

## OBSERVABILITY ANALYSIS AND SENSOR PLACEMENT

Didier MAQUIN, Marie LUONG and José RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy - CNRS UA 821  
BP 40, Rue du doyen Marcel Roubault - 54 501 Vandoeuvre  
Tél. : (33) 83 50 30 80 Fax : (33) 83 50 30 96

**RESUME.** Le nombre de mesures effectuées sur un système conditionne fortement la qualité de l'estimation de l'état de ce système. On étudie ici cette dépendance en précisant en particulier l'influence du nombre et de la position des capteurs ainsi que de leur précision. Lorsque certaines variables sont nécessaires à la conduite, on étudie la possibilité de défaillance de certains capteurs à partir du calcul de fiabilité de l'ensemble des capteurs. Le problème inverse est également présenté : quelle est l'architecture d'instrumentation qui permette de respecter certaines contraintes sur l'observabilité, la redondance et la fiabilité.

**KEYWORDS.** Sensor position, Observability, Redundancy, Reliability, Sensor architecture design

### 1. INTRODUCTION

La conception de l'architecture d'un système d'instrumentation est une étape fondamentale de la conduite automatique d'un procédé. En effet, de la position des capteurs et de leur nombre dépend la possibilité d'observer un processus et d'estimer son état et par conséquent de déterminer le type de commande à lui appliquer. Etudier l'observabilité d'un système revient à poser la question : peut-on déterminer la valeur des variables d'un système à partir d'un ensemble donné de mesures ? Si le processus est non observable, on peut également mettre en évidence les parties observable et non observable de ce processus. De façon plus générale le problème posé est celui du diagnostic qui consiste à estimer l'état d'un système, décider s'il est normal ou anormal, juger de la "gravité" de l'état anormal et en fonction de cette appréciation décider d'une action à entreprendre pour conserver au système ses fonctionnalités. On imagine très bien que cette estimation n'est possible que sous certaines conditions et en particulier nécessite de disposer d'un minimum d'informations c'est-à-dire de capteurs ; ces capteurs doivent être judicieusement placées de façon à donner une "image" de l'ensemble du processus. De plus, la précision des informations collectées, étroitement liée à la précision des capteurs et à leur bon fonctionnement, conditionne très largement la précision du diagnostic. Enfin, il faut se placer dans la situation réaliste dans laquelle les capteurs initialement prévus peuvent devenir défaillants. Suite à ces défaillances, le diagnostic de l'état du processus ne peut être réalisé que si les variables liées aux capteurs défaillants peuvent être estimées. Compte tenu de ces remarques, on peut affirmer que le choix de l'instrumentation (nombre de capteurs, position, caractéristiques des capteurs) est un facteur primordial de cette étape de diagnostic. Dans ce qui suit, notre propos est limité à l'étude des systèmes décrits par des équations linéaires (elles peuvent correspondre par exemple à des équations de transport de matière ou d'énergie) ; c'est par souci de simplicité que ce choix est fait, mais la généralisation à des modèles plus complexes ne pose pas de problèmes majeurs.

De nombreux travaux ont déjà été publiés sur l'analyse de l'observabilité des systèmes en régime statique. Les premiers ont porté sur l'étude des systèmes linéaires et sont probablement dus à

Vaclaveck (1969) ; par la suite, Stanley (1981) et Crowe (1983) ont largement contribué à développer cette analyse. Les algorithmes d'observabilité qui ont été développés sont généralement basés sur la théorie des graphes (Mah, 1976) ou sur une classification des variables à partir d'une matrice de projection (Crowe, 1989). Pour les systèmes décrits par des équations linéaires-bilinéaires les premières études d'observabilité sont dues à Vaclaveck (1976), Romagnoli (1980). Kretsovalis et Mah (1988) ont ensuite étendu cette étude en utilisant la théorie des graphes. Parallèlement, Darouach (1986) a formalisé sous forme matricielle l'étude de l'observabilité des systèmes bilinéaires ; la méthode employée se résume à une étude séquentielle de l'observabilité de systèmes linéaires (Maquin, 1989). Plus récemment, Ragot (1990) propose une démarche algorithmique basée sur l'analyse simultanée des équations linéaires et bilinéaires.

Après la phase d'analyse qui met en évidence les redondances mais aussi les éventuelles faiblesses du système d'instrumentation, il convient de proposer des modifications de la position des capteurs existants ou mêmes des ajouts de capteurs. Ces modifications sont étudiées compte tenu d'objectifs précis : rendre observable une variable particulière, accroître le degré de redondance d'une autre, augmenter la précision de l'estimation d'une variable particulièrement utile à la conduite du processus, tolérer la défaillance d'un capteur. Cette phase de synthèse a été abordée par quelques auteurs (Turbatte, 1993) mais reste à développer. Notre propos est précisément d'analyser les différents critères permettant de définir le choix de l'architecture d'un système d'instrumentation.

## 2. ESTIMATION DE L'ETAT D'UN SYSTEME

L'estimation de l'état d'un système procède en général par réconciliation de données par rapport au modèle supposé connu et exact du système. On dispose en effet de mesures effectuées sur les entrées et les sorties du système qui ne vérifient pas ses équations de contrainte. Il convient alors de corriger ces mesures, donc d'estimer les amplitudes probables des variables correspondantes de façon à satisfaire à ces équations.

Dans ce qui suit, on note :

- $X_m$  le vecteur ( $\in \mathbb{R}^m$ ) des mesures
- $X$  le vecteur ( $\in \mathbb{R}^m$ ) des variables vraies
- $\hat{X}$  le vecteur ( $\in \mathbb{R}^m$ ) des estimations
- $A$  la matrice ( $\in \mathbb{R}^{n.m}$ ) des contraintes
- $V$  la matrice de variance des erreurs de mesure

En supposant que les erreurs de mesure soient à valeur moyenne nulle et si la matrice de variance  $V$  est connue, l'estimation  $\hat{X}$ , au sens du maximum de vraisemblance, est solution du problème d'optimisation :

$$\min \Phi = \frac{1}{2} \| X - \hat{X} \|_{V^{-1}}^2 \quad (1a)$$

$$\text{sous } A \hat{X} = 0. \quad (1b)$$

Ce problème très classique peut être résolu par différentes techniques. Elles donnent toutes le même résultat aux erreurs numériques près dues aux troncatures apparaissant dans les différents

calculs :

$$\hat{X} = P X \quad (2a)$$

$$P = I - V M^T (M V M^T)^{-1} M \quad (2b)$$

La matrice de variance de  $\hat{X}$  est donnée par :

$$\hat{V} = P V \quad (3)$$

Cette expression fournit la précision des estimations et donc définit leur intervalle de confiance ; comme conséquence directe, on peut aussi estimer l'intervalle de confiance des termes correctifs des mesures utiles pour détecter d'éventuelles anomalies (Ragot, 1990).

### Extension au cas de mesures partielles

La plupart des systèmes ne sont que partiellement observés et le nombre de mesures disponibles est en général très inférieur au nombre de variables dont l'état est à estimer. Le problème d'estimation doit donc être réexaminé compte tenu de cette contrainte. On note toujours  $X_m$  le vecteur des mesures lié alors au vecteur des grandeurs vraies par :

$$X_m = H X \quad (4)$$

L'estimation  $\hat{X}$  est solution du problème d'optimisation :

$$\min \Phi = \frac{1}{2} \| H X - \hat{X} \|_{V^{-1}}^2 \quad (5a)$$

$$\text{sous } A \hat{X} = 0. \quad (5b)$$

Les conditions d'existence de cette solution  $\hat{X}$  sont étroitement liées au rang de la matrice d'observabilité ( $H^T A^T$ ). Si ce rang est égal à la dimension de  $X$  (Darouach, 1986), l'état du système est complètement observable et son estimation s'explique :

$$\hat{X} = (R - R M^T (M R M^T)^{-1} M R) H^T V^{-1} X \quad (6a)$$

$$R = (H^T V^{-1} H + A^T A)^{-1} \quad (6b)$$

Cette expression montre que l'estimation des grandeurs vraies dépend du système de mesure (nombre et position des capteurs par l'intermédiaire de la matrice  $H$ ), des mesures elles-mêmes  $X$  et de leurs précisions  $V$  ; afin d'améliorer la qualité de ces estimations, il est nécessaire de préciser cette dépendance (section 4).

## 3. OBSERVABILITE DU SYSTEME

Dans la pratique, il est intéressant de tester la condition d'observabilité des variables du système directement à partir de la structure du réseau. Différentes solutions ont été proposées parmi lesquelles celle utilisant l'analyse de la matrice des cycles associée au graphe du réseau est simple et élégante à mettre en oeuvre ; nous rappelons ici le principe de cette analyse.

### Matrice des cycles d'un système

Considérons le graphe (figure 1) d'un processus simple, où le nœud '0' représente le nœud environnement (pour un réseau de transport de matière par exemple, le nœud environnement connecte les flux d'entrée et de sortie de ce réseau). Sur le graphe, les variables mesurées sont représentées par un 'I'. On souhaite dénombrer les variables observables de ce système et plus précisément classer les variables en variables déductibles et en variables redondantes.



Figure 1 : noeuds et arcs d'un graphe

A partir de la figure (1), on obtient la matrice des cycles fondamentaux  $C_F$  de la figure 2. Dans cette matrice  $C_F$ , chaque colonne correspond à un arc et chaque ligne à un cycle fondamental. Un élément vaut 1 si l'arc  $j$  appartient au même cycle que l'arc  $i$  et a la même orientation, -1 si l'arc  $j$  appartient au même cycle que l'arc  $i$  et a une autre orientation, 0 si l'arc  $j$  n'appartient pas au même cycle que l'arc  $i$ .

$$C_F = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ 1 & -1 & . & . & . & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figure 2 : matrice d'incidence des cycles fondamentaux

La recherche de tous les cycles contenus dans un graphe peut se faire par un traitement de la matrice des cycles fondamentaux  $C_F$ . Une matrice des cycles fondamentaux constitue, par définition, une base de cycles. En effectuant des additions binaires avec des "ou exclusifs" entre les lignes de  $C_F$ , donc entre les cycles fondamentaux, on peut répertorier tous les cycles contenus dans un graphe. De la matrice  $C_F$ , nous déduisons la matrice  $C$  des cycles du graphe :

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{arcs} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{cycles} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ 1 & -1 & . & . & . & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ . & . & . & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 & . & . & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figure 3 : matrice de tous les cycles du graphe

### Analyse de l'observabilité

Les cycles que nous venons de mettre en évidence sont constitués d'arcs correspondant à des variables mesurées ou non mesurées. En fonction du nombre de variables mesurées par cycle, on

peut définir l'observabilité de toutes les variables du système. L'étude de l'observabilité par les cycles est réalisée à partir de quatre règles élémentaires [Turbatte, 1993] :

Règle I : une variable mesurée est estimable si, et seulement si, elle n'intervient que dans des cycles où au moins deux variables sont mesurées.

Règle II : une variable mesurée est non estimable si, et seulement si, elle appartient au moins à un cycle où elle est la seule variable mesurée.

Règle III : une variable non mesurée est déductible si, et seulement si, elle n'intervient que dans des cycles comportant au moins une variable mesurée.

Règle IV : une variable non mesurée est non déductible si, et seulement si, elle appartient au moins à un cycle où aucune variable n'est mesurée.

A partir du processus de la figure 1, mettons en évidence l'usage de ces quatre règles. Considérons par exemple les listes des variables mesurées et non mesurées :

$$L_m = \{1, 2, 3\}$$

$$L_{\bar{m}} = \{4, 5, 6, 7\}$$

Compte tenu de ces listes, l'application des règles d'observabilité aux variables de la matrice C conduit aux conclusions suivantes : les variables {1, 2, 3} sont mesurées et estimables. Ces variables n'interviennent que dans des cycles où deux variables sont mesurées (règle I). La variable 6 est non mesurée et déductible ; en effet, les cycles auxquels elle appartient contiennent tous au moins une variable mesurée (règle II). Les variables {4, 5, 7} sont non mesurées et non déductibles. Ces variables appartiennent au cycle 5 où toutes les variables sont non mesurées (règle IV).

Il est important de noter qu'une modification de la liste des variables mesurées (ajout, retrait, déplacement de capteur) est simple à prendre en compte. En effet, l'analyse précédente est fondée sur le dénombrement des cycles du réseau qui est réalisé indépendamment des mesures. Cette remarque est maintenant mise à profit pour la conception du schéma d'instrumentation.

### Synthèse d'un système d'instrumentation selon le concept d'observabilité

L'analyse précédente a permis de dénombrer les variables déductibles, les variables redondantes et celles qui ne peuvent être estimées. Lorsque le "degré d'observabilité" de l'ensemble des variables est jugé insatisfaisant, il convient de mesurer des variables supplémentaires en plaçant judicieusement un certain nombre de capteurs. Ce choix peut être fait en analysant la matrice des cycles du système. De façon très générale cette dernière peut être mise sous la forme :

	<u>variables mesurées</u>	<u>variables non mesurées</u>	
C =	C <sub>m<math>\bar{e}</math></sub>	0	C' <sub><math>\bar{m}\bar{e}</math></sub>
	1	2	C' <sub><math>\bar{m}e</math></sub>
	3	4	
	0	0	
	5	6	C' <sub><math>\bar{m}\bar{e}</math></sub>
	7	8	0

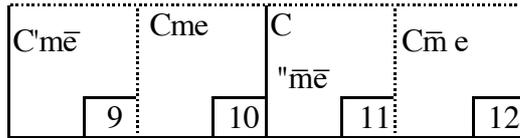


Figure 4 : forme générale de la matrice des cycles

La décomposition ci-dessus conduit à la classification suivante des variables :

- Les variables mesurées non estimables font partie du bloc 1 (matrice  $C_{m\bar{e}}$  ). Dans ce bloc il n'y a qu'un '1' par ligne (règle II).
- Les variables mesurées estimables font partie du bloc 10 (matrice  $C_{me}$ ). Dans ce bloc il y a au minimum deux variables mesurées par ligne (règle I).
- Les variables non mesurées non déductibles sont rangées dans le bloc 7 (matrice  $C_{\bar{m}\bar{e}}$  ). Ce bloc intervient dans une "ligne" où aucune variable n'est mesurée ; tous les autres blocs sont nuls (règle IV).
- Les variables non mesurées déductibles interviennent dans les blocs 4 et 12 (matrices  $C_{\bar{m}e}$  et  $C_{\bar{m}\bar{e}}$ ). Ce bloc fait partie d'une ligne qui contient des blocs de variables mesurées bloc 9 et 10 (règle II).

Considérons la situation où certaines variables sont a priori mesurées (liste  $L_m$ ) ; différents critères peuvent être envisagés pour compléter cette liste afin d'accroître le degré d'observabilité du système. On peut par exemple souhaiter que certaines variables soient déductibles, ou que d'autres soient redondantes ; on peut de plus imposer que certaines de ces variables soient non mesurées.

A titre d'exemple, considérons le cas où  $L_m = \{1\}$  et où la variable 7 ne peut être mesurée ; en respectant ces contraintes, on souhaite rendre observables toutes les variables du système. Dans la matrice des cycles de la figure 3, on constate que la définition de  $L_m$  permet de dénombrer 3 cycles (2, 4 et 6) contenant la variables mesurée 1. Il faut donc que les cycles restants (1, 3 et 5) contiennent chacun au moins une variable mesurée pour assurer l'observabilité de toutes les variables du système. Pour qu'il en soit ainsi et pour minimiser le nombre de capteurs supplémentaires, on peut choisir parmi les couples suivants :

$$\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \\ \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 5\}, \{5, 7\}$$

Parmi ces 8 solutions, le choix pourra être réalisé selon un critère complémentaire, par exemple de coût minimal, de fiabilité maximale, de précision souhaitée des estimations.

#### 4. ANALYSE DES ESTIMATIONS

L'estimation de grandeurs vraies fournit l'état du système à partir des mesures et de leurs précisions respectives. Il est cependant très utile de compléter cette étude en caractérisant les

estimations par leur sensibilité par rapport aux paramètres décrivant le processus. Comme a priori les équations du processus sont supposées exactes, l'étude de sensibilité est réduite ici à l'influence d'une modification des mesures et de leur nombre.

### Sensibilité vis-à-vis d'une petite variation de la précision des mesures

Une variation  $\Delta V$  de la variance des mesures induit une variation correspondante des estimations  $\Delta \hat{X}$  dont l'expression se déduit de (2) :

$$\hat{X} + \Delta \hat{X} = (I - (V + \Delta V) M^T (M (V + \Delta V) M^T)^{-1} M) X \quad (7)$$

Après quelques calculs fastidieux et en considérant de petites variations telles que  $\Delta V \ll V$ , la relation (7) se réduit alors à :

$$\Delta \hat{X} = P \Delta V V^{-1} (\hat{X} - X) \quad (8)$$

En notant  $p_{.i}$  la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de projection  $P$ ,  $v_{ii}$  le  $i^{\text{ème}}$  terme diagonal de  $V$  et  $x_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $X$ , le vecteur  $\Delta \hat{X}$  s'explique :

$$\Delta \hat{X} = \sum_{i=1}^n p_{.i} \frac{\Delta v_{ii}}{v_{ii}} (\hat{x}_i - x_i) \quad (9)$$

Ainsi, le vecteur de sensibilité des estimations par rapport à la variance de la  $i^{\text{ème}}$  mesure s'écrit :

$$S = \frac{\partial \hat{X}}{\partial v_{ii}} = p_{.i} \frac{1}{v_{ii}} (\hat{x}_i - x_i) \quad (10)$$

On peut éviter, dans ce calcul, l'utilisation des termes  $p_{.i}$  de la matrice de projection en éliminant, dans (8), la matrice  $P$  à partir de (3). On obtient :

$$\Delta \hat{X} = \hat{V} V^{-1} \Delta V V^{-1} (\hat{X} - X) \quad (11)$$

En effectuant les différents produits matriciels qui apparaissent dans (11), on exprime les coefficients de sensibilité sous la forme :

$$s_{ij} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial v_{jj}} = \hat{v}_{ji} \frac{\hat{x}_i - x_i}{2 v_{ii}} \quad (12)$$

On peut déduire de cette relation le rapport des sensibilités des estimations de deux variables  $j$  et  $k$  lorsque la variance de la voie  $i$  varie :

$$\frac{s_{ij}}{s_{ik}} = \frac{\hat{v}_{ji}}{\hat{v}_{ki}} \quad (13)$$

Ainsi, lorsqu'on modifie la variance d'une mesure, les estimations sont toutes modifiées ; celle qui subit la plus grande variation est celle dont la variance est la plus importante. Il s'agit là d'un résultat intuitif dont l'équation (13) donne la justification théorique.

### Sensibilité vis-à-vis d'une variation quelconque de la précision des mesures

Pour simplifier cette étude, on ne modifie qu'une variance à la fois (la  $i^{\text{ème}}$ , par exemple), de la quantité  $\delta$ . Ainsi, on note :

$$\Delta V = \delta E E^T \quad (14)$$

où le vecteur  $E$  a toutes ses composantes nulles sauf la  $i^{\text{ème}}$  prise égale à l'unité.

Après modification de la variance des mesures, les estimations s'expriment toujours par la relation (7). En utilisant le lemme d'inversion de matrice et avec :

$$K = (M V M^T)^{-1}$$

on obtient :

$$\Delta \hat{X} = \frac{\delta}{1 + \delta E^T M^T K M E} P E E^T V^{-1} (\hat{X} - X) \quad (15)$$

Cette relation quantifie donc l'influence d'une variation de la variance des mesures sur l'estimation de l'état du système. Compte tenu de la définition de  $E$ , cette expression peut aussi s'écrire :

$$\Delta \hat{X} = \frac{\delta}{1 + \delta (M^T K M)_{ii}} P_{.i} (\hat{x}_i - x_i) v_{ii}^{-1} \quad (16)$$

## 5. ANALYSE DE LA PRECISION DES ESTIMATIONS

Nous proposons d'examiner l'influence de variations d'amplitude quelconque de la précision des mesures sur la variance des estimations. Un cas limite intéressant est celui où cette variation est d'amplitude infinie ; cela correspond pratiquement à supprimer la mesure correspondante et donc de tester l'influence d'une mesure sur la précision des estimations.

Comme précédemment, on ne modifie qu'une variance à la fois (la  $i^{\text{ème}}$ , par exemple), de la quantité  $\delta$ . Ainsi, on note :

$$\Delta V = \delta E E^T \quad (17)$$

où le vecteur  $E$  a toutes ses composantes nulles sauf la  $i^{\text{ème}}$  prise égale à l'unité. Après modification de la variance des mesures, la variance des estimations est toujours égale à :

$$\hat{V} + \Delta \hat{V} = (V + \Delta V) (I - M^T (M(V + \Delta V) M^T)^{-1} M (V + \Delta V)) \quad (18)$$

Après simplification d'usage, on obtient :

$$\Delta \hat{V} = \frac{\delta}{1 + \delta E^T M^T K M E} P E E^T P^T \quad (19)$$

Compte tenu de la définition du vecteur E, cette expression se réduit à :

$$\Delta \hat{V} = \frac{\delta}{1 + \delta (M^T K M)_{ii}} P_i P_i^T \quad (20)$$

Cette formule n'est pas une approximation ; elle exprime de façon exacte l'influence d'une modification  $\delta$  de la variance d'une mesure sur la variance des estimations. Dans le cas particulier où cette modification est de faible amplitude on a :

$$\Delta \hat{V} = \delta P E E^T P^T \quad (21)$$

Enfin, une forme plus élégante peut être obtenue en utilisant la variance des estimés :

$$\hat{V} = V - V M^T (M V M^T)^{-1} M V \quad (22)$$

dont on extrait :

$$M^T K M = V^{-1} - V^{-1} \hat{V} V^{-1} \quad (23)$$

Ainsi (21) implique :

$$\Delta \hat{V} = \frac{\delta}{1 + \delta E^T (V^{-1} - V^{-1} \hat{V} V^{-1}) E} \hat{V} V^{-1} E E^T V^{-1} \hat{V} \quad (24)$$

qui s'explique, compte tenu de la définition du vecteur E :

$$\Delta \hat{V} = \frac{\delta}{v_{ii}^2 + \delta (v_{ii} - \hat{v}_{ii})} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1i} \\ \hat{v}_{2i} \\ \vdots \\ \hat{v}_{vi} \end{pmatrix} (\hat{v}_{1i} \hat{v}_{2i} \dots \hat{v}_{vi}) \quad (27)$$

Ainsi, les coefficients situés sur la diagonale de cette matrice ont comme expression :

$$\Delta \hat{V}_{kk} = \frac{\delta}{v_{ii}^2 + \delta (v_{ii} - \hat{v}_{ii})} \hat{v}_{kk}^2 \quad (28)$$

et ils représentent la variation des variances des estimations en fonction d'une modification d'amplitude  $\delta$  de la variance des mesures.

### Application à la suppression de capteurs

Le cas particulier où la variation  $\delta$  est d'amplitude infinie correspond à une situation intéressante.

Comme  $\delta$  est liée directement à la variance d'une mesure, cela revient à considérer que la précision de cette mesure devient nulle ; le poids de cette mesure dans le critère d'estimation devient donc nul. Ainsi, d'une façon "détournée", mais simple à mettre en oeuvre, on peut étudier l'influence de la suppression d'une mesure sur la variance des grandeurs estimées.

Explicitons donc la limite de (27), quand  $\delta$  tend vers l'infini :

$$\Delta \hat{V} = \frac{1}{(v_{ii} - \hat{v}_{ii})} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1i} \\ \hat{v}_{2i} \\ \vdots \\ \hat{v}_{vi} \end{pmatrix} (\hat{v}_{1i} \hat{v}_{2i} \dots \hat{v}_{vi}) \quad (29)$$

On déduit de cette expression, ou aussi de (25), les termes relatifs à la modification des variances des estimations :

$$\Delta \hat{v}_{kk} = \frac{1}{v_{ii} - \hat{v}_{ii}} \hat{v}_{kk}^2 \quad (30)$$

En particulier, pour la  $i^{\text{ème}}$  voie (celle dont la mesure a une variance infinie), on a la modification de variance estimée :

$$\Delta \hat{v}_{ii} = \frac{1}{v_{ii} - \hat{v}_{ii}} \hat{v}_{ii}^2 \quad (31)$$

qui correspond donc à la nouvelle variance :

$$\hat{v}_{ii} + \Delta \hat{v}_{ii} = \frac{v_{ii} \hat{v}_{ii}}{v_{ii} - \hat{v}_{ii}} \quad (32)$$

L'ensemble des relations établies sont utiles à l'utilisateur pour l'analyse des résultats de la réconciliation des données par équilibrage de bilan. Ces relations lui fournissent un moyen d'apprécier la contribution des mesures et de leurs variances respectives à la construction des estimations et de leurs variances.

### Synthèse du système de mesure à partir de la précision des estimations

L'étude précédente a montré l'influence de la précision des mesures sur celle des estimations. Inversement, on peut chercher à déterminer la variance des mesures (donc spécifier la précision des capteurs correspondants) pour obtenir une variance imposée des variances des estimations. Rappelons l'expression de la variance des estimations :

$$\hat{V} = (I - V M^T (M V M^T)^{-1} M) V \quad (33)$$

Connaissant  $V$ , peut-on alors déterminer  $\hat{V}$  ? Pour résoudre ce problème, remarquons tout d'abord que  $\hat{V}$  ne peut être arbitrairement choisi. Cette matrice doit en effet vérifier la contrainte :

$$M \hat{V} = 0 \quad (34)$$

Pour exploiter aisément cette contrainte, utilisons la forme équivalente de  $M$  obtenue par extraction de sa plus grande partie régulière  $N$  et partitionnons de façon compatible les matrices  $V$  (choisie diagonale) et  $\hat{V}$  :

$$M = (I \quad N) \quad (35)$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{pmatrix} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{11} & \hat{V}_{12} \\ \hat{V}_{21} & \hat{V}_{22} \end{pmatrix} \quad (36)$$

En explicitant (30) à partir de (35) et (36), on obtient :

$$\hat{V}_{11} = V_{11} - V_{11} H V_{11} \quad (37a)$$

$$\hat{V}_{12} = - V_{11} H N V_{22} \quad (37b)$$

$$\hat{V}_{21} = - V_{22} N^T H V_{11} \quad (37c)$$

$$\hat{V}_{22} = V_{22} - V_{22} N^T H N V_{22} \quad (37d)$$

avec :

$$H = (V_{11} + N V_{22} N^T)^{-1} \quad (37e)$$

Les équations (37a) et (37d) constituent alors un système non linéaire par rapport à  $V_{11}$  et  $V_{22}$  que l'on peut résoudre par exemple en utilisant un algorithme à itération directe :

$$V_{11}^{k+1} = \hat{V}_{11} + V_{11}^k H(V_{11}^k, V_{22}^k) V_{11}^k \quad (38a)$$

$$V_{22}^{k+1} = \hat{V}_{22} + V_{11}^k N^T H(V_{11}^k, V_{22}^k) N V_{22}^k \quad (38b)$$

Pratiquement, on fixe les valeurs de  $\hat{V}_{11}$  et  $\hat{V}_{22}$  et on cherche la solution stable des équations (38). Les équations (37b) et (37c) donnent alors les variances des estimations qui n'ont pas pu être imposées.

## 6. FIABILITE D'UN SYSTÈME D'INSTRUMENTATION

Pour un processus réel, le calcul des estimations qui vient d'être présenté ainsi que celui de leur sensibilité, suppose la connaissance des mesures c'est-à-dire que les capteurs soient en état de les délivrer. Dans certains cas, la défaillance d'un capteur n'entraîne pas nécessairement l'impossibilité du calcul de l'estimation ; on a précisé cette notion au paragraphe 2 en définissant la condition à satisfaire pour qu'il en soit ainsi et en donnant l'expression de l'estimation en fonction des mesures disponibles. Si cette condition d'observabilité n'est pas satisfaite, l'estimation complète de l'état du système n'est pas possible. Ces situations doivent être précisées et elles peuvent se caractériser par un indice de fiabilité du système d'instrumentation. Une deuxième motivation de ce calcul de fiabilité est issue de la nécessité de disposer d'un certain nombre de variables mesurées

pour permettre la commande du processus en toute sécurité. Les variables nécessaires à cette commande sont en général directement mesurées, mais il faut alors s'assurer que si le capteur associé à l'une de ces variables devient défaillant, cette dernière reste déductible à partir des variables restantes. La situation se complique en fonction du nombre de défaillances que l'on peut accepter tout en conservant observable cette liste de variables nécessaire à la conduite du système. Présentons maintenant la façon d'évaluer la fiabilité d'un système d'instrumentation.

Par définition, la fiabilité d'un capteur est la probabilité  $r(t)$  pour qu'il n'ait pas de défaillance à l'instant  $t$ , sachant qu'il n'y en avait pas à l'instant  $t = 0$ . Cette probabilité peut s'exprimer de façon analytique en utilisant, par exemple, la loi de Poisson :

$$r(t) = \exp(-\lambda t) \quad (39)$$

où  $\lambda$  est une constante représentant le taux de panne du capteur. De façon évidente  $r(0)=1$  traduit le fonctionnement du capteur à l'instant initial et  $r(\infty)=0$  correspond à la défaillance du capteur. Par extension, on peut définir la fiabilité d'un système constitué de  $n$  capteurs de fiabilités respectives  $r_i(t)$  :

$$R(t) = f(r_1(t), \dots, r_n(t)) \quad (40)$$

Dans la suite, afin de simplifier la présentation, les capteurs ont tous le même taux de panne  $r(t)$ . On définit aussi la fonction "temps moyen avant défaillance" (Mean Time To Failure) par l'expression :

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (41)$$

Pour un seul capteur, on a alors :

$$MTTF = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) dt = 1/\lambda \quad (42)$$

Considérons maintenant la fiabilité d'un système (figure 1) muni de quatre capteurs sur les voies 1, 7, 3, 5 et 6 et dont les variables sont liées par les deux équations de redondance :

$$q_1 - q_6 = 0 \quad (43a)$$

$$q_3 + q_5 - q_7 = 0 \quad (43b)$$

On suppose que les variables mesurées 1, 7, 3, 5 et 6 sont toutes nécessaires à l'élaboration de la commande du système ou à sa surveillance. Cela signifie qu'une défaillance d'un ou plusieurs capteurs est tolérée à condition que l'information correspondante puisse se déduire des informations issues des capteurs restants.

Si la redondance explicitée par les équations (43) n'est pas prise en compte, la probabilité que tous les capteurs fonctionnent, donc qu'ils soient non défaillants est :

$$R_0(t) = (r(t))^5 = \exp(-5\lambda t) \quad (44)$$

Le MTTF du système de mesure est donc :

$$\text{MTTF}_0 = 0.25/\lambda \quad (45)$$

Si les équations de redondance sont prises en compte, on peut alors tolérer certaines défaillances. En effet si l'un des capteurs intervenant dans les équations de redondance (43) devient défaillant, alors l'information qu'il délivre peut être remplacée par une estimation obtenue par simple déduction. De façon générale, les capteurs dont les défaillances sont admissibles sont ceux qui apparaissent dans les équations de redondance d'un système. L'examen de la figure 1 ou des équations (43) montre que, si un capteur est défaillant, la mesure correspondante peut être aisément déduite des mesures restantes. La probabilité qu'un capteur soit en panne et que les trois autres soient en état est :

$$R_1(t) = (1 - r(t)) r(t)^4 \quad (46)$$

Il y a cinq possibilités de considérer un capteur défaillant, la mesure correspondante étant déductible.

On remarque aussi que certaines défaillances affectant simultanément deux capteurs sont tolérables. En effet, si par exemple les capteurs 1 et 7 sont défaillants l'observabilité des variables 1, 7, 3, 5 et 6 subsiste. Pour la même raison, d'autres couples de capteurs défaillants sont acceptables : 1 et 5, 1 et 3, 6 et 7, 6 et 6 et 6 et 3. Il y a donc six possibilités de considérer deux capteurs défaillants, les mesures correspondantes étant déductibles. La probabilité que deux capteurs soient en panne et que les deux autres soient en état est :

$$R_2(t) = (1 - r(t))^2 r(t)^3 \quad (47)$$

Le cas de plus de deux capteurs défaillants ne peut être envisagé car certaines variables deviennent alors inobservables. En conclusion, la probabilité pour que les variables 1, 7, 3, 5 et 6 soient observables (par mesure directe ou par déduction) est donc :

$$R(t) = R_0(t) + 5 R_1(t) + 6 R_2(t) \quad (48)$$

En appliquant la définition (14), le MTTF global du système est donc :

$$\text{MTTF} = 1/\lambda \quad (49)$$

La comparaison des résultats (45) et (49) montre qu'une augmentation très sensible de la fiabilité du système d'instrumentation est obtenue en prenant en compte la redondance d'informations due aux équations du système physique. Cet exemple simple montre également les liens entre les notions de fiabilité, de redondance et d'observabilité. De façon plus générale, on peut étudier les variations du MTTF en fonction de modifications de la position et du nombre des capteurs. Lorsque plusieurs configurations de capteurs conduisent à la même observabilité du système, on peut alors choisir la configuration offrant le MTTF maximal. Alternativement, on peut définir l'architecture de l'instrumentation garantissant un certain degré de fiabilité et maximisant l'observabilité.

## 7. CONCLUSION

Pour la classe des systèmes linéaires, nous avons analysé l'influence du système de mesure sur l'estimation de l'état d'un système. Ce dernier est en particulier sensible au nombre de mesures, à leur répartition et à leur précision. Dans une phase de conception, nous avons montré qu'il était possible de s'imposer certaines contraintes sur la qualité des estimations et de les respecter par un choix judicieux du schéma d'instrumentation. Cette démarche peut être entreprise sur un système déjà muni de capteurs mais aussi sur un système non instrumenté. On peut penser que cette technique puisse être alors intégrée dès la phase de conception, l'instrumentation faisant alors partie du système.

Il conviendrait d'étendre la portée de l'analyse effectuée au cas de processus décrits par des modèles quelconques. En particulier, le cas des processus linéaires dynamiques pourrait être analysé par une démarche analogue.

## 8. REFERENCES

Crowe C.M. (1989), Observability and redundancy of process data for steady-state reconciliation. *Chemical Engineering Science*, 44 (12), p. 2909-2917.

Darouach M. (1986), Observabilité et validation des données des systèmes de grande dimension, application à l'équilibrage des bilans de mesures. Thèse de doctorat d'Etat, Nancy.

Gomolka W., Turbatte H.C, Maquin D. and Ragot J. (1992), Contribution à l'analyse de l'observabilité des systèmes linéaires décrits par des équations de bilan. *Revue R.A.I.R.O. A.P.I.I.*, 26 (2), pp. 69-89.

Mah R.S.H., Stanley G.M. and Downing D.M. (1976), Reconciliation and rectification of process flow and inventory data. *Industrial Engineering Chemistry Process Design Development*, 15 (1), p. 175-183.

Maquin D., Darouach M. and Ragot J. (1989), Observabilité et validation de mesures des systèmes bilinéaires. Congrès IFAC AIPAC' 89, Nancy.

Ragot J., Darouach M., Maquin M., Bloch G. (1990), Validation de données et diagnostic. *Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance*, Hermès, 431 pages.

Ragot J., Maquin D. and Kratz F. Observability and redundancy decomposition - application to diagnosis. In Patton, à paraître en 1994.

Ripps D.L.,(1962), Adjustment of experimental data. *Chemical Engineering Progress*, 58 (10), p. 120.

Romagnoli J.A. and Stephanopoulos G.,(1980), On the rectification of measurement errors for complex chemical plants, steady-state analysis. *Chemical Engineering Science*, 35 (5), p. 1067-1081.

Stanley G.M. and Mah R.S.H. (1981), Observability and redundancy classification in process networks. *Chemical Engineering Science*, 36, p. 1941-1954.

Turbatte H.C., Maquin D., Huynh C.T. and Ragot J. (1993), Conception de l'architecture d'un système d'instrumentation - Application à un procédé pétrochimique. *Tooldiag'93*, International Conference on Fault Diagnosis, Toulouse, april 5-7.

Vaclaveck V. and Loucka M. (1976), Selection of measurements necessary to achieve multi-component mass balances in chemical plant. *Chemical Engineering Science*, 31 (12), p. 1199-1205.