

Estimation des bornes de l'état d'un système incertain.
Approche par intervalles

Estelle CHERRIER, Mohamed BOUTAYEB, José RAGOT

CRAN UMR 7030 (Nancy) et LSITT UMR 7005 (Strasbourg)

Plan

- ❑ Motivation
- ❑ Exemples de système incertain
- ❑ Système générateur d'enveloppe
- ❑ Analyse de stabilité
- ❑ Exemple
- ❑ Conclusion, perspectives

Motivation

- ☞ la modélisation introduit des paramètres incertains
 - ☞ l'identification d'un paramètre fournit aussi son intervalle de confiance
 - ☞ un processus est rarement stationnaire
-
- ☞ hypothèse : les paramètres incertains sont bornés
-
- ☞ analyse des systèmes à paramètres intervalle
 - ☞ synthèse des systèmes à paramètre intervalle

Exemples de système incertain

Modèle

$$x_{k+1} = a_k x_k$$

$$a_k = a + \delta_k$$

$$|\delta_k| \leq \delta$$



$$a_k \in [a - \delta, a + \delta]$$

Hypothèse : les bornes $\underline{a} = a - \delta$ et $\bar{a} = a + \delta$ sont supposées de même signe.

Bornes de la trajectoire $[\underline{x}_k \ \bar{x}_k]$

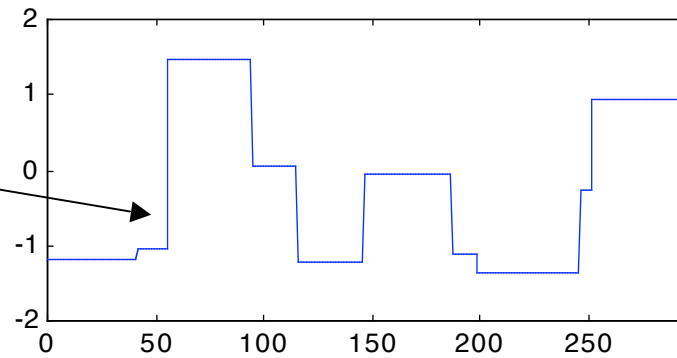
$$\begin{cases} c_k = \frac{1}{2}(\bar{x}_k - \underline{x}_k) \\ r_k = \frac{1}{2}(\bar{x}_k + \underline{x}_k) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} c_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{x}_k + \underline{x}_k & (\underline{x}_k - \bar{x}_k) \operatorname{sgn}(a) \\ (\bar{x}_k - \underline{x}_k) \operatorname{sgn}(a) & \bar{x}_k + \underline{x}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \delta \end{pmatrix}$$

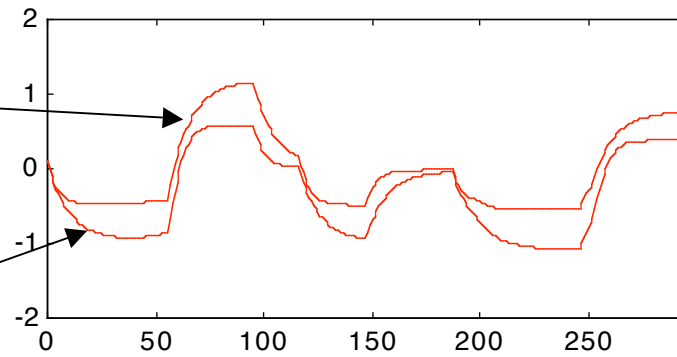
$$\begin{pmatrix} c_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta \operatorname{sgn}(a) & a \\ a \operatorname{sgn}(a) & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

Exemples de système incertain

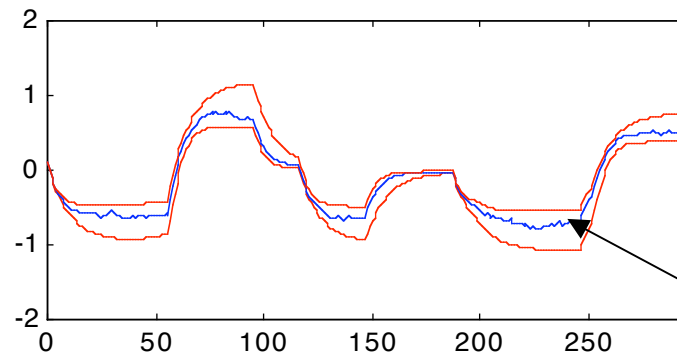
Commande



Borne supérieure



Borne inférieure



Etat

Exemples de système incertain : commutation

$$y_{k+1} = a_k y_k + b_k u_k$$

$$a_k \in \{0.5, 0.8\}$$

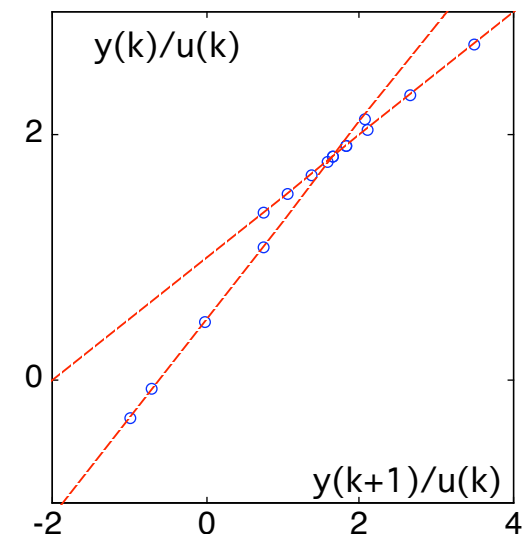
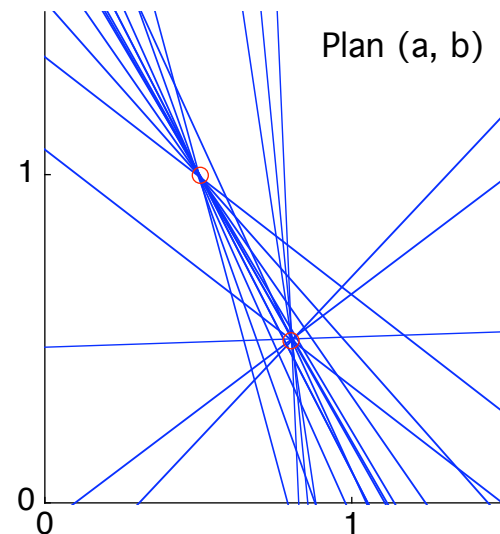
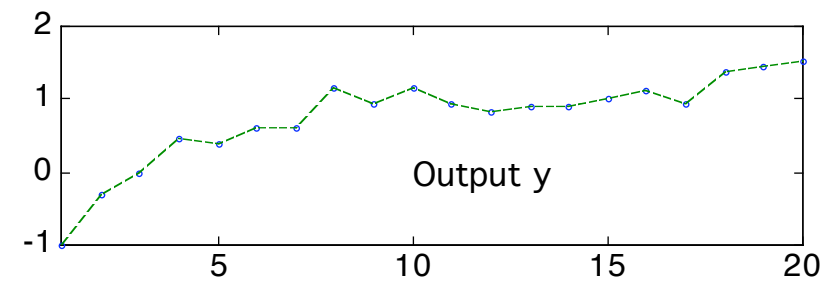
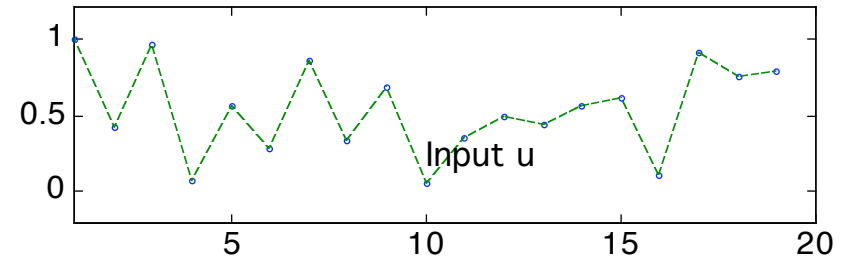
$$b_k \in \{0.5, 1\}$$

Plan $\{y_{k+1}/u_k, y_k/u_k\}$

$$\frac{y_{k+1}}{u_k} = a_k \frac{y_k}{u_k} + b_k$$

Plan $\{a, b\}$

$$a y_k = -b u_k + y_{k+1}$$



Historique « systèmes incertains à paramètres bornés »

- ▶ « Condition for the stability on interval systems » :
B. Shafai, IEEE, 36 (4), 1991
- ▶ Interval analysis :
R.E. Moore, 1966
- ▶ « interval model simulators » :
J. Armengol, 14th IFAC world congress, 1999
- ▶ « state estimation approach based on interval analysis » :
Valdés-Gonzalez, ECC, 2001
- ▶ « parameter estimation using interval analysis » :
C.Y. Gau, Comp. And Chem. Eng., 2000

Système générateur d'enveloppe

Système incertain

$$x_{k+1} = A_k x_k + B u_k$$

$$A_k = A + \Delta_k$$

$$\Delta_k = \left\{ \delta_{ij}(k) \right\}_{i,j=1,\dots,n}, \quad \delta_{ij}(k) \leq \delta_{ij}$$

$$\Delta = \left\{ \delta_{ij} \right\}_{i,j=1,\dots,n}$$

Système générateur d'enveloppe

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \bar{x}_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \underline{x}_k \\ \bar{x}_k \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} |\underline{x}_k| \\ |\bar{x}_k| \end{pmatrix} + E u_k$$

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A + |A| & A - |A| \\ A - |A| & A + |A| \end{pmatrix}$$

$$N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta - \Delta \circ S_A & -\Delta + \Delta \circ S_A \\ \Delta - \Delta \circ S_A & \Delta + \Delta \circ S_A \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}$$

Analyse de stabilité

Système libre

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \bar{x}_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \underline{x}_k \\ \bar{x}_k \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} |\underline{x}_k| \\ |\bar{x}_k| \end{pmatrix} + E u_k \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \\ z_{k+1} &= M z_k + N |z_k| \end{aligned}$$

Fonction de Lyapunov

$$V = z^T P z$$

$$V_{k+1} - V_k = z_k^T (M^T P M - P) z_k + z_k^T M^T P N |z_k| + |z_k^T| M^T P N z_k + |z_k^T| N^T P N |z_k^T|$$

Condition suffisante de stabilité

$$\begin{cases} M^T (P + P^{1/2} S P^{1/2}) M - P = -Q^T Q \\ -1 + \|N\|_F^2 \|P + P^{1/2} S^{-1} P^{1/2}\|_2^2 \|Q^{-1}\|_2^2 < 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad P, Q \quad \longrightarrow \quad \Delta$$

Exemple

Conclusion et perspectives

- ❑ Définition d'un système générateur d'enveloppe
- ❑ Analyse de stabilité
- ❑ Extension aux systèmes à retard

Prise en compte d'incertitudes couplées

- ❑ Caractérisation des intervalles d'incertitude
- ❑ Estimation d'état
- ❑ Diagnostic de fonctionnement