Conception d'observateurs robustes pour des systèmes non linéaires incertains : une stratégie multimodèle

Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), Nancy-Université, CNRS.
2 avenue de la Forêt de Haye F-54516 Vandœuvre-lès-Nancy

prenom.nom@ensem.inpl-nancy.fr
http://www.cran.uhp-nancy.fr

Résumé— **Cet article porte sur la synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires incertains décrits par des multimodèles. Avec cette approche de modélisation, le comportement dynamique du système est caractérisé par un ensemble de sous-modèles, chacun étant valide dans une zone de fonctionnement. La structure de multimodèle exploitée dans ce travail, dite *découplée*, admet des sous-modèles comportant un nombre différent d'états. Un degré de flexibilité dans l'étape de modélisation est ainsi introduit car la dimension des sous-modèles peut être adaptée à la complexité de la zone de fonctionnement à décrire. Des conditions suffisantes pour la synthèse d'un observateur robuste vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations sont établies pour cette classe de multimodèle, sous la forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs). Un exemple de simulation est également proposé afin d'illustrer les performances de l'approche présentée.**

Mots-clés— **estimation d'état, approche multimodèle, systèmes incertains, systèmes non linéaires, LMI.**

I. Introduction

De nombreuses techniques de commande, de surveillance ou de diagnostic de systèmes nécessitent la connaissance des variables d'état du système. Cependant, d'un point de vue pratique, la connaissance complète de l'ensemble des variables d'état du système est en général indisponible, d'une part parce qu'une variable d'état n'a pas toujours un sens physique et d'autre part parce que sa mesure directe est souvent soumise à des contraintes d'ordre technique, technologique ou économique.

Une solution permettant de contourner ces difficultés consiste à estimer l'état du système à l'aide d'un observateur utilisant l'entrée et la sortie du système et son modèle. La qualité de l'estimation fournie par l'observateur dépend fortement de la qualité des mesures et de la précision du modèle. Or un modèle n'est qu'une représentation abstraite ne donnant qu'une description imparfaite du comportement réel du système. De plus, tout processus physique est inévitablement soumis à des perturbations provenant des interactions entre le processus et son environnement affectant ainsi les mesures utilisées.

Le problème d'estimation robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques et des perturbations s'avère donc fondamental en automatique. Il a été beaucoup étudié pour des systèmes modélisés par un modèle de type linéaire en utilisant, par exemple, la théorie de la commande robuste [1–4] ou l'analyse par intervalles [5]. Cependant, dans un nombre important d'applications, la nature non linéaire du processus ne peut pas être négligée. L'utilisation des techniques classiques d'estimation se révèle alors peu adaptée, l'hypothèse de linéarité du modèle n'étant vérifiée que très localement autour d'un point de fonctionnement. De plus, obtenir un modèle qui soit exploitable systématiquement et qui tienne compte de la complexité globale du système s'avère souvent difficile voire impossible.

L'approche multimodèle permet de contourner ces difficultés en évitant l'utilisation d'un modèle unique très complexe. L'idée est de réduire la complexité du système en décomposant son espace de fonctionnement en un nombre fini de zones de fonctionnement délimitées par une fonction poids. Le comportement du système étant de moindre complexité dans chaque zone, un *sous-modèle* de structure simple peut alors être utilisé. La caractérisation globale du comportement dynamique du système est alors effectuée en combinant la contribution relative de chaque sous-modèle à travers ces fonctions poids (voir [6–9] pour une discussion approfondie).

Dans ce contexte de modélisation, l'agrégation des sous-modèles peut s'effectuer de diverses façons donnant lieu à différentes classes de multimodèles [10]. Deux grandes familles de multimodèles sont recensées selon qu'un vecteur d'état unique (*multimodèle de Takagi-Sugeno*) ou que plusieurs vecteurs d'état (*multimodèle découplé*) apparaissent dans les équations du multimodèle.

La structure du multimodèle de Takagi-Sugeno a été initialement proposée, dans un contexte de modélisation floue, par Takagi et Sugeno [11] dans les années 80 et a été depuis largement popularisée, dans un contexte multimodèle, par les travaux de Johansen et Foss [6]. L'intérêt que présente cette structure pour effectuer la modélisation, la commande ou l'estimation d'état des systèmes non linéaires a été largement démontré [12–16]. Remarquons que d'un point de vue structurel, tous les sous-modèles de ce multimodèle ont la même dimension, car un vecteur d'état unique est utilisé. Par conséquent, la complexité des sous-modèles est invariable quelle que soit la complexité du système dans les zones de fonctionnement. Le multimodèle ainsi obtenu peut être alors sur-paramétré et sa complexité inutilement augmentée.

La structure du multimodèle découplé [10] introduit une certaine flexibilité dans l'étape de modélisation. En effet, la dimension des sous-modèles (leur nombre d'états) peut être adaptée au degré de complexité du système dans chaque zone de fonctionnement (une présentation approfondie est proposée dans la section II). Ce multimodèle a déjà été utilisé pour effectuer l'iden-

tification [17, 18] et/ou la commande [19–21] des systèmes non linéaires. En revanche, les possibilités offertes par cette structure pour l'estimation d'état restent actuellement peu exploitées [22, 23].

Cet article, basé sur nos précédents travaux [23], examine le problème de la conception robuste d'estimateurs d'état pour des systèmes non linéaires comportant des incertitudes paramétriques, sujets à des perturbations et modélisés par un multimodèle découplé. Les incertitudes paramétriques admissibles peuvent varier dans le temps et sont bornées en norme. L'étude de la stabilité de l'observateur est abordée à l'aide de la méthode de Lyapunov et en introduisant une mesure de performance H_∞.

Cet article est structuré comme suit : le multimodèle découplé est présenté dans la section II et la structure de l'observateur dans la section III. Des conditions suffisantes (sous forme de LMI) assurant des performances robustes de l'estimation vis-à-vis des perturbations et des incertitudes sont obtenues dans la section IV. Enfin, la section V propose un exemple académique de reconstruction d'état d'un multimodèle découplé.

Notations : *Par la suite, une matrice P définie positive (négative) sera notée $P > 0$ ($P < 0$) et la transposée d'une matrice P par P^T. I est la matrice identité de dimension appropriée et $diag\{A_1,...,A_n\}$ est une matrice diagonale par bloc de coefficients diagonaux A_i. La norme L_2 d'un signal de carré intégrable est notée et définie par $\|f(t)\|_2^2 = \int_0^\infty f^T(t)f(t)dt$. Afin d'alléger l'écriture $\mu_i(\xi(t))$ sera abrégée sous la forme $\mu_i(t)$.*

II. Sur la représentation multimodèle

Le principe de l'approche multimodèle repose sur l'approximation du comportement d'un système à l'aide d'un ensemble de sous-modèles agrégés à travers un mécanisme d'interpolation. Les multimodèles constituent alors un outil adapté à la modélisation des systèmes non linéaires. Quant à l'extension des outils d'analyse développés dans le cadre des systèmes linéaires, elle peut être envisagée sans effectuer une analyse spécifique de la non linéarité du système.

Dans ce contexte de modélisation, plusieurs catégories de multimodèles peuvent être distinguées selon la façon dont les sous-modèles sont associés. Parmi elles, figure le multimodèle découplé. Ce multimodèle, proposé initialement dans [10], se présente sous la forme de représentations d'état par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= (A_i + \Delta A_i)x_i(t) + B_i u(t) + D_i w(t) \ , & \text{(1a)} \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \ , & \text{(1b)} \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) y_i(t) + W w(t) \ , & \text{(1c)} \end{aligned}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle ; $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $w \in \mathbb{R}^q$ sont respectivement l'entrée, la sortie et la perturbation du système. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$, $D_i \in \mathbb{R}^{n_i \times q}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$ et $W \in \mathbb{R}^{p \times q}$ sont des matrices constantes connues caractérisant le comportement nominal de chaque sous-modèle et l'influence des perturbations sur le système.

Les imprécisions de la modélisation du système sont représentées par des incertitudes structurées bornées en norme :

$$\Delta A_i = M_i F_i(t) N_i \ , \qquad (2)$$

où M_i et N_i sont des matrices connues, constantes et de dimensions appropriées et $F_i(t)$ une fonction matricielle inconnue, avec des éléments de Lebesgue mesurables, satisfaisant à :

$$F_i^T(t)F_i(t) \leq \mathrm{I}, \quad \forall t \ . \qquad (3)$$

Les différentes zones de fonctionnement du système sont indexées à l'aide de la variable de décision $\xi(t)$ accessible par mesure en temps réel. Elle est une variable caractéristique du système, par exemple, des variables d'état mesurables et/ou des signaux d'entrée ou de sortie.

La contribution relative de chaque sous-modèle, selon la zone où évolue le système, est déterminée par les *fonctions de pondération* $\mu_i(\xi(t))$. Elles délimitent les zones de validité, assurent la transition entre les sous-modèles et possèdent les propriétés de somme convexe suivantes :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \ \forall i = 1...L, \ \forall t \ . \qquad (4)$$

La sortie du multimodèle est alors obtenue en effectuant une somme pondérée des sorties des sous-modèles. Il convient de souligner à ce niveau, que les sorties $y_i(t)$ des sous-modèles doivent être considérées comme des "signaux artificiels de modélisation" utilisés pour décrire le comportement non linéaire du système réel. De ce fait, ces signaux ne sont pas exploitables pour piloter un observateur.

Par ailleurs, grâce au découplage entre les sous-modèles, la dimension de chaque sous-modèle peut s'ajuster à la complexité du système dans la zone de fonctionnement à caractériser. Cette structure de multimodèle est donc adaptée à la modélisation des systèmes complexes, comportant des non-linéarités et des changements de structure selon le point de fonctionnement. Les paramètres du multimodèle peuvent être obtenus, à partir de données d'entrée/sortie du système, en utilisant une approche de type boîte noire à l'aide des différentes techniques d'identification (le lecteur peut consulter par exemple [17, 18]).

III. Structure de l'observateur

Il est intéressant de remarquer qu'en introduisant un vecteur d'état augmenté de la forme :

$$x(t) = \left[x_1^T(t) \cdots x_i^T(t) \cdots x_L^T(t)\right]^T \in \mathbb{R}^n, n = \sum_{i=1}^{L} n_i \ , \qquad (5)$$

les équations (1) peuvent s'écrire sous la forme compacte :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})x(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}w(t) \ , & \text{(6a)} \\ y(t) &= \tilde{C}(t)x(t) + Ww(t) \ , & \text{(6b)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= diag\{A_1 \cdots A_i \cdots A_L\} \ , & \text{(7a)} \\ \Delta\tilde{A} &= diag\{\Delta A_1 \cdots \Delta A_i \cdots \Delta A_L\} \ , & \text{(7b)} \\ \tilde{B} &= \left[B_1{}^T \cdots B_i{}^T \cdots B_L{}^T\right]^T \ , & \text{(7c)} \\ \tilde{D} &= \left[D_1{}^T \cdots D_i{}^T \cdots D_L{}^T\right]^T \ , & \text{(7d)} \\ \tilde{C}(t) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\tilde{C}_i \ , & \text{(7e)} \\ \tilde{C}_i &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} . & \text{(7f)} \end{aligned}$$

Il convient de remarquer que la matrice $\Delta\tilde{A}$ admet une écriture similaire à celle de ΔA_i :

$$\Delta\tilde{A} = \tilde{M}\tilde{F}(t)\tilde{N} \ , \qquad (8)$$

où

$$\tilde{M} = diag\{M_1 \cdots M_i \cdots M_L\} \ , \quad (9)$$

$$\tilde{N} = diag\{N_1 \cdots N_i \cdots N_L\} \ , \quad (10)$$

$$\tilde{F}(t) = diag\{F_1(t) \cdots F_i(t) \cdots F_L(t)\} \ , \quad (11)$$

où $\tilde{F}^T(t)\tilde{F}(t) \leq 1$.

La reconstruction des variables d'état du multimodèle découplé (6) est effectuée à l'aide d'un observateur de la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \tilde{A}\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \ , \quad (12a)$$

$$\hat{y}(t) = \tilde{C}(t)\hat{x}(t) \ , \quad (12b)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation du vecteur d'état (5), $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie reconstruite par l'observateur et $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ le gain de l'observateur à déterminer.

A. Formulation du problème

L'erreur d'estimation d'état est définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (13)$$

et sa dynamique, obtenue par l'agrégation des équations (6) et (12), par :

$$\dot{E}(t) = A_o(t)E(t) + \Phi\overline{w}(t) \ , \quad (14)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} Y & 0 \end{bmatrix} E(t) \ , \quad (15)$$

où

$$E(t) = \begin{bmatrix} e^T(t) & x^T(t) \end{bmatrix}^T \ , \quad (16)$$

$$\overline{w}(t) = \begin{bmatrix} w^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix}^T \ , \quad (17)$$

$$A_o(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A} - K\tilde{C}(t) & \Delta\tilde{A} \\ 0 & \tilde{A} + \Delta\tilde{A} \end{bmatrix} \ , \quad (18)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{D} - KW & 0 \\ \tilde{D} & \tilde{B} \end{bmatrix} \ . \quad (19)$$

Remarque 1. *La sortie $z(t)$ donnée par* (15) *est le signal objectif qui dépend seulement de l'erreur d'estimation $e(t)$.*

Il est possible de remarquer que le système (14) générateur de l'erreur d'estimation $E(t)$ est stable si le multimodèle découplé (6) est stable pour des incertitudes $\Delta\tilde{A}$ admissibles et si le gain de l'observateur K est ajusté de façon à assurer la stabilité de $\tilde{A} - K\tilde{C}(t)$.

La convergence de l'observateur est étudiée en prenant en compte la dépendance entre l'erreur d'estimation et les signaux exogènes (l'entrée et les perturbations) au système. Ainsi la synthèse de l'observateur (12) consiste à ajuster le gain K de façon à garantir une reconstruction de l'état du multimodèle avec une certaine précision en présence des incertitudes paramétriques et des perturbations. On cherche alors à satisfaire les performances robustes suivantes :

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = 0 \quad \text{pour} \quad \overline{w}(t) = 0 \ , \quad (20a)$$

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|\overline{w}(t)\|_2^2 \quad \text{pour} \quad \overline{w}(t) \neq 0 \text{ et } z(0) = 0 \ . \quad (20b)$$

où $\overline{w}(t)$ est assimilé à une perturbation affectant l'erreur d'estimation et γ est le niveau d'atténuation entre $\overline{w}(t)$ et le signal objectif $z(t)$.

IV. Synthèse de l'observateur

Dans cette section, des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état sont établies sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles LMIs [24], en utilisant la méthode de Lyapunov. La synthèse de l'observateur est effectuée sous les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse 1. *Le multimodèle découplé* (6) *est stable pour des incertitudes $\Delta\tilde{A}$ admissibles.*

Hypothèse 2. *L'entrée et la perturbation sont des signaux à énergie bornée, soit $\|u(t)\|_2^2 < \infty$ et $\|w(t)\|_2^2 < \infty$.*

Lemme 1. *Soit X et Y deux matrices de dimension appropriée. L'inégalité suivante est toujours vraie pour toute matrice $Q = Q^T > 0$:*

$$XY^T + YX^T \leq XQX^T + YQ^{-1}Y^T \ .$$

Une condition suffisante pour garantir l'existence de l'observateur est présentée ci-dessous :

Théorème 1. *Soit le modèle* (6) *satisfaisant à l'hypothèse 1. Il existe un observateur* (12)*, garantissant les performances robustes* (20)*, s'il existe deux matrices symétriques et définies positives P_1 et P_2, une matrice G et deux scalaires positifs $\overline{\gamma}$ et τ tels que :*

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & 0 & \Psi & 0 & P_1\tilde{M} \\ 0 & \Gamma & P_2\tilde{D} & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M} \\ \Psi^T & \tilde{D}^TP_2 & -\overline{\gamma}I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}^TP_2 & 0 & -\overline{\gamma}I & 0 \\ \tilde{M}^TP_1 & \tilde{M}^TP_2 & 0 & 0 & -\tau I \end{bmatrix} < 0, \ i = 1 \ldots L,$$

où

$$\Pi_i = P_1\tilde{A} + \tilde{A}^TP_1 - G\tilde{C}_i - \tilde{C}_i^TG^T + Y^TY \ ,$$

$$\Gamma = P_2\tilde{A} + \tilde{A}^TP_2 + \tau\tilde{N}^T\tilde{N} \ ,$$

$$\Psi = P_1\tilde{D} - GW \ .$$

Le gain de l'observateur est donné par $K = P_1^{-1}G$ et le niveau d'atténuation par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Remarque 2. *La recherche d'une solution satisfaisant les conditions de ce théorème peut éventuellement s'accompagner d'une minimisation du niveau d'atténuation γ.*

Démonstration. La démonstration du théorème 1 s'effectue en considérant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = e^T(t)P_1e(t) + x^T(t)P_2x(t) \ , \quad (21)$$

où $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$. Les objectifs de synthèse (20) sont garantis s'il existe une fonction de Lyapunov (21) satisfaisant à :

$$\dot{V}(t) < -z^T(t)z(t) + \gamma^2\overline{w}^T(t)\overline{w}(t) \ . \quad (22)$$

La dérivée $\dot{V}(t)$ le long de la trajectoire de l'erreur d'estimation est obtenue en utilisant les équations (14) :

$$\dot{V}(t) = \Omega(t)^T \begin{bmatrix} PA_o(t) + A_o^T(t)P & P\Phi \\ \Phi^TP & 0 \end{bmatrix} \Omega(t) \ , \quad (23)$$

$$P = diag\{P_1, P_2\} \ , \quad (24)$$

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} E^T(t) & \overline{w}^T(t) \end{bmatrix}^T \ . \quad (25)$$

Ainsi, compte tenu de (23), la condition (22) devient alors :

$$\Omega^T(t)\begin{bmatrix} PA_o(t)+A_o^T(t)P+\left[\begin{smallmatrix} Y^TY & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right] & P\Phi \\ \Phi^T P & -\gamma^2\mathrm{I}\end{bmatrix}\Omega(t)<0 \ , \quad (26)$$

qui est une forme quadratique en $\Omega(t)$. En introduisant les définitions (18) de $A_o(t)$ et (19) de Φ, cette inégalité est également satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} \Pi(t) & P_1\Delta\tilde{A} & \Psi & 0\\ \Delta\tilde{A}^TP_1 & X_1+X_2 & P_2\tilde{D} & P_2\tilde{B}\\ \Psi^T & \tilde{D}^TP_2 & -\gamma^2\mathrm{I} & 0\\ 0 & \tilde{B}^TP_2 & 0 & -\gamma^2\mathrm{I}\end{bmatrix}<0 \ , \quad (27)$$

où

$$\begin{aligned}\Pi(t) &= P_1(\tilde{A}-K\tilde{C}(t))+(\tilde{A}-K\tilde{C}(t))^TP_1+Y^TY \ , & (28)\\ \Psi &= P_1(\tilde{D}-KW) \ , & (29)\\ X_1 &= P_2\tilde{A}+\tilde{A}^TP_2 \ , & (30)\\ X_2 &= P_2\Delta\tilde{A}+\Delta\tilde{A}^TP_2 \ . & (31)\end{aligned}$$

Il est maintenant possible de dissocier les paramètres nominaux et incertains dans l'inégalité (27) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Pi(t) & 0 & \Psi & 0\\ 0 & X_1 & P_2\tilde{D} & P_2\tilde{B}\\ \Psi^T & \tilde{D}^TP_2 & -\gamma^2\mathrm{I} & 0\\ 0 & \tilde{B}^TP_2 & 0 & -\gamma^2\mathrm{I}\end{bmatrix}+Z<0, \quad (32)$$

où

$$Z=\begin{bmatrix} 0 & P_1\Delta\tilde{A} & 0 & 0\\ 0 & P_2\Delta\tilde{A} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ \Delta\tilde{A}^TP_1 & \Delta\tilde{A}^TP_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \ , \quad (33)$$

et d'expliciter ainsi Z par :

$$Z=R^TH+H^TR \ , \quad (34)$$

où

$$R^T=\begin{bmatrix} 0 & P_1\tilde{M} & 0 & 0\\ 0 & P_2\tilde{M} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \ H=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \tilde{F}(t)\tilde{N} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \ .$$

Une majoration de Z peut alors être effectuée afin de s'affranchir des termes inconnus $\tilde{F}(t)$ dans (34), en utilisant le lemme 1 et en prenant en compte le fait que $\tilde{F}^T(t)\tilde{F}(t)\leq \mathrm{I}$, soit :

$$Z\leq\begin{bmatrix} \tau^{-1}P_1\tilde{M}\tilde{M}^TP_1 & \tau^{-1}P_1\tilde{M}\tilde{M}^TP_2 & 0 & 0\\ \tau^{-1}P_2\tilde{M}\tilde{M}^TP_1 & \tau^{-1}P_2\tilde{M}\tilde{M}^TP_2+\tau\tilde{N}^T\tilde{N} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \quad (35)$$

Ainsi, en introduisant la majoration (35) de Z dans (32) et en utilisant le complément de Schur, il découle que l'inégalité (27) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} \Pi(t) & 0 & \Psi & 0 & P_1\tilde{M}\\ 0 & \Gamma & P_2\tilde{D} & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M}\\ \Psi^T & \tilde{D}^TP_2 & -\gamma^2\mathrm{I} & 0 & 0\\ 0 & \tilde{B}^TP_2 & 0 & -\gamma^2\mathrm{I} & 0\\ \tilde{M}^TP_1 & \tilde{M}^TP_2 & 0 & 0 & -\tau\mathrm{I}\end{bmatrix}<0, \quad (36)$$

où

$$\Gamma = P_2\tilde{A}+\tilde{A}^TP_2+\tau\tilde{N}^T\tilde{N} \ . \quad (37)$$

Maintenant, en utilisant la définition (7e) de $\tilde{C}(t)$, $\Pi(t)$ devient :

$$\Pi(t)=\sum_{i=1}^{L}\mu_i(t)P_1(\tilde{A}-K\tilde{C}_i)+(\tilde{A}-K\tilde{C}_i)^TP_1+Y^TY \ . \quad (38)$$

Enfin, en posant $G=P_1K$ et $\overline{\gamma}=\gamma^2$ et compte tenu des propriétés de somme convexe des fonctions de pondération $\mu_i(t)$, l'inégalité (27) est satisfaite si les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & 0 & \Psi & 0 & P_1\tilde{M}\\ 0 & \Gamma & P_2\tilde{D} & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M}\\ \Psi^T & \tilde{D}^TP_2 & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0 & 0\\ 0 & \tilde{B}^TP_2 & 0 & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0\\ \tilde{M}^TP_1 & \tilde{M}^TP_2 & 0 & 0 & -\tau\mathrm{I}\end{bmatrix}<0, i=1\ldots L, \quad (39)$$

où

$$\begin{aligned}\Psi &= P_1\tilde{D}-GW \ , & (40)\\ \Pi_i &= P_1\tilde{A}+\tilde{A}^TP_1-G\tilde{C}_i-\tilde{C}_i^TG^T+Y^TY \ . & (41)\end{aligned}$$

Il convient de remarquer que la stabilité de l'observateur (12), en considérant le modèle nominal sans perturbations, est assurée par la négativité du bloc (1,1) dans l'inégalité matricielle (39) [23].

Le théorème 1 est ainsi démontré et une solution satisfaisant ces conditions peut alors être obtenue en faisant appel à des algorithmes d'optimisation sous contraintes convexes. □

A. Deuxième modèle des incertitudes

On propose de modifier la forme des incertitudes (2) par :

$$\Delta A_i = \mu_i(t)M_iF_i(t)N_i \ . \quad (42)$$

L'idée d'introduire cette pondération est de pouvoir négliger éventuellement les incertitudes des sous-modèles qui ne sont pas mis à contribution dans la sortie du multimodèle. La forme augmentée proposée dans la section III reste inchangée, excepté pour la matrice $\Delta\tilde{A}$ qui devient :

$$\Delta\tilde{A} = \sum_{i=1}^{L}\mu_i(t)\Delta\tilde{A}_i \ , \quad (43)$$

où

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{A}_i &= \tilde{M}_iF_i(t)\tilde{N}_i \ , & (44)\\ \tilde{M}_i &= \begin{bmatrix}0 & \cdots & M_i^T & \cdots & 0\end{bmatrix}^T \ , & (45)\\ \tilde{N}_i &= \begin{bmatrix}0 & \cdots & N_i & \cdots & 0\end{bmatrix} \ . & (46)\end{aligned}$$

Une condition suffisante pour garantir l'existence de l'observateur est présentée ci-dessous :

Théorème 2. *Soit le modèle* (6) *avec les incertitudes de la forme* (42) *et satisfaisant à l'hypothèse 1. Il existe un observateur* (12)*, garantissant les performances robustes* (20)*, s'il existe deux matrices symétriques et définies positives P_1 et P_2, une matrice G et des scalaires positifs $\overline{\gamma}$ et τ_i tels que :*

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & 0 & \Psi & 0 & P_1\tilde{M}_i\\ 0 & \Gamma_i & P_2\tilde{D} & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M}_i\\ \Psi^T & \tilde{D}^TP_2 & -\overline{\gamma}I & 0 & 0\\ 0 & \tilde{B}^TP_2 & 0 & -\overline{\gamma}I & 0\\ \tilde{M}_i^TP_1 & \tilde{M}_i^TP_2 & 0 & 0 & -\tau_iI\end{bmatrix} < 0, \ i=1\ldots L,$$

où

$$\begin{aligned}
\Pi_i &= P_1\tilde{A}+\tilde{A}^TP_1-G\tilde{C}_i-\tilde{C}_i^TG^T+Y^TY \ , \\
\Gamma_i &= P_2\tilde{A}+\tilde{A}^TP_2+\tau_i\tilde{N}_i^T\tilde{N}_i \ , \\
\Psi &= P_1\tilde{D}-GW \ , \\
\tilde{M}_i &= \begin{bmatrix}0 & \cdots & M_i^T & \cdots & 0\end{bmatrix}^T \ , \\
\tilde{N}_i &= \begin{bmatrix}0 & \cdots & N_i & \cdots & 0\end{bmatrix} \ .
\end{aligned}$$

Le gain de l'observateur est donné par $K = P_1^{-1}G$ *et le niveau d'atténuation par* $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème s'effectue en adoptant une démarche tout à fait similaire à celle du théorème 1. La démonstration est omise ici. □

V. Exemple de simulation

Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé constitué de $L = 2$ sous-modèles de dimensions différentes dont les paramètres sont définis par :

$$A_1 = \begin{bmatrix}-0.5 & 0.2\\ -0.4 & -0.8\end{bmatrix} \ , \quad A_2 = \begin{bmatrix}-0.5 & -0.4 & -0.3\\ 0.3 & -0.5 & -0.8\\ 0.6 & 0.7 & -0.4\end{bmatrix} \ ,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix}0.6 & 0.7\end{bmatrix}^T \ , \quad B_2 = \begin{bmatrix}0.9 & -0.7 & -0.5\end{bmatrix}^T \ ,$$

$$D_1 = \begin{bmatrix}-0.1 & 0.1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T \ , \quad D_2 = \begin{bmatrix}0.1 & -0.2 & 0.1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \ ,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix}-0.2 & -0.5\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix} \ , \quad C_2 = \begin{bmatrix}-0.5 & -0.4 & -0.2\\ 0.2 & -0.3 & -0.4\end{bmatrix} \ ,$$

$$M_1 = \begin{bmatrix}0.3 & 0.2\end{bmatrix}^T \ , \quad M_2 = \begin{bmatrix}0.4 & 0.5 & 0.3\end{bmatrix}^T \ ,$$

$$N_1 = \begin{bmatrix}0.1 & 0.3\end{bmatrix} \ , \quad N_2 = \begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.6\end{bmatrix} \ ,$$

$$W = \begin{bmatrix}0 & -0.2\\ 0 & 0.2\end{bmatrix} \ , \quad Y = \mathrm{I}_{(5\times5)} \ .$$

La perturbation $w(t)$ est un bruit de moyenne nulle et de variance égale à 1. La variable de décision $\xi(t)$ est ici le signal de commande $u(t) \in [-1\ ,\ 1]$. Les fonctions de pondération sont obtenues par la normalisation de fonctions de type gaussien :

$$\mu_i(\xi(t)) = \omega_i(\xi(t)) / \sum_{j=1}^{L} \omega_j(\xi(t)) \ , \tag{47}$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t)-c_i)^2/\sigma^2\right) \ , \tag{48}$$

de dispersion $\sigma = 0.5$ et de centres $c_1 = -0.18$ et $c_2 = 0.18$.

Les allures du signal d'entrée, des fonctions de pondération et des sorties du multimodèles sont illustrées sur la figure 1. La figure 2 présente les incertitudes $F_1(t)$, $F_2(t)$ et la perturbation $w(t)$ utilisées dans la simulation. Il convient de remarquer que la sortie du multimodèle est élaborée en considérant à tout instant la contribution des deux sous-modèles. En effet, les fonctions de pondération ne prennent jamais les valeurs 0 ou 1.

Deux observateurs sont synthétisés à partir des conditions LMI proposées par les théorèmes 1 et 2 en considérant le niveau d'atténuation γ comme une inconnue à minimiser.

Une solution, satisfaisant les conditions du théorème 1, est donnée par la matrice K_1 avec un niveau d'atténuation minimal de $\gamma^2 = 1.8977$ et $\tau = 3.0352$. Une solution, satisfaisant les conditions du théorème 2, est donnée par la matrice K_2 avec un niveau d'atténuation minimal de $\gamma^2 = 0.4298$ et $\tau_1 = 1.4267$ et $\tau_2 = 0.3236$. Il convient de souligner le fort contraste entre les niveaux d'atténuation obtenus avec les conditions des théorèmes 1 et 2 ; les conditions du théorème 2 permettant, pour cet exemple, d'obtenir un niveau d'atténuation plus faible.

$$K_1 = \begin{bmatrix}1.2126 & 0.8656\\ -1.3958 & 0.2265\\ -2.3337 & -0.9945\\ -3.2532 & -3.0268\\ -1.9033 & -2.5220\end{bmatrix} \ , \quad K_2 = \begin{bmatrix}1.4823 & 1.3387\\ -1.2900 & 0.4760\\ -8.2042 & -6.0608\\ -4.4123 & -5.2992\\ -1.5701 & -2.5680\end{bmatrix} \ .$$

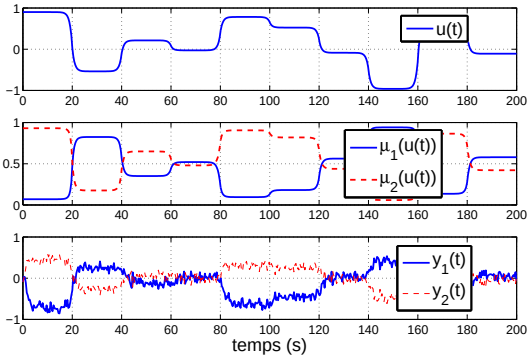

Fig. 1. Entrée, fonctions de pondération et sorties

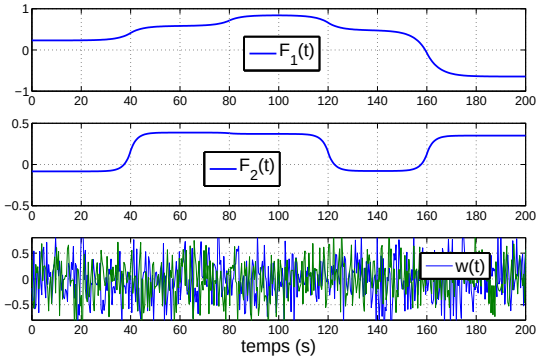

Fig. 2. $F_1(t)$, $F_2(t)$ et $w(t)$

Il convient également de remarquer que dans la simulation du multimodèle, les incertitudes ne sont pas assorties de pondération, les conditions initiales des observateurs sont nulles et les conditions initiales du multimodèle sont données par $x(0) = \begin{bmatrix}0.2 & -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2\end{bmatrix}$.

Les erreurs d'estimation obtenues en utilisant ces deux observateurs sont illustrées sur les figures 3 et 4. Sur ces figures, $e_i(t)$ représente l'erreur d'estimation de la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'état augmenté $x(t)$. Dans les deux cas, les erreurs d'estimation demeurent bornées et globalement proches de zéro. On notera cependant que dans l'intervalle de temps 80-120, l'erreur d'estimation $e_1(t)$ s'écarte du zéro. Cet écart dans l'estimation est sans conséquences sur l'estimation des sorties car dans cet intervalle de temps le sous-modèle 1 contribue très faiblement dans la sortie du multimodèle ($\mu_1 \approx 0$). La figure 5 présente l'estimation des sorties du multimodèle et l'indice de performance de l'estimation $\varepsilon(t) = \int_0^t z^T(t)z(t)dt / \int_0^t \overline{w}^T(t)\overline{w}(t)$ au cours du temps selon le théorème utilisé pour obtenir le gain de l'observateur. Il est possible de constater la qualité de l'estimation des sorties du multimodèle obtenue avec l'approche proposée.

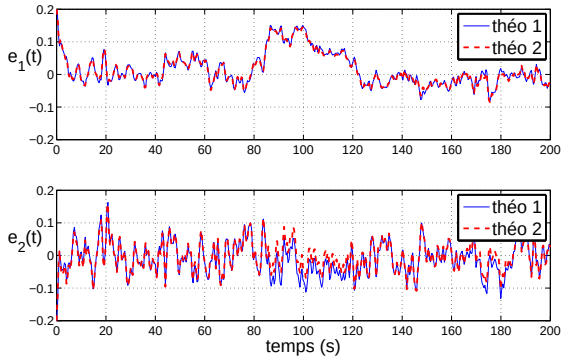

Fig. 3. Erreurs d'estimation du sous-modèle 1

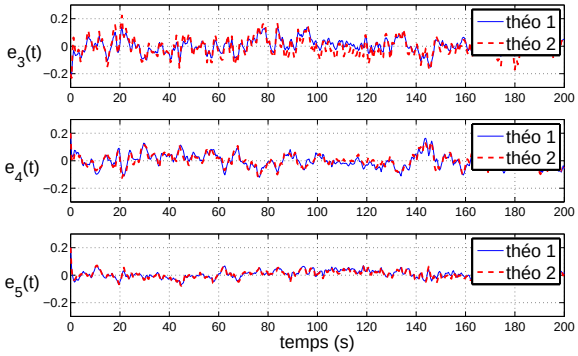

Fig. 4. Erreurs d'estimation du sous-modèle 2

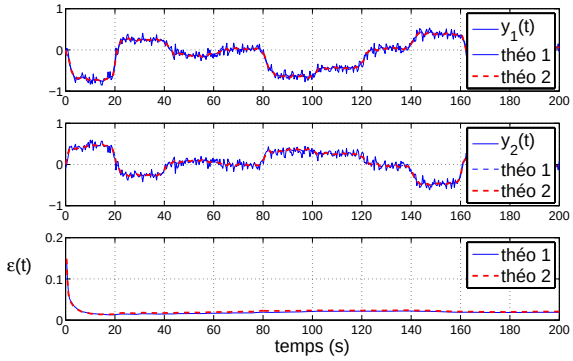

Fig. 5. Sortie $y(t)$ du multimodèle et indice de performances $\varepsilon(t)$

VI. Conclusions

Cet article expose une méthode de synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires incertains décrits par une classe de multimodèle. Le multimodèle utilisé, multimodèle découplé, peut comporter des sous-modèles de dimensions différentes, contrairement aux approches classiques où les sous-modèles ont la même dimension.

Des conditions suffisantes permettant la synthèse d'observateurs robustes vis-à-vis des incertitudes du modèle et des perturbations sont établies en utilisant un formalisme LMI. Un exemple de simulation a permis d'illustrer la méthode de synthèse proposée et son efficacité. L'observateur proposé peut être utilisé dans un contexte de diagnostic de systèmes pour générer des résidus robustes en vue de fournir des signaux indicateurs de défauts. Dans un contexte de détection de défaillances, ce travail peut être approfondi par l'étude de la sensibilité de la reconstruction de l'état vis-à-vis des incertitudes paramétriques et vis-à-vis des défauts afin d'indiquer les défauts pour lesquels les résidus générés seront sensibles.

VII. Remerciements

Ce travail est partiellement financé par le Conseil Régional de Lorraine et par le programme TASSILI n.07 MDU 714.

Références

[1] A. Weinmann. *Uncertain Models and Robust Control*. Springer-Verlag Wien New York, Vienne, 1991.

[2] L. Xie et C.E. Souza. Robust H-infinity control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :1188–1191, 1992.

[3] A. Oustaloup (Coordonnateur). *La robustesse, analyse et synthèse de commandes robustes*. Hermes, Paris, 1994.

[4] W. Colmenares. *Sur la robustesse des systèmes incertains : approche quadratique, retour de sortie*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1996.

[5] O. Adrot. *Diagnostic à base de modèles incertains utilisant l'analyse par intervalles : l'approche bornante*. Thèse de doctorat, Institut national Polytechnique de Lorraine, 2000.

[6] R. Murray-Smith et T.A. Johansen. *Multiple model approaches to modelling and control*. Taylor & Francis, London, 1997.

[7] D. J. Leith et W. E. Leithead. Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, 73(11) :1001–1025, July 2000.

[8] K. Tanaka et H. Wang. *Fuzzy Control Systems design and analysis*. John Wiley & Sons, INC., New York, 2001.

[9] R. Gao, A. O'Dwyer, S. McLoone, et E. Coyle. Multiple model networks in non-linear systems model for control – a revieew. *Wismarer Automatisierungs Symposium mit International Beteiligung*, Hansestadt Wismar, 2002.

[10] D. Filev. Fuzzy modeling of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 5(3) :281–290, 1991.

[11] T. Takagi et M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to model and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cynernetic*, 15 :116–132, 1985.

[12] K. Tanaka, T. Ikeda, et H. Wang. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stabilizability, Hinf control theory, and Linear Matrix Inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy sysems*, 4(1) :1–13, 1996.

[13] M. Teixeira et S. Zak. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(2) :133–142, 1999.

[14] S. G. Cao, N. W. Rees, et G. Feng. Hinf control of uncertain fuzzy continuous-time systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(2) :171–190, October 2000.

[15] P. Bergsten, R. Palm, et D. Driankov. Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 32(1) :114–211, 2002.

[16] M. Hadjili et V. Wertz. Takagi-Sugeno fuzzy modeling incorporating input variables selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(6) :728–742, 2002.

[17] A.N. Venkat, P. Vijaysai, et R.D. Gudi. Identification of complex nonlinear processes based on fuzzy decomposition of the steady state space. *Journal of Process Control*, 13(6) :473–488, 2003.

[18] R. Orjuela, D. Maquin, et J. Ragot. Identification des systèmes non linéaires par une approche multi-modèle à états découplés. *Journées Identification et Modélisation Expérimentale, JIME'06*, Poitiers, France, 2006.

[19] P.J. Gawthrop. Continuous-time local state local model networks. *IEEE Conference on Systems, Man & Cybernetics*, pages 852–857, Vancouver, Canada, 1995.

[20] E. P. Gatzke et F. J. Doyle III. Multiple model approach for CSTR control. *14th IFAC World Congress*, pages 343–348, Beijing, P. R. China, 1999.

[21] G. Gregorcic et G. Lightbody. Control of highly nonlinear processes using self-tuning control and multiple/local model approaches. *2000 IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems, INES 2000*, pages 167–171, Portoroz, Slovenie, 2000.

[22] F. Uppal, R. Patton, et M. Witczak. A hybrid neuro-fuzzy and de-coupling approach applied to the DAMADICS benchmark problem. *Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFEPROCESS'03*, Washington, DC. USA, 2003.

[23] R. Orjuela, B. Marx, D. Maquin, et J. Ragot. State estimation for nonlinear systems using a decoupled multiple model. *International Journal of Modelling Identification and Control*, 3(5), (planned to be published in May) 2008.

[24] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics 15, Philadelphia, 1994.