

Détection et isolation de défauts par analyse en composantes principales robuste

Y. Tharrault, G. Mourot, J. Ragot, D. Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 Nancy-université, CNRS
2, Avenue de la forêt de Haye
54516 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

2èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS

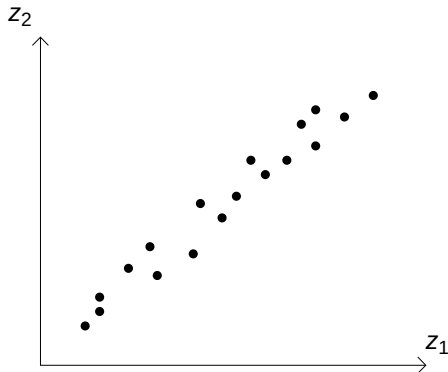


- 1 Principe de l'analyse en composantes principales
- 2 L'Analyse en composantes principales robuste
- 3 Détection et localisation de défauts
- 4 Application : Cas multi-défauts
- 5 Conclusion

Principe de l'analyse en composantes principales

ACP

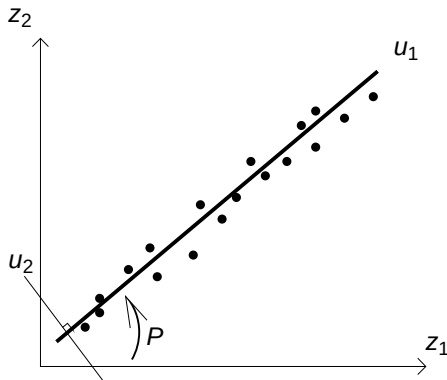
Diminution de l'espace de représentation en gardant la même quantité d'information



Principe de l'analyse en composantes principales

ACP

Diminution de l'espace de représentation en gardant la même quantité d'information



Principe de l'analyse en composantes principales

- Matrice de donnée $X \in \Re^{N \times n}$ en fonctionnement normal

ACP

Maximisation de la variance des projections $T = X P$

- $T \in \Re^{N \times n}$: matrice des composantes principales
- $P \in \Re^{n \times n}$: matrice de projection

Décomposition en valeurs/vecteurs propres de la matrice de covariance

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} X^T X = P \Lambda P^T \quad \text{avec} \quad P P^T = P^T P = I_n$$

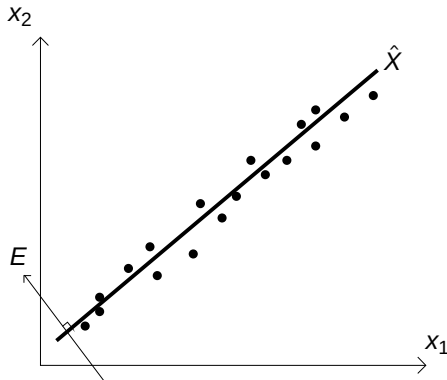
$$\Sigma = \begin{bmatrix} P_\ell & P_{n-\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_\ell & 0 \\ 0 & \Lambda_{n-\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_\ell^T \\ P_{n-\ell}^T \end{bmatrix}$$

Principe de l'analyse en composantes principales

Décomposition

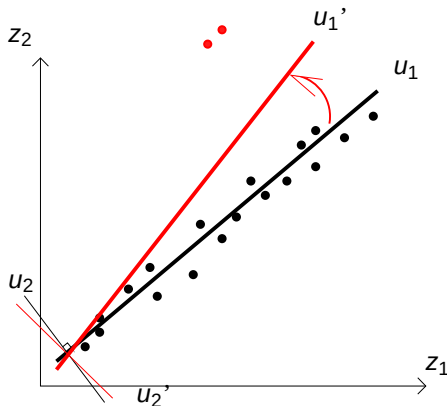
Partie principale : $\hat{X} = X P_{\ell} P_{\ell}^T = X C_{\ell}$

Partie résiduelle : $E = X - \hat{X} = X (I - C_{\ell})$



Faiblesse de l'ACP

- Sensible aux valeurs aberrantes



⇒ Matrice de variance covariance robuste aux valeurs aberrantes

Nouvelle matrice de variance robuste

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_{i,j} (x_i - x_j)(x_i - x_j)^T}{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_{i,j}}$$

où les poids $w_{i,j}$ sont eux-mêmes définis par :

$$w_{i,j} = \exp\left(-\frac{\beta}{2}(x_i - x_j)^T \Sigma^{-1}(x_i - x_j)\right)$$

avec β paramètre de réglage

Principe de reconstruction

Estimer r variables à partir des $n - r$ variables restantes

$$\hat{x}_R = [I - \Xi_R(\tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Xi}_R)^{-1} \tilde{\Xi}_R^T] x$$

$$\tilde{\Xi}_R = (I - C_\ell) \Xi_R$$

avec Ξ_R : matrice des directions de reconstruction

Pour reconstruire 2 variables ($R = 2, 4$) parmi 5 variables

$$\Xi_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Projection de x_R dans l'espace résiduel

$$\tilde{x}_R = P_R^{(\ell)} x, \quad P_R^{(\ell)} = (I - C_\ell) [I - \Xi_R (\tilde{\Xi}_R^T \tilde{\Xi}_R)^{-1} \tilde{\Xi}_R^T]$$

$$\text{Propriété : } P_R^{(\ell)} \Xi_R = 0, \quad \Xi_R^T P_R^{(\ell)} = 0$$

Illustration :

$$x = x^* + \varepsilon + \Xi_F d$$

$$\tilde{x}_R = P_R^{(\ell)} (x^* + \varepsilon + \Xi_F d) = P_R^{(\ell)} (\varepsilon + \Xi_F d)$$

dont l'espérance mathématique vaut : $\mathcal{E}(\tilde{x}_R) = P_R^{(\ell)} \Xi_F d$

- $\Xi_F = \Xi_R : P_R^{(\ell)} \Xi_R = 0$ et $\mathcal{E}(\tilde{x}_R) = 0$
- $\Xi_F \neq \Xi_R : P_R^{(\ell)} \Xi_R \neq 0$ et $\mathcal{E}(\tilde{x}_R) \neq 0$

Observation du vecteurs $\tilde{x}_R$ pour localiser un défaut

Indicateur global calculé pour chaque observation

$$\Delta_R = \| \tilde{x}_R \|^2$$

Détection des valeurs aberrantes

Test de saut sur la quantité Δ_R

Application : Cas multi-défauts

On considère :

- $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{bmatrix}$
- $N = 108$ observations

$$x_{i,1} = v_i^2 + \sin(0.1i), \quad v_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$x_{i,2} = 2 \sin(i/6) \cos(i/4) \exp(-i/N)$$

$$x_{i,3} = \log(x_{i,2}^2)$$

$$x_{i,4} = x_{i,1} + x_{i,2}$$

$$x_{i,5} = x_{i,1} - x_{i,2}$$

$$x_{i,6} = 2x_{i,1} + x_{i,2}$$

$$x_{i,7} = x_{i,1} + x_{i,3}$$

$$x_{i,8} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

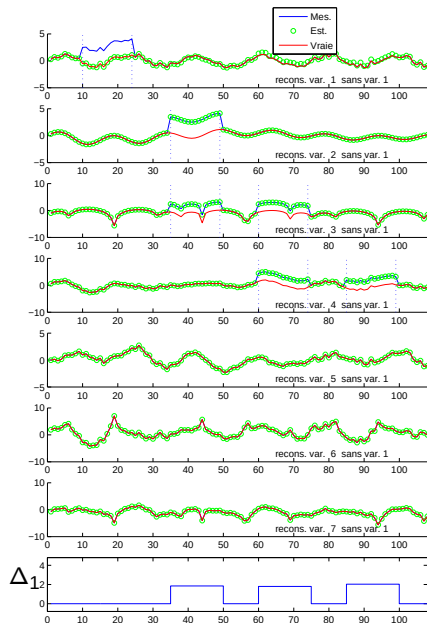
	l_1 $\{10 : 24\}$	l_2 $\{35 : 49\}$	l_3 $\{60 : 74\}$	l_4 $\{85 : 99\}$
x_1	×	0	0	0
x_2	0	×	0	0
x_3	0	×	×	0
x_4	0	0	×	×

Application : Cas multi-défauts

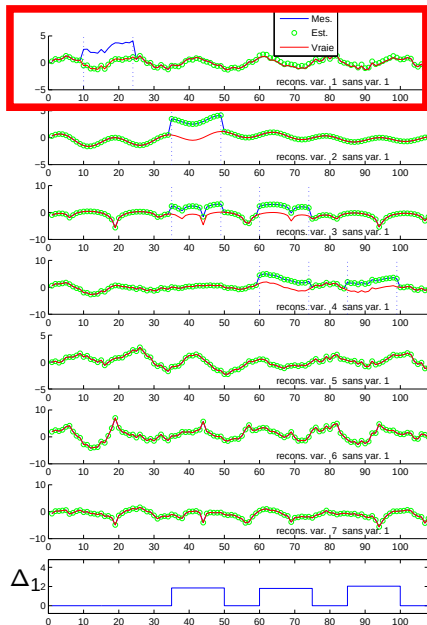
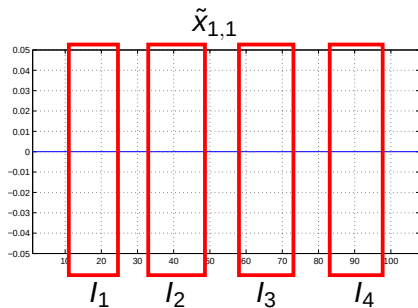
Sensibilité de l'indicateur global Δ_R à la présence de défauts δ

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{34}
Δ_1	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_2	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_3	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×
Δ_4	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×
Δ_5	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_{12}	0	0	×	×	0	×	×	×	×	×
Δ_{13}	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×
Δ_{14}	0	×	×	0	×	×	0	×	×	×
Δ_{15}	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_{16}	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_{23}	×	0	0	×	×	×	×	0	×	×

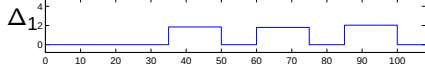
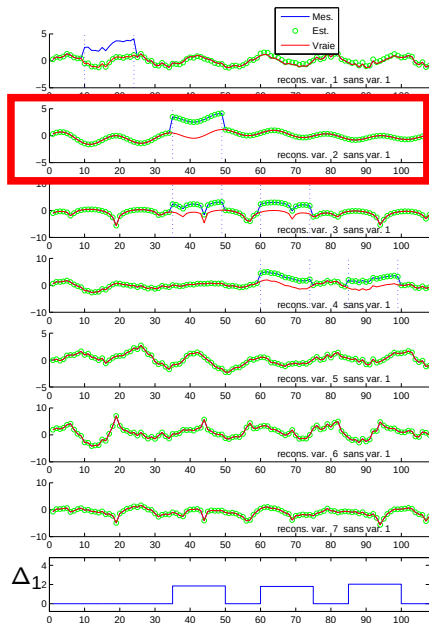
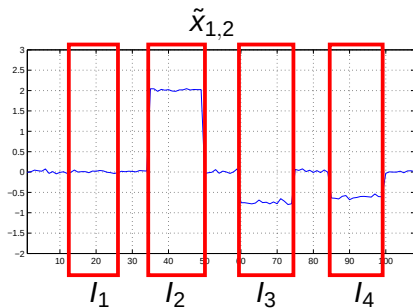
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



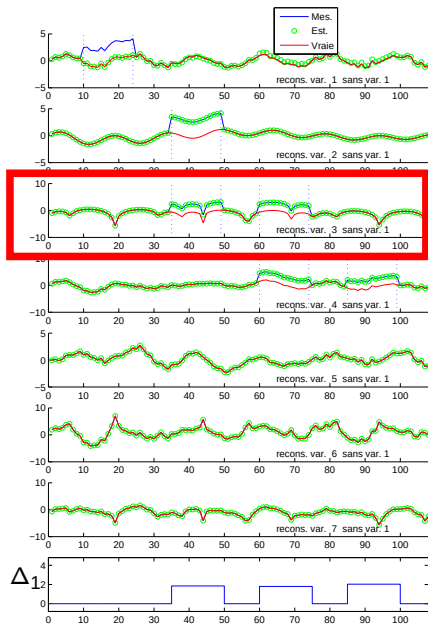
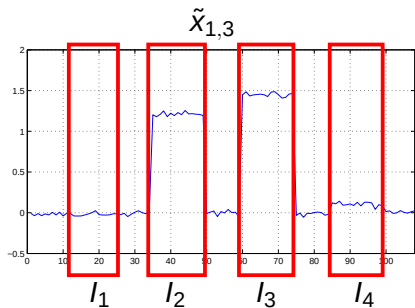
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



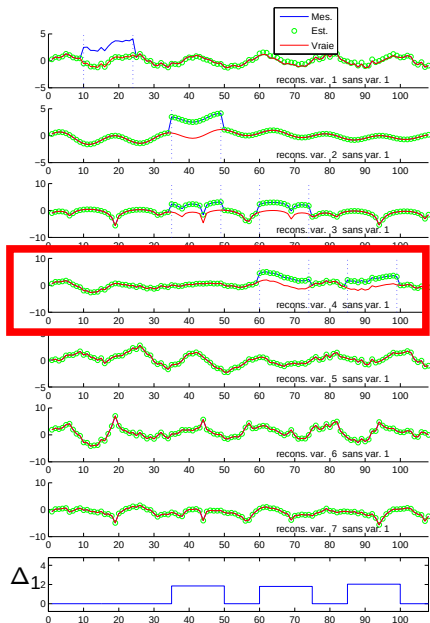
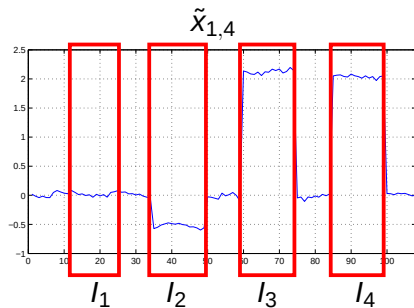
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



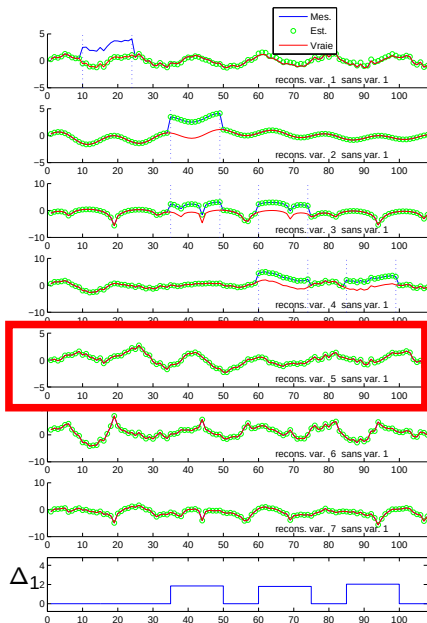
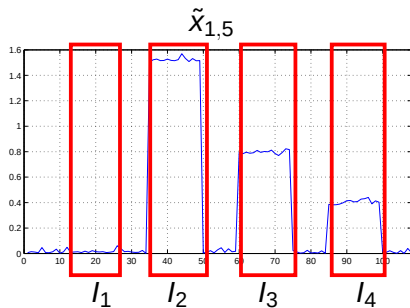
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



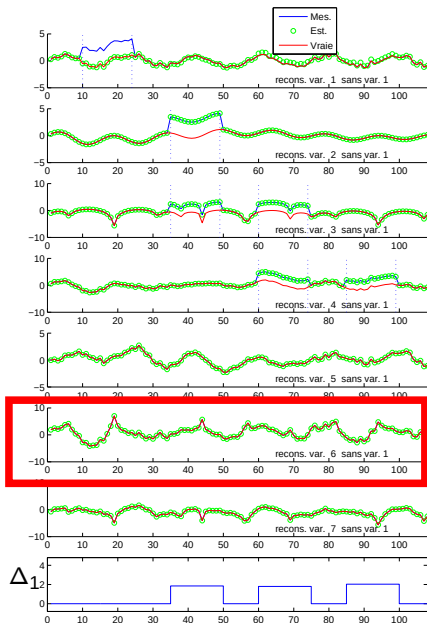
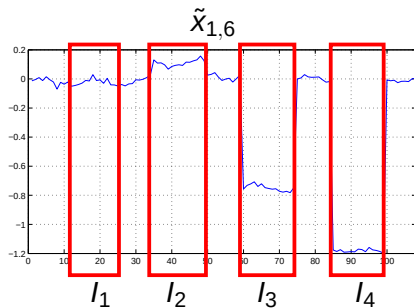
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



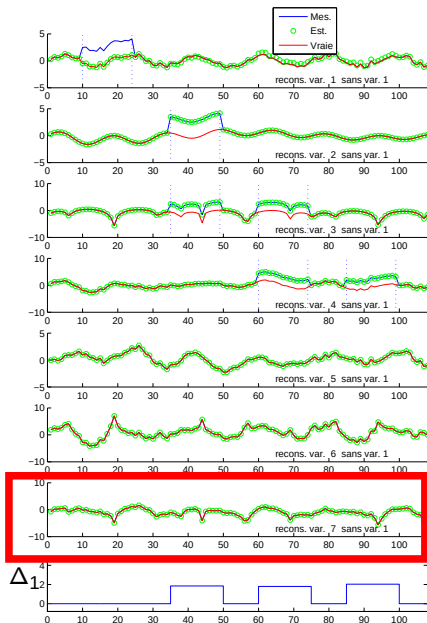
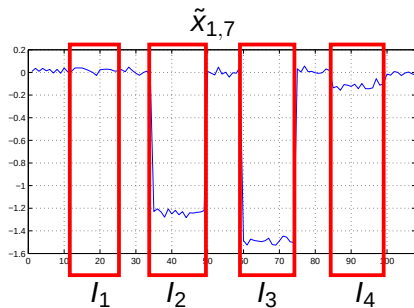
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1

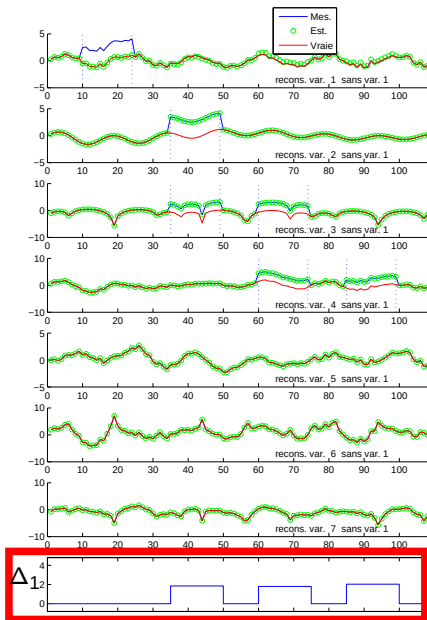


Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1

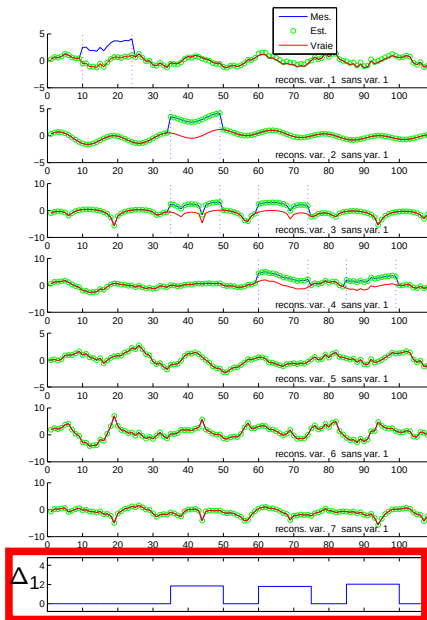
	l_1	l_2	l_3	l_4
Δ_1	0	$\times$	$\times$	$\times$



Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1

	l_1	l_2	l_3	l_4
Δ_1	0	$\times$	$\times$	$\times$

$\Rightarrow$ Défaut sur x_1 sur la période l_1



Application : Cas multi-défauts

Localisation des défauts

	l_1	l_2	l_3	l_4
Δ_1	0	×	×	×
Δ_{23}	×	0	×	×
Δ_{24}	×	×	×	0
Δ_{34}	×	×	0	0

Signatures des défauts étudiés

Application : Cas multi-défauts

Localisation des défauts

	I_1	I_2	I_3	I_4
Δ_1	0	×	×	×
Δ_{23}	×	0	×	×
Δ_{24}	×	×	×	0
Δ_{34}	×	×	0	0

Signatures des défauts étudiés

- dans l'intervalle I_1 , x_1 est en défaut
- dans l'intervalle I_2 , x_2 et x_3 sont en défaut
- dans l'intervalle I_3 , x_3 et x_4 sont en défaut
- dans l'intervalle I_4 , x_4 est en défaut

Conclusion

Conclusion

- ACP robuste vis-à-vis des valeurs aberrantes
→ applicable directement sur des données avec des défauts

Conclusion

- ACP robuste vis-à-vis des valeurs aberrantes
→ applicable directement sur des données avec des défauts
- les principes de reconstruction et de projection des données
→ isolation des valeurs aberrantes

Conclusion

- ACP robuste vis-à-vis des valeurs aberrantes
→ applicable directement sur des données avec des défauts
- les principes de reconstruction et de projection des données
→ isolation des valeurs aberrantes

Perspectives

Conclusion

- ACP robuste vis-à-vis des valeurs aberrantes
→ applicable directement sur des données avec des défauts
- les principes de reconstruction et de projection des données
→ isolation des valeurs aberrantes

Perspectives

- Diminution du volume de calcul
→ réduction du nombre de reconstructions