

Détection et isolation de défauts par analyse en composantes principales robuste.

Yvon THARRAULT, Gilles MOUROT, José RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), Nancy Université, CNRS,
2, Avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

prenom.nom@ensem.inpl-nancy.fr
http://cran.uhp-nancy.fr

Résumé— L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est une méthode efficace pour la détection et la localisation de défauts. Cependant, l'ACP classique est très sensible à la présence de valeurs aberrantes. Cette communication présente un algorithme à deux niveaux pour la détection et la localisation de défauts de mesures. Tout d'abord un MM-estimateur est utilisé pour déterminer un modèle robuste. Cet estimateur est calculé avec un algorithme itératif, initialisé par une estimation robuste de la matrice de covariance. Cette approche consiste à minimiser une mesure robuste des distances orthogonales des observations au sous-espace de l'ACP (espace résiduel). Ensuite, des résidus structurés sont générés pour détecter et localiser des défauts multiples. La génération de ces résidus structurés est basée sur l'utilisation d'un indicateur combiné qui permet de détecter des défauts sur l'ensemble des variables et sur le principe de reconstruction des variables. De plus, l'analyse, limitée aux défauts isolables, permet d'éviter l'explosion combinatoire des scénarios de défauts dans le cas de défauts multiples. Cette procédure est appliquée avec succès sur un système soumis à des défauts multiples.

Mots-clés— ACP, Valeurs aberrantes, robustesse, signature de défauts, diagnostic, MM-estimateur.

I. INTRODUCTION

L'analyse en composantes principales (ACP) a été utilisée avec succès dans la surveillance de systèmes complexes. L'ACP est essentiellement basée sur la mise en évidence de relations linéaires entre les variables et présente un caractère d'optimalité au sens d'un critère portant sur l'erreur quadratique d'estimation en valeur moyenne (*MSE*). Il est bien connu que l'estimation basée sur l'utilisation de critère de type *MSE* n'est pas robuste aux valeurs aberrantes. Rappelons que l'approche classique de l'ACP utilise un calcul préliminaire de la moyenne des données et de leur matrice de variance-covariance; comme la moyenne et la variance sont sensibles à la présence de valeurs aberrantes, les résultats obtenus s'avèrent souvent inexploitable car trop biaisés par l'influence de ces valeurs aberrantes. En général, dans un jeu de données, la majorité des observations est associée à des conditions de fonctionnement normal. Le reste des observations (obtenues durant des périodes de démarrage, d'arrêt, de fonctionnement dégradé, erreurs de mesure, ...) sont nommées "valeurs aberrantes". Pour tolérer la présence de valeurs aberrantes, une analyse en composantes principales robuste peut être conduite. Plusieurs méthodes permettant de rendre robuste l'analyse en composantes principales ont été proposées. Elles peuvent être regroupées de la manière

suivante. Un premier groupe remplace la matrice classique de variance-covariance par une estimation robuste de celle-ci, comme par exemple l'estimateur MCD (Minimum Covariance Determinant) [1]. Cette méthode nécessite des coûts de calcul importants et possède un paramètre de réglage, défini par l'utilisateur, qui doit être optimisé en fonction du nombre de valeurs aberrantes (inconnu). Une seconde approche utilise les projections révélatrices. Ces méthodes maximisent une mesure robuste de la dispersion des données afin d'obtenir les directions sur lesquelles projeter les données [2], [3]. Cependant pour permettre le calcul de cet estimateur, les directions robustes obtenues ne sont que des approximations des vraies directions. Les dernières approches consistent à minimiser une mesure robuste des distances orthogonales des observations au sous-espace de l'ACP (espace résiduel), similaires aux LTS estimateur, MM-estimateur [4]. Ces méthodes, basées sur des procédures itératives, sont simples à mettre en oeuvre. Cependant elles nécessitent deux types de paramètres de réglages inconnus, la taille de l'espace résiduel, c'est-à-dire le nombre de composantes principales du système, ainsi que les valeurs initiales de l'algorithme.

Notre présentation est consacrée au problème de détection et de localisation de défauts dans des données. Dans cet article, un algorithme à deux niveaux est proposé. Un estimateur appartenant au dernier groupe d'approches présentées est choisi, en effet, un MM-estimateur est utilisé pour déterminer un modèle robuste. Cet estimateur calculé avec un algorithme itératif, est initialisé avec un estimateur robuste de la matrice de covariance. De plus, pour déterminer le nombre de composantes principales, une procédure robuste est proposée. Ensuite, des résidus structurés sont utilisés pour détecter et localiser des défauts multiples. La génération de ces résidus structurés est basée sur l'utilisation d'un indicateur combiné qui permet de détecter des défauts sur l'ensemble des variables et sur le principe de reconstruction. De plus, l'analyse des défauts isolables permet d'éviter l'explosion combinatoire des scénarios de défauts dans le cas de défauts multiples. La section 2 est un bref rappel, d'une part, de l'analyse en composantes principales dans le cas classique et, d'autre part, de l'analyse en composantes principales robuste aux valeurs aberrantes. Section 3, une méthode robuste pour déterminer le nombre de composantes principales est présentée. Puis, une procédure de détection et de localisation des valeurs

aberrantes est ensuite proposée en section 4. Finalement en section 5, cette méthode est appliquée à un exemple de synthèse avec des défauts affectant plusieurs variables simultanément.

II. PRINCIPE DE L'ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES

Soit une matrice de données $X \in \mathbb{R}^{N \times m}$, de vecteurs lignes x_i^T , qui rassemble les N mesures effectuées sur les m variables du système.

A. Approche classique

Dans le cas de l'ACP classique, les données sont supposées être recueillies sur un système en fonctionnement normal (absence de défauts).

L'ACP détermine une transformation optimale (vis-à-vis d'un critère de variance) de la matrice de données X :

$$T = XP \quad \text{et} \quad X = TP^T \quad (1)$$

avec $T \in \mathbb{R}^{N \times m}$, matrice des composantes principales et $P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ où les vecteurs orthogonaux p_i sont les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_i de la décomposition en valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance Σ de X :

$$\Sigma = P\Lambda P^T \quad \text{avec} \quad PP^T = P^T P = I_m \quad (2)$$

avec Λ une matrice diagonale où les termes diagonaux sont ordonnés dans l'ordre décroissant.

Les relations (1) trouvent leur intérêt lorsqu'on diminue la dimension de l'espace de représentation. Une fois déterminé le nombre ℓ de composantes à retenir, la matrice X des données peut être approximée. Pour cela la matrice des vecteurs propres est partitionnée sous la forme :

$$P = (\hat{P} \ \tilde{P}) \quad \hat{P} \in \mathbb{R}^{m \times \ell} \quad (3)$$

Les ℓ premiers vecteurs propres \hat{P} constituent l'espace principal alors que les $(m - \ell)$ derniers vecteurs propres \tilde{P} constituent l'espace résiduel. A partir de la décomposition (1), on peut alors expliciter la partie \hat{X} des données expliquées par les ℓ premiers vecteurs propres et la partie résiduelle \tilde{X} expliquée par les composantes restantes :

$$\hat{X} = X\hat{P}\hat{P}^T = X\hat{C}_\ell \quad (4)$$

$$E = X - \hat{X} = X(I - \hat{C}_\ell) \quad (5)$$

où l'on notera que la matrice $\hat{C}_\ell = \hat{P}\hat{P}^T$ n'est pas égale à la matrice identité. De plus, on note $\hat{\Lambda}$ la matrice diagonale contenant les ℓ valeurs propres les plus importantes.

Le résidu r_i , pour $i = 1..N$, est défini par :

$$r_i = \|\tilde{P}^T x_i - \tilde{P}^T \mu\|^2 \quad (6)$$

où μ est le vecteur contenant la moyenne des différentes variables de la matrice X .

Minimiser la fonction φ (7) des erreurs d'estimation sous la contrainte $\tilde{P}^T \tilde{P} = I_{m-\ell}$, correspond à choisir \tilde{P} comme les $m - \ell$ vecteurs propres de la matrice de covariance Σ .

$$\varphi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \quad (7)$$

B. Approche robuste

L'approche proposée consiste à appliquer directement l'ACP sur un jeu de données qui peut-être affecté par des valeurs aberrantes. Pour cela, un estimateur robuste simple est utilisé, appelé MM-estimateur. Cependant cet estimateur est calculé en utilisant une procédure itérative, ce qui nécessite une bonne initialisation de l'algorithme afin d'éviter de converger vers des minimums locaux. Pour initialiser ce MM-estimateur, une version robuste de la matrice de covariance est d'abord calculée [5].

B.1 Covariance robuste

Dans [6] les auteurs définissent une matrice de variance et covariance "locale" en ce sens que la forme proposée tend à privilégier la contribution d'observations proches au détriment d'observations éloignées dues à la présence de valeurs aberrantes. Cette matrice est définie en fonction des observations x_i :

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_{i,j} (x_i - x_j)(x_i - x_j)^T}{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_{i,j}} \quad (8)$$

où les poids $w_{i,j}$ sont eux-mêmes définis par :

$$w_{i,j} = \exp\left(-\frac{\beta}{2}(x_i - x_j)^T \Sigma^{-1} (x_i - x_j)\right) \quad (9)$$

β étant un paramètre à régler pour obtenir effectivement une réduction de l'influence des observations éloignées, les auteurs préconisant une valeur voisine de 2. On remarque que pour $\beta = 0$, on retrouve la matrice de covariance classique Σ . De plus pour une valeur élevée de β , seul les observations proches sont prises en compte.

B.2 MM-estimateur

Deux M-estimateurs sont utilisés, un pour l'estimation de la fonction objectif φ (7) et un autre pour l'estimation robuste de la dispersion des résidus. Le MM-estimateur minimise le critère suivant sous contrainte $\tilde{P}^T \tilde{P} = I_{m-\ell}$ [4] :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho\left(\frac{r_i}{\hat{\sigma}}\right) \quad (10)$$

avec r_i le résidu défini par (6), $\hat{\sigma}$ la dispersion robuste des résidus r_i . La fonction $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ est non décroissante et dérivable, avec $\rho(0) = 0$ et $\rho(\infty) = 1$.

\tilde{P} est la matrice des vecteurs propres de la matrice de covariance robuste S (12) correspondant aux $m - \ell$ plus petites valeurs propres. La moyenne pondérée μ et la covariance S sont définies comme suit :

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad \text{avec} \quad w_i = \dot{\rho}\left(\frac{r_i}{\hat{\sigma}}\right) \quad (11)$$

$$S = \sum_{i=1}^N w_i (x_i - \mu)(x_i - \mu)^T \quad (12)$$

De plus le facteur de dispersion $\hat{\sigma}$ est défini comme la solution de :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho \left(\frac{r_i}{\hat{\sigma}} \right) = \delta \quad (13)$$

avec $\delta \in (0,1)$. Ce paramètre δ est directement lié au nombre d'observations considérées comme saines dans le jeu de données.

L'algorithme utilisé est le suivant :

1. $it = 1$ et $\sigma_0 = \infty$
2. Calculer \tilde{P} la matrice des vecteurs propres de la matrice de covariance robuste T correspondant aux $m - \ell$ plus petites valeurs propres.
3. Calculer $a = \text{mediane}(X\tilde{P})$
4. Calculer $\sigma = \text{trace}(\sqrt{\tilde{P}^T T \tilde{P}})$
5. Faire tant que $it \leq N$ ou que $\Delta \leq \text{tol}$
 - (a) Calculer $r_i = \|\tilde{P}x_i - a\|^2$ pour $i = 1 \dots N$
 - (b) Si $it > 1$, calcul σ à partir de (13)
 - (c) Calculer $\Delta = 1 - \sigma/\sigma_0$ et $\sigma_0 = \sigma$
 - (d) Calculer $w_i = \hat{\rho}(r_i/\hat{\sigma})$ pour $i = 1 \dots N$
 - (e) Calculer μ à partir de (11)
 - (f) Calculer S à partir de (12)
 - (g) Calculer \tilde{P} la matrice des vecteurs propres de la matrice de covariance robuste S correspondant aux $m - \ell$ plus petites valeurs propres.
 - (h) Calculer $a = \tilde{P}^T \mu$
 - (i) Calculer $it = it + 1$
6. Fin tant que.

Dans les exemples de cet article, ρ est choisie comme la fonction "Bisquare" (r représente le carré des distances).

$$\rho(r) = \min\{1, 1 - (1 - r)^3\} \quad (14)$$

La valeur de la constante δ dans l'équation (13) est définie en maximisant le point de rupture (nombre de valeurs aberrantes tolérables par l'algorithme) [4] :

$$\delta = \frac{N - n + \ell - 1}{2N} \quad (15)$$

A partir de ce nouveau modèle, la détection et l'isolation des valeurs aberrantes est effectuée en utilisant le principe de reconstruction des variables.

III. DÉTERMINATION ROBUSTE DU NOMBRE DE COMPOSANTES PRINCIPALES

L'algorithme pour déterminer le modèle robuste nécessite la détermination robuste du nombre de composantes principales à choisir. Pour cela, nous allons utiliser le principe de minimisation de la variance de reconstruction [7].

Le nombre de composantes principales à retenir s'obtient en minimisant la variance de l'erreur de reconstruction par rapport à ℓ , le critère est alors :

$$J(\ell) = \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j^T (I_m - \hat{C}_\ell) S (I_m - \hat{C}_\ell) \xi_j}{\left(\xi_j^T (I_m - \hat{C}_\ell) \xi_j \right)^2} \quad (16)$$

avec $\ell = 1, \dots, m - 1$, S la matrice de variance-covariance robuste et ξ_j la direction de reconstruction ($\xi_j = [0 \dots 1 \dots 0]^T$ la valeur 1 étant à la $j^{\text{ième}}$ position)

Qin et Dunia (2000) ont montré que ce critère peut présenter un minimum dans l'intervalle $[1, m]$. De plus, ces auteurs proposent d'écarter de l'ensemble des variables utilisées pour la détermination du nombre de composantes principales, celles pour lesquelles la variance d'erreur de reconstruction est supérieure à la variance d'erreur de reconstruction obtenue en utilisant la valeur moyenne comme meilleure reconstruction. En effet, les variables peu corrélées avec les autres ne peuvent pas être reconstruites avec une bonne précision.

IV. DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

Afin d'assurer la détection de l'ensemble des défauts dans l'espace principal et dans l'espace résiduel, un indicateur global est utilisé. La localisation des défauts est ensuite effectuée en utilisant le principe de reconstruction qui consiste à éliminer l'influence des défauts.

A. Détection de défauts

Pour la détection de défauts, deux indicateurs sont généralement utilisés, le SPE pour détecter un défaut dans l'espace résiduel et le T^2 pour détecter un défaut dans l'espace principal. Le système, caractérisé par le vecteur x , est considéré en fonctionnement normal si :

$$\begin{aligned} SPE(x) &= \|(I - \hat{P}\hat{P}^T)x\|^2 \leq \delta^2 \\ T^2(x) &= x^T \hat{P} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{P}^T x \leq \chi_I^2 \end{aligned}$$

avec δ^2 et χ_I^2 sont des seuils de détection.

Cependant, suivant l'amplitude et la nature des défauts, un défaut peut avoir un impact sur seulement un de ces deux indicateurs. Ainsi, pour assurer la détection de l'ensemble des défauts, nous utilisons un indicateur combiné [8]. Cette indicateur est défini par la relation suivante :

$$\eta = \frac{T^2(x)}{\chi_I^2} + \frac{SPE(x)}{\delta^2} \quad (17)$$

Compte tenu des expressions de T^2 et de SPE , on a aussi :

$$\eta = x^T \Phi x \quad (18)$$

avec

$$\Phi = \frac{\hat{P} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{P}^T}{\chi_I^2} + \frac{I - \hat{P} \hat{P}^T}{\delta^2} \quad (19)$$

Le système est considéré en fonctionnement normal si :

$$\eta \leq \gamma^2 \quad (20)$$

où γ^2 est le seuil de détection défini en [8]

B. Principe de reconstruction

La reconstruction \hat{x}_R est obtenue en minimisant l'influence des défauts. Le vecteur de reconstruction \hat{x}_R est défini par la relation suivante :

$$\hat{x}_R = x - \Xi_R f_R \quad (21)$$

avec f_R l'amplitude (inconnue) du défaut et la matrice Ξ_R indique les directions de reconstruction. Cette matrice est

orthonormale de dimension $(m \times r)$, avec r le nombre de variables reconstruites. Elle est constituée de 0 et de 1, où 1 indique les variables reconstruites à partir des autres variables (avec 0) et du modèle ACP. Par exemple, pour reconstruire le jeu de variables $R = \{2, 4\}$ parmi 5 variables, la matrice Ξ_R est construite comme suit :

$$\Xi_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

L'estimation de l'amplitude du défaut f_R est alors obtenue en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \hat{f}_R &= \arg \min_{f_R} \{\eta_R\} \\ &= \arg \min_{f_R} \{\hat{x}_R^T \Phi \hat{x}_R\} \end{aligned} \quad (22)$$

Le vecteur de reconstruction \hat{x}_R du vecteur x est donné par :

$$\hat{x}_R = G_R x \quad (23)$$

avec $G_R = (I - \Xi_R(\Xi_R^T \Phi \Xi_R)^{-1} \Xi_R^T \Phi)^{-1}$

Condition de reconstruction :

Pour qu'un défaut soit reconstituable, il faut qu'il soit au minimum projeté dans l'espace principal ($r \leq \ell$) ou dans l'espace résiduel ($r \leq m - \ell$). Cette condition implique que le nombre de variables reconstruites r doit respecter l'inégalité (24) :

$$r \leq \max(m - \ell, \ell) \quad (24)$$

C. Génération de résidus structurés

Dans un objectif de diagnostic, des résidus sont générés pour la détection et la localisation de défauts. L'indice de détection est :

$$\eta_R = \hat{x}_R^T \Phi \hat{x}_R \quad (25)$$

Un vecteur de mesure x est composé de sa valeur x^* en absence de défauts et d'un défaut d'amplitude d et de direction Ξ_F , où F est le sous-ensemble contenant les indices des directions des défauts :

$$x = x^* + \Xi_F d \quad (26)$$

Considérons toutes les reconstructions possibles de x :

- si la direction de reconstruction Ξ_R est celle du défaut, c'est-à-dire si $R = F$, alors η_R est inférieur au seuil de détection γ^2 , en effet :

$$\eta_R = x^{*T} \Phi x^* - x^{*T} \Phi \Xi_R (\Xi_R^T \Phi \Xi_R)^{-1} \Xi_R^T \Phi x^* \quad (27)$$

où $x^{*T} \Phi x^* \leq \gamma^2$ et $x^{*T} \Phi \Xi_R (\Xi_R^T \Phi \Xi_R)^{-1} \Xi_R^T \Phi x^* > 0$ donc $\eta_R < \gamma^2$

- si la direction de reconstruction Ξ_R est différente de celle du défaut, alors l'erreur de reconstruction η_R est supérieure à γ^2 si les projections des directions de reconstruction ne sont pas colinéaires à la projection du défaut dans l'espace principal et dans l'espace résiduel.

Pour les observations en défaut, les jeux de variables défaillantes \hat{R} sont déterminés comme suit :

$$\hat{R} = \arg \min_{R \in \mathfrak{S}} \eta_R < \gamma_\alpha^2 \quad (28)$$

avec \mathfrak{S} l'ensemble des combinaisons des directions de reconstructions possibles.

D. Localisation de défauts

L'ensemble des directions de reconstruction Ξ_R doit être exploré pour la détection et l'isolation des défauts. Les solutions pour lesquelles les défauts ne sont pas détectables, sont inutiles. Le nombre de reconstructions possibles peut donc être réduit, et les défauts détectables peuvent être a priori répertoriés.

Le nombre maximum de reconstructions peut être calculé à l'aide de la formule suivante :

$$\sum_{r=1}^{\max(m-\ell, \ell)} \mathbb{C}_m^r \quad (29)$$

avec \mathbb{C}_m^r représente le nombre de combinaisons possibles de choisir r variables parmi m .

Ce nombre peut-être réduit en prenant en compte les directions de projections colinéaires. Nous allons donc analyser les angles entre les différentes projections des directions de reconstruction. Le plus grand angle principal θ entre deux sous-espaces de même dimension est lié à la notion de distance entre ces deux sous-espaces [9]. Cette distance est définie dans l'espace principal $d(R1, R2)$ et dans l'espace résiduel $\tilde{d}(R1, R2)$:

$$d(R1, R2) = \|\hat{\Xi}_{R1} (\hat{\Xi}_{R1}^T \hat{\Xi}_{R1})^{-1} \hat{\Xi}_{R1}^T - \hat{\Xi}_{R2} (\hat{\Xi}_{R2}^T \hat{\Xi}_{R2})^{-1} \hat{\Xi}_{R2}^T\|_2 \quad (30)$$

$$\tilde{d}(R1, R2) = \|\tilde{\Xi}_{R1} (\tilde{\Xi}_{R1}^T \tilde{\Xi}_{R1})^{-1} \tilde{\Xi}_{R1}^T - \tilde{\Xi}_{R2} (\tilde{\Xi}_{R2}^T \tilde{\Xi}_{R2})^{-1} \tilde{\Xi}_{R2}^T\|_2 \quad (31)$$

avec $\hat{\Xi}_{R1} = \hat{\Lambda}^{-1/2} \hat{P}^T \Xi_{R1}$, $\tilde{\Xi}_{R1} = \tilde{P}^T \Xi_{R1}$ et $R1$ et $R2$ correspondent aux ensembles des variables de reconstruction.

En analysant les distances entre les projections des directions de reconstruction dans l'espace principal (30) et dans l'espace résiduel (31), on peut alors déterminer les défauts qui seront localisables. Un indicateur k est alors construit :

$$k(R1, R2) = \max\{d(R1, R2), \tilde{d}(R1, R2)\} \quad (32)$$

Donc si $k(R1, R2)$ est proche de 0 cela signifie que les directions des ensembles des variables de reconstruction $R1$ et $R2$ sont colinéaires dans l'espace résiduel et dans l'espace principal et un défaut dans les ensembles des variables de reconstruction $R1$ ou $R2$ ne sera donc pas localisable. La démarche pour déterminer l'ensemble des reconstructions utiles à calculer peut être résumée de la façon suivante :

1. $r = 1$
2. Calculer pour l'ensemble des directions possibles ($R1 \in \mathfrak{S}$ et $R2 \in \mathfrak{S}$) l'indicateur $k(R1, R2)$ (32). Plus cet indicateur est petit, plus l'amplitude du défaut doit être importante pour assurer la localisation du défaut. Et si cet indicateur est nul, alors seul l'ensemble des variables potentiellement en défaut peut être déterminé, c'est-à-dire les variables avec les indices $R1$, $R2$ ou $R1$ et $R2$. Il est donc nécessaire de considérer une seule direction, par exemple $R1$.
3. $r = r + 1$
4. Tant que $r \leq \max(\ell, m - \ell)$ aller à l'étape 2

L'analyse de la structure du modèle permet de déterminer les défauts localisables et ainsi de diminuer le nombre de reconstructions utiles.

V. RÉSULTATS NUMÉRIQUES. CAS MULTI-DÉFAUTS

A. Génération des données

Pour mettre en évidence l'aptitude de la méthode proposée à détecter des défauts, un exemple de synthèse dont les valeurs aberrantes sont parfaitement connues est utilisé. La matrice X est constituée de $N = 128$ observations d'un vecteur x à 9 composantes générées de la façon suivante :

$$x_{i,1} = v_i^2 + \sin(0.1i), \quad v_i \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (33)$$

$$x_{i,2} = 2 \sin(i/6) \cos(i/4) \exp(-i/N)$$

$$x_{i,3} = \log(x_{i,2}^2), \quad x_{i,4} = x_{i,1} + x_{i,2}$$

$$x_{i,5} = x_{i,1} - x_{i,2}, \quad x_{i,6} = 2x_{i,1} + x_{i,2}$$

$$x_{i,7} = x_{i,1} + x_{i,3}, \quad x_{i,8} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$x_{i,9} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Aux données ainsi générées ont été superposées des réalisations de variables aléatoires à distribution normale centrée et d'écart-type 0.02. De plus, des défauts sont ajoutés aux instants 10 à 24 (intervalle I_1) pour les variables x_1 et x_3 , aux instants 35 à 49 (intervalle I_2) pour les variables x_1 et x_2 , aux instants 60 à 74 (intervalle I_3) pour les variables x_4 et x_8 , aux instants 85 à 99 (intervalle I_4) pour la variable x_8 . Ils sont représentés par des biais d'amplitude égale à 1 sur les variables x_1 à x_4 et d'amplitude égale à 15 et à 30 sur la variable x_8 dans l'intervalle I_3 et I_4 . Les défauts sur la variable x_8 sont plus importants que sur les autres, car cette variable est indépendante des autres. En effet, elle ne possède pas de projection dans l'espace résiduel, il est donc nécessaire de détecter le défaut à partir de l'espace principal. Or pour détecter un défaut dans l'espace principal, l'amplitude du défaut doit être plus importante que dans l'espace résiduel [10].

B. Détermination du nombre de composantes principales

La variance d'erreur de reconstruction est calculée pour l'ensemble des observations. La variance d'erreur de reconstruction est importante pour les deux dernières variables, elles sont donc indépendantes des autres. Il faut donc les retirer dans ce calcul. La figure 1 représente les valeurs de cette variance en fonction du nombre de composantes principales utilisées. Le minimum est obtenu pour $\ell = 5$, ce qui correspond donc au nombre de composantes principales à retenir.

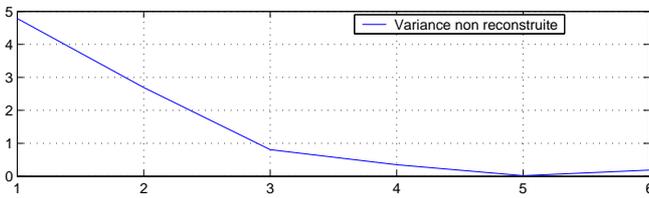


Fig. 1. Valeur de la variance d'erreur de reconstruction en fonction du nombre de composantes principales

C. Choix du paramètre de réglage β

Une analyse du paramètre de réglage β est effectuée (figure 2) sur le résidu η_1 (25). Pour cela, une comparaison des performances d'un modèle construit à partir de la matrice de covariance robuste T ((T) dans la légende) et d'un modèle construit à partir du MM-estimateur ((T+M) dans

k	R_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0.99	1.00	0.92	0.92	1.00	1.00	0.99
2		0	1.00	0.96	0.73	0.97	1.00	1.00	1.00
3			0	1.00	0.96	1.00	0.40	1.00	1.00
4				0	0.97	0.73	1.00	0.99	1.00
5					0	0.97	0.99	1.00	1.00
6						0	1.00	0.99	1.00
7							0	1.00	0.99
8								0	1.00

TABLE I
INDICATEUR k POUR $r = 1$

la légende) est effectuée à partir de la reconstruction de la première variable. On observe alors que pour une petite valeur de β , les défauts ne sont pas correctement détectés sur l'intervalle I_4 . En effet, la matrice de covariance robuste est mal estimée et donc le MM-estimateur est mal initialisé. Pour les valeurs de β supérieures ou égales à 2, la détection avec le MM-estimateur reste identique alors que la détection avec la matrice de covariance robuste T se dégrade en fonction de la valeur de β . Le MM-estimateur permet donc de réduire l'influence du paramètre β ; dans la suite $\beta = 2$ est choisi.

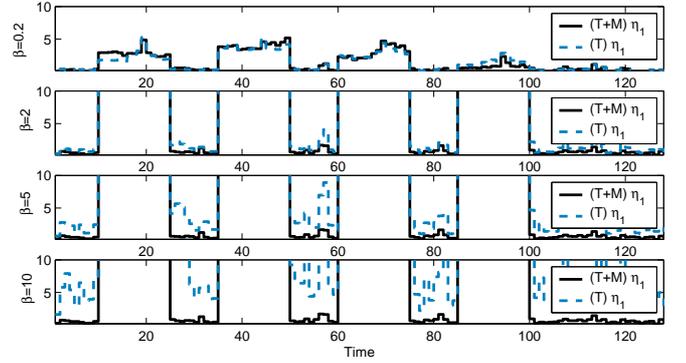


Fig. 2. η_1 en fonction du paramètre β

D. Analyse des directions de reconstruction utile

Compte tenu de la dimension de l'espace principal, on ne peut pas reconstruire plus de 5 variables simultanément. Le nombre maximum de reconstructions est donc de 381. La table I montre les valeurs de l'indicateur k (32) pour $r = 1$. Plus la valeur de k est petite, plus l'amplitude du défaut nécessaire pour assurer la localisation du défaut doit être importante. Il n'y a pas de projection colinéaire (k différent de 0), donc l'ensemble des défauts apparaissant sur une seule variable sont localisables. On effectue ce même calcul pour $r = 2$, on trouve alors que les projections des directions $\{1, 3\}$ et $\{1, 7\}$ sont colinéaires. Les signatures de ces deux directions de reconstruction sont donc identiques ($\eta_{1,3} = \eta_{1,7}$), il est donc utile de considérer seulement une de ces deux directions, par exemple $\eta_{1,3}$. De plus, on en déduit que les signatures des directions de reconstruction prenant en compte ce couple sont identiques ($\eta_{1,2,3} = \eta_{1,2,7}$, $\eta_{1,4,3} = \eta_{1,4,7}$, ...). La même procédure est appliquée pour $r = 3$ à 5. Le nombre de reconstructions nécessaires peut alors être réduit à 150.

E. Détection de défauts

Sans effectuer de reconstruction, l'indicateur combiné (25) a été utilisé pour calculer un résidu qui révèle la

présence de défaut dans les quatre intervalles I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , sans pour autant pouvoir incriminer une variable particulière. Cette phase de détection est maintenant complétée par une phase de localisation des défauts.

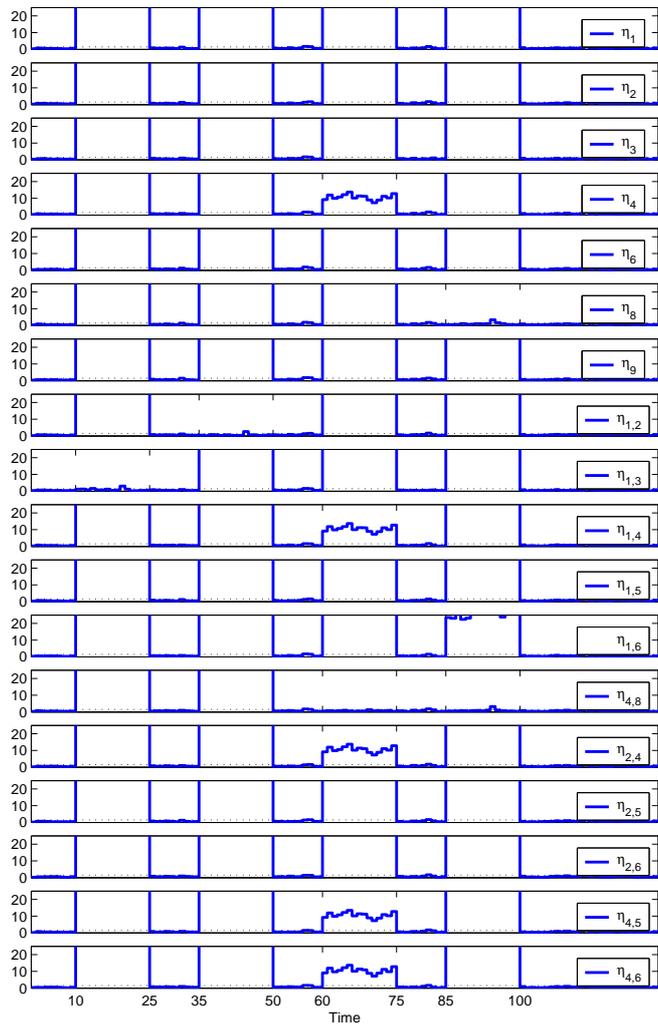


Fig. 3. Localisation des défauts

La figure 3 montre une partie de ces indicateurs. Le premier graphique de cette figure est relative à la projection des résidus avec reconstruction sans utiliser la première variable ... Analysons le sixième graphique de la figure 3. Pour les observations de l'intervalle I_4 l'indicateur η_8 est proche de la valeur 0 témoignant ainsi de l'absence de valeurs aberrantes dans les variables utilisées pour la reconstruction et la projection. On note aussi que les trois autres intervalles d'observation (I_1 , I_2 , I_3) sont affectés de défauts, sans savoir exactement quelle (s) composante (s) du vecteur de mesure en sont la cause. Finalement, compte tenu de la présence de défauts dans les quatre intervalles, l'examen du sixième graphique de la figure 3 conclut à :

- dans l'intervalle I_4 , la variable x_8 est en défaut,
- dans chaque intervalle I_1 , I_2 , I_3 , une variable autre que x_8 est en défaut ou plusieurs variables sont en défaut.

Les autres projections se construisent et s'interprètent de façon analogue. Le diagnostic est donc :

- dans l'intervalle I_1 , x_1 et x_3 ou x_1 et x_7 ou x_1 et x_3 et x_7 sont en défaut
- dans l'intervalle I_2 , x_1 et x_2 sont en défaut,
- dans l'intervalle I_3 , x_4 et x_8 sont en défaut,

- dans l'intervalle I_4 , x_8 est en défaut.

VI. CONCLUSION

L'ACP classique, qui est basée sur l'estimation de la moyenne et de la matrice de covariance des données, est très sensible à la présence de valeurs aberrantes. Dans cet article, un algorithme à deux niveaux est proposé. Tout d'abord un MM-estimateur est utilisé pour déterminer un modèle robuste. Cet estimateur calculé avec un algorithme itératif, est initialisé avec un estimateur robuste de la matrice de covariance. Cette approche consiste à minimiser une mesure robuste des distances orthogonales des observations au sous-espace de l'ACP (espace résiduel). Cependant, la dimension de l'espace résiduel est inconnue, une procédure robuste pour déterminer le nombre de composantes principales est alors proposée. Ensuite, des résidus structurés sont utilisés pour détecter et localiser des défauts multiples. La génération de ces résidus structurés est basée sur l'utilisation d'un indicateur combiné qui permet de détecter des défauts sur l'ensemble des variables et sur le principe de reconstruction. De plus, l'analyse des défauts isolables permet d'éviter l'explosion combinatoire des scénarios de défauts dans le cas de défauts multiples. Cette procédure est appliquée avec succès sur un système soumis à des défauts multiples.

VII. REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé avec le soutien du programme Égide TASSILI n°07 MDU 714. Les auteurs remercient sincèrement le Ministère de la Culture, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche du gouvernement luxembourgeois pour leur participation au financement de ces travaux.

RÉFÉRENCES

- [1] P.J. Rousseeuw. *Robust regression and outliers detection*. John Wiley & Sons Inc., 1987.
- [2] M. Hubert, P.J. Rousseeuw, et S. Verboven. A fast method for robust principal components with applications to chemometrics. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 60(1-2) :101–111, 2002.
- [3] G. Li et Z. Chen. Projection-pursuit approach to robust dispersion matrices and principal components : Primary theory and monte carlo. *Journal of the American Statistical Association*, 80(391) :759–766, 1985.
- [4] R. A. Maronna. Principal components and orthogonal regression based on robust scales. *Technometrics*, 47(3), august 2005.
- [5] Y. Tharrault, G. Mourot, J. Ragot, et D. Maquin. Fault system detection and isolation with robust principal component analysis. *Diagnostics of processes and systems*, Slubice, Poland, September 2007.
- [6] M. Fekri et A. Ruiz-Gazen. Robust weighted orthogonal regression in the errors-in-variables model. *Journal of Multivariate Analysis*, 88 :89–108, 2003.
- [7] S. Joe Qin et R. Dunia. Determining the number of principal components for best reconstruction. *Journal of Process Control*, 10 :245–250, 2000.
- [8] H.H. Yue et S.J. Qin. Reconstruction-based fault identification using a combined index. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 40(20) :4403–4414, 2001.
- [9] G. H. Golub et C. F. Van Loan. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [10] S. Joe Qin. Statistical process monitoring : basics and beyond. *Journal of Chemometrics*, 17(8-9) :480–502, 2003.