

# Analyse d'un système de mesure à paramètres incertains

H. JANATI IDRISSE, O. ADROT, D. MAQUIN, J. RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy - UPRESA CNRS 7039

Institut National Polytechnique de Lorraine

2, Avenue de la Forêt de Haye, F - 54 516 Vandoeuvre les Nancy

...@ensem.inpl-nancy.fr

juillet 30, 2007, 22:52

**Résumé.** Pour analyser le bon fonctionnement d'un système de mesure, l'une des techniques couramment utilisées consiste à tester la nullité d'équations de redondance entre différentes grandeurs connues caractérisant ce système (Frank, 1990). Dans ce qui suit, on insiste sur la conception du vecteur parité qui est à la base de toutes les analyses de diagnostic utilisant un modèle.

Ce vecteur parité constitue la signature du système à surveiller. Lorsque le modèle est connu avec une certaine imprécision, le vecteur parité est lui aussi sensible à cette imprécision ; il semble utile d'en étudier l'influence. On examine donc le cas de systèmes de mesures dont les paramètres sont incertains mais bornés. Ce point constitue l'apport original de l'exposé.

On sait générer des résidus d'équation pour des systèmes à paramètres incertains ainsi que définir un seuil adaptatif de détection de défaillances prenant en compte les incertitudes de paramètre de modèle. Le seuil est obtenu en générant l'enveloppe du vecteur parité à partir des bornes des paramètres incertains. Par rapport à des résultats plus anciens, le calcul de l'enveloppe est ici effectué de façon exacte et le résultat du diagnostic est donc garanti.

**Abstract.**

## Introduction

Habituellement, lorsqu'on procède à la critique et à la validation des mesures collectées sur un processus physique (Crowe, 1996), on teste l'adéquation de ces mesures brutes vis-à-vis du modèle du processus (phase de détection des incohérences) puis on ajuste ces mesures au moyen de termes correctifs de façon à vérifier le modèle (phase d'estimation de l'état du processus). Une autre façon de procéder consiste à générer directement des indicateurs de cohérence de mesure : le vecteur parité est l'un de ses indicateurs et il est obtenu de façon générale en éliminant des équations du système toutes les grandeurs inconnues.

Les deux méthodes que nous venons d'évoquer supposent que le modèle du système soit disponible et que ses paramètres soient parfaitement connus. Bien souvent, une difficulté est avancée par les utilisateurs potentiels de ce type de méthode : les processus ne sont pas toujours parfaitement décrits (le modèle est une image approximative du processus réel), la précision des paramètres du modèle n'est pas quantifiable de façon précise. Cependant, le praticien dispose souvent d'une connaissance expérimentale du fonctionnement du processus traduite par un certain nombre d'informations qualitatives et caractérisant le degré de pertinence des paramètres du modèle. Ces connaissances, mêmes entachées d'imprécisions, peuvent néanmoins être utilisées pour analyser les données en les introduisant sous forme de contraintes inégalités ou d'intervalles. L'objectif de cette présentation est de fournir les éléments nécessaires à la mise en oeuvre d'une procédure utilisant ce type de formalisation par intervalle en considérant le cas simple d'un système à un seul paramètre incertain.

Dans une première partie, on rappelle brièvement la définition du vecteur parité d'un système certain ; cela permet ensuite de considérer le cas des systèmes incertains dans le cas statique (section 2) puis dans le cas dynamique (section 3). Un exemple de faible dimension illustre la mise en oeuvre et l'interprétation des résultats.

## 1. Vecteur parité d'un système certain

Considérons le cas général de l'équation de mesure à l'instant  $k$  :

$$\begin{array}{l} y_k = Cx_k + e_k + Fd_k \\ x \in \mathfrak{R}^n, y \in \mathfrak{R}^m, d \in \mathfrak{R}^p, e \in \mathfrak{R}^m \\ C \in \mathfrak{R}^{m,n}, F \in \mathfrak{R}^{m,p}, m > n \end{array} \quad (1)$$

où  $y_k$  est le vecteur de mesure,  $x_k$  le vecteur des variables à mesurer,  $d_k$  le vecteur des défaillances pouvant affecter certains capteurs,  $e_k$  le vecteur des bruits de mesure,  $C$  et  $F$  deux matrices connues. On définit le vecteur parité  $p_k$ , projection du vecteur des mesures, sous sa forme "calcul" et sous sa forme explication des erreurs et défaillances :

$$p_k = Wy_k \quad (2a)$$

$$p_k = We_k + WFd_k \quad (2b)$$

où  $W$  est la matrice de projection ou matrice de parité (Potter, 1977) orthogonale à  $C$ . Si l'on fait l'hypothèse, assez peu restrictive, que  $C$  est de plein rang colonne, alors

$$W \in \mathfrak{R}^{(m-n),n}, p \in \mathfrak{R}^{n-m}$$

La dimension du vecteur parité, qui traduit également le nombre de redondances du système, conditionne largement les propriétés d'isolabilité des défauts [].

En l'absence d'erreur de mesure  $e_k$  et de défaillance  $d_k$ , le vecteur parité est nul (Staroswiecki, 1986). Par conséquent, l'équation (2a) traduit l'ensemble des redondances qui lient les mesures  $y_k$ . L'expression (2b) fournit un moyen de détecter les défaillances  $d_k$  en fonction du rang de la matrice  $WF$ . Eventuellement, des hypothèses statistiques sur la distribution des erreurs de mesures  $e_k$  permettent d'exhiber les propriétés statistiques de  $p_k$ .

## 2. Vecteur parité d'un système à paramètres incertains

On considère maintenant le cas de systèmes dont certains paramètres varient. Le vecteur parité est alors recherché selon le principe précédent mais en le caractérisant aussi par son enveloppe. Pour cela, l'équation (1) est considérée dans le cas où  $C$  est fonction affine du paramètre  $\theta_k$  borné mais variable :

$$y_k = C(\theta_k)x_k + e_k + Fd_k \quad (3a)$$

$$|\theta_k| \leq 1 \quad (3b)$$

Comme précédemment, on recherche  $\Omega(\theta_k)$  tel que :

$$\Omega(\theta_k)C(\theta_k) = 0. \quad (4)$$

Le vecteur parité est alors défini par  $p_k = \Omega(\theta_k)y_k$

Différentes techniques peuvent, être utilisées pour résoudre (4). Dans [DRISSI 2000], l'approche utilisée repose sur un développement en série de  $\Omega(\theta_k)$  complétée par une troncature du vecteur parité. Ici, on propose une recherche de la solution exacte en résolvant l'équation (4), la solution étant recherchée sous la forme matricielle polynomiale :

$$\Omega(\theta_k) = \Omega_0 + \theta_k\Omega_1 + \dots + \theta_k^q\Omega_q \quad (5)$$

Ainsi, pour  $q = 2$ , on doit résoudre le système

$$\begin{pmatrix} \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 & C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

L'existence de la solution de (6) est liée à la valeur de  $q$  (Gantmacher, 1977). La résolution du système linéaire (6) ne pose pas de problème particulier ; on peut aussi directement résoudre (4) par une technique de calcul formel. A chaque instant, le vecteur parité s'explique alors :

$$p_k = \Omega_0 y_k + \theta_k \Omega_1 y_k + \dots + \theta_k^q \Omega_q y_k \quad (7)$$

On peut alors chercher son enveloppe compte tenu du domaine de variation du paramètre  $\theta$  (3b) :

$$\begin{cases} p_{-inf_k} = \inf_{\theta_k} (\Omega_0 y_k + \theta_k \Omega_1 y_k + \dots + \theta_k^q \Omega_q y_k) \\ p_{-sup_k} = \sup_{\theta_k} (\Omega_0 y_k + \theta_k \Omega_1 y_k + \dots + \theta_k^q \Omega_q y_k) \end{cases} \quad (8)$$

La recherche des bornes "inf" et "sup" par rapport à  $\theta_k$  est simple lorsque  $q \leq 3$ . Au delà de cette dimension, une procédure numérique peut être aisément appliquée.

## 3. Analyse du vecteur parité

Pour un système à paramètres certains, le vecteur parité doit être nul en l'absence de défaut. Pour un système incertain, l'absence de défaut se traduit par l'appartenance de la valeur "0" (vecteur de même dimension que  $p$ ) au domaine défini par l'enveloppe du vecteur parité.

$$A_k(p) = \{p / p_{-inf_k} \leq p \leq p_{-sup_k}\}$$

Ce domaine représente l'ensemble des valeurs admissibles du vecteur résidu lorsque les mesures sont cohérentes vis-à-vis du modèle. En bon fonctionnement, le résidu est nul pour une valeur particulière du paramètre  $\theta$  ; le test de cohérence des mesures se limite à vérifier si l'origine  $0 \in \mathcal{D}^{m-n}$  appartient à  $A_k(p)$  :

$$p_{-inf_k} \leq 0 \leq p_{-sup_k} \quad (9)$$

Dans le cas où l'une des composantes du vecteur 0 ne vérifie pas cette condition, il faut conclure à l'incohérence des mesures. Si la dimension du vecteur parité le permet, une étude précise de ses composantes peut conduire à la localisation de la ou des mesures en défaut [], [].

Un indicateur de présence de défaut  $I_k$  peut alors être construit à partir des distances de l'origine à l'enveloppe définie en (8).

Il est simple, à chaque instant, d'évaluer l'enveloppe (8) ainsi que les distances de l'origine à cette enveloppe. Le signe du produit de ces distances peut être un bon indicateur de la position de l'origine :

$$I_k = \text{sgn}((0 - p_{inf,k})(p_{sup,k} - 0)) \quad (10)$$

la règle de décision étant la suivante :

$$\begin{aligned} I_k = +1 & \text{ alors cohérence} \\ I_k = -1 & \text{ alors incohérence} \end{aligned}$$

Dans la pratique le test (10) peut se révéler trop pauvre car délivre un résultat binaire. Prendre en compte à chaque instant la forme du domaine, sa dimension et la position de l'origine peut apporter un diagnostic complémentaire. La figure 1 schématise à un instant le domaine  $A_k(p)$ , son centre  $C$ ,

l'origine  $O$ . Un indicateur prenant en compte la forme du domaine est défini en (11) où  $OJ^*$  est la plus petite distance de l'origine aux deux facettes les plus proches de l'origine (fig. 1).

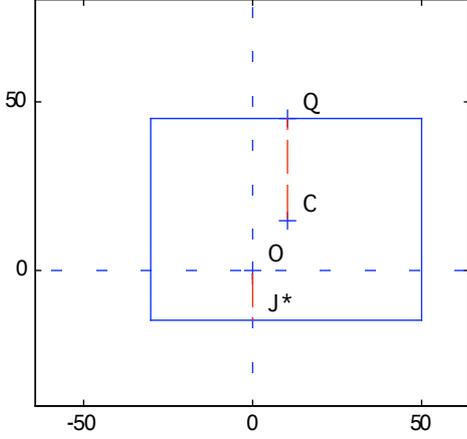


Figure 1. Calcul des distances

$$d_k = \varepsilon \begin{cases} \left\| \begin{matrix} \vec{OJ^*} \\ \vec{CQ} \end{matrix} \right\| & \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = -1 \text{ si } 0 \in \mathcal{A}_k(p) \\ \varepsilon = +1 \text{ si } 0 \notin \mathcal{A}_k(p) \end{array} \right. \end{cases} \quad (11)$$

qui s'explique aussi :

$$d_k = -2 \frac{\min(|p_{-inf_k}|, |p_{-sup_k}|)}{p_{-inf_k} + p_{-sup_k}} \cdot \text{sgn}(p_{-inf_k} \cdot p_{-sup_k})$$

Par des techniques d'agrégation, il est également possible de construire des indicateurs d'incohérence prenant en compte divers paramètres de forme traduisant l'expression du vecteur parité.

#### 4. Vecteur parité pour les systèmes dynamiques incertains

Considérons le cas plus général des systèmes dynamiques. En l'absence d'erreurs de mesure et de défauts, ces derniers sont modélisés sous la forme :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\theta_k)x_k + B(\theta_k)u_k \\ y_k &= C(\theta_k)x_k + e_k \end{aligned} \quad (12)$$

Le système est observé sur un horizon  $[k, k+H]$ . On sait alors regrouper l'ensemble des états et des commandes sur cet horizon par la relation linéaire :

$$\begin{aligned} Y &= P(\theta)X \\ M(\theta)X &= N(\theta)U \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \\ \dots \\ x_{k+H} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_k \\ \dots \\ u_{k+H-1} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_k \\ \dots \\ y_{k+H} \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_k \\ \dots \\ \theta_{k+H} \end{pmatrix} \quad (13)$$

où  $P, M$  et  $N$  dépendent linéairement de  $\theta$ . Les équations peuvent aussi se regrouper sous la forme :

$$\begin{aligned} C(\theta)X &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ N(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ Y \end{pmatrix} \\ C(\theta) &= \begin{pmatrix} P(\theta) \\ M(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

On retrouve ainsi une équation dont la structure est semblable à (3). On peut donc générer les équations de parité selon le même principe en cherchant au préalable une matrice  $\Omega(\theta)$  orthogonale à  $C(\theta)$ . Néanmoins le calcul est plus délicat car  $\Omega$  est fonction du vecteur  $\theta$  de dimension  $H+1$ . Dans [Idrissi, 2001], ce problème est présenté plus en détail.

#### 5. Exemple.

On a généré un système de mesure à trois capteurs avec un paramètre incertain  $\theta$  et présentant des défauts :

$$\begin{pmatrix} y_{1,k} \\ y_{2,k} \\ y_{3,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta_k \\ \theta_k & 1 \\ 1+\theta_k & 1-\theta_k \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,k} \\ d_{2,k} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Le paramètre  $\theta$  varie entre -0.25 et 0.25 (ce qui représente une situation difficile, les variations du paramètre étant importantes par rapport aux coefficients fixes). Avec les valeurs de  $C_0$  et de  $C_1$  issues de (12), on obtient  $q = 2$  et :

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \Omega_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \Omega_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du vecteur parité (ici scalaire) :

$$\begin{aligned} P_k &= y_{1k} + y_{2k} - y_{3k} \\ &\quad - 2\theta_k y_{2k} + \theta_k^2 (y_{1k} - y_{2k} + y_{3k}) \end{aligned} \quad (16)$$

dont il est simple d'évaluer les bornes. La figure 1a indique l'évolution au cours du temps des trois mesures (avec bruit important) ; deux défauts affectent le premier capteur des instants 30 à 50 et le deuxième des instants 90 à 125. La figure 1b indique l'évolution du paramètre  $\theta$ . La figure 1c indique l'évolution de l'enveloppe du vecteur parité.

L'indicateur de détection (fig. 1d) utilise une fonction de  $I_k$  (10) prenant respectivement les valeurs 0 et 1 en cas de cohérence et d'incohérence :

$$J_k = \frac{1 + I_k}{2}$$

Les traits en pointillés rappellent les instants de présence des défauts ; l'indicateur reflète donc très correctement cette situation, mais de nombreuses fausses alarmes polluent les résultats. Elles peuvent facilement être supprimées en introduisant un filtrage et une condition de persistance de la détection. Le filtre utilisé est basé sur le calcul de la médiane d'une série de 6 (ce nombre étant à adapter) valeurs d'une fenêtre glissante (fig. 1e). La persistance consiste à ne considérer comme valide un changement d'état de la cohérence des mesures que si le nouvel état perdure sur un horizon temporel d'au moins 6 pas d'échantillonnage (cette valeur étant à adapter). Les figures 1f et 1g visualisent l'effet de la condition de persistance à la valeur 1 puis à la valeur 0. La procédure de robustification donne alors satisfaction à un léger décalage temporel près de la détection d'incohérence.

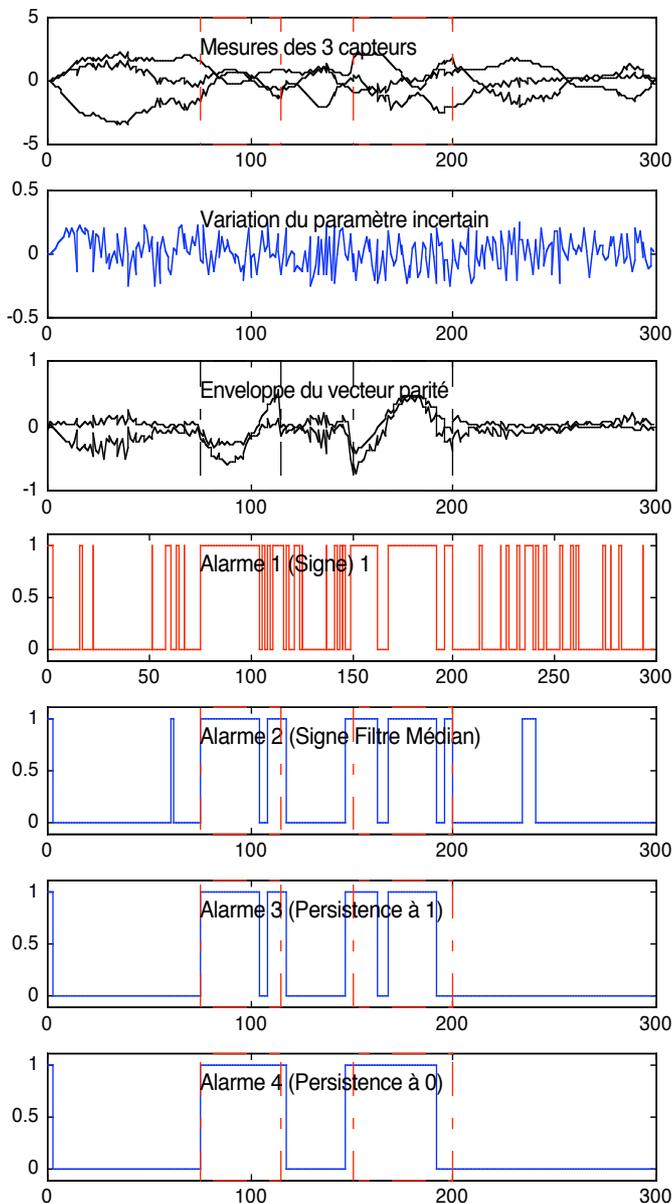


Figure 1(a,b,c,d,e,f,g)

## 6. Conclusion

La technique présentée constitue une alternative intéressante à la technique classique de validation de données utilisant le principe de la minimisation de la fonction de vraisemblance associée à la distribution des erreurs de mesure. Elle nécessite très peu d'hypothèses théoriques quant à sa mise en oeuvre et se base essentiellement sur des connaissances semi-empiriques relatives aux intervalles définissant les paramètres du système.

D'un point de vue théorique, il reste sans doute quelques compléments à apporter à cette présentation et en particulier sur l'évaluation complétée des performances de la méthode.

Au titre des extensions, il est envisageable de prendre en compte plusieurs incertitudes paramétriques.

## Références

- ADROT O., MAQUIN D., RAGOT J. Bounding approach to fault detection of uncertain dynamic systems. IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocess'2000, Budapest, Hungary, June 14-16, 2000.
- ADROT O., MAQUIN D., RAGOT J. Diagnosis of an uncertain static system. 39th IEEE Conference on Decision and Control, Darling Harbour, Australia, December 12-15, 2000.
- ADROT O., MAQUIN D., RAGOT J. Fault detection with model parameter structured uncertainties. European Control Conference, ECC'99, Karlsruhe, Germany, August 31, September 3, 1999.
- CROWE C.M. Data reconciliation -progress and challenges. Journal of Process Control, 6 (2,3), p. 89-98, 1996.
- IDRISSI CDC, 2001
- POTTER J.E., SUMAN M.C. Thresholdless redundancy management with arrays of skewed instruments. Electronic flight control systems, Agardograph 224, p. 2115-2121, 1977.
- GANTMACHER. The theory of matrices. Chelsea, Ney-York, 1977.
- STAROSWIECKI M., HAMAD M. Validation of measurements and detection of sensors failures in control systems. Signal processing III : theory and applications. I.T. Young editor, Elsevier, 1986.
- BRUNET M., JAUME D., LABARRERE M., RAULT A., VERGE M. Détection et diagnostic de pannes. Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, Hermès, 1990.
- FRANK P.M. Fault diagnosis in dynamical systems using analytical and knowledge based redundancy - a survey and some new results. Automatica, 26 (3), p. 459-474, 1990.
- JANATI-IDRISSI H., ADROT O., MAQUIN D. Recherche du vecteur parité pour un système statique incertain. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2000, Lille, France, 5-8 juillet 2000.
- RAGOT J., MAQUIN D. Génération d'indicateurs de défauts à base d'observateurs. In Diagnostic, coordinateur : Bernard Dubuisson, chapitre 2, 35 p. Traité Information, Commande, Communication, IC2, Hermès, Paris, 2000.

MAQUIN D., RAGOT J. Surveillance des réseaux de distribution d'eau potable. In Diagnostic, coordinateur : Bernard Dubuisson, chapitre 11, 30 p. Traité Information, Commande, Communication, IC2, Hermès, Paris, 2000.