

Estimation d'état des systèmes non linéaires par une approche multimodèle découplé

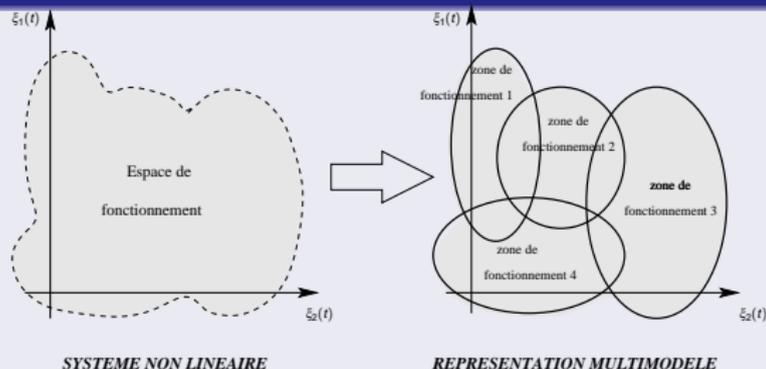
Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR7039, Nancy-Université, CNRS
2, Avenue de la forêt de Haye
54516 Vandœuvre-Lès-Nancy Cedex, France

2^{èmes} Journées Doctorales / Journées Nationales MACS
JD-JN-MACS 2007, 9 – 11 Juillet, 2007, Reims , France



Principe du multimodèle



- Décomposition en zones de fonctionnement
- Un sous-modèle simple modélise chaque zone
- Agrégation judicieuse des sous-modèles

Intérêts des multimodèles

- Propriété d'*approximateur universel*
- Extension des résultats du cas linéaire au cas non linéaire

- 1 Structures des multimodèles
 - Multimodèle de Takagi-Sugeno
 - Multimodèle découplé
- 2 Résultats principaux
 - Stabilité du multimodèle découplé
 - Estimation d'état
- 3 Exemple
- 4 Conclusion

Structures des multimodèles

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à **état unique**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) \mathbf{A}_i \right\} \mathbf{x}(t) + \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) \mathbf{B}_i \right\} u(t), \\ y(t) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) \right\} \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t), \end{array} \right.$$

$$\mu_i(\xi(t)) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1, \forall t \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \end{array} \right. \quad \xi(t) : \text{variable de décision}$$

- Les sous-modèles partagent un même vecteur d'état
- Analogue à un modèle à paramètres variables dans le temps
- **L'ordre des sous-modèles est le même**

Nouvelle structure

Multimodèle **découplé**

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t), \\ y_i(t) = C_i x_i(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t), \end{cases}$$

$$\mu_i(\xi(t)) \begin{cases} \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1, \forall t \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \end{cases} \quad \xi(t) : \text{variable de décision}$$

- L'espace d'état de chaque sous-modèle est indépendant
- La sortie du multimodèle est la somme pondérée des sorties des sous-modèles
- **L'ordre des sous-modèles peut être différent**

Résultats principaux

Réécriture des équations du multimodèle

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u(t), & \dot{x}(t) &= \tilde{A} x(t) + \tilde{B} u(t), \\ y_i(t) &= C_i x_i(t), & y(t) &= \tilde{C}(t) x(t), \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t),$$

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = \sum_{i=1}^L n_i$$

avec :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) C_1^T \\ \vdots \\ \mu_i(t) C_i^T \\ \vdots \\ \mu_L(t) C_L^T \end{bmatrix}^T$$

$$\text{et } x(t) = [x_1^T(t) \quad \cdots \quad x_i^T(t) \quad \cdots \quad x_L^T(t)]^T \in \mathbb{R}^n.$$

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix},$$

- \tilde{A} est une matrice bloc diagonale
- $\lambda(\tilde{A}) \in \mathbb{C}^-$ si et seulement si $\lambda(A_i) \in \mathbb{C}^- \quad \forall \quad i = 1 \dots L$

Structure de l'observateur

Extension de l'observateur de Luenberger classiquement utilisé :

$$\hat{x}_i(t) = A_i \hat{x}_i(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)),$$

$$\hat{y}_i(t) = C_i \hat{x}_i(t),$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \hat{y}_i(t).$$

Réécriture des équations précédentes :

$$\hat{x}(t) = \tilde{A} \hat{x}(t) + \tilde{B} u(t) + \tilde{K} (y(t) - \hat{y}(t)),$$

$$\hat{y}(t) = \tilde{C}(t) \hat{x}(t),$$

$$\tilde{K} = [K_1^T \quad \dots \quad K_i^T \quad \dots \quad K_L^T]^T,$$

$$\tilde{C}(t) = [\mu_1(t) C_1 \quad \dots \quad \mu_i(t) C_i \quad \dots \quad \mu_L(t) C_L],$$

$$\hat{y}(t) = [\hat{y}_1^T(t) \quad \dots \quad \hat{y}_i^T(t) \quad \dots \quad \hat{y}_L^T(t)]^T$$

L'erreur d'estimation donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

et sa dérivée par :

$$\dot{e}(t) = \left(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(t) \right) e(t),$$

$$\dot{e}(t) = A_{obs}(t)e(t),$$

Objectif : Assurer que $\lambda(A_{obs}(t)) \in \mathbb{C}^-$.

Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t), \quad P = P^T \text{ et } P > 0.$$

La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est assurée si :

- 1 $V(e(t)) > 0, \forall t$
- 2 $\dot{V}(e(t)) + 2\alpha V(e(t)) < 0, \forall t$

Théorème (Convergence exponentielle)

S'il existe une matrice symétrique et définie positive P , une matrice G et un scalaire positif α vérifiant les LMIs suivantes :

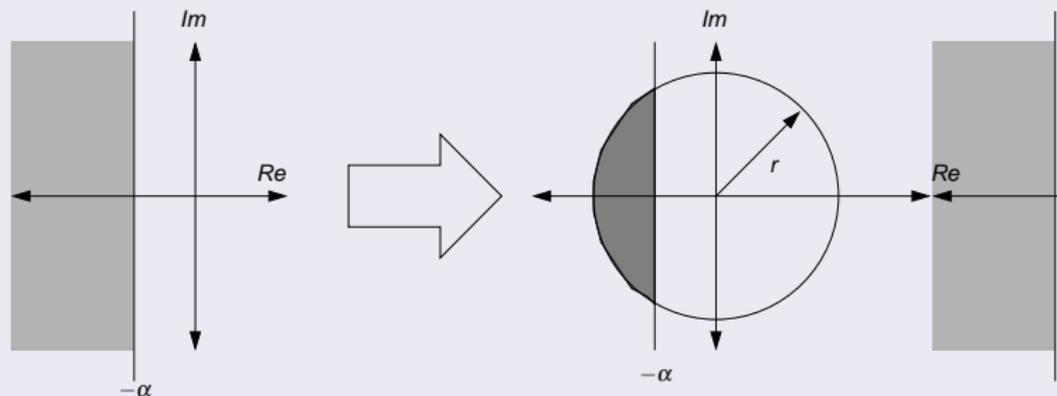
$$(\tilde{A} + \alpha I)^T P + P(\tilde{A} + \alpha I) - (G\tilde{C}_i)^T - G\tilde{C}_i < 0, i = 1 \dots L$$

alors l'observateur est exponentiellement convergent. Le gain de l'observateur est donné par $K = P^{-1}G$.

α est le taux de décroissance qui sert à quantifier la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation.

Remarques sur la convergence exponentielle

- 1 La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est une notion plus forte que la convergence asymptotique (convergence asymptotique $\alpha = 0$)
- 2 La partie réelle des pôles de l'observateur est inférieure à $-\alpha$



- 3 Placement des pôles de l'observateur dans une nouvelle région...

Théorème

Les pôles de l'observateur sont placés dans la région $S(\alpha, r)$ du plan complexe s'il existe une matrice symétrique et définie positive P , une matrice G et deux scalaires positifs α et r vérifiant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} -rP & P\tilde{A} - G\tilde{C}_i \\ \tilde{A}^T P - (G\tilde{C}_i)^T & -rP \end{bmatrix} < 0,$$
$$(\tilde{A} + \alpha I)^T P + P(\tilde{A} + \alpha I) - (G\tilde{C}_i)^T - G\tilde{C}_i < 0,$$

pour $i = 1 \dots L$. Le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P^{-1}G$.

Exemple

Exemple

Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé constitué de $L = 2$ sous-modèles. Les valeurs numériques des matrices A_i , B_i et C_i sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 1 \\ 1 & -0.7 & 0 \\ -2 & 1 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.7 \\ -0.1 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [1 \quad 0.2 \quad 0.5]^T,$$

$$B_2 = [0.5 \quad 1]^T,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 \\ 0.7 & -0.2 & 0.3 \end{bmatrix},$$

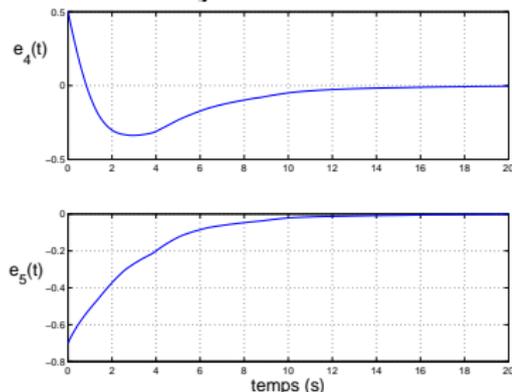
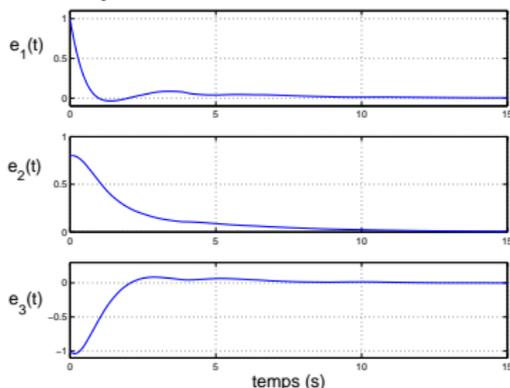
$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ -1 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Exemple

- Les valeurs propres de la matrice \tilde{A} sont toutes dans le demi-plan gauche du plan complexe, le multimodèle est donc stable.
- Une solution, satisfaisant le théorème 2, est donnée par :

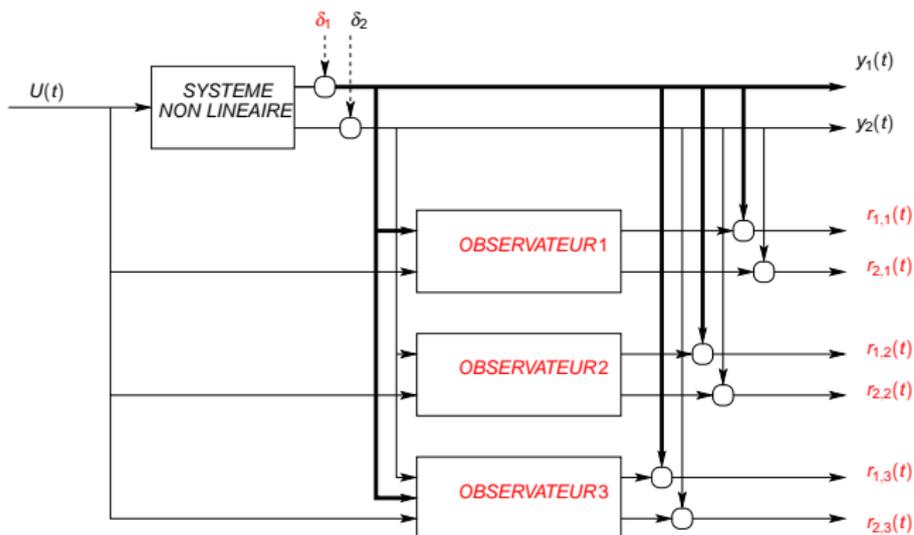
$$\tilde{K} = \left[\underbrace{\begin{array}{ccc} -0.268 & 0.227 & -0.084 \\ -0.031 & 0.183 & -0.299 \end{array}}_{K_1^T} \quad \underbrace{\begin{array}{cc} -0.008 & 0.064 \\ -0.300 & -0.148 \end{array}}_{K_2^T} \right]^T,$$

pour un taux de décroissance $\alpha = 0.18$ et un rayon $r = 1.89$.



Application au diagnostic

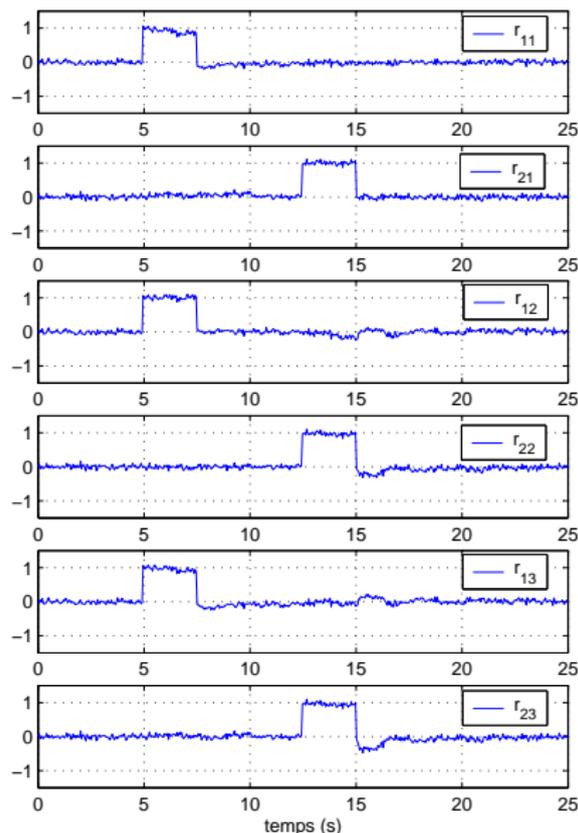
Un banc d'observateurs est utilisé afin de générer des signaux indicateurs de défaut (résidus) $r_{i,j}$



	$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{1,2}$	$r_{2,2}$	$r_{1,3}$	$r_{2,3}$
δ_1	?	?	1	0	?	?
δ_2	0	1	?	?	?	?

Application au diagnostic

- Configuration $r_{1,2}$ et $r_{2,2}$ alors δ_1 entre $5 \leq t \leq 7.5$
- Configuration $r_{1,1}$ et $r_{2,1}$ alors δ_2 entre $12.5 \leq t \leq 15$



Conclusion

- Le multimodèle découplé est une alternative au multimodèle de Takagi-Sugeno
- La dimension des sous-modèles peut être différente
- Utilisation du multimodèle découplé pour l'estimation d'état d'un système non linéaire

Perspectives

- Réduire le conservatisme des conditions obtenues dû à la recherche d'une matrice P de grande dimension
- Synthèse d'autres types d'observateurs, par exemple, observateur proportionnel intégral et observateur à entrées inconnues

Merci !!!