

Conception de multi-observateurs à variables de décision non mesurables

Dalil Ichalal, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR7039, Nancy-Université, CNRS
2, Avenue de la forêt de Haye
54516 Vandœuvre-Lès-Nancy Cedex, France

2èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS
9 – 11 Juillet, 2007, Reims, France



- 1 Introduction
 - Structure multi-modèle
 - Contexte de l'étude
- 2 Estimation d'état
- 3 Extension de la méthode
 - Réduction du conservatisme
- 4 Exemple
- 5 Conclusion

- 1 Introduction
 - Structure multi-modèle
 - Contexte de l'étude
- 2 Estimation d'état
- 3 Extension de la méthode
 - Réduction du conservatisme
- 4 Exemple
- 5 Conclusion

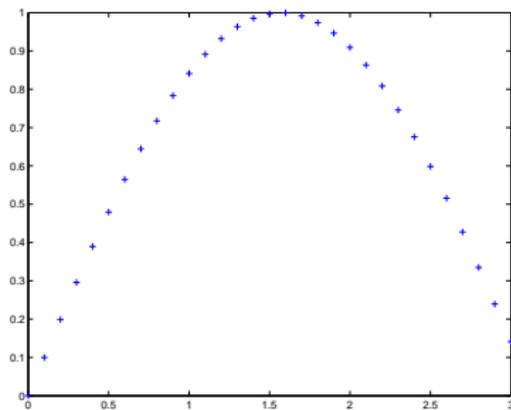
- 1 Introduction
 - Structure multi-modèle
 - Contexte de l'étude
- 2 Estimation d'état
- 3 Extension de la méthode
 - Réduction du conservatisme
- 4 Exemple
- 5 Conclusion

- 1 Introduction
 - Structure multi-modèle
 - Contexte de l'étude
- 2 Estimation d'état
- 3 Extension de la méthode
 - Réduction du conservatisme
- 4 Exemple
- 5 Conclusion

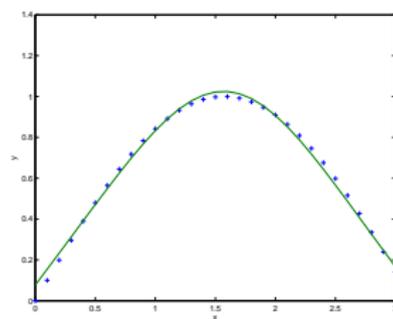
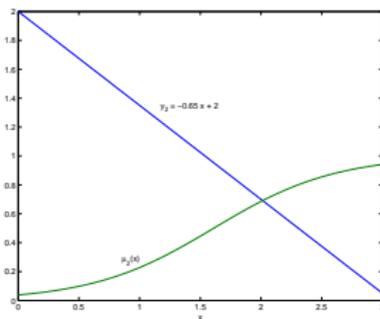
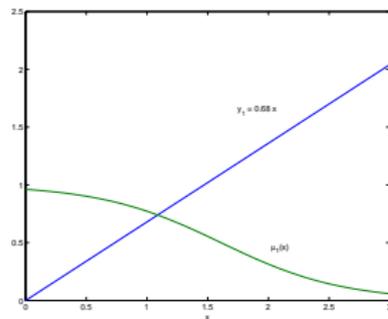
- 1 Introduction
 - Structure multi-modèle
 - Contexte de l'étude
- 2 Estimation d'état
- 3 Extension de la méthode
 - Réduction du conservatisme
- 4 Exemple
- 5 Conclusion

Introduction

$$y = \sin(x)$$



Cas statique



$$y = \mu_1(x)y_1 + \mu_2(x)y_2$$

$$\mu_1(x) + \mu_2(x) = 1$$

$$0 \leq \mu_i(x) \leq 1$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

$$0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) = 1$$

$$i = 1, \dots, n$$

Intérêt des multi-modèles

- Propriété d'approximateur universel.
- Utilisation des outils élaborés dans le cas des systèmes linéaires.
- Absence de l'analyse spécifique de la non-linéarité (cas : $\xi(t)$ mesurable)

Diagnostic à base de modèle

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{\mathbf{x}}(t) + B_i u(t) + G_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (C_i \hat{\mathbf{x}}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

Défauts actionneurs

$$\xi(t) = y(t)$$

Défauts capteurs

$$\xi(t) = u(t)$$

Objectif principal

- Estimation d'état à base de multi-modèle à variables de décision non mesurables pour le diagnostic.
- $\xi(t) = \mathbf{x}(t)$.

Estimation d'état

Multi-modèle

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{\mathbf{x}}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_i(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

l'erreur d'estimation est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation est :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^n (A_i(\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}) + B_i(\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u - \mu_i(\hat{x})G_i C e$$

Hypothèses 1

$$\begin{aligned} |\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| &\leq N_i |x - \hat{x}| \\ \|x(t)\| &\leq \beta_1 \\ \|u(t)\| &\leq \beta_2 \end{aligned}$$

Deuxième méthode de Lyapunov

Considérons la fonction candidate de Lyapunov $V(e(t))$, où $e(t)$ représente l'erreur d'estimation d'état

$$V(e(t)) = e(t)^T P e(t).$$

La convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéros est assurée si:

- 1 $V(e(t)) > 0, \forall t$
- 2 $\dot{V}(e(t)) < 0, \forall t$

En utilisant les hypothèses énoncées, l'étude de la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov conduit aux conditions énoncées dans le théorème 1 sous forme LMI.

Théorème 1 : Convergence asymptotique

L'erreur d'estimation entre le système et le multi-observateur tend asymptotiquement vers zéro s'il existe deux matrices P et Q symétriques et définies positives et des matrices K_i tel que:

$$A_i^T P + P A_i - C^T K_i^T - K_i C < -Q$$
$$\begin{bmatrix} -Q + \theta_i I & P A_i & P B_i \\ A_i^T P & -I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$
$$\theta_i = N_i^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)$$

Les gains G_i sont déduit à partir de $G_i = P^{-1} K_i$.

Réduction du conservatisme

- constantes de Lipschitz et borne sur l'entrée importantes.
- Apparition de la borne sur l'état.

Extension de la méthode

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i, \quad A_i = A_i - A_0 + A_0 = \bar{A}_i + A_0$$

Le système deviendra :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) (\bar{A}_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Réduction du conservatisme

- constantes de Lipschitz et borne sur l'entrée importantes.
- Apparition de la borne sur l'état.

Extension de la méthode

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i, \quad A_i = A_i - A_0 + A_0 = \bar{A}_i + A_0$$

Le système deviendra :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) (\bar{A}_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Structure de l'observateur

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t).\end{aligned}$$

Synthèse des gains K_i

Détermination des gains K_i de l'observateur pour que son état converge asymptotiquement vers l'état du système.

Structure de l'observateur

Réécriture de la structure de l'observateur :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{x}(t)) (\bar{A}_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y(t) - \hat{y}(t))),$$

$$\hat{y}(t) = C \hat{x}(t),$$

$$\bar{A}_i = A_i - A_0,$$

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i.$$

Synthèse des gains K_j

Détermination des gains K_j de l'observateur pour que son état converge asymptotiquement vers l'état du système.

Deuxième méthode de Lyapunov

Considérons la fonction candidate de Lyapunov $V(e(t))$:

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t), \quad P = P^T \text{ et } P > 0.$$

, où $e(t)$ représente l'erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

La convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéros est assurée si:

- 1 $V(e(t)) > 0, \forall t$
- 2 $\dot{V}(e(t)) < 0, \forall t$

Synthèse de l'observateur

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{x}) (A_0 - K_i C) e(k) + \bar{A}_i \delta_i + B_i \Delta_i, \\ \delta_i &= \mu_i(x) x - \mu_i(\hat{x}) \hat{x}, \\ \Delta_i &= \mu_i(x) u - \mu_i(\hat{x}) u.\end{aligned}$$

Hypothèse 2

$$\textcircled{1} \quad |\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| \leq M_i |x - \hat{x}|,$$

Lemme

Soient X et Y deux matrices de dimensions appropriées, et $\lambda > 0$ un scalaire :

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y$$

La négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov est démontrée en utilisant les hypothèses 1 et 2 ainsi que le lemme.
Les conditions de convergence de l'observateur sont alors données par le théorème 2.

Théorème 2 : Convergence asymptotique

L'erreur d'estimation entre le système et le multi-observateur tend asymptotiquement vers zéro s'il existe deux matrices P et Q symétriques et définies positives et des matrices K_i ainsi que des scalaires positifs γ , λ_1 et λ_2 tel que:

$$\begin{aligned} & A_0^T P + P A_0 - C^T K_i^T - K_i C < -Q \\ & \begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 M_i^2 I & P \bar{A}_i & P B_i & N_i \gamma I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ N_i \gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \\ & \gamma - \beta_2 \lambda_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Les gains G_i sont déduit à partir de $G_i = P^{-1} K_i$.

Exemple

Exemple

Considérons le multimodèle suivant avec $n = 2$ modèles locaux, défini par les matrices A_i , B_i et C :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [1 \ 0.5 \ 0.5]^T, B_2 = [0.5 \ 1 \ 0.25]^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple

Considérons le multimodèle suivant avec $n = 2$ modèles locaux, défini par les matrices A_i , B_i et C :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [1 \ 0.5 \ 0.5]^T, B_2 = [0.5 \ 1 \ 0.25]^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Résultats de simulation:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 3.17 & 2.53 \\ 7.04 & -4.58 \\ -2.16 & 1.62 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 3.14 & 2.61 \\ 7.16 & -4.63 \\ -2.14 & 1.64 \end{bmatrix}$$

Exemple

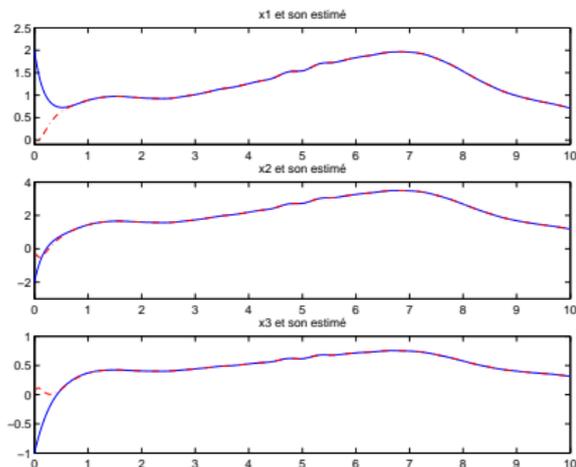
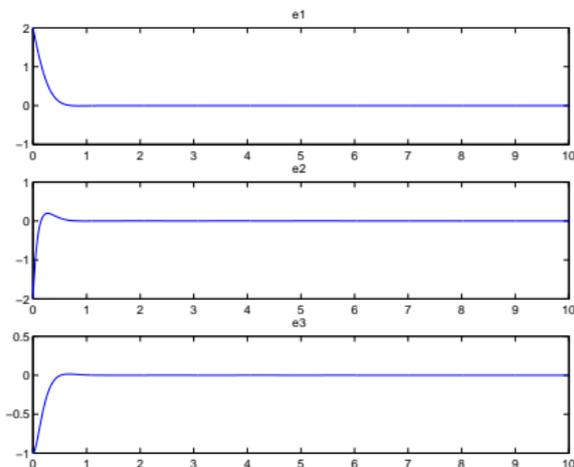


Figure: Erreur d'estimation (gauche), Etat du système et de l'observateur (droite)

Exemple

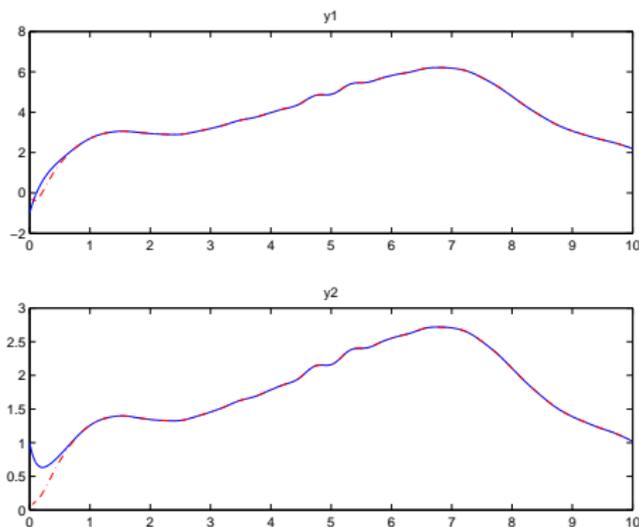


Figure: Sortie y du multi-modèle (bleu) et son estimé (\hat{y}) (rouge).

Conclusions

- Représentation des systèmes non linéaires sous forme multi-modèle à variables de décisions non mesurable en vue d'élaborer des observateurs non linéaires pour les systèmes non linéaires.
- Des conditions suffisantes de convergence de l'observateurs ont été présentées sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMI).
- On constate cependant que pour des valeurs importantes des constantes de Lipschitz, les gains de l'observateur deviennent importants.

Perspectives

- Applications de cet observateur au diagnostic des systèmes non linéaires.
- Extension de la méthode aux cas des systèmes à temps discret.
- Élaboration d'une méthode d'estimation d'état qui s'affranchit des problèmes induit par l'apparitions des constantes de Lipschitz ainsi que la borne sur l'entrée.
- Extension de l'observateur pour l'estimation des entrée inconnues.

Merci beaucoup de votre attention!