IDENTIFICATION D'UN SYSTEME A PLUSIEURS MODES DE FONCTIONNEMENT

Elom DOMLAN, José RAGOT, Didier MAQUIN

http ://www.ensem.inpl-nancy.fr/Jose.Ragot/
Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL)

Modélisation, Optimisation et Simulation des Systèmes :
Communication, Coopération et Coordination
Paris, 31 mars - 2 avril 2008

Système à plusieurs modes de fonctionnement

Les trois points importants de l'exposé

Rechercher les modes de fonctionnement d'un système
Identifier les modes de fonctionnement d'un système
Robustesse de l'identification vis-à-vis des mesures aberrantes

Hypothèses

Nombre de modes connu à priori
On dispose de mesures des variables du système

Plan de l’exposé

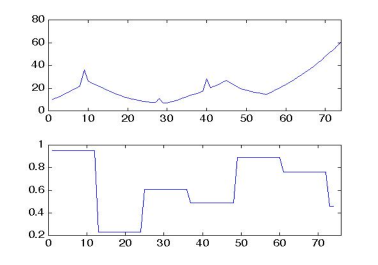
- Généralités sur les systèmes à plusieurs modes de focntionnement
- Identification des paramètres
- Robustesse vis-à-vis des mesures aberrantes
- Conclusion

1. Système a commutation : exemple académique

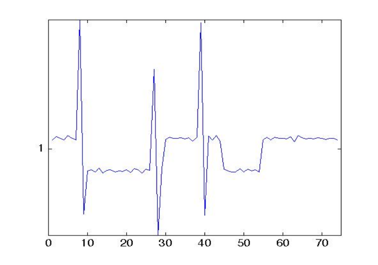
Modèle d'un système à commutation (deux modes de fonctionnement)

$$y_{k+1} = a(\theta_k) y_k + u_k$$

$$a(\theta_k) = \begin{cases} a_1 \text{ si } \theta_k - 0.5 \geq 0 \\ a_2 \text{ si } \theta_k - 0.5 < 0 \end{cases}$$

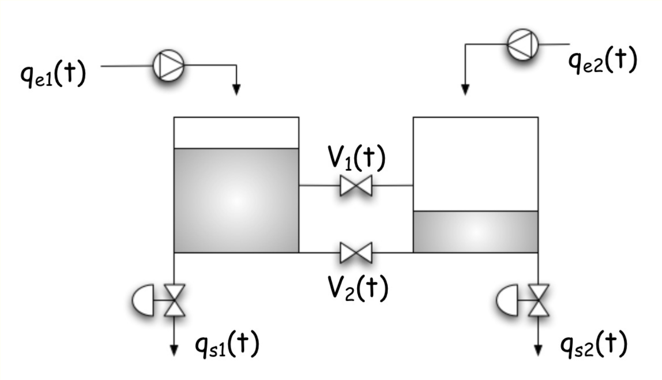


Evolution de y et de u



Evolution de a

1. Système a commutation : exemple physique



Problème P_1 : $\{q_{e_1}, q_{e_2}, q_{s_1}, q_{s_2}, V_1, V_2\} \rightarrow \{h_1(t), h_2(t)\}$

Problème P_2 : $\{q_{e_1}, q_{e_2}, q_{s_1}, q_{s_2}\} \rightarrow \{h_1(t), h_2(t), V_1(t), V_2(t)\}$

Problème P_3 : instrumentation minimale pour le diagnostic

1. Modèle d'un système à deux modes de fonctionnement

- Modèles locaux
  Mode de fonctionnement 1 : modèle M_1
  Mode de fonctionnement 2 : modèle M_2

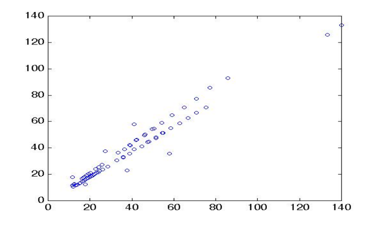
- Loi de commutation $\mu(x)$
  $M = M_1$ si $\mu(x) > 0, \qquad M = M_2$ si $\mu(x) < 0$
  $M = \frac{1}{2}\left((M_1 + M_2) + (M_1 - M_2)sgn(\mu(x))\right)$

- Modèle à transition « douce » ou multi-modèle
  $M = \frac{1}{2}\left((M_1 + M_2) + (M_1 - M_2)f(\mu(x))\right)$
  où f « approxime » la fonction signe

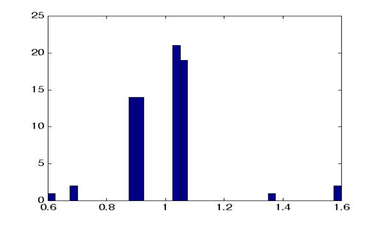
1. Système à commutation : problème inverse

- Caractérisation des modes de fonctionnement $y_{k+1} = a(\theta_k) y_k + u_k$
- Représentation des données dans le plan $\{y_{k+1} - u_k, y_k\}$
- Estimation naïve de a

$$a = \frac{y_{k+1} - u_k}{y_k}$$



Domaine temporel



Histogramme

- Généralisation ?

2. Estimation des paramètres du modèles à commutation

$$M_1 : y_{k+1} - a_1 y_k - u_k = 0$$
$$M_2 : y_{k+1} - a_2 y_k - u_k = 0$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{k=1}^{N} \left((y_{k+1} - a_1 y_k - u_k)(y_{k+1} - a_2 y_k - u_k)\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left((\tilde{y}_{k+1} - a_1 y_k)(\tilde{y}_{k+1} - a_2 y_k)\right)^2, \qquad \color{red}{\tilde{y}_{k+1} = y_{k+1} - u_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\tilde{y}_{k+1}^2 - (a_1 + a_2)\tilde{y}_{k+1} y_k + a_1 a_2 y_k^2\right)^2
\end{aligned}$$

En posant $S = a + b$ et $P = ab$, il est simple de montrer que S et P vérifient :

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} \tilde{y}_{k+1}^2 y_k^2 & \sum_{k=1}^{N} \tilde{y}_{k+1} y_k^3 \\ \sum_{k=1}^{N} \tilde{y}_{k+1} y_k^3 & \sum_{k=1}^{N} y_k^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} \tilde{y}_{k+1}^3 y_k \\ \sum_{k=1}^{N} \tilde{y}_{k+1}^2 y_k^2 \end{pmatrix}$$

2. Estimation des paramètres du modèles à commutation

- On considère un système caractérisé par des variables $x \in \mathcal{R}^K$ et pouvant prendre deux modes de fonctionnement. Chaque mode est décrit par un modèle local linéaire par rapport à ses paramètres :

$$\begin{aligned} a^T x = 0, &\quad a \in \mathcal{R}^K \\ b^T x = 0, &\quad b \in \mathcal{R}^K \end{aligned}$$

- Modèle global du système : forme 1

$$f(x) = (a^T x)\,(b^T x) = 0$$

- Modèle global du système : forme 2

$$f(x) = \sum_{n_1 \ldots n_K} p_{n_1 \ldots n_K} x_1^{n_1} \ldots x_K^{n_K} = 0$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_K = 2, \quad 0 \leq n_j \leq 2, \quad j = 1 \ldots K$$

2. Estimation des paramètres du modèles à commutation

- A titre d'exemple, on se place dans le cas $K = 3$, le système étant alors caractérisé par trois variables x_1, x_2 et x_3, le modèle s'explicitant :

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0$$

$$p_{200}x_1^2 + p_{110}x_1x_2 + p_{101}x_1x_3 + p_{020}x_2^2 + p_{011}x_2x_3 + p_{002}x_3^2 = 0$$

- Estimation des paramètres $p_{n_1 \dots n_K}$: régression linéaire
- Inversion : on identifie les deux expressions de f :

$$\begin{aligned}
p_{200} &= a_1b_1 \\
p_{110} &= a_1b_2 + a_2b_1 \\
p_{101} &= a_1b_3 + a_3b_1 \\
p_{020} &= a_2b_2 \\
p_{011} &= a_2b_3 + a_3b_2 \\
p_{002} &= a_3b_3
\end{aligned}$$

Principe de résolution

- Système à résoudre

$$S\left\{\begin{array}{l} p_{200}=a_1b_1 \\ p_{110}=a_1b_2+a_2b_1 \\ p_{101}=a_1b_3+a_3b_1 \\ p_{020}=a_2b_2 \\ p_{011}=a_2b_3+a_3b_2 \\ p_{002}=a_3b_3 \end{array}\right.$$

- Résolution hiérarchisée

$$S_1\left\{\begin{array}{ll} p_{020} & =a_2b_2 \\ p_{011} & =a_2b_3+a_3b_2 \\ p_{002} & =a_3b_3 \end{array}\right.$$

$$S_2\left\{\begin{array}{ll} p_{200} & =a_1b_1 \\ p_{101} & =a_1b_3+a_3b_1 \\ p_{002} & =a_3b_3 \end{array}\right.$$

$$S_3\left\{\begin{array}{ll} p_{200} & =a_1b_1 \\ p_{110} & =a_1b_2+a_2b_1 \\ p_{020} & =a_2b_2 \end{array}\right.$$

2. Estimation des paramètres du modèles à commutation

- Les rapports a_2/a_3 et b_2/b_3 sont solutions de l'équation en α_{23} :

$$p_{002}\alpha_{23}^2 - p_{011}\alpha_{23} + p_{020} = 0 \tag{1}$$

- De même, les rapports a_3/a_1 et b_3/b_1 sont solutions de l'équation :

$$p_{200}\alpha_{31}^2 - p_{101}\alpha_{31} + p_{002} = 0 \tag{2}$$

- Enfin, les rapports a_1/a_2 et b_1/b_2 sont solutions de l'équation :

$$p_{020}\alpha_{12}^2 - p_{110}\alpha_{12} + p_{200} = 0 \tag{3}$$

- Les racines des équations fournissent les rapports a_2/a_3, a_3/a_1 et a_1/a_2. Les rapports b_2/b_3, b_3/b_1 et b_1/b_2vérifient également ces équations.
- Ces rapports sont liés par l'équation de « compatibilité » :

$$\frac{a_2}{a_3}\,\frac{a_3}{a_1}\,\frac{a_1}{a_2} - 1 = 0$$

2. Estimation des paramètres du modèles à commutation

• Finalement, en exprimant a_2 et a_3 en fonction de a_1 et des rapports qui viennent d'être identifiés, les modèles locaux s'écrivent sous la forme :

$$p_1(x) = a_1(x_1 + \alpha_{31}\alpha_{23}x_2 + \alpha_{31}x_3)$$

• Cette écriture laisse supposer la présence de huit modèles puisque α_{12}, α_{23} et α_{31} prennent chacun deux valeurs. En réalité, ce nombre est plus restreint car il reste à prendre en compte l'équation de compatibilité. Il faut en effet noter que les rapports α_{23}, α_{31} et α_{12} sont liés, la quantité :

$$\tau = \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - 1$$

devant être nulle.

2. Estimation des paramètres du modèle à commutation

Exemple. Supposons que l'identification des coefficients du polynôme conduise aux résultats suivants :

$$f(x) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_3 + 2x_2^2 + 7x_2x_3 + 3x_3^2$$

La résolution des équations donne les solutions respectives :

$$\alpha_{23} = 2 \text{ et } \frac{1}{2}$$
$$\alpha_{31} = 2 \text{ et } \frac{1}{3}$$
$$\alpha_{12} = \frac{3}{2} \text{ et } 1$$

2. Estimation des paramètres du modèles à commutation

- La contrainte de compatibilité $\tau = 0$ est utilisée pour déterminer les solutions admissibles. Le tableau rassemble les valeurs de la variable de test τ pour toutes les combinaisons possibles.

α_{12}	α_{23}	α_{31}	τ
2	2	$3/2$	5
2	2	1	3
2	$1/3$	$3/2$	0
2	$1/3$	1	-1/3
$1/2$	2	$3/2$	1/2
$1/2$	2	1	0
$1/2$	$1/3$	$3/2$	-3/4
$1/2$	$1/3$	1	-5/6

- Comme on trouve deux valeurs de τ nulles, il y a donc deux solutions admissibles :

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{3} \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{3}{2} \quad \frac{a_1}{a_2} = 2$$

$$\frac{b_2}{b_3} = 2 \quad \frac{b_3}{b_1} = 1 \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$$

- Les deux modèles locaux s'explicitent donc :

$$p_1(x) = a_2(2x_1 + x_2 + 3x_3)$$
$$p_2(x) = b_1(x_1 + 2x_2 + x_3)$$

2. Estimation des paramètres du modèle à commutation

- **Remarque** : en raison des incertitudes dans les données, la contrainte $\tau = 0$ n'est généralement pas vérifée. Considérons par exemple :

$$f(x) = 2x_1^2 + 5.1x_1x_2 + 5x_1x_3 + 2.1x_2^2 + 6.9x_2x_3 + 3x_3^2$$

- Résolution des équations

$$\alpha_{23} = 1.937 \text{ et } 0.492$$
$$\alpha_{31} = 1.939 \text{ et } 0.361$$
$$\alpha_{12} = 1.500 \text{ et } 1.000$$

- Test de compatibilité

α_{12}	α_{23}	α_{31}	test
1.937	1.939	1.5	4.633
1.937	1.939	1.0	2.756
1.937	0.361	1.5	0.049
1.937	0.361	1.0	-0.301
0.492	1.939	1.5	0.430
0.492	1.939	1.0	-0.047
0.492	0.361	1.5	-0.734
0.492	0.361	1.0	-0.822

- Aucune valeur de τ ne prend la valeur zéro. On repére les configurations correspondant aux deux tests d'amplitudes les plus faibles (en valeurs absolues), on retrouve les rapports admissibles :

$$\frac{a_1}{a_2} = 1.937, \frac{a_2}{a_3} = 0.361, \frac{a_3}{a_1} = 1.5$$
$$\frac{b_1}{b_2} = 0.492, \frac{b_2}{b_3} = 1.939, \frac{b_2}{b_1} = 1.0$$

3. Estimation robuste des paramètres du modèle à commutation

- Pour simplifier les notations, le modèle est exprimé sous la forme :

$$\phi\theta = 0$$

ϕ : vecteur des régresseurs (dépendant des variables d'état x)
θ : vecteur des paramètres.

- Lorsque ϕ est issu de mesures, le modèle est modifié sous la forme :

$$\tilde{\phi}\theta = e$$

e : erreur d'équation qui résulte de la substitution des valeurs vraies du régresseur par les valeurs issues des mesures.

- Pour les différentes mesures, on a :

$$\tilde{\phi}_k\theta = e_k$$

3. Estimation robuste des paramètres du modèle à commutation

- Loi de distribution des erreurs de mesure :

$$p(e_k) = \pi p_1(e_k) + (1-\pi)p_2(e_k)$$

- Définitions des lois partielles où $\sigma_2 >> \sigma_1$:

$$p_1(e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{e_k}{\sigma_1}\right)^2\right)$$
$$p_2(e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{e_k}{\sigma_2}\right)^2\right)$$

- Les paramètres π, σ_1 et σ_2 caractérisent la forme de cette distribution dite contaminée. Le terme π est lié à la proportion de valeurs aberrantes présentes dans les données.

3. Estimation robuste d'une moyenne de série contaminée

- Loi ne distribution de x

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma_1}\right)^2\right) \\ p_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma_2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

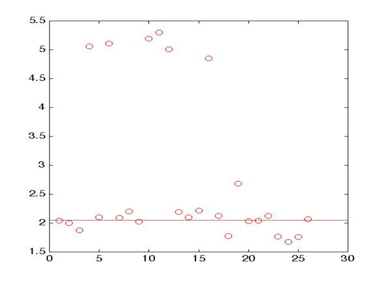
$$p(x) = \pi p_1(x) + (1-\pi)p_2(x) \quad \rightarrow \quad \mathcal{V} = \sum_{i=1}^{N} log\, p(x_i)$$

- Optimalité par rapport à la moyenne m

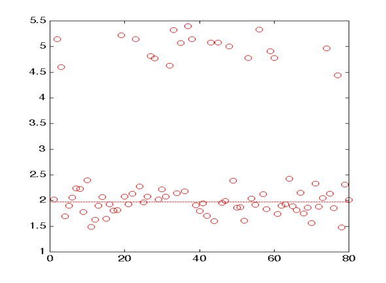
$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial m} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p(x_i)}\left(\pi \frac{p_1(x_i)}{\sigma_1^2}(x_i - m) + (1-\pi)\frac{p_2(x_i)}{\sigma_2^2}(x_i - m)\right)$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{p(x_i)}\left(\pi \frac{p_1(x_i)}{\sigma_1^2} + (1-\pi)\frac{p_2(x_i)}{\sigma_2^2}\right)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p(x_i)}\left(\pi \frac{p_1(x_i)}{\sigma_1^2} + (1-\pi)\frac{p_2}{\sigma_2^2}\right)}$$

3. Estimation robuste d’une moyenne de série contaminée



Evolution de *x* et de *u*



Evolution de *x*

Moyenne « ordinaire » : 2.05
Moyenne « robuste » : 2.74

3. Principe de l'estimation robuste des paramètres du modèle à commutation

Mise en œuvre pratique de l'estimation :

- E1 : former la matrice des données W à partir des régresseurs du modèle
- E2 : initialiser des paramètres θ du modèle
- E3 : calculer les résidu de modèle $e = W\theta$
- E4 : évaluer des distributions partielles
- E5 : évaluer des poids w_k et de la matrice des poids $W = diag(p_k)$
- E6 : calculer du vecteur propre θ associé à la plus petite valeur prope de W
- E7 : retourner en E3 ou stop si convergence de la solution θ atteinte.

3. Estimation robuste des paramètres du modèle à commutation

- A titre d'exemple, considérons les données obtenues à partir du système à deux modes de fonctionnement :

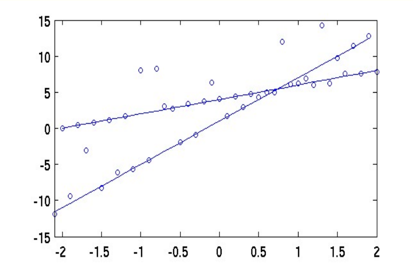
$$(\phi^T\theta_1)(\phi^T\theta_2) = 0$$

$$\phi^T = \begin{pmatrix} y & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \end{pmatrix}$$

	a	b	c
mode 1	1	-2	-4
mode 2	1	-6	-1

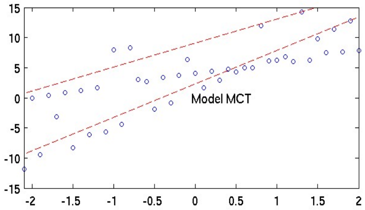
- Donnés générées
40 couples $x_i,\ y_i$ avec bruit aléatoire de valeur moyenne nulle et 6 valeurs aberrantes.

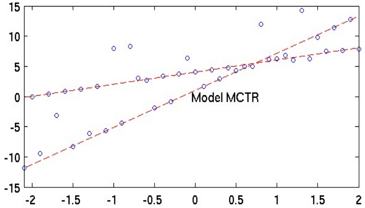


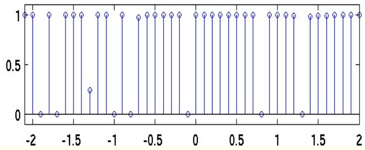
3. Estimation robuste des paramètres du modèle à commutation

	Par. vrais	MCO	MCR
a_1	1	-1	-1
b_1	-2	-4.012	-1.939
c_1	-4	-9.245	-3.979
a_2	1	-1	1
b_2	-6	-5.527	-6.327
c_2	-1	-2.305	-1.047

TAB.: Paramètres vrais et estimés







Pondérations

Identification

Conclusions et perspectives

Résultats

- Modélisation de systèmes à plusieurs modes de fonctionnement
- Classification des données par mode de fonctionnemt

Extensions directes

- Nombre de modèles locaux quelconque
- Systèmes dynamiques

Perspectives

- Détermination en ligne des instants de changement de mode
- Intervalle de confiance des paramètres. Agrégation des modes voisins
- Reconnaissance de nouveaux modes de fonctionnement
- Excitations optimales pour révéler les modes de fonctionnement