \tau_{121} = 2, \quad \tau_{221} = 0 \quad (3.74)$$

les \mathcal{BMT} sont transformées en \mathcal{LMT} réalisables en P_1 et P_2 :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 11.7060 & 0.7443 \\ 0.7443 & 29.2653 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 11.0630 & 5.1254 \\ 5.1254 & 14.8184 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Ainsi le multimodèle (3.68)-(3.69) est globalement asymptotiquement stable. Un exemple de simulation de ce multimodèle est présenté à la figure 3.3 avec différentes conditions initiales.

3.4 Stabilisation non quadratique par retour d'état

3.4.1 Approche utilisant des fonctions polyquadratiques

3.4.1.1 Cas des multimodèles continus

La synthèse de lois de commande utilisant les fonctions de Lyapunov polyquadratiques a été, ces dernières années, l'objet de nombreux travaux. Par exemple, dans [Bla01a], les résultats de la stabilisation des multimodèles issus de la commande PDC sont exprimés en termes de \mathcal{BMT} et dépendent de l'état du système, ce qui pose le problème de la résolution numérique. Dans [Tan01a], des conditions de stabilisation sous forme d'inégalités matricielles ont été obtenues via la loi de commande PDC et sa structure dérivée (2.42)[Tan01b].

Rappelons que notre objectif est de formuler des conditions de stabilité sous forme d'inégalités matricielles et susceptibles d'être linéarisées par les algorithmes existants quand ces inégalités sont bilinéaires en les variables de synthèse. Pour cela, on suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée :

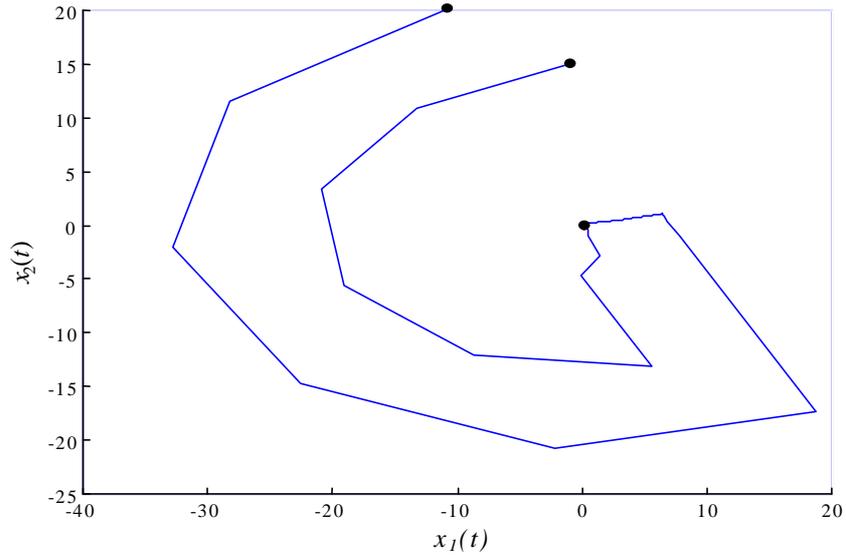


FIG. 3.3: Plan de phase du multimodèle (3.68)-(3.69) avec différentes conditions initiales.

Hypothèse 3.3 : on suppose que seulement deux modèles locaux sont activés à chaque instant ($r = 2$).

Dans ce cadre, nous allons établir des conditions suffisantes de synthèse de loi de commande PDC, exploitables numériquement en se basant sur celles de [Bla01a]. Un multimodèle continu bouclé via la loi de commande PDC s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) G_{ij} x(t) \quad (3.76)$$

avec

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (3.77)$$

La dérivée (3.8) de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du multimodèle (3.76), s'explique

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T R(x(t)) x(t) + x(t)^T \dot{P}(x(t)) x(t) \quad (3.78)$$

avec

$$R(x(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t)) \mu_k(x(t)) S_{ijk} \quad (3.79)$$

$$S_{ijk} = G_{ij}^T P_k + P_k G_{ij} \quad (3.80)$$

Dans le cas de la stabilisation, le terme $x(t)^T \dot{P}(x(t)) x(t)$ est dépendant du gain de retour $K_i, i \in I_n$:

$$x(t)^T \dot{P}(x(t)) x(t) \leq x(t)^T \sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right)^T \dot{x}(t) \right| P_i x(t) \quad (3.81)$$

Sous l'hypothèse 3.1, la majoration suivante est également vérifiée :

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right)^T \dot{x}(t) \right| &\leq \left\| \frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right\| \|\dot{x}(t)\| \\ &\leq \left\| \frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right\| \|x(t)\| \alpha \end{aligned} \quad (3.82)$$

où

$$\alpha = \max_{(i,j) \in I_n^2} (\|G_{ij}\|) \quad (3.83)$$

La contrainte (3.83) est vérifiée si les \mathcal{LMI} suivantes en α et K_j sont réalisables :

$$\begin{pmatrix} \alpha I & (A_i - B_i K_j)^T \\ * & \alpha I \end{pmatrix} \geq 0, \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (3.84)$$

Ainsi, s'il existe α et K_j vérifiant (3.84) et $\eta > 0$ tels que

$$\left\| \frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right\| \|x(t)\| \leq \eta, \forall x(t) \in \mathbb{R}^p \quad (3.85)$$

alors l'expression (3.81) peut être majorée comme suit

$$x(t)^T \dot{P}(x(t)) x(t) \leq \alpha \eta x(t)^T \sum_{i=1}^n P_i x(t), \forall x(t) \in \mathbb{R}^p \quad (3.86)$$

Afin d'affiner certaines majorations nécessaires pour rendre les résultats exploitables numériquement et ainsi réduire leurs pessimismes, nous allons tout d'abord considérer les deux propositions suivantes [Cha01b] :

Proposition 3.2 : *tenant compte des propriétés des fonctions d'activation (2.2), l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(z)^3 \geq \frac{1}{r} - \sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z)^2, \forall r \in \{2, \dots, n\} \quad (3.87)$$

où r est le nombre de modèles locaux activés à chaque instant.

Preuve : les propriétés des fonctions d'activation permettent d'écrire

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(z)^2 = 1 - \sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z) \quad (3.88)$$

L'égalité (3.88) multipliée par $\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t))$ s'explique après développement du membre à gauche

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(z)^3 + \sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z)^2 \mu_j(z) = 1 - \sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z) \quad (3.89)$$

Tenant compte de (3.14) (proposition 3.1), on déduit la proposition 3.2. ■

Proposition 3.3 : quand le nombre de modèles locaux activés à chaque instant est $r = 2$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(z)^3 \geq \frac{1}{4} \quad (3.90)$$

Preuve : les propriétés des fonctions d'activation permettent d'écrire

$$\sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z)^2 \mu_j(z) = \sum_{i < j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z) (\mu_i(z) + \mu_j(z)) \quad (3.91)$$

dans le cas où $r = 2$, cette égalité se réduit à

$$\sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z)^2 \mu_j(z) = \sum_{i < j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z) \quad (3.92)$$

Remarquons également que

$$\sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z) = 2 \sum_{i < j:1}^n \mu_i(z) \mu_j(z) \quad (3.93)$$

Tenant compte de la proposition 3.2 et de la propriété (3.14) (proposition 3.1), on déduit avec $r = 2$:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(z)^3 \geq \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{4} \quad (3.94)$$

d'où la proposition 3.3. ■

Théorème 3.8 : supposons qu'il existe des matrices symétriques $Q > 0$, $P_i > 0$, $i \in I_n$, U et V , des matrices K_i , $i \in I_n$ et un scalaire α qui vérifient les **BMI** suivantes :

$$P_i > P_{j+2}, \quad i \in I_2, \quad j \in I_{n-2} \quad (3.95)$$

$$S_{iii} \leq U, \quad i \in I_n \quad (3.96)$$

$$S_{iji} + S_{jii} + S_{ijj} \leq 3V, \quad (i, j) \in I_n^2, \quad i \neq j \quad (3.97)$$

$$U - V \leq 0 \quad (3.98)$$

$$\frac{3V + U}{4} + \alpha\eta(P_1 + P_2) < -Q \quad (3.99)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha I & (A_i - B_i K_j)^T \\ A_i - B_i K_j & \alpha I \end{pmatrix} \geq 0, \quad (i, j) \in I_n^2 \quad (3.100)$$

avec $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$, $S_{ijk} = (A_i - B_i K_j)^T P_k + P_k (A_i - B_i K_j)$, et η une borne respectant (3.85). Alors le multimodèle (3.76) est exponentiellement stable.

Preuve : l'égalité (3.79) peut se réécrire

$$\begin{aligned} R(x(t)) &= \sum_{i \neq j \neq k:1}^n \underbrace{\mu_i(x(t))\mu_j(x(t))\mu_k(x(t))}_{=0 \text{ (quand } r=2)} (S_{ijk} + S_{ikj} + S_{jik} + S_{jki} + S_{kij} + S_{kji}) + \\ &\quad \sum_{i \neq j:1}^n \mu_i(x(t))^2 \mu_j(x(t)) (S_{iji} + S_{jii} + S_{ijj}) + \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t))^3 S_{iii} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Tenant compte des conditions (3.96) et (3.97), on obtient

$$R(x(t)) \leq V + \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t))^3 (U - V) \quad (3.102)$$

En utilisant la proposition 3.3, l'expression (3.102) devient :

$$R(x(t)) \leq V + \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t))^3 (U - V) \leq \frac{3V + U}{4} \quad (3.103)$$

avec l'hypothèse (3.86) et la contrainte (3.95), l'expression (3.78) s'explique

$$\dot{V}(x(t)) \leq x(t)^T \left(\frac{3V + U}{4} + \alpha\eta \sum_{i=1}^2 P_i \right) x(t) \quad (3.104)$$

Avec la condition (3.99), on vérifie $\dot{V}(x(t)) < -x(t)^T Q x(t)$, d'où la stabilité exponentielle. ■

Remarques 3.2 .

- Dans le cas des matrices d'entrée positivement linéairement dépendantes, il est plus intéressant de considérer la loi de commande CDF que la loi de commande PDC. Ainsi le multimodèle (3.76) est exponentiellement stable s'il existe des matrices symétriques $Q > 0$, $P_i > 0, i \in I_n$, U et V et des matrices $K_i, i \in I_n$ qui vérifient les \mathcal{BMT} suivantes :

$$P_i > P_{j+r}, \quad i \in I_r, \quad j \in I_{n-r} \quad (3.105)$$

$$G_{ii}^T P_i + P_i G_{ii} \leq U, \quad i \in I_n \quad (3.106)$$

$$G_{ii}^T P_j + P_j G_{ii} + G_{jj}^T P_i + P_i G_{jj} \leq 2V, \quad (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (3.107)$$

$$U - V \leq 0 \quad (3.108)$$

$$V + r^{-1}(U - V) + \alpha\eta \sum_{i=1}^r P_i < -Q \quad (3.109)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha I & G_{ii}^T \\ * & \alpha I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i \in I_n \quad (3.110)$$

avec $G_{ii} = A_i - B_i K_i, \forall i \in \{2, \dots, n\}$.

- Le cas général, i. e. une loi de commande PDC et $\forall r \in \{2, \dots, n\}$, est traité dans [Bla01a]. Les résultats obtenus aboutissent à des conditions de stabilité non exploitables par les outils numériques.

Les résultats de la stabilisation polyquadratique par retour d'état (lois de commande PDC ou CDF) sont exprimés sous formes de \mathcal{BMT} en P_i et K_i . Ces dernières ne sont pas linéarisables par les méthodes classiques de changement de variables. Des algorithmes aboutissant à des solutions locales [Has99] et globales [Ber97] sont proposées pour résoudre ce genre de problème non convexe. La méthode adoptée est celle dite homotopique proposée par Hassibi et al [Has99] pour résoudre localement une \mathcal{BMT} . La méthode est basée sur une approximation au premier ordre permettant de réduire la complexité de calcul des \mathcal{BMT} à celle des \mathcal{LMT} .

On pose :

$$P_i = P_{i0} + \delta P_i, K_j = K_{j0} + \delta K_j \quad (3.111)$$

où P_{i0} et K_{i0} sont des valeurs initiales. Après avoir négligé les termes du second ordre $B_i \delta K_j \delta P_i$, $\delta P_i B_i \delta K_j$ et leurs transposés des \mathcal{BMT} (3.96)-(3.97), nous obtenons des \mathcal{LMT} en δP_i et δK_j . En effet la formulation \mathcal{LMT} correspondante à ces \mathcal{BMT} s'obtient en remplaçant S_{ijk} par

$$\begin{aligned} S_{ijk} = & A_i^T P_{k0} + P_{k0} A_i - K_{j0}^T B_i^T P_{k0} - P_{k0} B_i K_{j0} + A_i^T \delta P_k + \delta P_k A_i \\ & - K_{j0}^T B_i^T \delta P_k - \delta P_k B_i K_{j0} - \delta K_j^T B_i^T P_{k0} - P_{k0} B_i \delta K_j \end{aligned} \quad (3.112)$$

avec $P_{i0} + \delta P_i > 0$.

Pour que ces approximations restent valables, les contraintes suivantes doivent être ajoutées : $\|\delta P_i\| < \zeta \|P_{i0}\|$ et $\|\delta K_j\| < \zeta \|K_{j0}\|$ avec $0 < \zeta \ll 1$. La formulation \mathcal{LMI} de ces contraintes sur les normes est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \zeta P_{i0} & \delta P_i \\ \delta P_i & \zeta P_{i0} \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} (\zeta \|K_{i0}\|)^2 & \delta K_i^T \\ \delta K_i & \mathcal{I} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.113)$$

avec \mathcal{I} l'identité de dimension appropriée. Cependant, le problème majeur de la méthode reste le choix de valeurs initiales.

3.4.1.2 Cas des multimodèles discrets

L'approche polyquadratique a donné naissance à des résultats assez intéressants dans le domaine discret, des résultats souvent transformables en \mathcal{LMI} par simple changement de variable. Dans ce sens, les critères de stabilisation quadratique retenus au départ pour leur facilité de mise en œuvre se trouvent désormais dépassés par la simplicité de la formulation \mathcal{LMI} et la réduction considérable du conservatisme apportée par la méthode polyquadratique. Dans le cadre de la loi de commande PDC, des conditions de stabilisation obtenues en se basant sur l'approche décrite dans [Oli99] ont été formulées sous formes \mathcal{LMI} [Mor00a]. Afin de relaxer d'avantage ces résultats, des lois de commande obtenues par modification de la loi de commande PDC ont été synthétisées [Gue01a].

Loi de commande PDC :

Le théorème suivant [Mor00a] formulé en termes de \mathcal{LMI} donne des conditions suffisantes de stabilisation d'un multimodèle discret dans le cas d'une loi de commande PDC : $u(k) = -\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) K_i x(k)$. Le multimodèle discret (2.37) bouclé via la loi de commande PDC s'écrit

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) G_{ij} x(k) \quad (3.114)$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i K_j$.

Théorème 3.9 : *supposons qu'il existe des matrices symétriques $P_i, \forall i \in I_n$ et des matrices K_i et G solutions des inégalités matricielles :*

$$\begin{pmatrix} P_i & * \\ GG_{ii}^T & G + G^T - P_k \end{pmatrix} > 0, \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.115)$$

$$\begin{pmatrix} P_i + P_j & * \\ G(G_{ij} + G_{ji})^T & 2(G + G^T - P_k) \end{pmatrix} > 0, \forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j \quad (3.116)$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, alors le multimodèle discret décrit en (3.114) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : voir [Mor00a]. ■

La transformation en \mathcal{LMI} est immédiate par le changement de variable $R_i = GK_i^T$ et les gains de la commande PDC sont donnés par $K_i = R_i^T G^{-T}$ (l'existence de G^{-1} est assurée par la contrainte $G + G^T > P_k > 0$). Remarquons que le nombre de \mathcal{LMI} est $\frac{n^2(n+1)}{2}$ au lieu de $\frac{n(n+1)}{2}$ dans le cas quadratique. Ce nombre est réduit à n^2 dans le cas de la loi de commande CDF, car seules les \mathcal{LMI} (3.115) sont nécessaires pour garantir la stabilisation du multimodèle.

Loi de commande PDC modifiée :

Le résultat suivant propose, par un changement de loi de commande PDC, une formulation \mathcal{LMI} plus avantageuse que la formulation précédente [Gue01a]. La loi de commande en question s'écrit :

$$u(k) = - \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) K_i \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) G_i \right)^{-1} x(k) \quad (3.117)$$

Avec cette loi de commande, le multimodèle discret (2.37) s'écrit

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) (A_i G_j - B_i K_j) \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) G_i \right)^{-1} x(k) \quad (3.118)$$

Théorème 3.10 : *supposons qu'il existe des matrices symétriques P_i et des matrices K_i et G_i solutions des \mathcal{LMI} :*

$$\begin{pmatrix} P_i & * \\ A_i G_i - B_i K_i & G_k + G_k^T - P_k \end{pmatrix} > 0, \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.119)$$

$$\begin{pmatrix} P_i + P_j & * \\ A_i G_j + A_j G_i - B_i K_j - B_j K_i & 2(G_k + G_k^T - P_k) \end{pmatrix} > 0, \forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j \quad (3.120)$$

alors le multimodèle (2.37) est globalement asymptotiquement stabilisé via la loi de commande (3.117).

Preuve : voir [Gue01a]. ■

Ce résultat permet de "relaxer" d'avantage les contraintes du théorème 3.9. Le changement de la loi de commande PDC en la loi de commande (3.117) permet d'introduire des matrices G_i au lieu d'une matrice unique G , ce qui est synonyme de moins de conservatisme. D'autres résultats sont obtenus en utilisant la loi de commande

$$u(t) = - \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) K_i \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) P_i \right)^{-1} x(t) \quad (3.121)$$

Pour obtenir les conditions de stabilité relatives à cette loi de commande, il suffit de substituer dans (3.119) et (3.120) P_i à G_i . Cependant, l'intérêt de la loi de commande (3.117) par rapport à celle décrite en (3.121) est de rendre indépendante la synthèse de la loi de commande des matrices de Lyapunov P_i . D'autres résultats issus de ces lois de commande ont été également obtenus [Gue01a] en s'inspirant des travaux de [Kim00].

Loi de commande CDF :

Cette loi de commande est intéressante à mettre en œuvre dans le cas de la colinéarité positive des matrices d'entrée ($\alpha_i > 0, i \in I_n$) :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) (A_i x(k) + \alpha_i B u(k)) \quad (3.122)$$

Le résultat suivant propose des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une fonction de Lyapunov polyquadratique permettant de prouver la stabilisation du multimodèle discret (3.122).

Théorème 3.11 : *il existe une fonction de Lyapunov polyquadratique permettant de prouver la stabilité asymptotique globale du multimodèle discret (3.122) via la loi de commande CDF (2.43) si et seulement s'il existe des matrices symétriques S_i, S_j et des matrices G_i, R_i solutions des LMI*

$$\begin{pmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * \\ A_i G_i - B_i R_i & S_j \end{pmatrix} > 0, \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (3.123)$$

Les gains de la loi de commande CDF sont tels que $K_i = R_i G_i^{-1}, i \in I_n$.

Preuve : la preuve est obtenue par application directe du théorème 3.6 en substituant $A_i - B_i K_i$ à A_i avec le changement de variable $R_i = K_i G_i$. L'existence de G_i^{-1} est assurée par la contrainte $G_i + G_i^T > S_i > 0$. ■

Remarquons que le gain de retour K_i ne dépend pas explicitement de la matrice de Lyapunov $P_i = S_i^{-1}$. La matrice G_i , qui n'est pas forcément symétrique, introduit un degré de liberté supplémentaire pour la synthèse du gain K_i .

3.4.2 Approche utilisant des fonctions quadratiques par morceaux

L'étude que nous proposons dans ce paragraphe est exclusivement basée sur les fonctions quadratiques par morceaux :

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_n(x(t))) \quad (3.124)$$

avec

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t), P_i > 0, i \in I_n \quad (3.125)$$

Nous présentons tout d'abord des conditions de stabilisation des multimodèles continus via la loi de commande PDC puis CDF. Nous étendons ensuite ces résultats en vue de la stabilisation des multimodèles MIMO discrets.

3.4.2.1 Cas des multimodèles continus

Loi de commande PDC :

En utilisant la procédure S et la fonction candidate de Lyapunov (3.124), la stabilité du multimodèle (3.76) peut être obtenue directement à partir du théorème 3.4 en substituant G_{ij} à A_i . Cependant, l'exploitation systématique du théorème 3.4 conduit à des résultats conservatifs. Ainsi, afin d'obtenir des conditions de stabilisation moins contraignantes, les résultats "relaxés" de la méthode quadratique [Tan98a] sont exploités.

Théorème 3.12 [Cha01c] : *supposons qu'il existe des matrices symétriques $Q \geq 0$, $P_i > 0$, des matrices K_i et des scalaires $\tau_{ijkl} \geq 0$ tels que*

$$G_{ii}^T P_k + P_k G_{ii} + (r-1)Q + \sum_{l=1}^n \tau_{iikl} (P_k - P_l) < 0 \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.126)$$

$$(G_{ij} + G_{ji})^T P_k + P_k (G_{ij} + G_{ji}) - 2Q + \sum_{l=1}^n \tau_{ijkl} (P_k - P_l) < 0 \quad \forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j \quad (3.127)$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, alors le multimodèle (3.76) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : Considérons la fonction candidate de Lyapunov (3.124). Il s'ensuit

$$V(x(t)) = V_k(x(t)) \text{ si } V_k(x(t)) \geq V_l(x(t)), \forall (k, l) \in I_n^2, k \neq l \quad (3.128)$$

Par conséquent

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{dV_k(x(t))}{dt} \text{ si } V_k(x(t)) \geq V_l(x(t)), \forall (k, l) \in I_n^2, k \neq l \quad (3.129)$$

Pour des raisons de simplicité d'écriture $V_k(x(t))$ sera noté V_k . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= x(t)^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (G_{ij}^T P_k + P_k G_{ij}) x(t) \\ &\text{si } V_k \geq V_l, \forall (k, l) \in I_n^2, k \neq l \end{aligned} \quad (3.130)$$

qu'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= x(t)^T \left(\sum_{i < j:1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \left((G_{ij} + G_{ji})^T P_k + P_k (G_{ij} + G_{ji}) \right) \right) x(t) + \\ &x(t)^T \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2(z(t)) (G_{ii}^T P_k + P_k G_{ii}) \right) x(t) \quad \text{si } V_k \geq V_l, \forall (k, l) \in I_n^2, k \neq l \end{aligned} \quad (3.131)$$

Ainsi, si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacktriangleright x(t)^T \left((G_{ij} + G_{ji})^T P_k + P_k (G_{ij} + G_{ji}) - 2Q \right) x(t) < 0 \\ \quad \text{si } \forall x(t) : x(t)^T (P_k - P_l) x(t) \geq 0, (k, l) \in I_n^2, k \neq l \\ \blacktriangleright x(t)^T (G_{ii}^T P_k + P_k G_{ii} + (r-1)Q) x(t) < 0 \\ \quad \text{si } \forall x(t) : x(t)^T (P_k - P_l) x(t) \geq 0, (k, l) \in I_n^2, k \neq l \end{array} \right. \quad (3.132)$$

alors $\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$ et par conséquent le multimodèle (3.76) est globalement asymptotiquement stable. Finalement l'application de la procédure S aux contraintes quadratiques (3.132) permet d'aboutir aux résultats (3.126)-(3.127). ■

Le théorème 3.12 exige l'obtention d'une matrice Q commune à ces $\frac{n^2(n+1)}{2}$ inégalités matricielles. Pour relaxer d'avantage ce résultat, nous nous inspirons des conditions relaxées sur la stabilisation quadratique [Kim00].

Théorème 3.13 [Cha01c] : *supposons qu'il existe des matrices symétriques Q_{ij} , $P_i > 0$, des matrices K_i et des scalaires $\tau_{ijkl} \geq 0$ tels que*

$$G_{ii}^T P_k + P_k G_{ii} + Q_{ii} + \sum_{l=1}^n \tau_{iikl} (P_k - P_l) < 0, \quad (i, k) \in I_n^2 \quad (3.133)$$

$$(G_{ij} + G_{ji})^T P_k + P_k (G_{ij} + G_{ji}) + 2Q_{ij} + \sum_{l=1}^n \tau_{ijkl} (P_k - P_l) < 0, \quad (i, j, k) \in I_n^3, i < j \quad (3.134)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1n} & \cdots & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.135)$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, alors le multimodèle (3.76) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : la preuve est obtenue de la même manière qu'au théorème 3.12, en considérant la fonction candidate de Lyapunov (3.124) et en appliquant la procédure S aux conditions (2.56)-(2.58). ■

Remarquons que ces résultats incluent ceux de la méthode quadratique dans le sens où ils sont moins restrictifs. Ainsi, il suffit de prendre $P_k = P_l = P$ pour retrouver les résultats quadratiques. Néanmoins, les résultats issus des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux demandent la résolution de $\frac{n^2(n+1)}{2}$ inégalités matricielles (soit n fois plus que la méthode quadratique). Ces inégalités matricielles sont en plus des \mathcal{BMI} en P_i , K_i et τ_{ijkl} difficiles à linéariser par les méthodes classiques (changement de variables). La méthode que nous suggérons pour linéariser ces contraintes est d'utiliser

tout d'abord la procédure exposée au paragraphe 3.4.1.1 puis de procéder par itération sur $\tau_{ijkl} > 0$.

Dans le cadre de la loi de commande CDF, le multimodèle (3.76) s'explique :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) G_{ii} x(k) \quad (3.136)$$

avec $G_{ii} = A_i - B_i K_i$. On obtient, par application directe du théorème 3.4 en substituant à A_i la matrice G_{ii} , le résultat suivant :

Théorème 3.14 [Cha01c] : *supposons qu'il existe des matrices symétriques $P_i > 0$, des matrices K_i et des scalaires $\tau_{ikl} \geq 0$ tels que*

$$G_{ii}^T P_k + P_k G_{ii} + \sum_{l=1}^n \tau_{ikl} (P_k - P_l) < 0 \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.137)$$

alors le multimodèle (3.136) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : voir théorème 3.4. ■

Dans le cas d'une loi de commande linéaire $u(t) = -Kx(t)$, les conditions de stabilité sont similaires à celles du théorème ci-dessus en substituant à G_{ii} la matrice $A_i - B_i K$. Les conditions des théorèmes de ce paragraphe sont exprimées sous formes de \mathcal{BMT} en P_i , K_i et τ_{ijkl} . Ces dernières ne sont pas linéarisables par les méthodes classiques. La méthode de linéarisation décrite au paragraphe 3.4.1.1 peut être utilisée. Ainsi, la linéarisation de $P_k G_{ii}$ est obtenue après avoir remplacé P_i par $P_{i0} + \delta P_i > 0$, K_i par $K_{i0} + \delta K_i$, où P_{i0} et K_{i0} sont des valeurs initiales, et négligé les termes du second ordre. La formulation \mathcal{LMT} correspondante à ces \mathcal{BMT} s'obtient en remplaçant $P_k G_{ij}$ par

$$P_k G_{ii} = (P_{k0} + \delta P_k) A_i - (P_{k0} + \delta P_k) B_i K_{i0} - P_{k0} B_i \delta K_i \quad (3.138)$$

auxquelles il faut ajouter les contraintes (3.113) assurant la validité de l'approximation.

Exemple 3.1 .

Considérons le système suivant à deux modèles locaux instables avec $B_2 = 2B_1$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2.31 & -71.83 & 227.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1.60 & -107.1 & 180 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Les contraintes à résoudre sont celles du théorème 3.14 linéarisées en (3.138) avec les contraintes sur P_1, P_2, K_1 et K_2

$$\begin{pmatrix} \zeta P_{i0} & \delta P_i \\ \delta P_i & \zeta P_{i0} \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} (\zeta \|K_{i0}\|)^2 & \delta K_i^T \\ \delta K_i & \mathcal{I} \end{pmatrix} > 0, \quad \zeta = 0.2, \quad i \in I_2$$

Avec les valeurs initiales

$$P_{10} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0.7 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad P_{20} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 76 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{10} = \begin{pmatrix} 6 & -31 & 202 \end{pmatrix}, \quad K_{20} = \begin{pmatrix} 5 & -52 & 120 \end{pmatrix}$$

et

$$\tau_{112} = 1, \quad \tau_{121} = 0, \quad \tau_{212} = 1, \quad \tau_{221} = 0 \quad (3.139)$$

les contraintes linéarisées sont réalisables et aboutissent aux résultats suivants :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.85 & 0.04 \\ 0.85 & 7.18 & -2.95 \\ 0.04 & -2.95 & 10.21 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2.25 & 2.04 & -0.59 \\ 2.04 & 84.92 & -0.88 \\ -0.59 & -0.88 & 13.23 \end{pmatrix}$$

Les gains de la loi de commande PDC sont

$$K_1 = \begin{pmatrix} 29.59 & -29.28 & 204.24 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 16.96 & -41.11 & 118.32 \end{pmatrix} \quad (3.140)$$

3.4.2.2 Extension aux multimodèles discrets

En utilisant la procédure S et la fonction candidate quadratique par morceaux, les résultats que nous avons obtenus dans le cas continu via la loi de commande PDC sont étendus au cas discret.

Théorème 3.15 [Cha01c] : *supposons qu'il existe des matrices symétriques $Q \geq 0$, $P_i > 0$, des matrices K_i et des scalaires $\tau_{ijkl} \geq 0$ tels que*

$$G_{ii}^T P_k G_{ii} - P_k + (r-1)Q + \sum_{l=1}^n \tau_{iikl} (P_k - P_l) < 0 \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.141)$$

$$(G_{ij} + G_{ji})^T P_k (G_{ij} + G_{ji}) - 4P_k - 4Q + \sum_{l=1}^n \tau_{ijkl} (P_k - P_l) < 0 \quad (3.142)$$

$$\forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, alors le multimodèle (3.114) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : la preuve est similaire à celle du théorème 3.12 en considérant les conditions (2.86)-(2.87). ■

Le théorème suivant "relaxe" le précédent dans le sens où des matrices Q_{ij} sont introduites à la place de la matrice Q commune.

Théorème 3.16 [Cha01c] : supposons qu'il existe des matrices symétriques Q_{ij} , $P_i > 0$, des matrices K_i et des scalaires $\tau_{ijkl} \geq 0$ tels que

$$G_{ii}^T P_k G_{ii} - P_k + Q_{ii} + \sum_{l=1}^n \tau_{iikl} (P_k - P_l) < 0 \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.143)$$

$$(G_{ij} + G_{ji})^T P_k (G_{ij} + G_{ji}) - 4P_k + 4Q_{ij} + \sum_{l=1}^n \tau_{ijkl} (P_k - P_l) < 0 \quad (3.144)$$

$$\forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1n} & \cdots & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.145)$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, alors le multimodèle (3.114) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : la preuve est similaire à celle du théorème 3.12 en considérant les conditions (2.89)-(2.91). ■

Dans le cas de la colinéarité positive des matrices d'entrée et de la loi de commande CDF, le multimodèle (2.1) s'explique

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) G_{ii} x(k) \quad (3.146)$$

avec $G_{ii} = A_i - B_i K_i$. Nous obtenons par application directe du théorème 3.7, en substituant à A_i la matrice G_{ii} , le résultat suivant :

Théorème 3.17 : supposons qu'il existe des matrices symétriques $P_i > 0$, des matrices K_i et des scalaires $\tau_{ikl} \geq 0$ tels que

$$G_{ii}^T P_k G_{ii} - P_k + \sum_{l=1}^n \tau_{ikl} (P_k - P_l) < 0 \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.147)$$

avec $G_{ii} = A_i - B_i K_i$, alors le multimodèle (3.146) est globalement asymptotiquement stable.

Les conditions des théorèmes de ce paragraphe sont exprimées sous formes de \mathcal{BMI} en P_i , K_i et τ_{ijkl} . Ces dernières ne sont pas linéarisables par les méthodes classiques. La méthode de linéarisation décrite au paragraphe 3.4.1.1 peut être utilisée après transformation par le complément de Schur.

3.5 Synthèse de multiobservateurs

Dans cette section, la synthèse de multiobservateurs de la forme (2.104) est traitée. L'étude est abordée uniquement en utilisant les fonctions quadratiques par morceaux. Le cas polyquadratique est directement transposable pour le domaine discret à partir du théorème 3.9.

3.5.1 Cas des multimodèles continus

La dynamique de l'erreur d'estimation dans le cas de variables de décision mesurables est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \Theta_{ij} \tilde{x}(t) \quad (3.148)$$

avec

$$\Theta_{ij} = A_i - L_i C_j, (i, j) \in I_n^2 \quad (3.149)$$

La synthèse du multiobservateur consiste en la détermination des gains locaux $L_i, i \in I_n$ afin d'assurer la convergence vers zéro de la dynamique de l'erreur d'estimation (3.148). Pour la synthèse du multiobservateur (2.104), il suffit de substituer, dans les théorèmes 3.12 et 3.13, les termes $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ par $\Theta_{ij} = A_i - L_i C_j$. Les conditions obtenues sont des \mathcal{BMT} que nous pouvons linéariser en utilisant la procédure décrite au paragraphe 3.4.1.1. Par la suite, nous allons formuler des conditions suffisantes d'existences de multiobservateurs sous forme \mathcal{LMT} avec contraintes sur le rang (voir paragraphe 1.3.4.2). Ces conditions sont énoncées au théorème 3.18 puis pour moins de conservatisme au théorème 3.19.

Théorème 3.18 [Cha01c] : *supposons qu'il existe des matrices symétriques de $\mathbb{R}^{p,p}$ $Q \geq 0$ et $P_i > 0$, des matrices R_{ki} et des scalaires $\tau_{ijkl} \geq 0$ tels que*

$$A_i^T P_k + P_k A_i - R_{ki} C_i - C_i^T R_{ki}^T + (r-1)Q + \sum_{l=1}^n \tau_{iikl} (P_k - P_l) < 0, \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.150)$$

$$(A_i + A_j)^T P_k + P_k (A_i + A_j) - R_{ki} C_j - R_{kj} C_i - C_j^T R_{ki}^T - C_i^T R_{kj}^T - 2Q + \sum_{l=1}^n \tau_{ijkl} (P_k - P_l) < 0, \quad \forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j \quad (3.151)$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P & R_i \end{pmatrix} = \text{rang}(P) = p, \quad i \in I_n \quad (3.152)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}^T, \quad R_i = \begin{pmatrix} R_{1i} & R_{2i} & \cdots & R_{ni} \end{pmatrix}^T \quad (3.153)$$

alors il existe un multiobservateur de la forme (2.104) globalement asymptotiquement convergent. Le gain de l'observateur est $L_i = P^- R_i$. La matrice P^- représente l'inverse généralisée de Moore-Penrose de P .

Preuve : ces conditions sont obtenues directement à partir du théorème 3.12 en substituant $\Theta_{ij} = A_i - L_i C_j$ à $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ avec le changement de variables $R_{ki} = P_k L_i$. La contrainte de rang (3.152) s'impose afin de garantir que le changement de variables $R_{ki} = P_k L_i \forall (i, k) \in I_n^2$ conduit au moins à une solution. ■

Théorème 3.19 [Cha01c] : supposons qu'il existe des matrices symétriques Q_{ij} , $P_i > 0$, des matrices R_{ki} et des scalaires $\tau_{ijkl} \geq 0$ tels que

$$A_i^T P_k + P_k A_i - R_{ki} C_i - C_i^T R_{ki}^T + Q_{ii} + \sum_{l=1}^n \tau_{iikl} (P_k - P_l) < 0, \quad (i, k) \in I_n^2 \quad (3.154)$$

$$(A_i + A_j)^T P_k + P_k (A_i + A_j) - R_{ki} C_j - R_{kj} C_i - C_j^T R_{ki}^T - C_i^T R_{kj}^T + 2Q_{ij} + \sum_{l=1}^n \tau_{ijkl} (P_k - P_l) < 0, \quad \forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j \quad (3.155)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1n} & \cdots & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.156)$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P & R_i \end{pmatrix} = \text{rang}(P) = p, \quad i \in I_n \quad (3.157)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}^T, \quad R_i = \begin{pmatrix} R_{1i} & R_{2i} & \cdots & R_{ni} \end{pmatrix}^T \quad (3.158)$$

alors il existe un multiobservateur de la forme (2.104) globalement asymptotiquement convergent. Le gain de l'observateur est $L_i = P^- R_i$.

Preuve : ces conditions sont obtenues directement à partir du théorème 3.13 en substituant $\Theta_{ij} = A_i - L_i C_j$ à $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ avec le changement de variables $R_{ki} = P_k L_i$. La contrainte sur le rang (3.157) assure l'existence d'un gain d'observation L_i . ■

Dans le cas d'une matrice de sortie commune $C_i = C, i \in I_n$, la dynamique de l'erreur d'estimation dans le cas de variables de décision mesurables est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \Theta_{ii} \tilde{x}(t) \quad (3.159)$$

avec Θ_{ii} définie en (3.149). Dans ce cas, la synthèse de multiobservateurs est réduite aux conditions suivantes :

Théorème 3.20 [Cha01c] : supposons qu'il existe des matrices symétriques $P_i > 0$, des matrices R_{ki} et des scalaires $\tau_{ikl} \geq 0$ tels que

$$A_i^T P_k + P_k A_i - R_{ki} C_i - C_i^T R_{ki}^T + \sum_{l=1}^n \tau_{ikl} (P_k - P_l) < 0, \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.160)$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P & R_i \end{pmatrix} = p \quad (3.161)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}^T, \quad R_i = \begin{pmatrix} R_{1i} & R_{2i} & \cdots & R_{ni} \end{pmatrix}^T \quad (3.162)$$

alors il existe un multiobservateur de la forme (2.104) globalement asymptotiquement convergent. Le gain de l'observateur est $L_i = P^{-1} R_i$.

Preuve : ces conditions sont obtenues directement à partir du théorème en substituant $\Theta_{ii} = A_i - L_i C_i$ à $G_{ii} = A_i - B_i K_i$ avec le changement de variables $R_{ki} = P_k L_i$. ■

Afin de construire le multiobservateur, nous devons résoudre les inégalités matricielles (3.154)-(3.156) avec la contrainte de rang- p . Résoudre ces contraintes \mathcal{LMI} (après avoir fixé les scalaires τ_{ijkl}) avec une contrainte de rang- p est un problème non convexe difficile. Des méthodes heuristiques peuvent être utilisées pour résoudre cette classe de problème (voir paragraphe 1.3.4.2).

Remarquons qu'il suffit de prendre $P_i = P_0, i \in I_n$ pour retrouver les résultats quadratiques. En effet, les conditions des théorèmes 3.18, 3.19 et 3.20 deviennent des \mathcal{LMI} en P_0 et R_{0i} , puisque $P_k - P_l = 0$ et la condition de rang devient alors triviale (le gain de l'observateur est obtenu directement $L_i = P_0^{-1} R_{0i}$). Ces résultats incluent donc ceux de la méthode quadratique dans le sens où ils sont moins restrictifs.

3.5.2 Extension aux multimodèles discrets

La dynamique de l'erreur d'estimation dans le cas de variables de décision mesurables est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(k+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) \Theta_{ij} \tilde{x}(k) \quad (3.163)$$

avec Θ_{ij} défini en (3.149). Les résultats que nous avons obtenus dans le cas continu sont étendus au cas discret. En utilisant le complément de schur, une formulation \mathcal{LMI} sous contrainte de rang est proposée par le théorème 3.21.

Théorème 3.21 [Cha03] : supposons qu'il existe des matrices symétriques de $\mathbb{R}^{p \times p}$ $Q \geq 0$ et $P_i > 0$, des matrices R_{ki} et des scalaires $\tau_{ijkl} \geq 0$ tels que

$$\begin{pmatrix} P_k - (r-1)Q - \sum_{l=1}^n \tau_{ikl}(P_k - P_l) & * \\ P_k A_i - R_{ki} C_i & P_k \end{pmatrix} > 0, \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.164)$$

$$\begin{pmatrix} 4P_k + 4Q - \sum_{l=1}^n \tau_{ijkl}(P_k - P_l) & * \\ P_k(A_i + A_j) - R_{ki}C_j - R_{kj}C_i & P_k \end{pmatrix} > 0, \quad \forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j \quad (3.165)$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P & R_i \end{pmatrix} = p, \quad i \in I_n \quad (3.166)$$

avec

$$P = (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n)^T, \quad R_i = (R_{1i} \ R_{2i} \ \dots \ R_{ni})^T \quad (3.167)$$

alors l'erreur d'estimation (3.163) est globalement asymptotiquement convergente vers zéro. Le gain de l'observateur est $L_i = P^{-1} R_i$.

Preuve : ces conditions sont obtenues directement à partir du théorème 3.15 après avoir appliqué le complément de Schur et substitué $\Theta_{ij} = A_i - L_i C_j$ à $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ avec le changement de variable $R_{ki} = P_k L_i$. La contrainte de rang (3.166) s'impose afin de garantir que le changement de variables $R_{ki} = P_k L_i \ \forall (i, k) \in I_n^2$ conduit au moins à une solution. ■

Des conditions similaires peuvent être obtenues directement à partir du théorème 3.16 en substituant $\Theta_{ij} = A_i - L_i C_j$ à $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ avec le changement de variable $R_{ki} = P_k L_i$.

Dans le cas d'une matrice de sortie commune $C_i = C, i \in I_n$, la dynamique de l'erreur d'estimation dans le cas de variables de décision mesurables est donnée par l'équation suivante :

$$\tilde{x}(k+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) \Theta_{ii} \tilde{x}(k) \quad (3.168)$$

avec Θ_{ii} défini en (3.149). La synthèse du multiobservateur est alors réduite aux conditions suivantes :

Théorème 3.22 [Cha03] : supposons qu'il existe des matrices symétriques $P_i > 0$, des matrices R_{ki} et des scalaires $\tau_{ijkl} \geq 0$ tels que

$$\begin{pmatrix} P_k - \sum_{l=1}^n \tau_{ikl}(P_k - P_l) & * \\ P_k A_i - R_{ki} C_i & P_k \end{pmatrix} > 0, \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (3.169)$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P & R_i \end{pmatrix} = p \quad (3.170)$$

avec

$$P = (P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n)^T, \quad R_i = (R_{1i} \quad R_{2i} \quad \cdots \quad R_{ni})^T \quad (3.171)$$

alors l'erreur d'estimation (3.163) est globalement asymptotiquement convergente vers zéro. Le gain de l'observateur est $L_i = P^- R_i$.

Preuve : ces conditions sont obtenues directement à partir du théorème 3.17 en substituant $\Theta_{ii} = A_i - L_i C_i$ à $G_{ii} = A_i - B_i K_i$ avec le changement de variable $R_{ki} = P_k L_i$.

■

Ces résultats incluent ceux de la méthode quadratique. En prenant $P_i = P_0, i \in I_n$, il s'ensuit que $P_k - P_l = 0$ et la condition de rang devient alors triviale. Dans ce cas, les conditions des théorèmes 3.21 et 3.22 sont des \mathcal{LMI} en P_0 et R_{0i} et le gain de l'observateur est obtenu directement par $L_i = P_0^{-1} R_{0i}$.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, des conditions suffisantes de stabilité, de synthèse de lois de commande et de multiobservateurs ont été proposées. L'étude a été menée en considérant deux types de fonctions non quadratiques. Concernant les fonctions polyquadratiques, il est important de remarquer la grande difficulté à trouver des résultats satisfaisants dans le domaine continu. Outre les problèmes numériques, des efforts supplémentaires restent nécessaires pour améliorer les résultats de synthèse. Dans le cas des fonctions quadratiques par morceaux, la dualité domaine continu-domaine discret se fait naturellement. L'étude de stabilité a abouti à des résultats intéressants (théorème 3.4 et théorème 3.7). Pour la synthèse de lois de commande et de multiobservateurs, de nombreuses conditions suffisantes ont été proposées. Ces résultats conduisent cependant à des contraintes non convexes. Une formulation \mathcal{LMI} sous contraintes de rang a été proposée pour la synthèse de multiobservateurs.

Les conditions proposées dans ce cadre, concernant la stabilisation et l'estimation d'état, garantissent uniquement la stabilité asymptotique. Le problème de placement de pôles, la synthèse d'une loi de commande stabilisante basée sur un observateur et par suite la propriété de séparation ne sont pas abordés. Ces points peuvent constituer une perspective intéressante de ce travail.

Chapitre 4

Stabilisation par retour de sortie

4.1 Introduction

La commande par retour d'état suppose la disponibilité complète des variables d'état du système, ce qui n'est pas toujours possible. Nous sommes donc amenés à considérer des problèmes où la commande dépend uniquement de la sortie mesurée du système $y(\cdot)$. Dans ce sens, des régulateurs basés sur le retour de sortie sont proposés. Par exemple dans le cas continu, Tanaka et al [Li 00] se sont intéressés au cas dynamique non linéaire. Dans ce cas, une loi de commande non linéaire, appelé DPDC (Dynamic PDC), est proposée. Dans [Han00], utilisant les techniques des systèmes incertains et des fonctions quadratiques par morceaux, un régulateur dynamique linéaire est considéré. La méthode est basée sur le découpage de l'espace d'état en sous-espace défini par chacune des fonctions d'activation. Le multimodèle est ainsi transformé en différents modèles locaux linéaires présentant des incertitudes bornées.

Ce chapitre traite le problème de la stabilisation par retour de sortie, il est composé de deux parties. La première partie traite la stabilisation quadratique et la deuxième partie la stabilisation non quadratique. Dans la section 4.2, nous présentons tout d'abord la synthèse de la loi de commande OPDC (2.47) en utilisant des fonctions de Lyapunov quadratiques. Deux approches sont considérées ; la première s'appuie sur une transformation en \mathcal{LMI} du problème \mathcal{BMI} de départ et la deuxième utilise une formulation en un problème de "complémentarité sur le cône"¹. Dans la section 4.3, nous proposons de synthétiser cette loi de commande (OPDC) en exploitant les résultats de la stabilisation issus des fonctions polyquadratiques et des fonctions quadratiques par morceaux.

¹Du mot anglosaxon : cone complementarity problem.

4.2 Stabilisation quadratique par retour de sortie

Cette section est dédiée à la synthèse de la loi de commande OPDC par la méthode quadratique. Les résultats qui y sont exposés sont issus de [Cha02h][Cha02a][Cha02i]. La stabilité pour la commande OPDC et le placement de pôles pour la commande OPDC modifiée (2.48) sont également traités.

4.2.1 Loi de commande OPDC et formulation \mathcal{LMI}

Rappelons que dans le cas d'un système LTI :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Le système LTI (4.1) est stabilisable par retour de sortie statique $u(t) = Ky(t)$ si et seulement s'il existe des matrices $P > 0$ et $X > 0$ telles que :

$$B^{\perp T} (XA^T + AX) B^{\perp} < 0 \quad (4.2)$$

$$C^{\perp T} (A^T P + PA) C^{\perp} < 0 \quad (4.3)$$

$$PX = \mathcal{I} \quad (4.4)$$

avec $B^T B^{\perp} = 0$ et $CC^{\perp} = 0$.

Dans [Gar01], une méthode algébrique est proposée pour synthétiser un retour de sortie statique pour un système LTI discret. Sous certaines conditions, le gain de retour est calculé à partir des matrices (A, B, C) du système.

Se basant sur les travaux de [Ger96] sur la stabilisation des systèmes LTI par retour de sortie statique, les auteurs de [Ben97] parlent de triplet (A, B, C) simultanément stabilisable et détectable (SSD). Pour la suite, nous supposons que le multimodèle est localement SSD.

Définition 4.1 : *si les triplets (A_i, B_i, C_i) $i \in I_n$ sont SSD, alors le multimodèle est dit localement SSD.*

Motivés par les travaux de Feng et al [Han00], de [Daa01b] sur les systèmes à commutations et les résultats issus de la loi de commande PDC [Tan98a], nous proposons d'étudier la stabilisation des multimodèles par la loi de commande OPDC :

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) F_i y(t) \quad (4.5)$$

Le multimodèle continu (2.1) avec le régulateur (4.5) dans le cas où $C_i = C$, $i \in I_n$ s'explique :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \bar{A}_{ij} x(t) \quad (4.6)$$

avec

$$\bar{A}_{ij} = A_i + B_i F_j C \quad (4.7)$$

La synthèse de la loi de commande OPDC (4.5) peut être obtenue directement en substituant à la matrice $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ la matrice \bar{A}_{ij} dans les conditions de stabilisation (2.54)-(2.55) et (2.56)-(2.58), obtenues via la loi de commande PDC. Ainsi, à partir de ces conditions, on obtient respectivement

$$P > 0, Q > 0 \quad (4.8)$$

$$\mathcal{L}_c(\bar{A}_{ii}, P) + (r-1)Q < 0, \forall i \in I_n \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_c(\bar{A}_{ij}, P) - Q \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (4.10)$$

et

$$\mathcal{L}_c(\bar{A}_{ii}, P) + Q_{ii} < 0, \forall i \in I_n \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}_c(\bar{A}_{ij}, P) + Q_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (4.12)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1n} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

avec

$$\mathcal{L}_c(\bar{A}_{ij}, P) = \left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right) \quad (4.14)$$

Malheureusement, ces inégalités matricielles non convexes en P et $F_i \forall i \in I_n$, sont impossibles à linéariser par les techniques de changement de variable classiques, ce qui constitue la difficulté majeure de la stabilisation par retour de sortie. Par la suite, nous proposons une formulation \mathcal{LMI} pour la synthèse d'un régulateur OPDC et également pour le placement de pôles.

Hypothèse 4.1 : la matrice C est de plein rang ligne

Considérant l'hypothèse 4.1 vérifiée, nous proposons une formulation convexe du problème \mathcal{BMI} traduit par les conditions (4.9)–(4.10) puis (4.11)–(4.13). Bien que la méthode donne naissance à des contraintes algébriques supplémentaires, elle est facile à mettre en œuvre. La formulation \mathcal{LMI} est donnée par le théorème 4.1 et, pour moins de pessimisme, par le théorème 4.2.

Théorème 4.1 [Cha02a] : supposons qu'il existe des matrices symétriques $S \geq 0$ et $X > 0$, ainsi que des matrices N_i et M qui vérifient :

$$A_i X + X A_i^T + B_i N_i C + C^T N_i^T B_i^T + (r-1)S < 0, \forall i \in I_n \quad (4.15)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T + (B_i N_j + B_j N_i)C + C^T(B_i N_j + B_j N_i)^T - 2S \leq 0 \quad (4.16)$$

$$\forall (i, j) \in I_n^2, i < j$$

avec

$$CX = MC \quad (4.17)$$

et $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$ alors le multimodèle (4.6) est globalement asymptotiquement stable. Le retour de sortie non linéaire (4.5) est défini par

$$F_i = N_i M^{-1} \quad (4.18)$$

Preuve : compte tenu de la définition (4.14), la condition (4.9) est équivalente à

$$X(A_i + B_i F_i C)^T + (A_i + B_i F_i C)X + (r-1)S < 0 \quad (4.19)$$

avec $P^{-1} = X > 0$ et $S = P^{-1}QP^{-1}$. Tenant compte de (4.17) et du changement de variable suivant

$$F_i M = N_i \quad (4.20)$$

on obtient les \mathcal{LMI} (4.15). Les \mathcal{LMI} (4.16) sont obtenues à partir de (4.10) à l'aide des mêmes changements de variable. Comme C est supposée de plein rang ligne, des équations (4.17) et (4.20), on déduit que $M = CX C^T (CC^T)^{-1}$ et $F_i = N_i M^{-1}$. ■

Théorème 4.2 [Cha02h] : supposons qu'il existe des matrices symétriques $X > 0$ et S_{ij} , des matrices N_i et M qui vérifient

$$A_i X + X A_i^T + B_i N_i C + C^T N_i^T B_i^T + S_{ii} < 0, \forall i \in I_n \quad (4.21)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T + (B_i N_j + B_j N_i)C + C^T(B_i N_j + B_j N_i)^T + 2S_{ij} \leq 0 \quad (4.22)$$

$$\forall (i, j) \in I_n^2, i < j$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1n} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.23)$$

avec

$$CX = MC \quad (4.24)$$

et $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$. Alors le multimodèle (4.6) est globalement asymptotiquement stable. Le retour de sortie non linéaire (4.5) est défini par

$$F_i = N_i M^{-1}, i \in I_n \quad (4.25)$$

Preuve : la preuve est similaire à celle du théorème 4.1. ■

Les conditions de stabilité du théorème 4.2 n'exigent pas une matrice commune S comme c'est le cas pour le théorème 4.1, d'où la réduction du pessimisme.

Remarquons que dans le cas d'un retour de sortie linéaire $F_i = F, \forall i \in I_n$, les conditions de stabilité des théorèmes 4.1 et 4.2 se réduisent à l'existence de matrices X , N et M telles que :

$$X > 0, A_i X + X A_i^T + B_i N C + C^T N^T B_i^T < 0 \quad (4.26)$$

avec $CX = MC$. Le gain de retour est $F = NM^{-1}$.

4.2.1.1 α -stabilité

Les théorèmes 4.1 et 4.2 garantissent une loi de commande PDC asymptotiquement stabilisante. Afin de garantir un certain taux de décroissance, on peut s'inspirer de la proposition 2.4. Nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 4.1 [Cha02i] : *supposons qu'il existe des matrices symétriques $S \geq 0$ et $X > 0$, des matrices N_i et M et $\alpha \geq 0$ qui vérifient :*

$$A_i X + X A_i^T + B_i N_i C + C^T N_i^T B_i^T + (r - 1) S + 2r\alpha X < 0, \forall i \in I_n \quad (4.27)$$

$$(A_i + A_j) X + X (A_i + A_j)^T + (B_i N_j + B_j N_i) C + C^T (B_i N_j + B_j N_i)^T - 2S \leq 0 \quad (4.28)$$

$$\forall (i, j) \in I_n^2, i < j$$

avec

$$CX = MC \quad (4.29)$$

et $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$ et r le nombre maximal de modèles locaux actifs simultanément, alors le multimodèle (4.6) est globalement exponentiellement stable avec une vitesse de convergence au moins égale à α . Le retour de sortie non linéaire (4.5) est défini par

$$F_i = N_i M^{-1} \quad (4.30)$$

Preuve : la preuve est obtenue directement en considérant le théorème 4.1 et en s'inspirant de la proposition 2.4. ■

4.2.1.2 Améliorations

Dans le cas particulier de la colinéarité positive des matrices d'entrée, la loi de commande OPDC modifiée [Cha02h] :

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \alpha_i F_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \alpha_i} y(t) \quad (4.31)$$

conduit au multimodèle suivant

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) \bar{A}_{ii} x(t) \quad (4.32)$$

avec \bar{A}_{ii} définie en (4.7). Remarquons que le multimodèle (4.32) s'écrit uniquement en fonction de ses termes dominants (i.e. $i = j$). Ainsi le multimodèle (4.32) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que

$$\mathcal{L}_c(\bar{A}_{ii}, P) < 0, \forall i \in I_n \quad (4.33)$$

où $\mathcal{L}_c(\cdot, \cdot)$ est défini en (4.14). Le théorème suivant propose une formulation \mathcal{LMI} des conditions non convexes (4.33).

Théorème 4.3 [Cha02h] : *supposons qu'il existe une matrice symétrique $X > 0$ et des matrices N et M telles que*

$$A_i X + X A_i^T + B_i N_i C + C^T N_i^T B_i^T < 0, \forall i \in I_n \quad (4.34)$$

avec

$$CX = MC \quad (4.35)$$

Alors le multimodèle (4.32) est globalement asymptotiquement stable. Le retour de sortie non linéaire (4.31) est défini par

$$F_i = N_i M^{-1} \quad (4.36)$$

Preuve : déduite directement à partir du théorème 4.1 en considérant les contraintes (4.33). ■

Il est intéressant de noter que, dans ce cas particulier, la loi de commande OPDC (4.5) nécessite la résolution de $(n+1)n/2$ \mathcal{LMI} alors que la loi de commande OPDC modifiée (4.31) limite ce nombre à n , ce qui permet de réduire considérablement le conservatisme de la commande par retour de sortie.

La seconde amélioration proposée concerne les performances de la loi de commande OPDC modifiée en termes de placement de pôles et la formulation \mathcal{LMI} du problème. Il y a peu de littérature consacrée au placement de pôles par retour d'état ou par retour de sortie. Dans [Hon00], les auteurs considèrent qu'il suffit de placer les pôles des termes dominants (i. e. $A_i - B_i K_i$ dans le cas de la stabilisation par retour d'état) dans une région D du plan complexe pour garantir les mêmes performances du multimodèle en boucle fermée. Malheureusement, ceci ne peut être vérifié théoriquement ; les auteurs omettent l'influence des termes croisés (i. e. $A_i - B_i K_j$) sur les performances du système en boucle fermée. Ainsi, il est très important de noter que les contraintes de performances supplémentaires relatives aux termes dominants ne garantissent pas les performances du multimodèle en boucle fermée. Pour résoudre ce problème et garantir ces performances pour le système bouclé, on peut imposer les mêmes contraintes de performances aux termes croisés [Tan98a]. L'inconvénient d'une telle méthode est la perte des relaxations apportées aux critères de synthèse.

Par la suite, nous nous intéressons au placement de pôles par retour de sortie du multimodèle (4.32) et plus particulièrement à sa formulation \mathcal{LMI} . L'amélioration des performances de la loi de commande OPDC modifiée s'appuie sur les résultats énoncés par [Chi96b] qui sont rappelés en annexe A. Pour que les pôles du système régulé (4.32) soient situés dans une région \mathcal{LMI} particulière définie par deux matrices $\alpha = \alpha^T$ et β préalablement déterminées et caractérisant les performances désirées, il suffit que

$$M_D(\bar{A}_{ii}, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (\bar{A}_{ii} X) + \beta^T \otimes (\bar{A}_{ii} X)^T < 0 \quad (4.37)$$

où \bar{A}_{ii} est définie en (4.7). Tenant compte de (4.17) et (4.18), les inégalités matricielles non linéaires (4.37) deviennent des \mathcal{LMI} en X et N_i :

$$M_D(\bar{A}_{ii}, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (A_i X + B_i N_i C) + \beta^T \otimes (A_i X + B_i N_i C)^T < 0 \quad (4.38)$$

Ainsi, s'il existe une matrice symétrique $X > 0$ et des matrices N_i et M qui vérifient :

$$\alpha \otimes X + \beta \otimes (A_i X + B_i N_i C) + \beta^T \otimes (A_i X + B_i N_i C)^T < 0 \quad (4.39)$$

avec

$$CX = MC \quad (4.40)$$

alors la loi de commande OPDC (4.5) avec

$$F_i = N_i M^{-1} \quad (4.41)$$

assure la stabilité globale asymptotique du multimodèle (4.32) et satisfait les performances désirées.

À titre d'exemple, considérons la région D formée par le disque de centre $(-q, 0)$ et de rayon $r > 0$. La région \mathcal{LMI} correspondante est (voir annexe A) :

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -r & z + q \\ \bar{z} + q & -r \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Une telle région permet de fixer le taux de décroissance : $-q + r$ et le coefficient d'amortissement : $\xi_{\min} = \sqrt{1 - r^2/q^2}$ ($r < q$) du système bouclé en question. La région \mathcal{LMI} correspondante à la région définie par (4.42) s'explique

$$\begin{pmatrix} -rX & qX + A_iX + B_iN_iC \\ * & -rX \end{pmatrix} < 0, i \in I_n \quad (4.43)$$

Ce placement de pôles est également valable dans le cas d'un retour linéaire de sortie et dans le cadre de la loi de commande CDF (pour la stabilisation par retour d'état).

4.2.2 Extension au cas discret

Dans cette section, la synthèse de lois de commande OPDC pour des multimodèles discrets est abordée; tout d'abord en étendant directement les résultats obtenus dans le domaine continu au domaine discret, puis en supposant la matrice de sortie sous la forme $C = (\mathcal{I} \ 0)$. Dans ce cas particulier, on intègre la contrainte algébrique (4.24) directement dans les conditions de synthèse.

Avec la loi de commande OPDC

$$u(k) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) F_i y(k) \quad (4.44)$$

le multimodèle discret (2.37) où $C = C_i, i \in I_n$ s'explique :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \bar{A}_{ij} x(k) \quad (4.45)$$

avec

$$\bar{A}_{ij} = A_i + B_i F_j C \quad (4.46)$$

La synthèse de la loi de commande (4.44) peut être obtenue directement en substituant dans les conditions (2.86)-(2.87) et (2.89)-(2.91), l'expression de $\mathcal{L}_d(G_{ij}, P)$ par $\mathcal{L}_d(\bar{A}_{ij}, P)$. On obtient respectivement

$$\mathcal{L}_d(\bar{A}_{ii}, P) + (r-1)Q < 0, \forall i \in I_n \quad (4.47)$$

$$\mathcal{L}_d(\bar{A}_{ij}, P) - Q \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (4.48)$$

et

$$\mathcal{L}_d(\bar{A}_{ii}, P) + Q_{ii} < 0, \forall i \in I_n \quad (4.49)$$

$$\mathcal{L}_d(\bar{A}_{ij}, P) + Q_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (4.50)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1n} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.51)$$

L'expression $\mathcal{L}_d(.,.)$ est définie en (2.88). Les conditions obtenues sont des \mathcal{BMT} en P et F_j . Considérant l'hypothèse 4.1 vérifiée, nous allons étendre les résultats obtenus dans le domaine continu au domaine discret. Les conditions suffisantes obtenues avec le théorème suivant seront relaxées par la suite.

Théorème 4.4 : *supposons qu'il existe des matrices symétriques X, S et des matrices N_i, M vérifiant :*

$$X > 0, S \geq 0 \quad (4.52)$$

$$\begin{pmatrix} X - (r-1)S & * \\ A_i X + B_i N_i C & X \end{pmatrix} > 0, \forall i \in I_n \quad (4.53)$$

$$\begin{pmatrix} X + S & * \\ \frac{1}{2}(A_i X + A_j X + B_j N_i C + B_i N_j C) & X \end{pmatrix} \geq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (4.54)$$

avec

$$CX = MC \quad (4.55)$$

et $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$. Alors le multimodèle (4.45) est globalement asymptotiquement stable. Le retour de sortie non linéaire (4.44) est défini par

$$F_i = N_i M^{-1} \quad (4.56)$$

Preuve : tenant compte de la définition de $\mathcal{L}_d(.,.)$, le complément de Schur est appliqué aux conditions (4.47)-(4.48) préalablement pré- et post multipliées par $X = P^{-1}$. La condition (4.55) et le changement de variable $F_i M = N_i$ conduisent aux contraintes (4.52)-(4.54). ■

Des conditions suffisantes similaires à celles obtenues au théorème 4.4 mais moins pessimistes peuvent être obtenues en considérant les conditions (4.49)-(4.51). La réduction du conservatisme est introduite par les matrices S_{ij} au lieu d'une matrice commune S .

Théorème 4.5 : supposons qu'il existe des matrices symétriques X et S_{ij} et des matrices N_i, M vérifiant :

$$\begin{pmatrix} X - S_{ii} & * \\ A_i X + B_i N_i C & X \end{pmatrix} > 0, \forall i \in I_n \quad (4.57)$$

$$\begin{pmatrix} X - S_{ij} & * \\ \frac{1}{2}(A_i X + A_j X + B_j N_i C + B_i N_j C) & X \end{pmatrix} \geq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (4.58)$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1n} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.59)$$

avec

$$CX = MC \quad (4.60)$$

et $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$. Alors le multimodèle (4.45) est globalement asymptotiquement stable. Le retour de sortie non linéaire (4.44) est défini par

$$F_i = N_i M^{-1} \quad (4.61)$$

Preuve : la preuve est identique à celle du théorème 4.4 en considérant les conditions (4.49)-(4.51). ■

Avec la loi de commande OPDC modifiée

$$u(k) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) \alpha_i F_i y(k)}{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) \alpha_i} \quad (4.62)$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}^{+*}$, le multimodèle (4.45), dans le cas de la colinéarité positive des matrices d'entrée, s'écrit :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i + B_i F_i C) x(k) \quad (4.63)$$

Il suffit qu'il existe des matrices symétriques $X > 0$, N_i et M vérifiant :

$$\begin{pmatrix} X & * \\ A_i X + B_i N_i C & X \end{pmatrix} > 0, \forall i \in I_n \quad (4.64)$$

avec

$$CX = MC \quad (4.65)$$

pour que le multimodèle (4.63) soit globalement asymptotiquement stable. Le retour de sortie non linéaire (4.62) est défini par $F_i = N_i M^{-1}$, ce qui permet de réduire le nombre de \mathcal{LMI} à n au lieu de $\frac{n(n+1)}{2}$ \mathcal{LMI} du théorème 4.4.

Cas particulier : Si l'on suppose que la matrice de sortie s'écrit sous la forme $C = (\mathcal{I} \ 0)$ avec \mathcal{I} est la matrice identité et 0 est la matrice nulle de dimensions appropriées, la synthèse d'une loi de commande OPDC se ramène à celle de la loi de commande PDC avec une structure particulière du retour d'état. Dans ce cas, la loi de commande OPDC (4.5) avec $y(k) = Cx(k)$ devient :

$$u(k) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) \bar{F}_i x(k) \quad (4.66)$$

avec

$$\bar{F}_i = (F_i \ 0) \quad (4.67)$$

$u(k) \in \mathbb{R}^m$, $x(k) \in \mathbb{R}^p$, $y(k) \in \mathbb{R}^l$ et $F_i \in \mathbb{R}^{m \cdot l}$. Le multimodèle en boucle fermée devient

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_i + B_i \bar{F}_j) x(k) \quad (4.68)$$

L'usage du changement de variable classique adopté dans le cas de la stabilisation quadratique par retour d'état conduit à une contrainte non convexe compte tenu de la structure imposée au retour d'état \bar{F}_i . Cette difficulté est résolue avec le théorème suivant qui permet d'assurer la stabilité asymptotique du multimodèle (4.68) et ainsi synthétiser le gain de retour \bar{F}_i , tenant compte de sa structure (4.67).

Théorème 4.6 : *supposons qu'il existe des matrices symétriques $S_{ij} \in \mathbb{R}^{p \cdot p}$, $X \in \mathbb{R}^{p \cdot p}$ et des matrices $N_i \in \mathbb{R}^{m \cdot p}$, $i \in I_n$ ayant les structures suivantes*

$$N_i = (N_{i1} \ 0), X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

où $X_{11} \in \mathbb{R}^{l \cdot l}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{(p-l) \cdot (p-l)}$ et vérifiant les \mathcal{LMI}

$$\begin{pmatrix} X - S_{ii} & * \\ A_i X + B_i N_i & X \end{pmatrix} > 0, \forall i \in I_n \quad (4.70)$$

$$\begin{pmatrix} X - S_{ij} & * \\ \frac{1}{2} (A_i X + A_j X + B_j N_i + B_i N_j) & X \end{pmatrix} \geq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (4.71)$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1n} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.72)$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$. Alors le multimodèle (4.68) est globalement asymptotiquement stable. La loi de commande (4.66) est définie par

$$F_i = N_{i1} X_{11}^{-1} \quad (4.73)$$

Preuve : Les conditions (2.93)-(2.95) dans le cas de la loi de commande (4.66) avec le changement de variable $\bar{F}_i X = N_i$ aboutissent aux conditions \mathcal{LMI} (4.70)-(4.72). Les structures imposées aux matrices X et N_i garantissent l'existence de la solution (4.73). L'existence de X_{11}^{-1} est garantie par la contrainte $X > 0$ ■

Les conditions obtenues sont assez contraignantes. Ce conservatisme est dû, d'une part, aux structures particulières imposées aux matrices X et N_i et, d'autre part, à la dépendance du gain F_i de la matrice X_{11} et par conséquent de la matrice de Lyapunov ($V(x) = x(t)^T X^{-1} x(t)$). Ce résultat sera relaxé dans le paragraphe 4.2 en utilisant les fonctions polyquadratiques.

Des résultats similaires à ceux du théorème 4.6 peuvent être obtenus en considérant les conditions (2.86)-(2.87). Ces résultats peuvent être également étendus au domaine continu en appliquant les mêmes changements de variable avec les structures particulières décrites en (4.69) (ces résultats ne sont pas présentés dans ce manuscrit).

4.2.3 Formulation par complémentarité sur le cône

Une autre manière d'aborder la stabilisation par retour de sortie est de transformer le problème en un problème de complémentarité sur le cône [Elg97]. Elle procède par une technique d'élimination des variables du régulateur. La reconstruction du régulateur est obtenue aisément dans un second temps en résolvant le problème \mathcal{LMI} en F_i , $i \in I_n$. S'inspirant de ces travaux, nous présentons la synthèse de la commande OPDC [Cha02a].

Il a été établi que le multimodèle (4.6) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que :

$$\mathcal{L}_c(\bar{A}_{ii}, P) < 0, \forall i \in I_n \quad (4.74)$$

$$\mathcal{L}_c(\bar{A}_{ij}, P) \leq 0, \forall (i, j) \in I_n^2, i < j \quad (4.75)$$

avec $\bar{A}_{ij} = A_i + B_i F_j C$ et $\mathcal{L}_c(.,.)$ définie en (4.14). La synthèse de la loi de commande OPDC (4.5) revient à résoudre les inégalités bilinéaires (4.74)-(4.75) en P et F_i , $i \in I_n$. Nous proposons de résoudre ces \mathcal{BMI} par transformation en un problème de complémentarité sur le cône. La procédure de résolution comporte deux étapes. La première consiste en l'élimination des variables du régulateur (F_i , $i \in I_n$) en procédant par équivalence alors que la deuxième étape sert à reconstruire ces variables F_i , $i \in I_n$.

4.2.3.1 Elimination des variables du régulateur

Compte tenu de la définition de $\mathcal{L}_c(.,.)$ (4.14), les contraintes (4.74) peuvent être réécrites :

$$A_i^T P + P A_i + P B_i F_i C + C^T F_i^T (P B_i)^T < 0 \quad (4.76)$$

L'application du lemme d'élimination 1.3 aux inégalités (4.76) permet d'éliminer les variables $F_i, i \in I_n$:

$$A_i^T P + P A_i - \sigma_i P B_i B_i^T P < 0 \quad (4.77)$$

$$A_i^T P + P A_i - \sigma_i C^T C < 0 \quad (4.78)$$

$\sigma_i, i \in I_n$ sont des scalaires réels. Pour garantir l'équivalence entre les propositions du lemme 1.3, la même procédure d'élimination est appliquée à la forme stricte de (4.75). Nous obtenons, après élimination de la variable F_i

$$(A_i + A_j + B_i F_j C)^T P + P (A_i + A_j + B_i F_j C) - \sigma_{ij} P B_j B_j^T P < 0 \quad (4.79)$$

$$(A_i + A_j + B_i F_j C)^T P + P (A_i + A_j + B_i F_j C) - \sigma_{ij} C^T C < 0 \quad (4.80)$$

Puis en éliminant F_j des inégalités (4.79)-(4.80), on obtient :

$$(A_i + A_j)^T P + P (A_i + A_j) - \sigma_{ij} P B_j B_j^T P - \tilde{\sigma}_{ij} P B_i B_i^T P < 0 \quad (4.81)$$

$$(A_i + A_j)^T P + P (A_i + A_j) - \sigma_{ij} P B_j B_j^T P - \tilde{\sigma}_{ij} C^T C < 0 \quad (4.82)$$

$$(A_i + A_j)^T P + P (A_i + A_j) - \sigma_{ij} C^T C - \bar{\sigma}_{ij} P B_i B_i^T P < 0 \quad (4.83)$$

$$(A_i + A_j)^T P + P (A_i + A_j) - \sigma_{ij} C^T C - \bar{\sigma}_{ij} C^T C < 0 \quad (4.84)$$

En regroupant (4.77), (4.78), (4.81)-(4.84), nous obtenons le système d'inégalités matricielles équivalent au problème non convexe (4.74), (4.75) avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q A_i^T + A_i Q - \sigma_i B_i B_i^T < 0 \\ A_i^T P + P A_i - \sigma_i C^T C < 0 \\ \left(\begin{array}{cc} Q (A_i + A_j)^T + (A_i + A_j) Q - \sigma_{ij} B_j B_j^T & B_i \\ * & \tilde{v}_{ij} \mathcal{I} \end{array} \right) < 0 \\ \left(\begin{array}{cc} Q (A_i + A_j)^T + (A_i + A_j) Q - \sigma_{ij} B_j B_j^T & Q C^T \\ * & \tilde{v}_{ij} \mathcal{I} \end{array} \right) < 0 \\ \left(\begin{array}{cc} (A_i + A_j)^T P + P (A_i + A_j) - \sigma_{ij} C^T C & P B_i \\ * & \bar{v}_{ij} \mathcal{I} \end{array} \right) < 0 \\ \left(\begin{array}{cc} (A_i + A_j)^T P + P (A_i + A_j) - \sigma_{ij} C^T C & C^T \\ * & \bar{v}_{ij} \mathcal{I} \end{array} \right) < 0 \end{array} \right. \quad (4.85)$$

$$PQ = \mathcal{I} \quad (4.86)$$

où \mathcal{I} est la matrice identité, $\tilde{v}_{ij} = (\tilde{\sigma}_{ij})^{-1}$ et $\bar{v}_{ij} = (\bar{\sigma}_{ij})^{-1}$. Remarquons que le système d'inéquations matricielles (4.85) est linéaire en les matrices P, Q et les scalaires $\sigma_i, \sigma_{ij}, \tilde{v}_{ij}$ et \bar{v}_{ij} alors que l'égalité (4.86) est non linéaire. Cette égalité est écrite sous sa forme équivalente à l'aide des deux contraintes suivantes :

$$Tr(PQ) = p \quad (4.87)$$

$$\begin{pmatrix} P & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & Q \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.88)$$

La contrainte $Tr(PQ)$ n'est pas convexe, pour résoudre un tel problème, un algorithme convergent est proposé en [Elg97]. Cette heuristique est basée sur l'approximation linéaire de $Tr(PQ)$ par $\frac{1}{2}Tr(P_0Q + Q_0P)$ où P_0 et Q_0 sont des solutions particulières des \mathcal{LMI} (4.85) : il s'agit de minimiser cette trace en différents points réalisables. Cet algorithme engendre une suite t_k (des valeurs de la trace : $Tr(P_0Q + Q_0P)$) décroissante et minorée par $2p$, si ce minorant est atteint, alors le minimum global est atteint (voir annexe B). La solution du problème initial s'obtient alors en résolvant le problème de complémentarité sur le cône suivant :

$$\text{minimiser } Tr(P_0Q + Q_0P) \text{ sous les contraintes : (4.85) et (4.88)} \quad (4.89)$$

4.2.3.2 Reconstruction des variables du régulateur

Il est important de noter que s'il existe des matrices P^{opt} et Q^{opt} satisfaisant (4.89), alors il existe un retour de sortie non linéaire (4.5) qui stabilise globalement asymptotiquement le multimodèle (4.6). En effet, une fois obtenues les matrices P^{opt} et Q^{opt} à partir de (4.89), on substitue la matrice P^{opt} à la matrice P dans le problème initial (4.74)-(4.75), qui devient linéaire en les gains du régulateur $F_i, i \in I_n$. Ainsi on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.7 [Cha02a] : *soient P_0 et Q_0 des matrices de $\mathbb{R}^{p \times p}$ solutions particulières des \mathcal{LMI} (4.85)-(4.88). S'il existe des matrices P^{opt} et Q^{opt} satisfaisant les \mathcal{LMI} (4.89) telles que $Tr(P_0Q^{opt} + Q_0P^{opt}) = 2p$, alors il existe un retour de sortie non linéaire de la forme (4.5) dont le gain de retour $F_i, i \in I_n$ est solution des \mathcal{LMI} (4.74)-(4.75).*

Exemple 4.1 .

Considérons le système de l'exemple 2.2 (page 52) avec $a = 1, b = 10$. La résolution du problème de complémentarité sur le cône (4.89) associé à l'algorithme [Elg97] (voir annexe B) conduit aux résultats suivants :

$$P^{opt} = \begin{pmatrix} 0.1361 & 0.0352 \\ 0.0352 & 1.5596 \end{pmatrix}, Q^{opt} = \begin{pmatrix} 7.3896 & -0.1666 \\ -0.1666 & 0.6450 \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

qui vérifient bien $P^{opt}Q^{opt} = \mathcal{I}$. Avec la valeur de P^{opt} obtenue, le problème (4.74)-(4.75) devient linéaire en F_1 et F_2 :

$$(A_1 + B_1F_1C)^T P^{opt} + P^{opt} (A_1 + B_1F_1C) < 0 \quad (4.91)$$

$$(A_2 + B_2F_2C)^T P^{opt} + P^{opt} (A_2 + B_2F_2C) < 0 \quad (4.92)$$

$$(A_1 + A_2 + B_1F_2C + B_2F_1C)^T P^{opt} + P^{opt} (A_1 + A_2 + B_1F_2C + B_2F_1C) < 0 \quad (4.93)$$

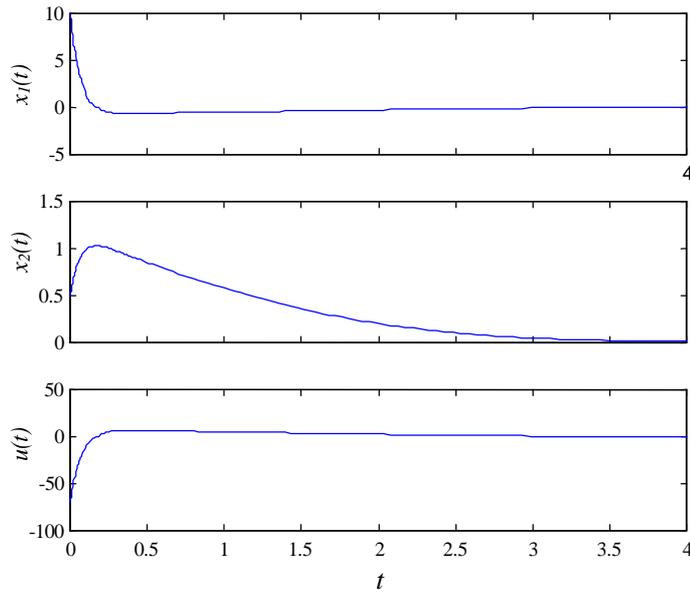


FIG. 4.1: Stabilisation via la loi de commande OPDC (4.95) .

La résolution de ces \mathcal{LMI} donne les gains de retour suivants :

$$F_1 = -7.1128, F_2 = -2.2239 \quad (4.94)$$

La simulation du système stabilisé via la loi de commande OPDC (4.5)

$$u(t) = (\mu_1(y(t)) F_1 + \mu_2(y(t)) F_2) y(t) \quad (4.95)$$

avec les expressions suivantes des fonctions d'activation

$$\mu_1(y(t)) = \frac{(1 - \tanh(y))}{2}, \mu_2(y(t)) = \frac{(1 + \tanh(y))}{2} \quad (4.96)$$

et les conditions initiales $x(0) = \begin{pmatrix} 10 & 0.5 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure (4.1).

Il est important de noter que l'utilisation du théorème 4.1 échoue à synthétiser une loi de commande OPDC stabilisante pour cet exemple.

Remarques 4.1 .

- La formulation par complémentarité sur le cône est moins conservative que celle issue des théorèmes 4.1, 4.2 car aucune restriction sur la structure de la matrice Q et aucune hypothèse sur la matrice C ne sont imposées.
- La formulation par complémentarité sur le cône semble plus difficile à mettre en oeuvre dans le cas des contraintes (4.9)-(4.10) et (4.11)-(4.13) à cause de la matrice Q .

- La formulation par complémentarité sur le cône dans le cas de différentes matrices de sorties $C_i, i \in I_n$ est possible. Pour cela il suffit de remplacer dans (4.74), \bar{A}_{ii} par $A_i + B_i F_i C_k \forall (i, k) \in I_n^2$ et dans (4.75) \bar{A}_{ij} par $A_i + B_i F_j C_k \forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j$.
- Du point de vue numérique, les conditions issues des théorèmes 4.1, 4.2 sont plus faciles à mettre en œuvre; ainsi on propose de n'utiliser la formulation par complémentarité sur le cône que lorsque la première méthode ne permet pas d'obtenir un résultat.

4.3 Stabilisation non quadratique par retour de sortie

Dans ce paragraphe nous proposons de traiter la stabilisation non quadratique par retour de sortie des multimodèles discrets, tout d'abord par les fonctions polyquadratiques et ensuite par les fonctions quadratiques par morceaux. Les résultats relatifs aux multimodèles continus pour ces dernières fonctions peuvent être obtenus directement par extension des résultats du domaine discret. Ils ne sont pas exposés dans ce manuscrit.

Rappelons que le multimodèle (2.37) avec la loi de commande OPDC (4.5) s'écrit

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) (A_i + B_i F_j C) x(k) \quad (4.97)$$

Dans ce qui suit, nous allons proposer des conditions suffisantes de stabilité du multimodèle (4.97). La première méthode s'appuie sur les fonctions polyquadratiques sous l'hypothèse 4.1, i. e. C de plein rang ligne (paragraphe 4.3.1). Deux approches sont considérées; la première fait usage du changement de variable proposé auparavant (paragraphe 4.2.1), la deuxième se ramène au retour d'état avec des structures particulières sur les gains locaux. Les résultats obtenus dans ces deux cas sont exprimés sous forme de \mathcal{LM} . La deuxième méthode ne demande aucune hypothèse sur la matrice de sortie C (paragraphe 4.3.3). Elle utilise les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux qui conduisent à des conditions suffisantes sous forme de \mathcal{BM} , ce qui constitue son principal inconvénient.

4.3.1 Cas des fonctions polyquadratiques

Considérant l'hypothèse 4.1 vérifiée, nous allons étudier la stabilisation par retour de sortie en se basant sur les fonctions polyquadratiques (1.57) et les changements de variable appliqués dans le cas quadratique. Nous pouvons énoncer le théorème suivant

Théorème 4.8 [Cha01c] : s'il existe des matrices symétriques P_i et des matrices N_i $i \in I_n$, M et G vérifiant

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G + B_i N_i C \\ * & G + G^T - P_l \end{pmatrix} > 0, \forall (i, l) \in I_n^2 \quad (4.98)$$

$$\begin{pmatrix} P_i + P_j & A_i G + B_i N_j C + A_j G + B_j N_i C \\ * & 2(G + G^T - P_l) \end{pmatrix} > 0, \forall (i, j, l) \in I_n^3, i < j \quad (4.99)$$

avec

$$CG = MC \quad (4.100)$$

alors le multimodèle discret décrit en (4.97) est globalement asymptotiquement stable. La loi de commande OPDC (4.44) est définie par

$$F_i = N_i M^{-1} \quad (4.101)$$

Preuve : rappelons que la variation de la fonction polyquadratique (1.57) le long du système (4.97) s'écrit

$$\Delta V(z(k)) = x(k)^T \left(A^T(z) \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k+1)) P_i A(z) - \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) P_i \right) x(k) \quad (4.102)$$

avec

$$A(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) (A_i + B_i F_j C) \quad (4.103)$$

Compte tenu des expressions (4.98) et (4.99), l'expression suivante est toujours vérifiée

$$\sum_{l=1}^n \mu_l(z(k+1)) \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k))^2 \Phi_{l ii} + \sum_{i < j:1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) (\Phi_{l ij} + \Phi_{l ji}) \right) > 0 \quad (4.104)$$

avec

$$\Phi_{lij} = \begin{pmatrix} P_i & A_i G + B_i N_j C \\ * & 2(G + G^T - P_l) \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) P_i & \alpha(z) G \\ * & G + G^T - \sum_{l=1}^n \mu_l(z(k+1)) P_l \end{pmatrix} > 0 \quad (4.106)$$

avec $\alpha(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) (A_i + B_i N_j C G^{-1})$. En pré- et post-multipliant respectivement par $(\mathcal{I} \quad -\alpha(z))$ et $(\mathcal{I} \quad -\alpha(z))^T$ l'expression (4.106), on obtient

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) P_i - \alpha(z) \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k+1)) P_i \alpha^T(z) > 0 \quad (4.107)$$

avec les contraintes (4.101) et (4.100), l'expression (4.107) s'écrit

$$A^T(z) \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k+1)) P_i A(z) - \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) P_i < 0 \quad (4.108)$$

ce qui est équivalent à $\Delta V(z(k)) < 0$. ■

En s'inspirant des travaux de Kim et al [Kim00] sur la stabilisation quadratique et pour moins de conservatisme, nous proposons la synthèse de la loi de commande OPDC par les conditions suffisantes suivantes.

Théorème 4.9 [Cha01c] : *s'il existe des matrices symétriques $P_i, Q_{il}, Q_{ijl}, (i, j, l) \in I_n^3, i < j$ et des matrices $N_i, \forall i \in I_n, M$ et G vérifiant*

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G + B_i N_i C \\ * & G + G^T - P_l \end{pmatrix} > Q_{il}, \forall (i, l) \in I_n^2 \quad (4.109)$$

$$\begin{pmatrix} P_i + P_j & A_i G + B_i N_j C + A_j G + B_j N_i C \\ * & 2(G + G^T - P_l) \end{pmatrix} > 2Q_{ijl}, \forall (i, j, l) \in I_n^3, i < j \quad (4.110)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{1l} & Q_{12l} & \cdots & Q_{1nl} \\ Q_{12l} & Q_{2l} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(n-1)nl} \\ Q_{1nl} & \cdots & Q_{(n-1)nl} & Q_{nl} \end{pmatrix} > 0, \forall l \in I_n \quad (4.111)$$

avec

$$CG = MC \quad (4.112)$$

alors le multimodèle discret décrit en (4.97) est globalement asymptotiquement stable. La loi de commande OPDC (4.44) est définie par

$$F_i = N_i M^{-1} \quad (4.113)$$

Preuve : compte tenu des expressions (4.109) et (4.110) et des propriétés des fonctions d'activation, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n \mu_l(z(k+1)) \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k))^2 \Phi_{lii} + \sum_{i < j:1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) (\Phi_{lij} + \Phi_{lji}) \right) > \\ & \sum_{l=1}^n \mu_l(z(k+1)) \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k))^2 Q_{il} + 2 \sum_{i < j:1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) Q_{ijl} \right) \end{aligned} \quad (4.114)$$

avec Φ_{lij} définie en (4.105). Compte tenu de la condition (4.111), on vérifie que :

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(z(k))^2 Q_{il} + 2 \sum_{i < j:1}^n \mu_i(z(k)) \mu_j(z(k)) Q_{ijl} = \begin{pmatrix} \mu_1(\cdot) \\ \mu_2(\cdot) \\ \vdots \\ \mu_n(\cdot) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_{1l} & Q_{12l} & \cdots & Q_{1nl} \\ Q_{12l} & Q_{2l} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(n-1)nl} \\ Q_{1nl} & \cdots & Q_{(n-1)nl} & Q_{nl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1(\cdot) \\ \mu_2(\cdot) \\ \vdots \\ \mu_n(\cdot) \end{pmatrix} > 0 \quad (4.115)$$

la suite de la preuve est identique à celle du théorème 4.8. ■

Remarquons que dans les deux théorèmes 4.8 et 4.9, la synthèse du gain F_i est indépendante des matrices de Lyapunov P_i , ce qui constitue un avantage majeur par rapport aux résultats issus de la méthode quadratique (paragraphe 4.2). Cependant le résultat du théorème 4.9 a permis de "relaxer" d'avantage les contraintes du théorème 4.8. Ces relaxations sont introduites à travers les matrices Q_{ijl} qui ne sont pas forcément définies positives.

Dans le cas où $C = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}$, le théorème suivant propose de synthétiser la loi de commande OPDC (4.66) (i. e. le gain de retour \bar{F}_i) en tenant compte de sa structure (4.67).

Théorème 4.10 [Cha01c] : *s'il existe des matrices symétriques $P_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et des matrices $N_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ $i \in I_n$, et $G \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ayant les structures suivantes*

$$N_i = \begin{pmatrix} N_{i1} & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (4.116)$$

où $G_{11} \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $G_{21} \in \mathbb{R}^{(p-l) \times l}$, $G_{22} \in \mathbb{R}^{(p-l) \times (p-l)}$ et vérifiant les \mathcal{LMI}

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G + B_i N_i \\ * & G + G^T - P_l \end{pmatrix} > 0, \forall (i, l) \in I_n^2 \quad (4.117)$$

$$\begin{pmatrix} P_i + P_j & A_i G + B_i N_j + A_j G + B_j N_i \\ * & 2(G + G^T - P_l) \end{pmatrix} > 0, \forall (i, j, l) \in I_n^3, i < j \quad (4.118)$$

alors le multimodèle (4.68) est globalement asymptotiquement stable. La loi de commande (4.66) est définie par

$$F_i = N_{i1} G_{11}^{-1} \quad (4.119)$$

Preuve : les conditions sous formes de \mathcal{LMI} (4.117)-(4.118) sont obtenues directement des conditions (3.115)-(3.116) en substituant $A_i + B_i \bar{F}_j$ à G_{ij} avec le changement de variable $\bar{F}_i G^T = N_i$. Les structures imposées aux matrices G et N_i en (4.116) garantissent l'existence de la solution (4.119). Les contraintes (4.117)-(4.118) assurent que $G + G^T - P_k > 0$ et $P_k > 0$ ce qui garantit l'existence de G_{11}^{-1} et par conséquent du gain F_i . ■

Remarques 4.2 .

- En s'inspirant du théorème 4.9, les conditions (4.117)-(4.118) peuvent être directement relaxées en introduisant des matrices Q_{ij} et Q_{ijl} .
- Remarquons que dans le cas des théorèmes 4.8, 4.9 et 4.10, la synthèse de la loi de commande OPDC (4.66) est indépendante des matrices de Lyapunov P_i . De plus en comparaison avec les conditions (4.69)-(4.72) du théorème 4.6 (issues de la stabilisation quadratique), aucune structure particulière n'est imposée aux matrices de Lyapunov P_i . La matrice G , qui n'est pas forcément symétrique, permet ainsi d'introduire une relaxation considérable par rapport aux résultats issus de la stabilisation quadratique (voir exemple 4.3.2).
- Notons également qu'on peut toujours se ramener à une matrice de sortie de plein rang ligne sous la forme $C = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}$. Il suffit d'appliquer le changement de variable $\bar{x}(\cdot) = Tx(\cdot)$ où T est une matrice régulière telle que $y(\cdot) = CT^{-1}\bar{x}(\cdot)$ et $CT^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}$.

Dans le cas de la colinéarité positive des matrices d'entrée, l'usage de la loi de commande OPDC modifiée (4.62) avec $C = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}$ permet au multimodèle (4.45) de s'écrire sans ses termes croisés :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i + B_i \bar{F}_i) x(k) \quad (4.120)$$

où $\bar{F}_i = \begin{pmatrix} F_i & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi les conditions de stabilité du multimodèle (4.120) se réduisent aux conditions (4.116) et (4.117) du théorème 4.10. Cependant, pour moins de conservatisme nous proposons d'exploiter les conditions (3.64) qui fournissent plus de degrés de liberté.

Théorème 4.11 [Cha01c] : *s'il existe des matrices symétriques $S_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et des matrices $N_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ et $G_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ $i \in I_n$ ayant les structures suivantes*

$$N_i = \begin{pmatrix} N_{i1} & 0 \end{pmatrix}, G_i = \begin{pmatrix} G_{i11} & 0 \\ G_{i21} & G_{i22} \end{pmatrix} \quad (4.121)$$

où $G_{i11} \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $G_{i21} \in \mathbb{R}^{(p-l) \times l}$, $G_{i22} \in \mathbb{R}^{(p-l) \times (p-l)}$ et vérifiant les **LMT**

$$\begin{pmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * \\ A_i G_i + B_i N_i & S_j \end{pmatrix} > 0, \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (4.122)$$

alors le multimodèle (4.120) est globalement asymptotiquement stable. La loi de commande (4.62) est définie par

$$F_i = N_{i1} G_{i11}^{-1} \quad (4.123)$$

Preuve : la preuve est obtenue par application directe des conditions (3.64) en substituant $A_i + B_i \bar{F}_i$ à A_i avec le changement de variable $N_i = \bar{F}_i G_i$. L'existence de G_{i11}^{-1} est assurée par la contrainte $G_i + G_i^T > S_i > 0$. ■

L'avantage de cette formulation est d'introduire différentes matrices G_i non symétriques. Les gains F_i ne dépendent plus d'une matrice unique G , ce qui est synonyme de moins de conservatisme.

4.3.2 Exemple illustratif

L'exemple suivant permet de comparer les résultats issus des deux théorèmes (4.8 et 4.9). Considérons le multimodèle discret suivant décrit par deux modèles locaux :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} -1.3 & 0.47 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 4.7 \end{pmatrix}, C_1 = (1 \ 0) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} -0.3 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 2.2 \end{pmatrix}, C_2 = (1 \ 0) \end{aligned} \quad (4.124)$$

Les conditions de stabilisation (4.109)-(4.111) du théorème 4.9 sont réalisables et aboutissent aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 231.1151 & -24.7835 \\ -24.7835 & 708.8690 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 317.2137 & 32.6572 \\ 32.6572 & 695.1096 \end{pmatrix}, \\ G &= \begin{pmatrix} 246.4290 & 0 \\ -20.5447 & 704.6203 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les gains de la loi de commande OPDC, $u(k) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(k)) F_i y(k)$, sont

$$F_1 = 0.3294, F_2 = 0.1375 \quad (4.125)$$

Un exemple de simulation du multimodèle avec la loi de commande OPDC dont les gains sont définis en (4.125) et les fonctions d'activation en (4.126) est présenté par la figure 4.2.

$$\mu_1(x(k)) = 1 - \mu_2(x(k)) = \frac{1}{2} (1 - \tanh(x(k))) \quad (4.126)$$

Remarquons que les conditions (4.98)-(4.99) du théorème 4.8 ne sont pas réalisables et il en est de même pour celles (4.57)-(4.59) du théorème 4.5 issues de la stabilisation quadratique.

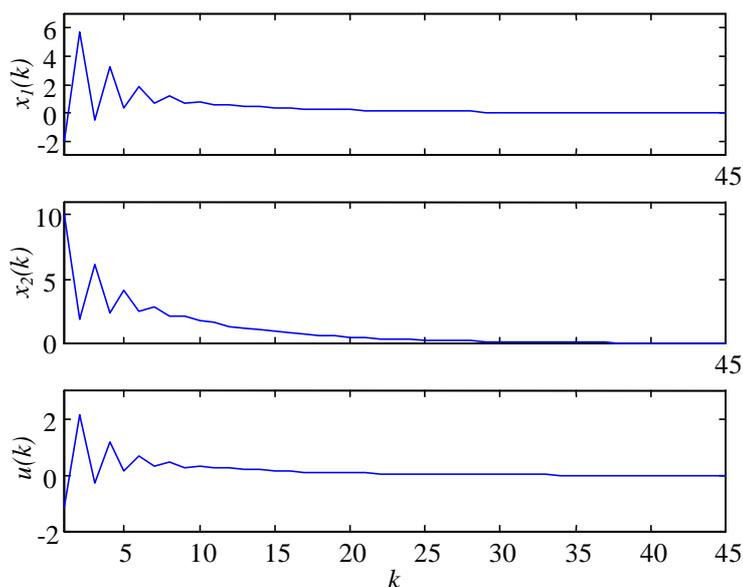


FIG. 4.2: Stabilisation non quadratique par retour de sortie du multimodèle (4.124) avec la loi de commande OPDC.

4.3.3 Cas des fonctions quadratiques par morceaux

Les résultats de stabilisation par retour d'état que nous avons établis via la loi de commande PDC dans le domaine discret en utilisant la fonction candidate de Lyapunov (1.59) sont étendus à la stabilisation par retour de sortie (loi de commande OPDC). Ainsi, il suffit de remplacer dans les théorèmes 3.15 et 3.16 $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ par $A_i + B_i F_j C$. Le résultat suivant peut être obtenu :

Théorème 4.12 [Cha01c] : *supposons qu'il existe des matrices symétriques $Q \geq 0$, $P_i > 0$, des matrices F_i et des scalaires $\tau_{ijkl} \geq 0$ tels que*

$$\begin{pmatrix} P_k - (r-1)Q - \sum_{l=1}^n \tau_{ikl}(P_k - P_l) & * \\ P_k(A_i + B_i F_i C) & P_k \end{pmatrix} > 0, \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (4.127)$$

$$\begin{pmatrix} 4P_k + 4Q - \sum_{l=1}^n \tau_{ijkl}(P_k - P_l) & * \\ P_k(A_i + A_j + B_i F_j C + B_j F_i C) & P_k \end{pmatrix} > 0, \quad \forall (i, j, k) \in I_n^3, i < j \quad (4.128)$$

alors le multimodèle (4.45) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve : ces conditions sont obtenues directement à partir du théorème 3.15 en substituant $A_i + B_i F_j C$ à $G_{ij} = A_i - B_i K_j$. ■

Dans le cas de la loi de commande OPDC modifiée, les conditions de stabilisation se résument aux conditions suivantes

$$\begin{pmatrix} P_k - \sum_{l=1}^n \tau_{ikl} (P_k - P_l) & * \\ P_k (A_i + B_i F_i C) & P_k \end{pmatrix} > 0 \quad (4.129)$$

Ces conditions sont exprimées sous forme de \mathcal{BMI} en P_i , F_i et τ_{ikl} . La méthode de linéarisation décrite au paragraphe 3.4.1.1 peut être utilisée. La formulation \mathcal{LMI} correspondante à ces \mathcal{BMI} s'obtient en substituant à $P_k (A_i + B_i F_i C)$, l'expression :

$$(P_{k0} + \delta P_k) A_i + (P_{k0} + \delta P_k) B_i F_{i0} C + P_{k0} B_i \delta F_i C, \quad \forall (i, k) \in I_n^2 \quad (4.130)$$

avec $P_{i0} + \delta P_i > 0$, auxquelles il faut ajouter les contraintes (??) assurant la validité de l'approximation.

Exemple 4.2 .

Considérons le multimodèle discret de [Yon00] décrit par deux modèles locaux

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.6 & 1.6 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.2 \end{pmatrix}, C_1 = (1 \ 0) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.9 & 1.8 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.4 \end{pmatrix}, C_2 = (1 \ 0) \end{aligned} \quad (4.131)$$

pour lequel les auteurs ont proposé une loi de commande PDC basée observateur. Par la suite nous proposons une loi de commande OPDC pour cet exemple. La synthèse de cette loi de commande est basée sur les conditions de stabilisation (4.127)-(4.128) du théorème 4.12 linéarisées en (4.130) en tenant compte des contraintes sur P_1 , P_2 , F_1 et F_2 :

$$\begin{pmatrix} \zeta P_{i0} & \delta P_i \\ \delta P_i & \zeta P_{i0} \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} (\zeta \|F_{i0}\|)^2 & \delta F_i^T \\ \delta F_i & \mathcal{I} \end{pmatrix} > 0, \quad i \in I_2$$

Avec $\zeta = 0.2$, les valeurs initiales

$$\begin{aligned} P_{10} &= \begin{pmatrix} 30 & -30 \\ -30 & 30 \end{pmatrix}, P_{20} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \\ F_{10} &= -10, F_{20} = -20 \end{aligned}$$

et

$$\tau_{112} = 1, \tau_{122} = 2, \tau_{212} = 1, \tau_{221} = 2, \tau_{1212} = 1, \tau_{1221} = 0 \quad (4.132)$$

les contraintes linéarisées sont réalisables et aboutissent, à la 14^{ème} itération, aux résultats suivants :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.7164 & -1.5593 \\ -1.5593 & 1.7311 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1.7130 & -1.5563 \\ -1.5563 & 1.7279 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0.0071 & -0.0062 \\ -0.0062 & 0.0068 \end{pmatrix}$$

Les gains de retour de la loi de commande OPDC sont :

$$F_1 = -0.1757, F_2 = -0.0632 \quad (4.133)$$

4.3.4 Conclusion

À travers ce quatrième chapitre, nous avons proposé des conditions suffisantes permettant la synthèse de lois de commande statique par retour de sortie (loi de commande OPDC). Différentes approches ont été considérées ; la première s'appuie sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratique. Dans ce sens, une formulation \mathcal{LMI} par complémentarité sur le cône (théorème 4.7) ainsi que par transformation en \mathcal{LMI} du problème \mathcal{BMI} de départ (théorèmes 4.1 et 4.2) ont été proposées. Si la première formulation n'impose aucune restriction, la deuxième suppose une matrice de sortie C unique et de plein rang ligne. Dans un deuxième temps, cette étude a été basée sur les fonctions non quadratiques. En se basant sur les fonctions polyquadratiques les résultats obtenus dans le domaine discret sont sous formes de \mathcal{LMI} alors que ceux obtenus par les fonctions quadratiques par morceaux sont sous formes de \mathcal{BMI} . Ces derniers résultats posent le problème de résolution numérique. Notons également la grande difficulté à formuler, par la méthode polyquadratique, des résultats satisfaisants pour le domaine continu. La méthode demande des études plus approfondies pour aboutir à des résultats moins pessimistes et résolubles numériquement.

Conclusions et perspectives

”Il y a de l'apparence qu'on tirera un jour des conséquences bien utiles de ces paradoxes, car il n'y a guère de paradoxes sans utilité” G. W. Von Leibnitz.

Les méthodologies développées dans ce mémoire de thèse sont essentiellement théoriques. Elles sont dédiées à l'analyse et la synthèse de lois de commande pour les systèmes non linéaires décrits par des structures multimodèles. Leur établissement fait appel exclusivement à la deuxième méthode de Lyapunov et au formalisme \mathcal{LMI} . Au delà de l'outil mathématique, leurs mises en oeuvre nécessitent souvent le recours à des algorithmes numériques tels que la linéarisation de \mathcal{BMI} , la minimisation de trace, la prise en compte de contrainte de rang.

L'étude que nous avons menée est organisée en deux parties : la première traite l'analyse de la stabilité par des fonctions de Lyapunov quadratiques, la deuxième fait appel aux fonctions de Lyapunov non quadratiques.

Ainsi, en se basant sur les propriétés des M-matrices, une classe de multimodèles acceptant des fonctions quadratiques sont étudiées et des conditions suffisantes de stabilité sont proposées [Cha02g]. La stabilisation par retour d'état non linéaire a ensuite été considérée. Les conditions obtenues s'expriment sous forme de \mathcal{BMI} . Des algorithmes permettant de résoudre localement ou globalement ce genre de problème non convexe sont utilisés. Afin d'améliorer les performances de synthèse (de régulateurs PDC ou de multiobservateurs), nous avons proposé des conditions moins conservatives sous forme \mathcal{LMI} permettant de fixer le taux de décroissance de l'erreur d'estimation. En effet, cette contrainte de performance est garantie en reportant le problème uniquement sur les termes dominants supposés commandables, ce qui permet de maintenir les relaxations au niveau des termes croisés.

Une loi de commande statique non linéaire basée sur le retour de sortie est également proposée [Cha02a] [Cha02h]. Deux techniques de synthèse de cette loi de commande sont exposées. La première est basée sur une formulation convexe sous forme de \mathcal{LMI} [Cha02h] ; nous avons également considéré le problème de placement de pôles formulé

en terme de \mathcal{LMI} . La deuxième technique quant à elle, est basée sur la transformation du problème (non convexe) de synthèse en un problème de complémentarité sur le cône [Cha02a].

Les techniques de synthèse basées sur le retour d'état nécessitent la disponibilité de tout le vecteur d'état. Comme cette condition est rarement vérifiée, l'usage d'un observateur devient nécessaire. Ce multiobservateur est construit par interpolation d'observateurs locaux de type Luenberger [Cha02f][Cha02b]. Dans un premier temps, le cas où l'on dispose de variable de décision mesurables est étudié [Cha02f]. Pour remédier à cette hypothèse souvent difficile à vérifier, nous avons traité le cas des variables de décision non (toutes) mesurables [Cha02b][Cha02d]. Les conditions de synthèse obtenues s'expriment sous forme de \mathcal{BMI} difficiles à linéariser par les techniques classiques de changement de variable. Dans ce sens, nous avons proposé une procédure de résolution basée sur le découplage des variables de synthèse (gains de l'observateur et du régulateur)[Cha02d][Cha02b]. La méthode proposée permet de synthétiser séparément, mais séquentiellement, les gains de l'observateur et du régulateur.

L'intérêt des résultats obtenus vient du fait que la recherche d'une fonction de Lyapunov commune (et des gains de retour d'état dans le cas de la stabilisation) est facile à mettre en oeuvre et peut être énoncée comme un problème d'optimisation convexe en terme de \mathcal{LMI} résolu efficacement. Cependant, la méthode quadratique s'est avérée très conservative du fait que cette approche néglige toutes les informations contenues dans les fonctions d'activation. Ces contraintes deviennent plus conservatives encore si l'on ajoute des contraintes de performance du système corrigé.

Pour réduire le pessimisme de la méthode quadratique, nous avons mené l'étude de stabilité des multimodèles en considérant deux types de fonction de Lyapunov non quadratiques.

La première, dite polytopique ou multiquadratique, est de la forme $V(x(t), z(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) P_i x(t)$, $P_i > 0$. Elle est construite par interpolation de fonctions de Lyapunov quadratiques locales à travers les mêmes fonctions d'activation que le multimodèle lui-même. L'étude de ce type de fonction a permis, dans le cas continu, d'obtenir des conditions de stabilité sur la variation de l'état [Cha00][Cha02e]. Ces résultats s'avèrent très utiles lorsqu'aucune fonction de Lyapunov quadratique ne peut être trouvée [Cha02e].

Le deuxième type de fonction de Lyapunov est de la forme $V(x) = \max(V_1(x), \dots, V_n(x))$ avec $V_i(x) = x^T P_i x$, $P_i > 0$, $i \in I_n$. Il s'agit de fonctions de Lyapunov non quadratiques. Ces fonctions, dites quadratiques par morceaux, sont utilisées conjointement avec la procédure S pour réduire le pessimisme des résultats quadratiques. Les conditions de stabilité obtenues sont formulées sous forme de \mathcal{LMI} [Cha02c]. Ces résultats, assez satisfaisants dans le domaine continu et discret, ont abouti à réduire considérablement le conservatisme de la méthode quadratique. Ce type de fonction permet d'envisager des extensions intéressantes concernant la commande par retour d'état ou par retour

de sortie et également à propos de l'estimation d'état des multimodèles [Cha01c]. Les résultats obtenus sont bilinéaires en les variables de synthèse. Des formulations \mathcal{LMI} sous contraintes de rang ou en utilisant des algorithmes de linéarisation existants sont proposées.

Malgré ces développements, certains axes méritent des réflexions plus approfondies. Les perspectives demeurent nombreuses et doivent être orientées vers la diminution du conservatisme des conditions qui peut intervenir aux niveaux suivants :

- L'utilisation des fonctions candidates de Lyapunov polyquadratiques et quadratiques par morceaux ont permis de réduire le conservatisme des résultats issus des fonctions quadratiques. Explorer d'autres classes de fonctions de Lyapunov reste un moyen possible de réduction de conservatisme.
- Le choix systématique des lois de commandes PDC, CDF (ou de structures dérivées) n'est pas toujours une bonne démarche. L'idée pourrait être de combiner ces dernières avec des méthodes issues des systèmes non linéaires. Un exemple d'une telle démarche est présenté dans [Mor00a] et constitue une piste intéressante.
- Les conditions d'analyse et de synthèse issues de la méthode polyquadratique dans le domaine continu, demande des réflexions plus approfondies pour aboutir à des résultats moins pessimistes et résolubles numériquement. La littérature récente sur ce sujet propose des pistes intéressantes notamment à travers [Tan01a] qui propose une formulation \mathcal{LMI} du problème de synthèse.
- La plupart des méthodes actuelles basées \mathcal{LMI} , demandent la stabilité de tous les modèles locaux (A_i) (à part celle de Blanco [Bla01b] issue de la méthode quadratique et qui demande des fonctions d'activation particulières qui n'atteignent pas les bornes, i. e. 0 et 1). Nous pensons qu'il n'y a pas nécessité à considérer la stabilité du modèle local (i) quand celui-ci correspond seulement à un point transitoire et non à un point d'équilibre. Cette "constatation" permettrait de réduire le conservatisme des résultats d'analyse actuels. Ceci permettrait également, à notre avis, de réduire le conservatisme des hypothèses très contraignantes de "multicommandabilité" et de "multiobservabilité".
- Les conditions proposées dans le chapitre 3 utilisant les fonctions quadratiques par morceaux et concernant la stabilisation et l'estimation d'état, garantissent uniquement la stabilité asymptotique. Le problème de performances du multimodèle corrigé, la synthèse d'une loi de commande stabilisante basée sur un observateur et, par suite, la propriété de séparation ne sont pas abordés. Ces points peuvent constituer une perspective intéressante de ce travail. Ces conditions ont aboutit à des contraintes non convexes qui posent des problèmes numériques et qui demandent des efforts supplémentaires pour adapter des algorithmes existants dans ce domaine.

Annexe A

Régions \mathcal{LMI}

A.1 Définition d'une région \mathcal{LMI}

Un sous-ensemble D du plan complexe est appelé région \mathcal{LMI} d'ordre n s'il existe une matrice symétrique $\alpha \in \mathbb{R}^{n,n}$ et une matrice $\beta \in \mathbb{R}^{n,n}$ telles que :

$$D = \{z \in \mathbb{C} : f_D(z) = \alpha + \beta z + \beta^T \bar{z} < 0\} \quad (\text{A.1})$$

On peut remarquer que la fonction caractéristique f_D de variable complexe z prend ses valeurs dans l'ensemble des matrices Hermitiennes d'ordre n et qu'une région \mathcal{LMI} est symétrique par rapport à l'axe réel puisque $f_D^T(z) = f_D(\bar{z})$. Cette dernière propriété est souvent vérifiée par les régions utilisées pour l'étude de la D -stabilité¹ d'une matrice réelle puisque le spectre d'une matrice réelle est auto-conjugué.

Théorème A.1 [Chi96b][Chi96a] : soient $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ et D une région \mathcal{LMI} définie par (A.1). La matrice A est D -stable si et seulement s'il existe une matrice $X \in \mathbb{R}^{n,n}$, symétrique définie positive, telle que :

$$M_D(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T < 0 \quad (\text{A.2})$$

Pour tester la D -stabilité d'une matrice réelle dans une intersection de régions \mathcal{LMI} , les auteurs de [Chi96b] ont montré qu'une seule solution symétrique définie positive à cette \mathcal{LMI} est nécessaire.

Considérons la région D résultante de l'intersection de r sous-régions \mathcal{LMI} D_i . Les valeurs propres d'une matrice réelle appartiennent à D si et seulement s'il existe une matrice $X \in \mathbb{R}^{n,n}$, symétrique définie positive, telle que :

$$M_{D_i}(A, X) = \alpha_i \otimes X + \beta_i \otimes (AX) + \beta_i^T \otimes (AX)^T < 0, i \in I_r \quad (\text{A.3})$$

¹On dit d'une matrice A qu'elle est D -stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement contenues à l'intérieur d'une région D du plan complexe

ce qui est équivalent à :

$$M_D(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T = \text{diag}(M_{D_i}(A, X)) < 0, i \in I_r \quad (\text{A.4})$$

où :

$$\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r) \quad (\text{A.5})$$

Cette inégalité montre clairement que D peut elle-même être formulée comme une région \mathcal{LMI} . Ceci montre que l'approche \mathcal{LMI} permet de considérer la même matrice X pour toutes les sous-régions de l'intersection tout en préservant la nécessité de la condition de D-stabilité.

A.2 Exemples de régions \mathcal{LMI} intéressantes

L'inégalité (A.2) peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}X + \beta_{11}AX + \beta_{11}(AX)^T & \cdots & \alpha_{1n}X + \beta_{1n}AX + \beta_{n1}(AX)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}X + \beta_{n1}AX + \beta_{1n}(AX)^T & \cdots & \alpha_{nn}X + \beta_{nn}AX + \beta_{nn}(AX)^T \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.6})$$

où p_{ij} et q_{ij} représentent les éléments (i, j) de α et β respectivement.

– Demi-plan gauche ouvert

$$\Re(z) < 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} < 0 \quad (\text{A.7})$$

Il suffit de prendre $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. De l'expression (A.7) on déduit la \mathcal{LMI} suivante :

$$AX + (AX)^T < 0 \quad (\text{A.8})$$

– α -stabilité

$$\Re(z) < -a \Leftrightarrow 2a + z + \bar{z} < 0 \quad (\text{A.9})$$

Il suffit de prendre $\alpha = 2a$ et $\beta = 1$, ce qui donne la \mathcal{LMI} :

$$2aP + AX + (AX)^T < 0 \quad (\text{A.10})$$

– Bande verticale

$$a_1 < \Re(z) < a_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a_2 + z + \bar{z} & 0 \\ 0 & 2a_1 - (z + \bar{z}) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.11})$$

Il suffit de prendre $\alpha = \begin{pmatrix} -2a_2 & 0 \\ 0 & 2a_1 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui donne la \mathcal{LMI} :

$$\begin{pmatrix} -2a_2X + AX + (AX)^T & 0 \\ 0 & 2a_1X - (AX + (AX)^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.12})$$

– **Bande horizontale**

$$|\Im m(z)| < a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a & z - \bar{z} \\ -z + \bar{z} & -2a \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.13})$$

Il suffit de prendre $\alpha = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne la \mathcal{LMI} :

$$\begin{pmatrix} -2aX & AX - (AX)^T \\ -AX + (AX)^T & 2aX \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.14})$$

– **Disque de rayon R et de centre $(q, 0)$**

$$|z - q| < R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -R & z - q \\ \bar{z} - q & -R \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.15})$$

Il suffit de prendre $\alpha = \begin{pmatrix} -R & -q \\ -q & -R \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne la \mathcal{LMI} :

$$\begin{pmatrix} -RX & -qX + AX \\ -qX + (AX)^T & -RX \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.16})$$

Dans le cas où $R = 1$ et $q = 0$ (ce qui correspond au cas discret), on obtient : $A^T X A - X < 0$.

– **Secteur conique**

$$a\Re(z) + |b\Im(z)| < 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a(z + \bar{z}) & -b(z - \bar{z}) \\ b(z - \bar{z}) & a(z + \bar{z}) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.17})$$

Il suffit de prendre $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ce qui donne la \mathcal{LMI} :

$$\begin{pmatrix} a \left(AX + (AX)^T \right) & -b \left(AX - (AX)^T \right) \\ b \left(AX - (AX)^T \right) & a \left(AX + (AX)^T \right) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.18})$$

On a : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos(\theta) = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

En effet :

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta) \left(AX + (AX)^T \right) & \cos(\theta) \left(AX - (AX)^T \right) \\ -\cos(\theta) \left(AX - (AX)^T \right) & \sin(\theta) \left(AX + (AX)^T \right) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.19})$$

Annexe B

Problème de complémentarité sur le cône

Dans le but de pouvoir utiliser les outils de résolution des inégalités matricielles [Gah95] [Nik95], toutes les conditions doivent nécessairement être convexes. La présence de conditions non convexes rend en général le problème NP-difficile.

Considérons le problème non convexe en V, W et Z suivant :

$$F(V, W, Z) \geq 0, \begin{pmatrix} V & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & W \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{B.1})$$

$$VW = \mathcal{I} \quad (\text{B.2})$$

où V, W sont des matrices symétriques de même dimension et $F(\cdot)$ est une fonction matricielle affine symétrique. Les inégalités (B.1) représentent l'ensemble des contraintes \mathcal{LMI} du problème et la condition (B.2) la contrainte non convexe. Le problème de complémentarité sur le cône correspondant est

$$\text{minimiser } Tr(VW) \text{ sous les contraintes (B.1)} \quad (\text{B.3})$$

Le théorème suivant garantit l'existence d'une solution au problème si et seulement si le minimum de (B.3) est p [Elg97].

Théorème B.1 : soient V et W deux matrices symétriques définies positives de $\mathbb{R}^{p,p}$ telles que

$$\begin{pmatrix} V & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & W \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{B.4})$$

Alors $VW = \mathcal{I}$ si et seulement si $Tr(VW) = p$.

B.1 Linéarisation et algorithme

L'heuristique proposée dans [Elg97] pour résoudre ce problème repose sur une méthode de linéarisation introduite par Frank & Wolfe. L'heuristique prend alors la forme d'une suite de conditions \mathcal{LMI} :

1. Trouver V_0, W_0 et Z_0 qui satisfont les contraintes \mathcal{LMI} (B.1). Si le problème est réalisable, arrêter. Sinon, poser $k = 1$.
2. Les matrices V_{k-1}, W_{k-1} et Z_{k-1} étant fixées, trouver V_k, W_k et Z_k solutions du problème \mathcal{LMI} :

$$\text{minimiser } Tr(V_{k-1}W_k + W_{k-1}V_k) \text{ sous la contrainte (B.1)}$$

3. Si l'objectif $Tr(V_{k-1}W_k + W_{k-1}V_k)$ atteint un point stationnaire, arrêter. Sinon, poser $k = k + 1$ et aller à (2).

B.2 Propriétés de l'algorithme

Nous rappelons quelques propriétés fondamentales de cet algorithme.

Théorème B.2 : soit (t_k) la suite définie par $Tr(V_{k-1}W_k + W_{k-1}V_k)$, $k > 0$

1. La suite (t_k) est minorée : $\forall k \geq 1, t_k \geq 2p$.
2. La suite (t_k) est décroissante.
3. La suite (t_k) converge vers $t_\infty \geq 2p$.
4. $t_\infty = 2p$ si et seulement si $VW = \mathcal{I}$ à l'optimum.

Le problème de la convergence de la suite soulève le problème du critère d'arrêt. Dans le cas de la stabilisation quadratique par retour statique de sortie d'un système LTI, un critère est proposé dans [Elg97].

Annexe C

Propriétés des M-matrices

Ces définitions se trouvent dans [Fos93].

Définition C.1 : *Z-matrice*

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ dont tous les termes extra-diagonaux sont négatifs ou nuls est appelée *Z-matrice*.

Théorème C.1 : *M-matrice*

Pour qu'une *Z-matrice* A soit une *M-matrice*, il faut et il suffit qu'une des propriétés suivantes qui sont équivalentes entre elles, soit vérifiée :

- Toute valeur propre de A a sa partie réelle positive,
- Tous les déterminants mineurs principaux de A sont positifs,
- A^{-1} existe et est non négative (tous ses éléments sont positifs ou nuls),
- Il existe un vecteur v positif ($v \neq 0$), tel que le vecteur Av est aussi un vecteur strictement positif,
- A est une matrice à diagonale quasi-dominante positive, i. e. il existe un ensemble de réels κ_j tels que :

$$\kappa_j a_{jj} - \sum_{i \neq j:1}^p \kappa_i |a_{ij}| > 0, \forall j \in I_p$$

Annexe D

Différentes formes de multimodèles

On peut énumérer différentes formes de multimodèles selon que l'on fait la segmentation sur l'entrée ou sur la sortie (i. e. sur les variables d'état mesurables) et aussi selon la nature du couplage entre les modèles locaux. Cependant on peut noter cinq structures de multimodèles groupées en deux classes :

- modèles locaux couplés
- modèles locaux découplés

Au lieu d'un modèle sous forme entrée-sortie, souvent utilisé en identification, la représentation d'état est de loin plus adoptée en analyse des multimodèles. De même, la commande des processus représentés par des multimodèles adopte la représentation d'état afin d'étendre au cas non linéaire des techniques de commande par retour d'état. La construction d'observateurs non linéaires, appelés multiobservateurs dans le cadre de l'approche multimodèle, requiert aussi des modèles locaux exprimés sous la forme de modèle d'état. On se contentera par la suite de la forme discrète de la représentation d'état.

D.1 Modèles locaux couplés

Considérons le système non linéaire suivant

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k)) + B(x(k))u(k) \\ y(k) &= g(x(k))\end{aligned}\tag{D.1}$$

La représentation multimodèle de (D.1) obtenue par interpolation de n modèles locaux est

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) (A_i x(k) + B_i u(k)) \\ y(k) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) C_i x(k)\end{aligned}\tag{D.2}$$

où $\mu_i(z(k))$ est la fonction d'activation relativement au modèle local i dépendante du vecteur des variables de décision $z(k)$.

Remarques D.1 :

- Chaque modèle local i n'est valable que dans l'espace engendré par la fonction d'activation $\mu_i(z(k))$ correspondante même si les variables $x(k)$ et $y(k)$ sont globales.
- Dans le cas général, la segmentation est fonction de l'état mesurable (ou d'une combinaison de l'état mesurable, la sortie du système en l'occurrence) et éventuellement de l'entrée.

Cette structure est la plus utilisée en analyse aussi bien qu'en synthèse des multimodèles. Une autre variante de la structure (D.2) est proposée dans [Lia99]. Cette structure simplifiée, qui est basée sur un modèle LTI unique pondéré par des scalaires $k_i \in \mathbb{R}$, permet de réduire le nombre de paramètres à optimiser. La représentation multimodèle a la forme suivante :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) k_i (Ax(k) + Bu(k)), \quad i \in I_n \quad (D.3)$$

Les structures suivantes peuvent être vues comme des variantes de la structure (D.2). Il s'agit d'une interconnexion de n modèles en parallèle dont la pondération est réalisée sur les entrées ou sur les sorties locales [Rag01]. La sommation de ces dernières fournit la sortie globale du système

– **Modèles locaux couplés avec segmentation de l'entrée**

Structure du modèle local i :

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x(k) + B_i \bar{u}(k), \quad \bar{u}(k) = \mu_i(z(k)) u(k) \\ y_i(k) &= C_i x_i(k), \quad i \in I_n \end{aligned} \quad (D.4)$$

Le modèle global est obtenu par sommation directe des modèles locaux couplés (figure D.1) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^n (A_i x(k) + B_i \bar{u}(k)) \\ y(k) &= \sum_{i=1}^n y_i(k), \quad i \in I_n \end{aligned} \quad (D.5)$$

– **Modèles locaux couplés avec interpolation des sorties locales**

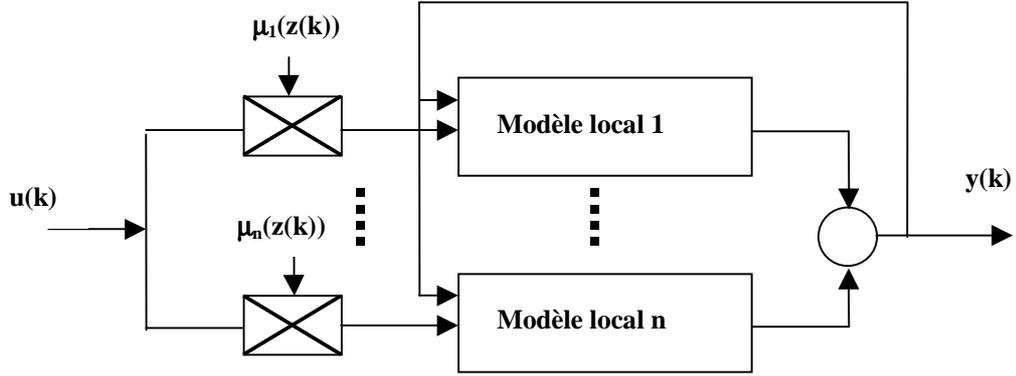


FIG. D.1: Modèles locaux couplés avec segmentation de l'entrée.

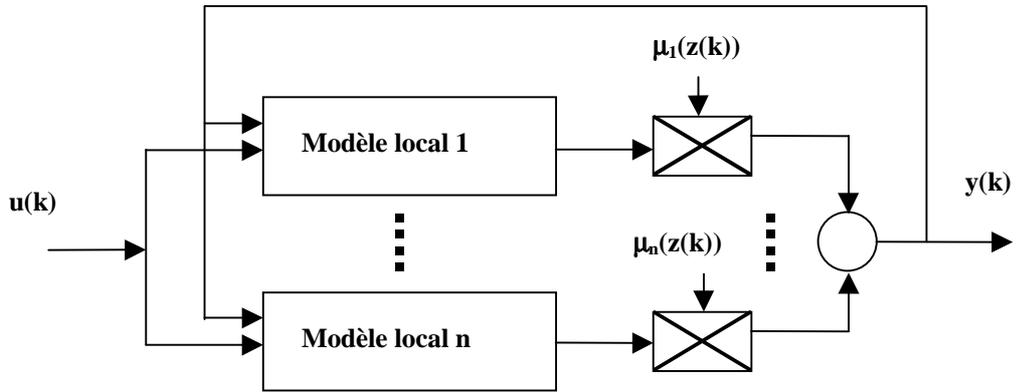


FIG. D.2: Modèles locaux couplés avec interpolation des sorties locales.

Structure du modèle local i :

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x(k) + B_i u(k) \\ y_i(k) &= C_i x_i(k), i \in I_n \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Le modèle global est interpolé par pondération des modèles locaux (figure D.2) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) (A_i x(k) + B_i u(k)) \\ y(k) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) y_i(k), i \in I_n \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

D.2 Modèles locaux découplés

Dans les cas précédents, les modèles locaux sont couplés du fait de l'utilisation de la sortie globale dans leurs expressions. Une autre représentation multimodèle est de

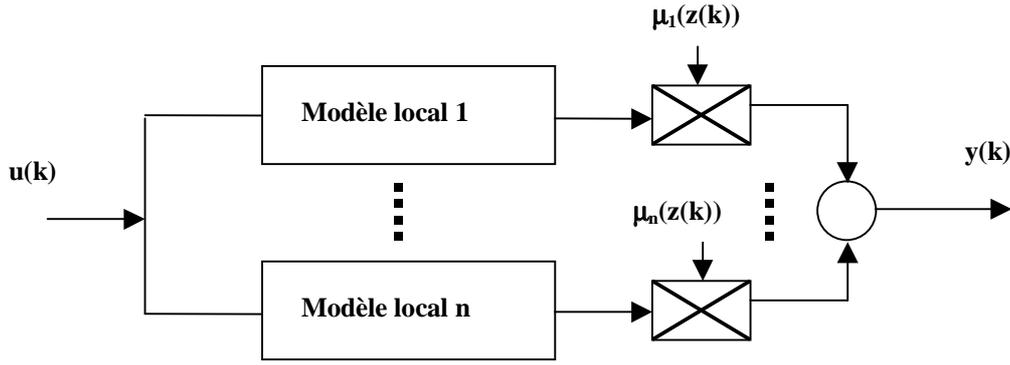


FIG. D.3: Modèles locaux découplés avec interpolation des sorties locales.

considérer que les modèles locaux sont totalement découplés.

– Modèles locaux découplés avec interpolation des sorties locales

Il s'agit d'une interconnexion de n modèles en parallèle dont les sorties locales sont pondérées par les fonctions d'activation, leur sommation fournit la sortie globale du système.

Le modèle local i peut s'écrire sous la forme d'équation d'état

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u(k) \\ y_i(k) &= C_i x_i(k), i \in I_n \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Le modèle global peut être interpolé par la sommation pondérée des variables d'état et de sortie (figure D.3) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) (A_i x_i(k) + B_i u(k)) \\ y(k) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(z(k)) y_i(k), i \in I_n \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

– Modèles locaux découplés avec segmentation de l'entrée

L'architecture de ce découplage reste la même que précédemment sauf que les pondérations sont réalisées au niveau de l'entrée.

Structure du modèle local i :

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i \bar{u}(k), \bar{u}(k) = \mu_i(z(k)) u(k) \\ y_i(k) &= C_i x_i(k), i \in I_n \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

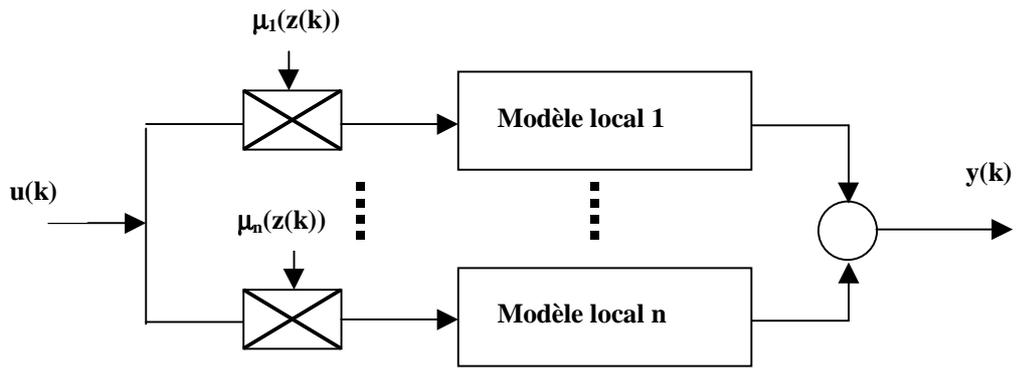


FIG. D.4: Modèles locaux découplés avec segmentation de l'entrée.

Le modèle global est interpolé de la façon suivante (figure D.4) :

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \sum_{i=1}^n \left(A_i x_i(k) + B_i \bar{u}(k) \right) \\
 y(k) &= \sum_{i=1}^n y_i(k), i \in I_n
 \end{aligned}
 \tag{D.11}$$

Bibliographie

- [Aka98] **Akar M., Ozguner U.** Stability and stabilization of T-S fuzzy systems. *In Proc. of the ACC, Philadelphia, USA*, 1998. pp. 3840–3845.
- [Aka00] **Akar M., Ozguner U.** Decentralized techniques for the analysis and control of T-S fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000. vol. 8, no. 6, 691–704.
- [Akh03] **Akhenak A., Chadli M., Maquin D., Ragot J.** State estimation via multiple observer with unknown inputs : Application to the three tank system. *In Proc. of the IFAC congres, Safeprocess'03, Washington*, 2003.
- [Apk95] **Apkarian P., Gahinet P., Becker G.** Self-scheduled $H(\infty)$ control of linear parameter-varying systems : a design example. *Automatica*, 1995. no. 31, pp. 1251–1261.
- [Apk00] **Apkarian P., Tuan H. D.** Robust control via concave minimisation : local and global algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000. vol. 45, no. 2, pp. 299–305.
- [Bar01] **Bara G. I.** *Estimation d'état des systèmes à paramètres variants*. Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 2001.
- [Ben97] **Benton R. E., Smith D.** Output-feedback stabilisation with prescribed degree of stability. *In Proc. of ACC, Albuquerque, New Mexico*, 1997. pp. 499–504.
- [Ber97] **Beran E., Vandenberghe L. and Boyd S.** A global BMI algorithm based on the generalised bender decomposition. *In Proc. of ECC, Brussels, Belgique*, 1997.
- [Bla01a] **Blanco Y.** *Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno et leur usage pour la commande des systèmes non linéaires*. Doctorat de l'Ecole Centrale de Lille, 2001.
- [Bla01b] **Blanco Y., Perruquetti W., Borne P.** Stability and stabilizability of nonlinear systems and T-S fuzzy models. *In Mathematical Problems in Engineering*, 2001. no. 7, pp. 221–240.
- [Bor93] **Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J. P., Rotella F., Zambetakis I.** *Analyse et régulation des processus industriels*. Technip, Paris, 1993.

- [Boy94] **Boyd S., ElGhaoui L., Feron E., Balakrishnan V.** *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia, PA :SIAM, 1994.
- [Buc92] **Buckley J. J.** Universal fuzzy controllers. *Automatica*, 1992. vol. 28, no. 6, pp. 1245–1248.
- [Buc93] **Buckley J. J.** Sugeno type controllers are universal controllers. *Fuzzy Set and Systems*, 1993. no. 53, pp. 299–303.
- [Cao96] **Cao S.G., Rees N. W., Feng G.** Stability analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems. *International Journal of Control*, 1996. vol. 64, no. 6, pp. 1069–1087.
- [Cao99] **Cao S.G., Rees N. W., Feng G.** Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy state space models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999. vol. 7, no. 2, pp. 192–200.
- [Cas95] **Castro J.** Fuzzy logic controllers are universal approximator. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics-part C*, 1995. vol. 25, pp. 629–635.
- [Cha00] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Relaxed stability conditions for Takagi-sugeno fuzzy systems. *In Proc. of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Nashville, USA, 2000.* pp. 3514–3519.
- [Cha01a] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** On the stability analysis of multiple model. *In Proc. of the ECC, Porto, Portugal, 2001.* pp. 1894–1899.
- [Cha01b] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Stabilité et stabilisation des modèles T-S continus. *Journées Doctorales de l'Automatique (JDA'2001), Toulouse, France, 2001.* pp. 85–88.
- [Cha01c] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Sur la stabilité et la stabilisation non quadratique des multimodèles. *Rapport interne, CRAN-INPL, Nancy, Octobre 2001.*
- [Cha02a] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** An LMI formulation for output feedback stabilisation in multiple model approach. *In Proc. of the IEEE 41th CDC, Las Vegas, Nevada, 2002.*
- [Cha02b] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Commande des modèles Takagi-Sugeno continus. *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA), Montpellier, France, 2002.*
- [Cha02c] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Nonquadratic stability of Takagi-Sugeno systems. *In Proc. of the IEEE 41th CDC, Las Vegas, Nevada, 2002.*
- [Cha02d] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Observer-based controller for Takagi-Sugeno models. *In Proc. of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC'2002), Tunisia, 2002.*
- [Cha02e] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** On relaxed LMI-based analysis and designs for continuous Takagi-Sugeno systems. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Soumis, 2002.*

- [Cha02f] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Output stabilisation in multiple model approach. *In Proc. of the IEEE Conference on Control Application (CCA'02), Glasgow, Scotland, 2002.* pp.1315–1320.
- [Cha02g] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Stability analysis of multiple model systems. *International Journal of Systems Science, Soumis, 2002.*
- [Cha02h] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Static output feedback for Takagi-Sugeno systems : an LMI approach. *In Proc. of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'02), Lisboa, Portugal, 2002.*
- [Cha02i] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Sur la stabilité des modèles de Takagi-Sugeno : Approche quadratique. *Journal Européen des Systèmes automatisés (JESA), Soumis, 2002.*
- [Cha03] **Chadli M., Maquin D., Ragot J.** Multiple observers of discrete-time multiple models. *In Proc. of the IFAC congrès, Safeprocess'03, Washington, 2003.*
- [Che96] **Cheng C. M., Rees N.W., Feng G.** Stability analysis of fuzzy continuous time dynamic system. *In Proc. of the ICARCV, Singapore, 1996.* pp. 1269–1273.
- [Chi96a] **Chilali M.** *Méthodes LMI pour l'analyse et la synthèse multi-critère.* Doctorat de l'Université Paris-IX Dauphine, 1996.
- [Chi96b] **Chilali M., Gahinet P.** $H(\infty)$ design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996. vol. 41, no. 3, pp. 358–367.
- [Daa01a] **Daafouz J., Bernussou J.** Parameter dependent Lyapunov function for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems and Control letters*, 2001. vol. 43, no. 5, pp. 355–359.
- [Daa01b] **Daafouz J., Riedinger P., Iung C.** Static output feedback control for switched systems. *In Proc. of CDC, Orlando, Florida, 2001.* pp. 2093–2094.
- [Elg97] **Elghaoui L., Oustry F., Aitrami M.** A cone complementary linearisation algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997. vol. 42, no. 8, pp. 1171–1176.
- [Fen01] **Feng G.** An approach to quadratic stabilisation of uncertain fuzzy dynamic systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2001. vol. 48, no. 6, pp. 760–769.
- [Fen02] **Feng G.** Stability analysis of piecewise discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002. vol. 7, no. 7, pp. 1108–1111.
- [Fos93] **Fossard A. J., Normand-Cyrot D.** (*sous la direction de*). *Systèmes non linéaires, tome 2.* Masson, Paris, 1993.

- [Gah95] **Gahinet P., Nemirovski A., Laub A., Chilali M.** *LMI control toolbox*. The Math Works inc, 1995.
- [Gah96] **Gahinet P., Apkarian P., Chilali M.** Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996. vol. 41, no. 3, pp. 436–442.
- [Gar97] **Garcia G.** Contribution à la synthèse de lois de commande robuste par l’approche quadratique. *HDR, Université Paul Sabatier, Rapport LASS no 97543*, 1997.
- [Gar01] **Garcia G., Pradin B., Zeng F. Y.** Stabilization of discrete time linear systems by static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001. 46, no. 12, pp. 1954–1957.
- [Gas00] **Gasso K.** *Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multimodèle*. Doctorat de l’Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 2000.
- [Ger96] **Geromel J. C., Peres, P. L. Souza S. R.** Convex analysis of output-feedback control problems : robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996. vol. 41, no. 7, pp. 997–1003.
- [Gor98] **Gorez R., Calcev G., De Neyer M.** Passivity approach to fuzzy control systems. *Automatica*, 1998. no. 36, pp. 339–344.
- [Gou02] **Gouaisbaut F., Dambrine D., Richard J. P.** Sliding mode control of linear delay systems : a design via LMIs. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2002. no. 19, pp. 83–94.
- [Gue99a] **Guerra T. M., Vermeiren L., Delmotte F., Borne P.** Lois de commande pour systèmes flous continus. *APII-JESA*, 1999. vol. 33, no. 4/1999, pp. 489–527.
- [Gue99b] **Guesta F., Gordillo F., Aracil J., Ollero A.** Stability analysis of nonlinear multivariable T-S fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999. vol. 7, no. 5, pp. 508–519.
- [Gue01a] **Guerra T-M., Vermeiren L.** Conditions for non quadratic stabilization of discrete fuzzy models. *IFAC advances in fuzzy and neural control, Valancia, Spain*, 2001. pp. 15–20.
- [Gue01b] **Guerra T. M., Vermeiren L.** Control laws for takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Set and Systems*, 2001. vol. 33, no. 120, pp. 95–108.
- [Han00] **Han Z. X., Feng G., Walcott B. L., Ma J.** Dynamic output feedback controller design for fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics-part C*, 2000. vol. 30, no. 1, pp. 204–210.
- [Has98] **Hassibi A., Boyd S.** Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems. *In Proc. of the CDC, Florida, USA*, 1998. pp. 3659–3664.

- [Has99] **Hassibi A., How J., Boyd S.** A path-following method for solving BMI problems in control. *In Proc. of ACC, San Diego, California, 1999.* pp. 1385–1389.
- [Hen99] **Henrion D., Tarbouriech S., Sebek M.** Rank-one LMI approach to simultaneous stabilization of linear systems. *Systems and Control letters*, 1999. vol. 38, no. 2, pp. 79–89.
- [Hen01] **Henry D.** *Diagnostic et contrôle de cohérence des systèmes multivariables incertains.* Doctorat de l'Université de Bordeaux I., 2001.
- [Hon00] **Hong S.K., Langari R.** An LMI-based H(inf) fuzzy control system design with T-S framework. *Information Sciences*, 2000. no. 123, pp. 163–179.
- [Isi99] **Isidori A.** *Nonlinear control systems II.* Springer-Verlag, London, 1999.
- [Jad99] **Jadbabaie A.** A reduction in conservatism in stability and L2 gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities. *In Proc. of the IFAC, China, 1999.* pp. 285–289.
- [Joh92] **Johansen T. A., Foss A. B.** Nonlinear local model representation for adaptive systems. *In Proc. of Int. Conf. on Intelligent Control and Instrumentation, Singapore, 1992.* pp. 677–682.
- [Joh99a] **Johansen M.** *Piecewise linear control systems.* Doctorat de Lund Institut, Suède, 1999.
- [Joh99b] **Johansson M., Rantzer A., Arzén K.** Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999. vol. 7, no. 6, pp. 713–721.
- [Joh00] **Johansen T. A.** Computation of Lyapunov function for smooth nonlinear systems using convex optimization. *Automatica*, 2000. no. 36, pp. 1617–1626.
- [Kar84] **Karmarkar N.** A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 1984. 4, no. 4, 373–395.
- [Kha80] **Khailath T.** *Linear systems.* Englewoodcliffs, USA, 1980.
- [Kha96] **Khalil H.** *Nonlinear systems.* Prentice-Hall, Inc. second edition, USA, 1996.
- [Kim95] **Kim W.C., Ahn S.C., Kwon W.H.** Stability analysis and stabilisation of fuzzy state space models. *Fuzzy Set and Systems*, 1995. no. 71, pp. 131–142.
- [Kim00] **Kim E., Lee H.** New approaches to relaxed quadratic stability of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000. vol. 8, no. 5, pp. 523–534.
- [Kir96] **Kiriadis K., Grivas A., Tzes A.** Quadratic stability analysis of the T-S fuzzy model. *Fuzzy Set and Systems*, 1996. no. 98, pp. 1–14.
- [Li 00] **Li J., Wang H. O., Newmann D., Tanaka K.** Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems : An LMI approach. *Information Sciences*, 2000. no. 123, pp. 201–221.

- [Lia99] **Liao J., Er M. J.** Stability analysis and systematic design of fuzzy controllers with simplified linear control rules. *In Proc. of the CDC, Phoenix, Arizona, USA, 1999.* pp. 4864–4869.
- [Lin01] **Lin D., Er M. J.** A new approach for stabilising nonlinear systems with time delay. *In Proc. of the ECC, Porto, Portugal, 2001.* pp. 114–119.
- [Lop99] **Lopez-Toribio C.J., Patton R.J.** T-S fuzzy fault-tolerant control for a non-linear system. *In Proc. of CDC, Phoenix, USA, 1999.* pp. 4368–4373.
- [Lun92] **Lunz J.** *Feedback control of large-scale systems.* Prentice Hall Int., U.K, 1992.
- [Ma 98] **Ma X. J., Sun Z., He Y.** Analyse and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1998.* vol. 6, no. 1, pp. 41–51.
- [Mag99] **Magarotto E.** *Approche LMI pour la synthèse de correcteurs et d'observateurs : Application aux systèmes spatiaux et bilinéaires.* Doctorat de l'Université de Nancy I, 1999.
- [Mar95] **Marin J.P.** Necessary and sufficient conditions for quadratic stability of a class of T-S fuzzy systems. *LFA '95, Paris, France, 1995.* pp. 240–247.
- [Mor00a] **Morère Y.** *Mise en oeuvre de lois de commandes pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno.* Doctorat de l'université de Valenciennes et du Haut Cambrésis, Lille, 2000.
- [Mor00b] **Morère Y., Guerra T-M., Vermeiren L.** Stabilité et stabilisation non quadratique de modèles flous discrets. *CIFA, Lille, France, 2000.* pp. 69–73.
- [Mur97] **Murray-Smith R.** *Multiple model approaches to modelling and control.* Taylor and Francis, 1997.
- [Nar94] **Narendra K. S., Balakrishnan J.** A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control, 1994.* vol. 39, no. 12, pp. 2469–2471.
- [Nes94] **Nesterov Y., Nemirovski A.** Interior point polynomial methods in convex programming : theory and applications. *SIAM, Philadelphia, PA, 1994.*
- [Ngu98] **Nguyen H. T., Sugeno M.** *Fuzzy systems, modelling and control.* Kluwer academic publishers, USA, 1998.
- [Nik95] **Nikoukha R., Delebeque F., ElGhaoui L.** *LMI Tool : A package for LMI optimization in scilab.* INRIA, Rocquencourt, 1995, <http://www.rocq.inria.fr/scilab/>.
- [Oht01] **Ohta Y.** On the construction of piecewise linear Lyapunov functions. *In Proc. of the CDC, Orlando, Florida, 2001.* pp. 2173–2178.
- [Oli99] **Oliveira M. C., Bernussou J., Geromel J. C.** A new discrete-time robust stability condition. *Systems and Control letters, 1999.* vol. 37, no. 4, pp. 261–265.

- [Pag01] **Pagès O.** *Etude et comparaison de différentes structures de commande multicontrolleurs : Application à un axe robotisé.* Doctorat de l'Université de Savoie, 2001.
- [Par01] **Park J., Kim J., Park D.** LMI-based design of stabilizing fuzzy controllers for nonlinear systems described by T-S fuzzy model. *Fuzzy Set and Systems*, 2001. no. 122, pp. 73–82.
- [Per97] **Perruquetti W., Richard J. P., Borne P.** A generalized regular form for sliding mode stabilization of MIMO systems. *In Proc. of the 36th CDC, Orlando, Florida, 1997.*
- [Pet87] **Petersen I. R.** A procedure for simultaneously stabilizing a collection of single input linear systems using non-linear state feedback control. *Automatica*, 1987. no. 23, pp. 33–40.
- [Pet97] **Peterson S., Lennertson B.** An LMI approach for stability analysis of non linear systems. *In Proc. of the ECC, Brussels, Belgique, 1997.*
- [Rag01] **Ragot J.** Différentes formes multimodèles. *CRAN-INPL, Nancy, note interne*, 2001.
- [Ric01] **Richard J. P.** (sous la direction de). *Algèbre et analyse pour l'automatique.* Hermès Science, France, 2001.
- [Sel91] **Seliger R., Frank P.M.** Fault-Diagnosis by disturbance decoupled nonlinear observers. *In Proc. of the CDC, Brighton, England, 1991.* pp. 2248–2253.
- [Sez88] **Sezer M. E., Siljak D. D.** Robust stability of discrete systems. *International Journal of Control*, 1988. vol. 48, no. 5, pp. 2055–2063.
- [Sug88] **Sugeno M., Kang G. T.** Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Set and Systems*, 1988. no. 28, pp. 15–33.
- [Tak85] **Takagi M., Sugeno M.** Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics-part C*, 1985. vol. 15, no. 1, pp. 116–132.
- [Tan96] **Tanaka K., Ikeda T., Wang H. O.** Robust stabilisation of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stability, $H(\infty)$ control theory, and LMIs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996. vol. 4, no. 1, pp. 1–12.
- [Tan98a] **Tanaka K., Ikeda T., Wang H. O.** Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-Based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1998. vol. 6, no. 2, pp. 1–16.
- [Tan98b] **Tanaka K., Nishimura M., Wang H. O.** Multi-objective Fuzzy control of High rise /High speed elevators using LMIs. *In Proc. of the ACC, Philadelphia, USA, 1998.* pp. 3450–3454.

- [Tan01a] **Tanaka K., Hori T., Wang H. O.** A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control and design. *In Proc. of the ACC, Arlington, USA*, 2001. pp. 4790–4795.
- [Tan01b] **Tanaka K., Hori T., Wang H. O.** New parallel distributed compensation using time derivative of membership functions : A fuzzy Lyapunov approach. *In Proc. of the CDC, Orlando, Florida*, 2001. pp. 3942–3947.
- [Tei99] **Teixeira M. C. M., Zak S. H.** Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999. vol. 7, no. 2, pp. 133–140.
- [Tei01] **Teixeira M. C. M., Assunção E., Pietrobom H. C.** On relaxed LMI-based design for fuzzy regulators and fuzzy observers. *In Proc. of the ECC, Porto, Portugal*, 2001. pp. 120–125.
- [Utk92] **Utkin V.** *Sliding modes in control optimization*. Springer-Verlag, USA, 1992.
- [Vid93] **Vidyasagar M.** *Nonlinear systems analysis*. Prentice hall, second edition, 1993.
- [Wan96] **Wang H. O., Tanaka K., Griffin M.** An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996. vol. 4, no. 1, pp. 14–23.
- [Wei91] **Weinmann A.** *Uncertain models and robust control*. Springer-Verlag, Wien, 1991.
- [Yon00] **Yoneyama J., Nishikawa M., Katayama H., Ichikawa A.** Output stabilization of T-S fuzzy systems. *Fuzzy Set and Systems*, 2000. no. 111, pp. 253–266.
- [Zad73] **Zadeh L.** Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics-part C*, 1973. 3, no. 1, 28–44.
- [Zak99] **Zak S. H.** Stabilizing fuzzy systems using linear controller. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999. vol. 7, no. 2, pp. 233–240.
- [Zen00] **Zeng K., Zhang N. Y., Xu W. L.** A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000. vol. 8, no. 6, pp. 773–780.
- [Zha01] **Zhang J.M., Li R. H., Zhang P. A.** Stability analysis and systematic design of fuzzy control systems. *Fuzzy Set and Systems*, 2001. no. 120, pp. 65–72.

Index

- BMI, **13**
 - Contrainte de rang, **95**
 - Contrainte structurelle, **103**
 - Définition, **34**
 - Formulation par complémentarité sur le cône, **112**
 - Linéarisation, **51**
 - Changement de variables, **34**
 - Contrainte de rang, **34**
 - Techniques d'élimination, **34**
 - Linéarisation locale, **86**
 - Linéarisation par approximation, **92**
 - Linéarisation par itération, **81**
 - Procédure de résolution, **64**
- Commandable, Stabilisable, **49**
 - Localement commandable, **49**
 - Multicommandabilité, **127**
- Commande
 - Commande floue, **15**
 - Commande OPDC, DPPDC, **48**
 - Commande PDC, PPDC, CDF, **46, 47**
 - Lois de commande, **12**
 - Synthèse par OPDC, **102, 108**
 - Synthèse par PDC, CDF, **49, 52, 56, 57, 59, 83, 86, 90, 93**
- Complémentarité sur le cône, **14, 101**
 - Formulation, **112, 114**
- Conservatisme, **18, 25**
- Convexité, **30**
 - Ensemble (fonction) convexe, **30**
- Estimation d'état, **13, 95–97**
 - Variables de décision mesurables, **59**
 - Variables de décision non mesurables, **63**
- Flou, **15, 16**
 - Approximation universelle, **15**
 - Modèle Mamdani, **15**
 - Modèle Takagi-Sugeno, **15**
- IDL
 - Inclusion Différentielle Linéaire, **25**
- LMI
 - Formulation LMI, **12**
 - LMI non strictes, **33**
 - Techniques d'analyse, **32**
- Lyapunov, **12, 13**
 - Fonctions de Lyapunov, **27**
 - Fonctions polyquadratiques, **28**
 - Fonctions quadratiques, **27**
 - Fonctions quadratiques par morceaux, **29**
 - Stabilité au sens de Lyapunov, **26**
- M-matrices, **12**
 - Analyse de stabilité, **41**
 - Heuristique de résolution, **43**
 - Propriétés, **135**
- Multimodèle, **11**
 - Identification, **16**
 - Linéarisation, **17**
 - Modèle de Takagi-Sugeno, **15**
 - Stabilité des multimodèles, **12**
 - Transformation, **18**
- Multiobservateur, **59**
 - Convergence asymptotique, **95, 97**
 - Convergence exponentielle, **60**

-
- Entrées inconnues, **66**
 - Observable, Détectable, **49**
 - Multiobservabilité, **127**
 - Polytope, **25**
 - Domaine d'attraction, Maximisation de volume, **41**
 - Stabilisation
 - Retour d'état, **37, 38, 46, 50, 82, 87, 89**
 - Retour de sortie, **101–103, 108, 116, 118, 122**
 - Stabilité
 - Définition, **26**
 - Stabilité exponentielle, **39**
 - Stabilité globale, **38**
 - Stabilité locale, **40**
 - Stabilité non quadratique, **68, 78**
 - Stabilité quadratique, **25, 28, 38, 45**
 - Ellipsoïde invariant, **40**
 - Taux de décroissance, **13, 37, 39, 52, 57, 105, 108, 125**