

Estimation d'état et diagnostic de systèmes décrits par des multimodèles

José RAGOT et Didier MAQUIN

Institut National Polytechnique de Lorraine
Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR CNRS 7039 / INPL / UHP

2, avenue de la forêt de Haye, 54 516 Vandœuvre les Nancy

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Université de Tunis

Ecole Supérieure des Sciences
et Techniques de Tunis



وزارة التعليم العالي

جامعة تونس

المدرسة العليا للعلوم
والتقنيات بتونس



- ▶ Estimation d'état ?
- ▶ Diagnostic ?
- ▶ Multi-modèle ?

- ▶ Motivation et constats
- ▶ Quelques exemples de multi-modèles

- ▶ Expression analytique d'un multi-modèles
- ▶ Quelques références bibliographiques
- ▶ Comment identifier les paramètres d'un multi-modèle ?
- ▶ Stabilité d'un multi-modèles

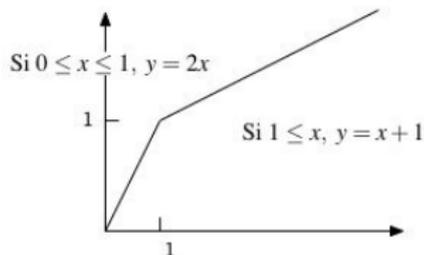
- ▶ Reconstruction d'état et observateur
- ▶ Restauration d'entrées inconnues
- ▶ Application au décryptage de systèmes chaotiques
- ▶ Reconnaissance des modes de fonctionnement d'un système
- ▶ Réflexion : le problème des p droites dans le plan

- ▶ Extensions
- ▶ Conclusion

- ▶ Constat : de très nombreuses méthodes d'estimation d'état et de diagnostic s'appuient sur des modèles linéaires
- ▶ Idée : essayer de transposer ces méthodes au cas de modèles non linéaires (au moindre effort !)
- ▶ Solution : utiliser un modèle non linéaire construit sur la base de plusieurs modèles linéaires, tout en assurant le passage d'un modèle à un autre.

Notion de multi-modèle

- ▶ Système à deux modes de fonctionnement



- ▶ Description

$$y = 2x, \quad \text{si } x < 1$$

$$y = x + 1, \quad \text{si } x > 1$$

- ▶ Fonction de commutation μ

$$\mu(x) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn}(x - 1))$$

$$y = 2x\mu(x) + (x + 1)(1 - \mu(x))$$

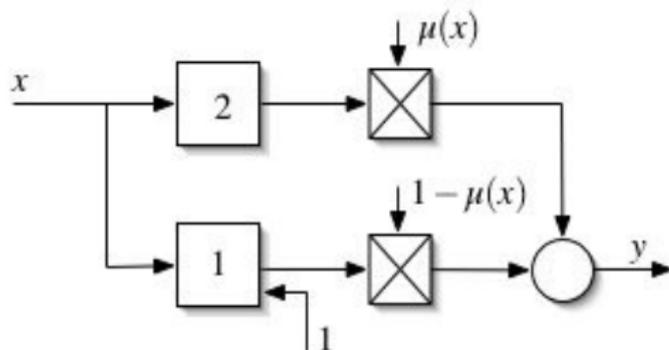
- ▶ Fonction de transition μ_a

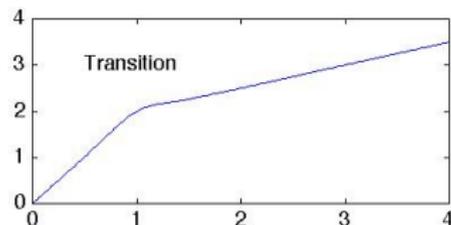
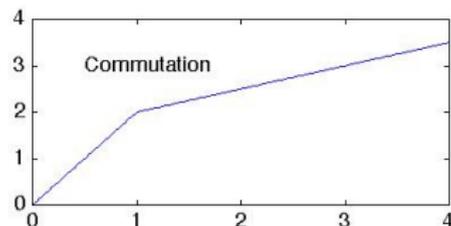
$$\mu_a(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{x - 1}{p} \right) \right)$$

$$y = 2x\mu_a(x) + (x + 1)(1 - \mu_a(x))$$

Changement de mode dû à un évènement interne (état)

$$y = 2x\mu(x) + (x + 1)(1 - \mu(x))$$

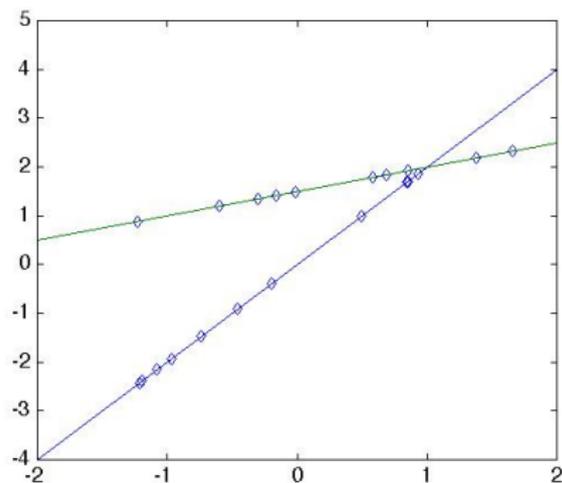
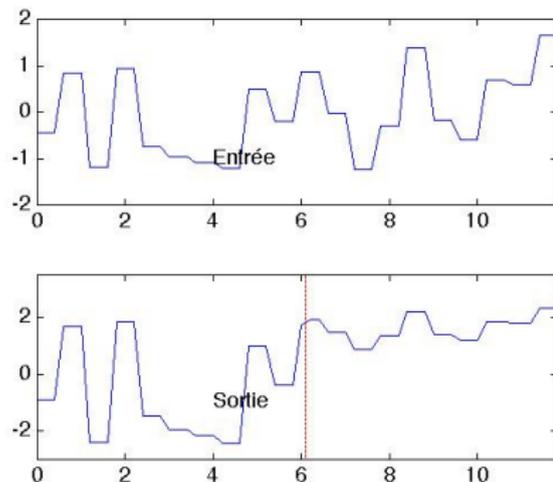




- ▶ Choix de la fonction de transition
- ▶ Choix des paramètres de la fonction de transition
- ▶ Choix du nombre de fonctions de transition

Changement de mode dû à un évènement externe (temps, perturbation)

Représentation temporelle



Représentation cartésienne $y=f(x)$

$$y(t) = 2x(t), \quad \text{si } t < 6.1$$

$$y(t) = 0.5x(t) + 1.5, \quad \text{si } t \geq 6.1$$

$$p(X) = \sum_{i=1}^C \mu_i p(X | \theta_i)$$

► Structure

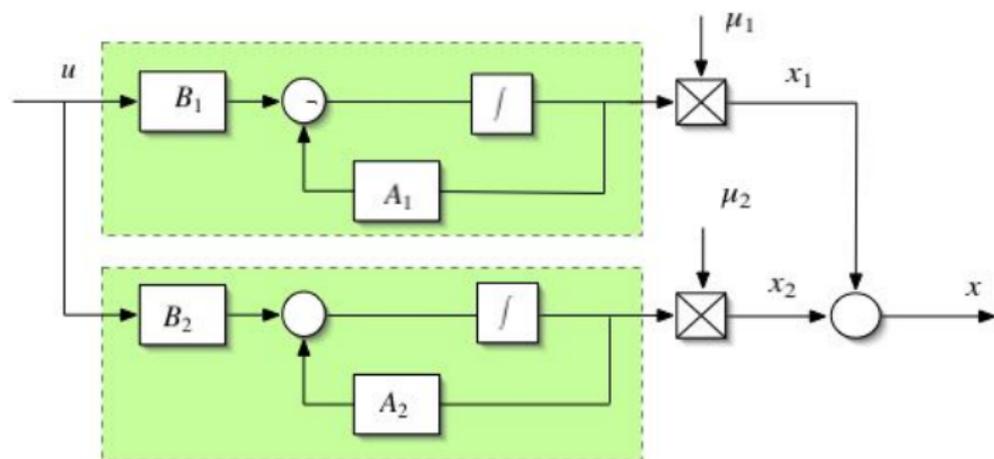
$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, M$$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) x_i(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) y_i(t) \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} 0 \leq \mu_i(\xi) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) = 1 \end{cases}$$

- Choix de ξ : $\xi = \{u(t), x(t), y(t)\}$
- Intérêt : modèle local avec sens physique, fonction μ bornée
- Application : modélisation, commande, estimation d'état, diagnostic

► Schéma fonctionnel



► Variantes à développer

- Filtrage de la sortie
- Entrée spécifique pour chaque modèle local

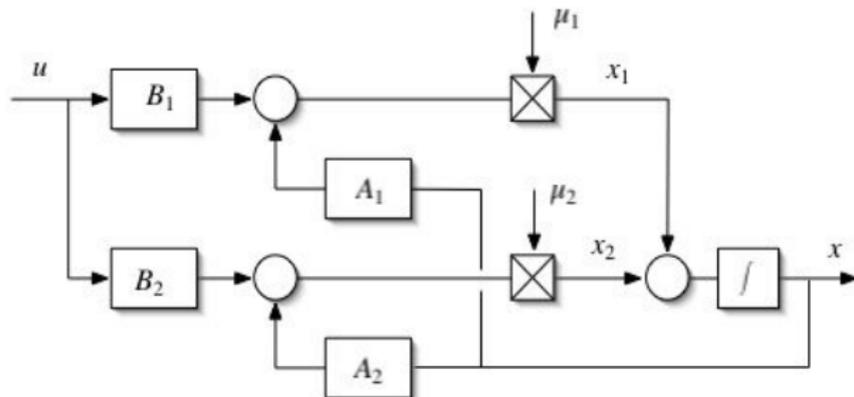
Modèle à état unique

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) C_i x(t) \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \xi = \{u(t), x(t), y(t)\} \\ 0 \leq \mu_i(\xi) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) = 1 \end{array} \right.$$

⇒ Modèle flou de Takagi-Sugeno

► Schéma fonctionnel



► Variantes à développer :

- ▶ Propriété d'*approximateur universel*
- ▶ Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) aux systèmes NL
 - ⇒ estimation d'état, observateur, ...
- ▶ Les fonctions μ sont bornées
 - ⇒ propriétés particulières
- ▶ Absence d'analyse spécifique de la nature des non-linéarités
- ▶ Extension à d'autres structures

$$y(t) = \mu_1(\xi) \int_0^t u(\tau) h_1(t - \tau) d\tau + \mu_2(\xi) \int_0^t u(\tau) h_2(t - \tau) d\tau$$

Quelques références sur les multimodèles

- ▶ R. Murray-Smith and T. A. Johansen, editors. Multiple Model Approaches to Modelling and Control. Taylor and Francis, London, 1997.
- ▶ K.G. Gasso, G. Mourot, J. Ragot. Environmental systems modelling and diagnosis using a multiple model approach. 5th International Fuzzy Logic and Intelligent technologies in Nuclear Science Conference on Computational Intelligent Systems for Applied Research, Ghent, Belgique, 2002.
- ▶ Y. Zhang, J. Jiang. Integrated active fault-tolerant control using interacting multiple model approach. IEEE Trans. on AES, 37 (4), 2001.
- ▶ M. Chadli Analyse des systèmes non linéaires décrits par des structures multi-modèles. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002.
- ▶ A. Akhenak. Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : application au diagnostic. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.
- ▶ R. Babuska, C. Fantuzzi, U. Kaymak, and H.B. Verbruggen. Improved inference for Takagi-Sugeno models. In Proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst., New Orleans, 1996.
- ▶ T.M. Guerra, S. Delprat, S. Labiod. Stabilization of fuzzy Takagi-Sugeno descriptor models. Application to a double inverted pendulum. In, Advanced Robotic Systems Scientific Book, 2005.

► Modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi)(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) C_i x(t) \end{cases}$$

► Procédure d'estimation : fonctions de sensibilité

► $\Phi = \frac{1}{2} \int_0^T (y(t) - y_m(t))^2 dt$

► $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \int_0^T (y(t) - y_m(t)) \sigma_y(t) dt, \quad \sigma_y(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial \theta}$

► $\sigma_y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) C_i \sigma_x(t)$

► $\dot{\sigma}_x(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial \theta} x(t) + A_i \sigma_x(t) \right)$

► $\theta^+ = \theta - \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$

- ▶ Le multi-modèle

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi)(A_i x(t) + B_i u(t))$$

est stable s'il existe P définie positive telle que :

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1.. M$$

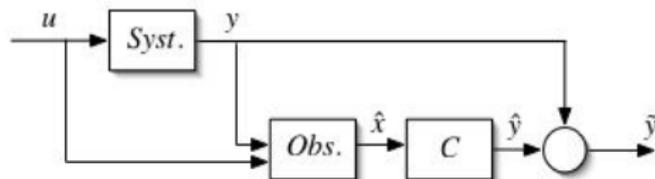
- ▶ Preuve (Lyapounov)

$$V(t) = x^T P x$$

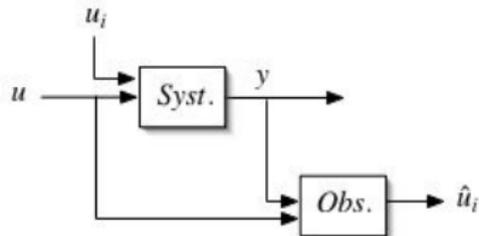
$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) x^T (A_i^T P + P A_i) x$$

- ▶ Difficultés : conservatisme de la solution
- ▶ Extensions : fonction de Lyapounov polyquadratique, D-stabilité

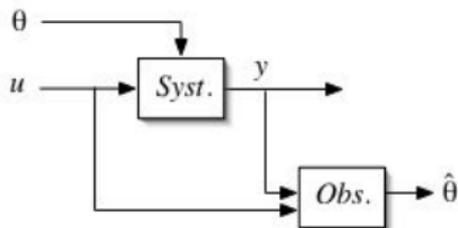
- ▶ Observateur d'état et de sortie



- ▶ Observateur d'entrée inconnue



- ▶ Observateur de paramètre



- Description de la structure

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

- Dynamique erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (A_i - G_i C) e(t)$$

- Analyse de convergence de l'erreur - Lyapunov

$$V(t) = e(t)^T P e(t)$$

- ▶ Dynamique erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (A_i - G_i C) e(t)$$

- ▶ Conditions de stabilité asymptotique

$$(A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) < 0, \quad i = 1, \dots, M$$

- ▶ Equations matricielles bilinéaires

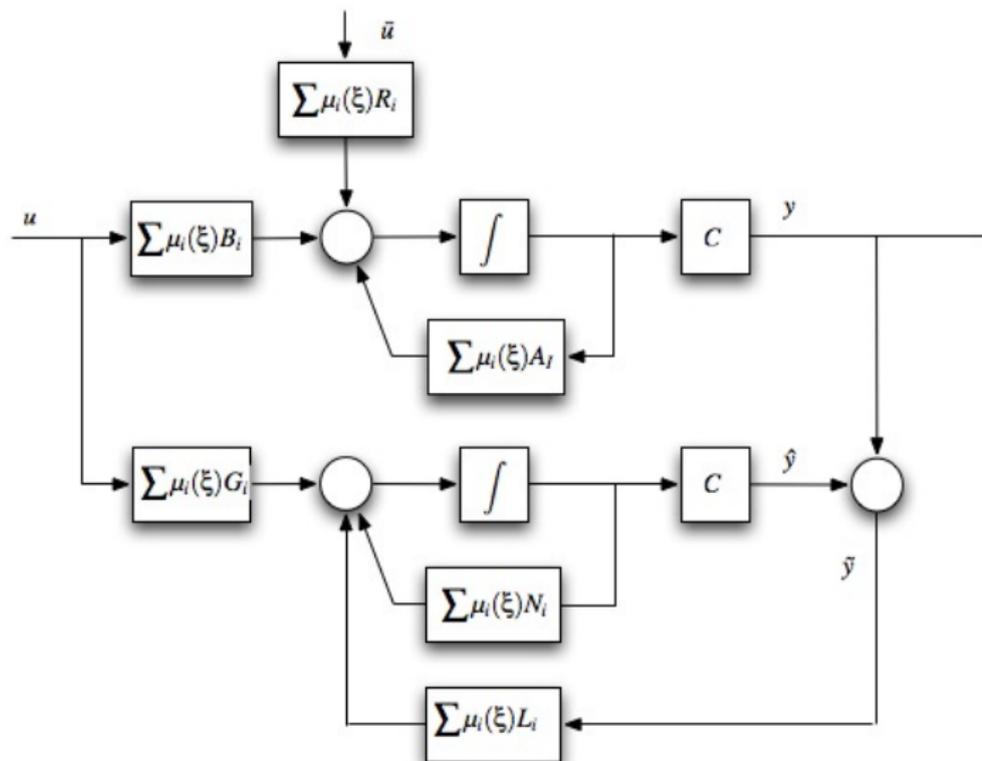
⇒ changements de variables : $W_i = P G_i$

$$A_i^T P + P A_i - C^T W_i^T - W_i C < 0$$

résolution en W_i et P

déduction des gains : $G_i = P^{-1} W_i$

Description de la structure



Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Multiobservateur

$$\begin{cases} z(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = Px(t) - z(t)$$

Dynamique erreur d'estimation d'état

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (N_i e(t) + PR_i \bar{u}(t) + (PB_i - G_i)u(t) + (PA_i - N_i P - L_i C)x(t))$$

- Convergence asymptotique de l'erreur d'estimation

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) N_i e(t)$$

si

$$\left\{ \begin{array}{l} P = I + EC \\ PA_i = N_i P + L_i C \\ PR_i = 0 \\ G_i = PB_i \end{array} \right.$$

et

$$N = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) N_i \quad \text{stable}$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

- Résolution

► **Modèle du système**

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

► **Modèle appliqué aux estimations des signaux (à la convergence)**

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{\bar{u}}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

où $\hat{\bar{u}}(t)$ est une estimation de l'entrée inconnue $\bar{u}(t)$

► **Estimation**

$$\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \hat{\bar{u}} = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) (\hat{x}(t+1) - A_i \hat{x}(t) - B_i u(t))$$

► Identification de systèmes

BOUKHRIS A., MOUROT G., RAGOT J. Non-linear invisible system identification : a multi-model approach. International Journal of Control, 72 (7/8), 1999.

► Estimation d'état

CHADLI M., MAQUIN D., RAGOT J. Multiple observers for discrete-time multiple models. 5th IFAC Safeprocess'2003, Washington, D.C., USA, June 9-11, 2003.

► Prédiction de la pollution de l'air

GASSO G., MOUROT G., RAGOT J. Prédiction des maxima journaliers d'ozone, approche multimodèle. Jal Europ. des Systèmes Automatisés, 39 (4), 2005.

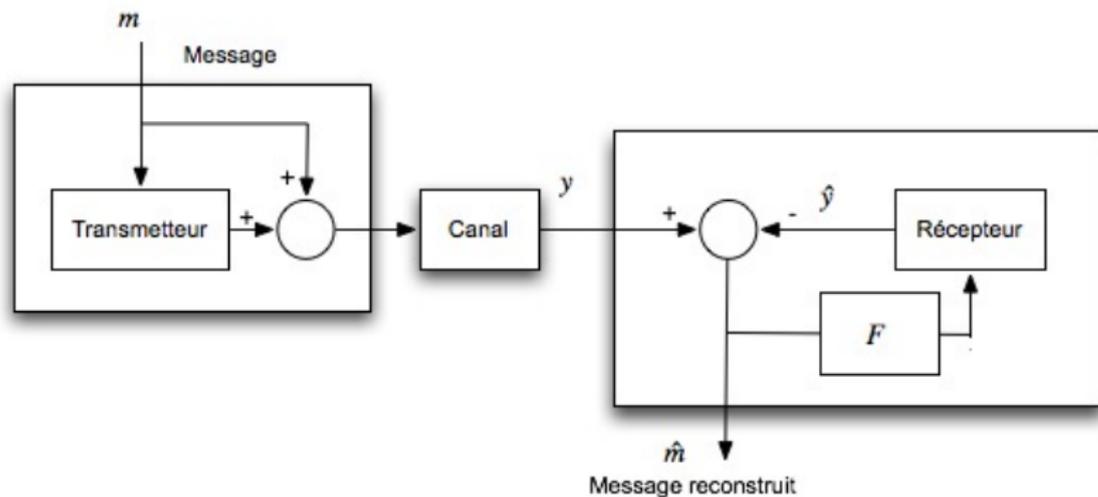
► Modèle de station d'épuration

RAGOT J., GRAPIN G., CHATELIER P., COLIN F. Modeling of a water treatment plant. A multi-model representation. Journal of Environmetrics, 12, 2001.

► Communications sécurisées

AKHENAK A., MAQUIN D., RAGOT J. Unknown input estimation with a multiple model. Application to secure communications. International Symposium on Intelligent Control, MED'05, 2005.

Cryptage – décryptage

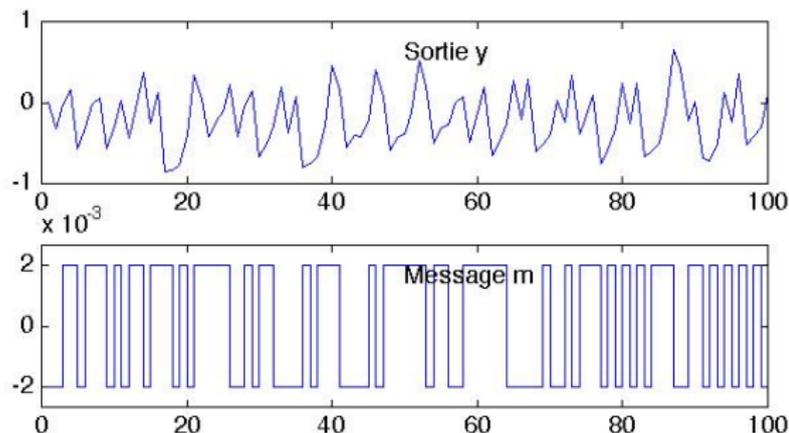


► Modèle

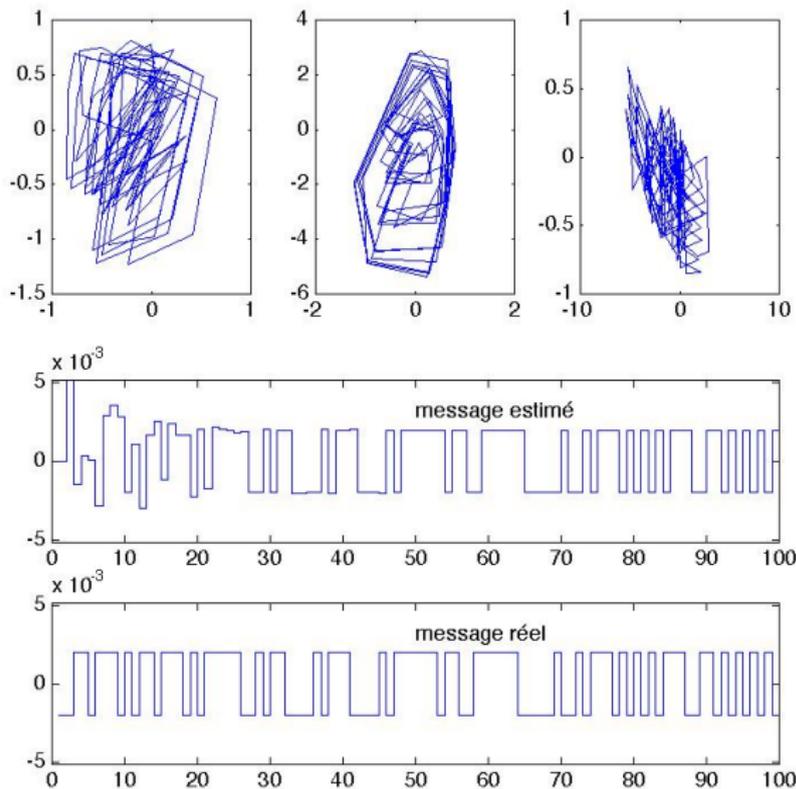
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.25 & -0.10 \\ 0 & 0.25 & 0.10 \\ -0.10 & -2.00 & 0.90 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.25 & -0.10 \\ 0 & 0.25 & 0.10 \\ -0.10 & -3.00 & 0.90 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

► Signaux



Restauration d'entrée inconnue



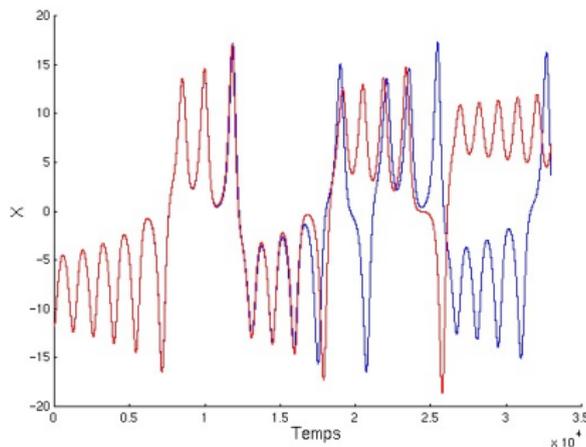
Système chaotique (1)

- ▶ Système chaotique

$$\dot{x} = Ax + f(x)$$

$$y = Cx$$

- ▶ Systèmes typiques : Lorenz, Chua, Hénon, Rössler, Duffing, Moon, Brockett, Van der Pool ...
- ▶ Sensibilité aux conditions initiales



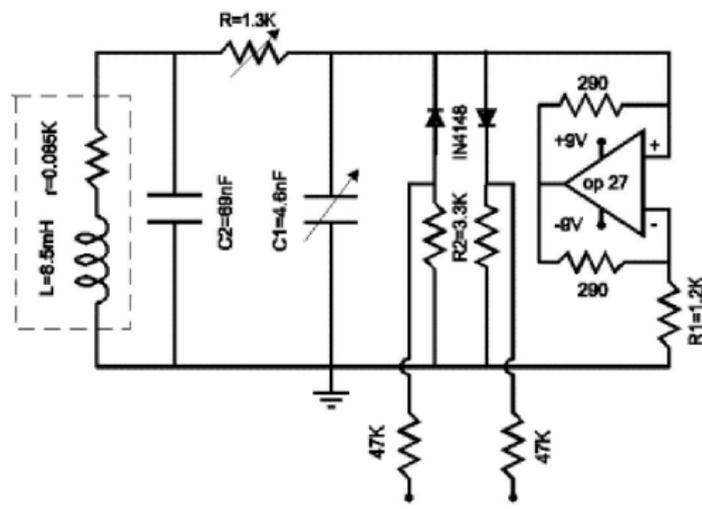
► Equations

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha(bx_1 + \frac{1}{2}(a-b)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|))$$

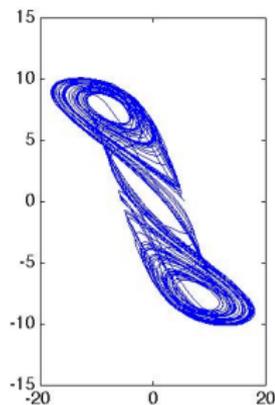
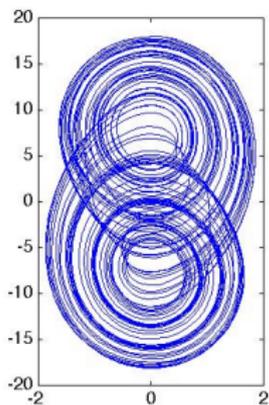
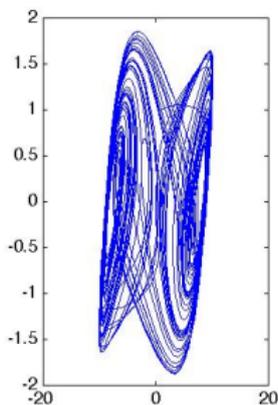
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3$$

► Réalisation



Plan de phase



Système chaotique de Lorenz (4)

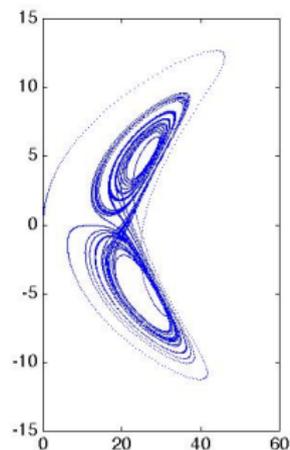
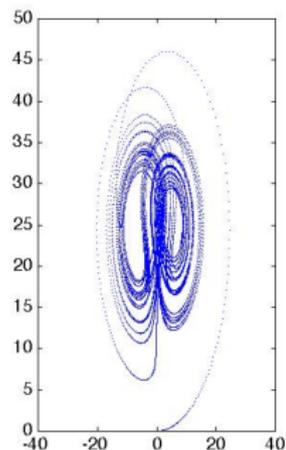
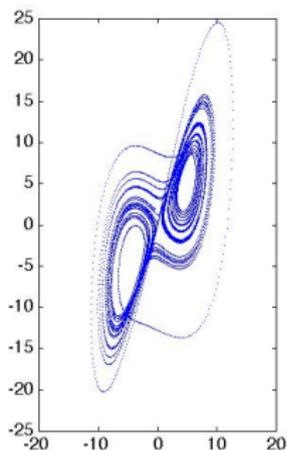
► Modèle

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1)$$

$$\dot{x}_2 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\beta x_3 + x_1 x_3$$

► Plan de phase



- ▶ Multi-modèle chaotique

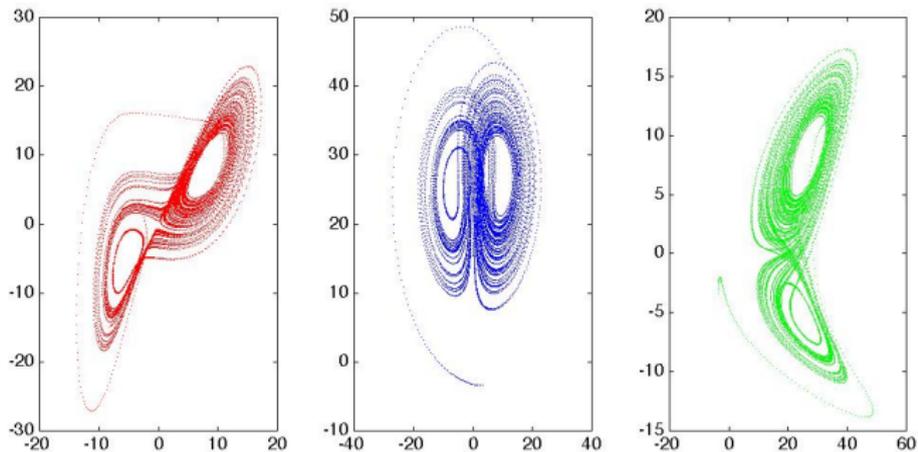
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p \mu_i(y)(A_i x + f_i(x))$$
$$y = Cx$$

- ▶ Deux systèmes de Chua chaotiques

$$\mu_1(y) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(\delta y)), \quad \mu_2(y) = 1 - \mu_1(y)$$

	α	β	γ	a	b
M_1	9	14	0	-1.14	-0.7
M_2	9.5	15	0	-1.10	-0.7

Multi système chaotique : Lorenz (6)



- ▶ Observateur d'un système chaotique

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^p \mu_i(y) (A_i \hat{x} + f_i(\hat{x}) + K_i(y - C\hat{x}))$$

- ▶ Erreur d'estimation

$$e = \hat{x} - x$$

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^p \mu_i(y) ((A_i - K_i C)e + f(x) - f(\hat{x}))$$

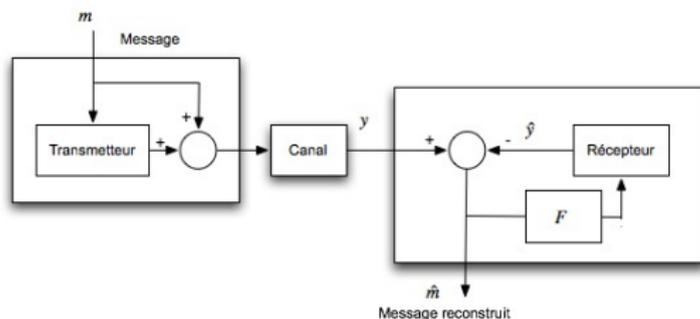
- ▶ Condition de convergence de l'erreur d'estimation

$$f_i \text{ Lipschitz} : \|f(x) - f(z)\| \leq k_i \|x - z\|$$

P définie positive, K_i

$$(A_i - K_i C)^T P + P(A_i - K_i C) + k_i I + k_i^2 P^2 < 0$$

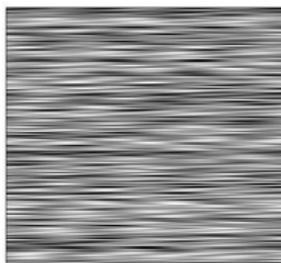
Multi système chaotique : transmission d'image (8)



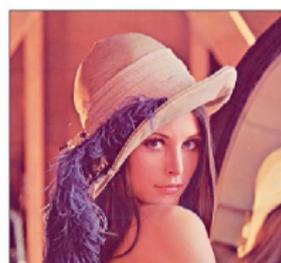
► Générée (m)



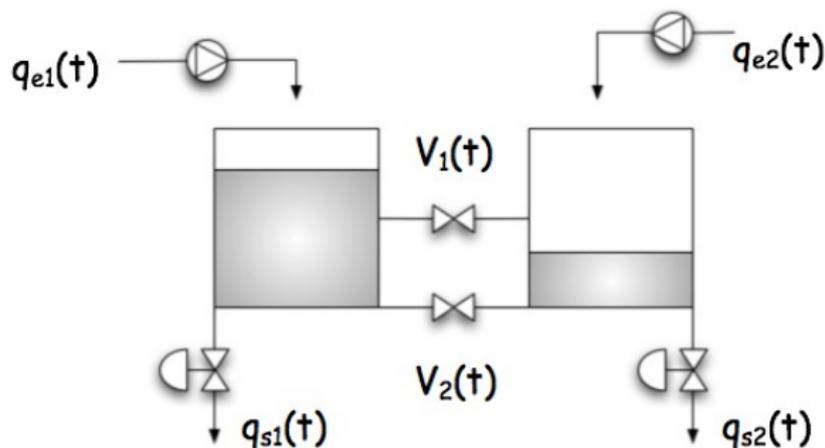
► Transmise (y)



► Reconstituée (\hat{m})



Reconnaissance des modes de fonctionnement d'un système (1)



- ▶ Pb 1 : $\{q_{e1}(t), q_{e2}(t), q_{s1}(t), q_{s2}(t), V_1, V_2\} \rightarrow \{h_1(t), h_2(t)\}$
- ▶ Pb 2 : $\{q_{e1}(t), q_{e2}(t), q_{s1}(t), q_{s2}(t)\} \rightarrow \{h_1(t), h_2(t)\} ?$
- ▶ Pb 3 : instrumentation minimale pour le diagnostic ?

Position du problème

- ▶ Modèle du système

$$y_{k+1} = a_1 y_k + b_1 u_k, \quad \text{mode 1}$$

$$y_{k+1} = a_2 y_k + b_2 u_k, \quad \text{mode 2}$$

- ▶ Connaissant la séquence $\{u_k, y_k, k = 1.. N\}$
peut-on retrouver le mode actif ?

► Modèles locaux

$$p_{1,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(y_{k+1} - a_1 y_k - b_1 u_k)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$p_{2,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y_{k+1} - a_2 y_k - b_2 u_k)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

► Modèle de mélange

$$p_k = \alpha p_{1,k} + (1 - \alpha) p_{2,k}$$

► Fonction de vraisemblance

$$\mathcal{V} = \prod_{k=1}^N (\alpha p_{1,k} + (1 - \alpha) p_{2,k})$$

- Equations d'optimalité

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \alpha} = 0$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{p_{1,k}}{\alpha p_{1,k} + (1 - \alpha)p_{2,k}} (y_{k+1} - a_1 y_k - b_1 u_k)^2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{p_{2,k}}{\alpha p_{1,k} + (1 - \alpha)p_{2,k}} (y_{k+1} - a_2 y_k - b_2 u_k)^2$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{p_{1,k}}{\alpha p_{1,k} + (1 - \alpha)p_{2,k}} - N = 0$$

- Fonction de commutation

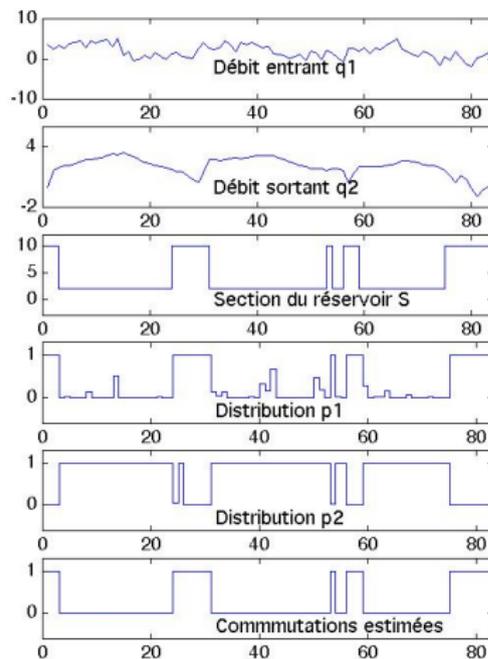
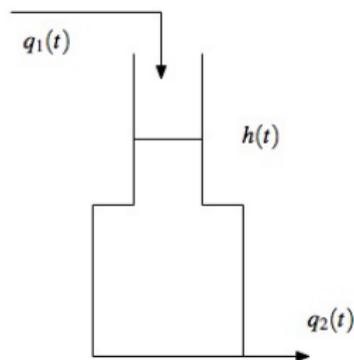
$$w_k = \frac{p_{1,k}}{\alpha p_{1,k} + (1 - \alpha)p_{2,k}}$$

Reconnaissance des modes de fonctionnement d'un système (5)

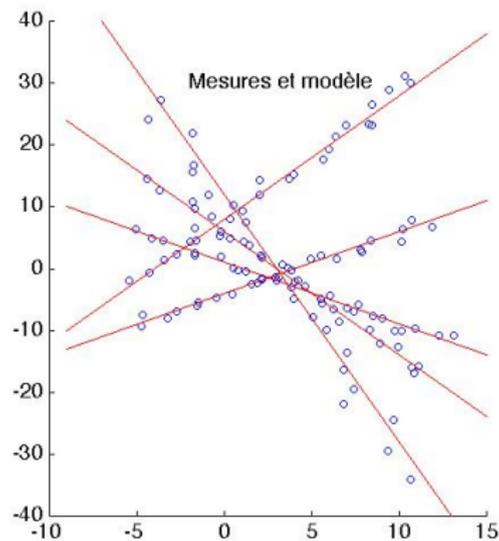
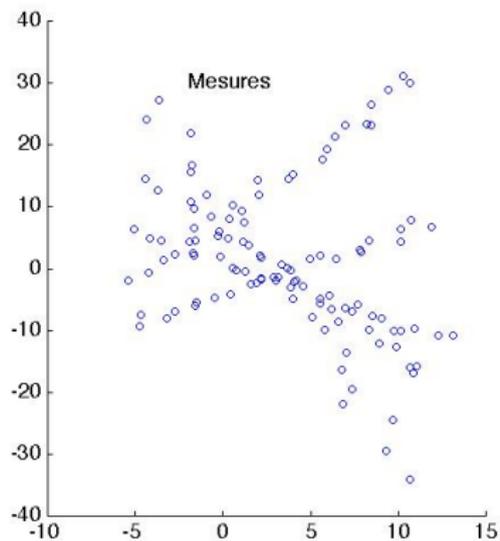
$$S \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

$$q_2(t) = Kh(t)$$

$$y(t) = q_2(t)$$



Problème du mélange de p droites



- ▶ Prise en compte d'incertitudes paramétriques
- ▶ Robustesse de l'estimation vis-à-vis des mesures aberrantes
- ▶ Analyse d'autres structures de multi-modèles
- ▶ Prise en compte de modèles locaux à dimensions différentes

- ▶ Alternative à l'utilisation de modèles non linéaires quelconques
- ▶ Point important : fonctions de couplage positives et bornées
- ▶ Difficulté : nombre de modèles locaux