

Estimation d'état et estimation paramétrique simultanée avec technique de régularisation pour les séries temporelles courtes et bruitées.

Anass BOUKHRIS, Gilles MOUROT, Jose RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy - ESA CNRS 7039

Institut National Polytechnique de Lorraine

F - 54 516 Vandoeuvre les Nancy

Fax : (33) 03 83 59 56 44

Résumé. On expose ici une méthode d'estimation des paramètres d'un modèle de type ARX qui prend en compte simultanément la présence de bruit de mesure sur l'entrée et la sortie de ce modèle ainsi que des contraintes sur les fluctuations de cette entrée. Conjointement, l'état complet du système (entrées et sorties) est estimé. La méthode est testée sur des données de simulation.

Abstract. For process control improvement, coherency of information supplied by instrument lines and sensors must first be ensured ; because of the presence of random and possibly gross errors, the model equations of the process are not generally satisfied. The problem of how to reconcile the measurements so that they satisfy the model constraints is considered in this article. The proposed procedure to resolve this problem involve the use of a special filter to estimate both the parameters, the states and the inputs of a process ; smoothing of both estimations of the input and the output is increased by adding in the filter a variance term. Application is proposed in the field of rainfall processing in order to increase the quality of the supervision of this process.

1. Introduction

Connaître l'état de fonctionnement d'un processus physique est sans doute l'un des problèmes les plus étudiés dans le domaine de la conduite automatisée. En effet, dès que cela fut rendu techniquement possible, les opérateurs chargés de la conduite d'un système de production mais aussi ceux ayant en charge la surveillance de processus naturels ou liés à l'environnement, ont cherché à interpréter les comportements à partir des mesures et des informations disponibles. Comme il s'est vite révélé impossible, pour des raisons techniques et aussi économiques, de mesurer toutes les grandeurs caractérisant un système, force a été de limiter le nombre de capteurs à une valeur cependant suffisante pour permettre une estimation correcte de l'état du système considéré. La limitation du nombre de capteurs s'est accompagné d'une recherche de modèles physiques ou mathématiques permettant de façon indirecte de déduire certaines grandeurs inaccessibles à la mesure directe [7]. D'une façon générale, le problème d'estimation de l'état d'un système peut se formuler de la façon suivante :

à partir de mesures $Y_m(t)$ collectées sur le système dont l'état est caractérisé par les variables $X(t)$, connaissant le modèle du système de mesure $Y(t) = g(X(t))$, connaissant le modèle du système $f(X(t), \theta) = 0$, où θ représentent les paramètres du système, peut-on fournir une estimation $\hat{X}(t)$ de l'état du système ? Le problème est très complexe à résoudre quand il est formulé de façon générale. Cependant, pour certaines classes de systèmes et de systèmes de mesure, on peut fournir les conditions d'existence de sa solution ainsi que la solution elle-même [2], [5], [6]. C'est le cas classique où des

modèles linéaires sont utilisables pour décrire le comportement du processus et du système de mesure :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = A(\theta)X(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$$

pour lesquels, lorsque les paramètres θ sont connus, la théorie des observateurs apporte des réponses. Le problème qui nous préoccupe est cependant plus général puisque les paramètres θ sont inconnus. On cherche donc à estimer l'état du système mais aussi et simultanément les paramètres de son modèle. De façon générale, il s'agit d'un problème d'estimation non linéaire. Cox [3] est sans doute le premier à avoir abordé ce problème d'estimation d'état et de paramètres par une méthode itérative fondée sur le maximum de vraisemblance. El Sherief [4] a proposé également une méthode d'estimation interactive linéaire à partir du filtre de Kalman. Ces méthodes sont aussi connues sous le nom "Bootstrap" et Puthenpura en a proposé une version robuste.

2. Principe de la méthode

Dans le cas de système mono-entrée et mono-sortie, le système à modéliser est caractérisé par une entrée $x(t)$ et une sortie $y(t)$ échantillonnées, après mise en forme des signaux, à la même période constante. On note $x_m(t)$ et $y_m(t)$ les valeurs mesurées ainsi obtenues après échantillonnage. On suppose que les grandeurs théoriques $x(t)$ et $y(t)$ vérifient une équation de type ARX :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^m b_i x(k-i) \quad (1)$$

A partir de N mesures $y_m(k)$ et $x_m(k)$, on souhaite estimer les paramètres a_i et b_i du modèle. Les mesures étant bruitées, elles ne vérifient pas le modèle ; on cherche donc également à estimer les grandeurs vraies $y(k)$ et $x(k)$; dans la suite de l'exposé, ces estimations sont notées $\hat{y}(k)$ et $\hat{x}(k)$. Le principe de cette estimation mixte (paramètres et variables du système) consiste à minimiser un critère fonction des écarts entre mesures et estimations ; pour des raisons de simplicité, un critère quadratique a été retenu :

$$\Phi = \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - y_m(k))^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{x}(k) - x_m(k))^2 \quad (2)$$

Sans atteinte à la généralité, les écarts apparaissant dans ce critère ne sont pas pondérés. Les estimations doivent satisfaire :

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^n a_i \hat{y}(k-i) + \sum_{i=1}^m b_i \hat{x}(k-i) \quad (3)$$

La calcul des estimations des variables $\hat{y}(k)$ et $\hat{x}(k)$ et des paramètres a_i et b_i est fait en minimisant le critère (2) compte tenu de la contrainte (3) qui s'applique à chaque instant. D'un point de vue numérique, il s'agit donc d'un problème classique d'optimisation quadratique sous contraintes non-linéaires de type égalité, la non-linéarité provenant du couplage entre les variables du systèmes et ses paramètres. En raison de la dimension importante du vecteur de mesure et des bruits qui affectent ces dernières, les techniques classiques de résolution peuvent s'avérer inefficaces ; pour cette raison, nous avons développé une technique originale.

3. Mise en oeuvre

Pour résoudre le problème d'optimisation, on propose au préalable une présentation matricielle. Pour cela, définissons tout d'abord les vecteurs des variables et de leurs estimations ainsi que celui des paramètres :

$$Z = (y(1) \ x(1) \ y(2) \ \dots \ x(N-1) \ y(N))^T \quad (4a)$$

$$\hat{Z} = (\hat{y}(1) \ \hat{x}(1) \ \hat{y}(2) \ \dots \ \hat{x}(N-1) \ \hat{y}(N))^T \quad (4b)$$

$$\theta = (a_1 \ \dots \ a_n \ b_1 \ \dots \ b_m)^T \quad (4c)$$

La contrainte (3), exprimée sur l'horizon d'observation N , peut s'écrire :

$$M(\theta)\hat{Z} = 0 \quad (5)$$

où $M \in R^{(N-n).(n+m+N+1)}$, $\theta \in R^p$, $p = n + m$.

La matrice $M(\theta)$ s'explicite ainsi très simplement et de façon linéaire en fonction des paramètres du modèle. Le Lagrangien associé au problème d'optimisation peut alors se mettre sous la forme :

(6)

dans laquelle on rappelle les dimensions :

$$\begin{aligned} Z &\in R^{2N-1} & \hat{Z} &\in R^{2N-1} \\ M &\in R^{(N-1).(2N-1)} & \lambda &\in R^{N-1} \end{aligned}$$

Les équations d'optimalité s'expriment ¹ :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{Z}} = \hat{Z} - Z + M^T(\theta)\lambda = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M(\theta)\hat{Z} = 0 \quad (7b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \left(I_p \otimes \lambda^T \right) \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta} \hat{Z} = 0 \quad (7c)$$

Le système d'équations (7), non linéaire, peut se résoudre de la façon suivante. Des équations (7a) et (7b), on extrait aisément :

$$\hat{Z} = \left(I_{2N-1} - M^T(\theta)(M(\theta)M^T(\theta))^{-1}M(\theta) \right) Z \quad (8)$$

On note que si $M(\theta)$ est de plein rang ligne, ce qui est toujours le cas compte tenu de sa structure, alors la matrice $M(\theta)M^T(\theta)$ est régulière. L'équation (7c) étant non-linéaire par rapport à θ , on estime ce paramètre par une méthode itérative. La méthode de Newton-Raphson est utilisée. On a à l'itération courante $i+1$:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \Delta \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \theta^T} \right)_i^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_i \quad (9)$$

qui nécessite le calcul du Hessien du Lagrangien. On peut au préalable remarquer que le gradient du lagrangien par rapport à θ peut s'écrire indifféremment :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \left(I_p \otimes \lambda^T \right) \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta} \hat{Z} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \left(I_p \otimes \hat{Z}^T \right) \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta} \lambda \quad (10b)$$

A partir de (10a) et (10b), on peut calculer :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \theta^T} = \left(I_p \otimes \lambda^T \right) M_0 \frac{\partial \hat{Z}}{\partial \theta^T} + \left(I_p \otimes \hat{Z}^T \right) M_0^T \frac{\partial \lambda}{\partial \theta^T}$$

¹ Règle de dérivation d'un produit de matrice par rapport à une matrice

$$\begin{aligned} A &\in R^{n.m}, \ B \in R^{m.q}, \ \theta \in R^{r.s} \\ \frac{\partial (AB)}{\partial \theta} &= \frac{\partial A}{\partial \theta} (I_s \otimes B) + (I_r \otimes A) \frac{\partial B}{\partial \theta} \end{aligned}$$

avec la définition suivante $M_0 = \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta}$. On donne aussi la façon de calculer les dérivées de λ et de \hat{Z} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Z}}{\partial \theta^T} &= - \left(\frac{\partial M^T}{\partial \theta^T} (I_p \otimes \lambda) + M^T(\theta) \frac{\partial \lambda}{\partial \theta^T} \right) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \theta^T} &= \left(M(\theta) M^T(\theta) \right)^{-1} \\ &\left(\frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta^T} (I_p \otimes Z) - \frac{\partial M(\theta) M^T(\theta)}{\partial \theta^T} (I_p \otimes \lambda) \right) \\ \frac{\partial (M(\theta) M^T(\theta))}{\partial \theta^T} &= \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta^T} (I_p \otimes M^T(\theta)) + M(\theta) \frac{\partial M^T(\theta)}{\partial \theta^T} \end{aligned}$$

4. Résultats de simulation

La figure 1 montre les signaux d'entrée et de sortie d'un système dynamique du premier ordre ; les données sont légèrement bruitées à partir d'un générateur pseudo-aléatoire à valeurs centrées. Après application de la technique proposée à un modèle du premier ordre, on a obtenu les paramètres suivants :

$$a_1 = 0.904 \quad b_1 = 0.205$$

La figure 1, donne les valeurs estimées des grandeurs vraies d'entrée et de sortie. On peut apprécier la qualité du modèle par son aptitude à reconstruire les signaux d'entrée et de sortie du système. On note cependant que cette reconstruction s'accompagne d'un filtrage plus efficace pour la sortie que pour l'entrée.

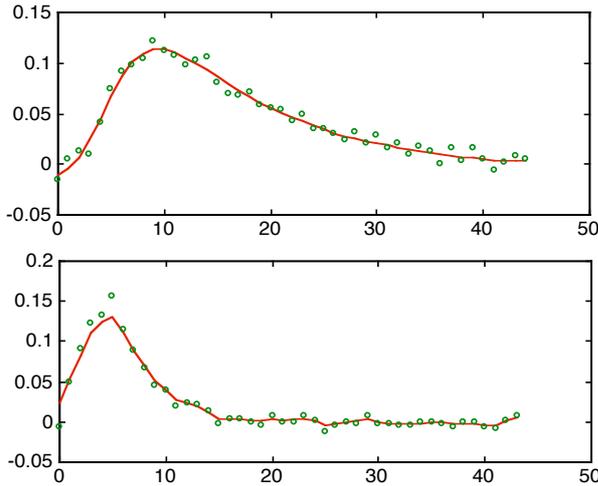


Figure 1. Estimation des entrées et sorties comparées aux mesures.

4. Amélioration de la méthode

Dans le cas de mesures très bruitées, on a constaté l'impuissance de la technique proposée à restituer des estimations du signal d'entrée "suffisamment filtrées" bien que vérifiant parfaitement les équations de

contraintes. La figure (2) montre une situation de ce type ; nous avons utilisé l'exemple précédent mais avec des bruits de mesure beaucoup plus importants. On constate sur la figure (2) un filtrage médiocre du signal d'entrée alors que le signal de sortie ne présente pas de perturbations excessives.

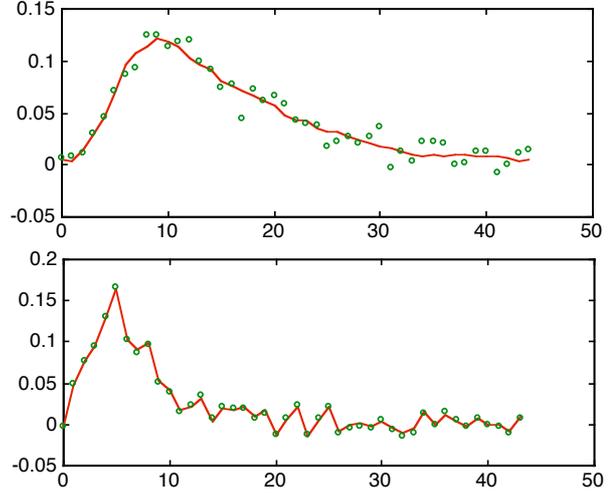


Figure 2. Estimation des entrées et sorties comparées aux mesures.

On propose dans ce cas d'introduire une contrainte supplémentaire ayant un rôle de régularisation ; de façon intuitive, au vu des résultats de la figure (2), on impose qu'entre deux pas d'échantillonnage l'entrée estimée aie des variations d'amplitude limitée. La quantité suivante :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{x}(k+1) - \hat{x}(k))^2 \quad (11)$$

représente la somme des carrés des variations de l'entrée estimée. Le problème d'estimation est alors modifié en minimisant le critère :

$$\Phi_m = \Phi + p\varphi \quad (12)$$

sous la contrainte (3). Le paramètre p permet de donner "plus ou moins" d'importance à l'effet de filtrage des estimations de l'entrée. Son réglage est laissé à la discrétion de l'utilisateur. Comme précédemment, une formulation vectorielle est proposée. Pour cela, on définit la matrice C :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire $\varphi = \|C\hat{Z}\|^2$. Le lecteur pourra établir les conditions d'optimalité du Lagrangien associé au problème d'optimisation :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{Z}} = \hat{Z} - Z + pC^T C \hat{Z} + M^T(\theta)\lambda = 0 \quad (13a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M(\theta)\hat{Z} = 0 \quad (13b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda^T \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta} \hat{Z} = 0 \quad (13c)$$

Le principe de résolution est le même que précédemment. On résout les équations (13a) et (13b) :

$$\lambda = (MQM^T)^{-1}MQZ$$

$$\hat{Z} = Q(I_{2N-1} - M^T(\theta)(M(\theta)QM^T(\theta))^{-1}M(\theta)Q)Z_{av}$$

ec : $Q = (I + pC^T C)^{-1}$

Les valeurs de θ sont obtenues en résolvant de façon itérative les équations (13c) comme cela a été indiqué précédemment. Pour illustrer les performances de la méthode proposée, les données de l'exemple précédent sont réutilisées. Le poids attribué au critère de filtrage est $p = 1$. La figure 3 met bien en évidence l'effet de filtre des estimations.

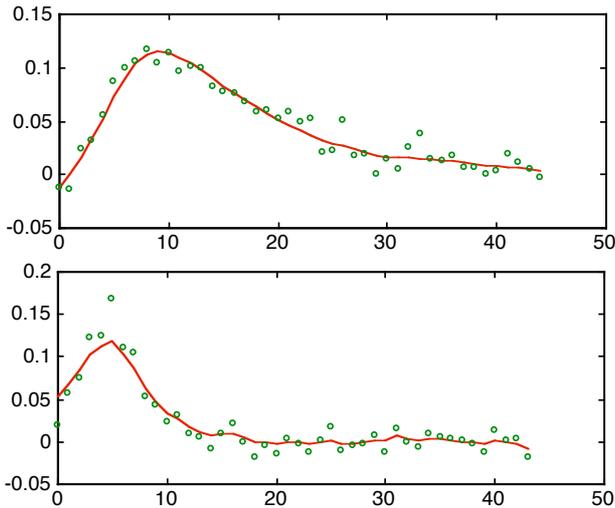


Figure 3. Estimation des entrée et sortie comparaison avec les mesures.

5. Conclusion

On a présenté une technique d'estimation des paramètres d'un modèle ARX dans le cas où les signaux d'entrée et de sortie sont soumis à des erreurs de mesure. La technique utilise simultanément une estimation des paramètres et des variables d'entrée et de sortie ; le volume des calculs est limité compte tenu du fait que l'estimations des variables utilise une procédure analytique et que les seuls les paramètres sont estimées de façon itérative. Il est possible d'étendre cette technique à un traitement en ligne comme cela est proposé dans [8] et [12] pour le cas de l'estimation d'état.

Références

- [1] V. Charpentier, L.J. Chang, G.M. Schwenzler, M.C. Bardin. An on-line data reconciliation system for crude and vacuum units. NPRA Computer Conference, Houston, 1991.
- [2] S. Bousghiri, F. Kratz, J. Ragot., Comparison of the data reconciliation and the finite memory observer at the inverted pendulum. Safeprocess'94, IFAC/IMACS Symposium, 1994.
- [3] H. Cox. On the estimation of state variables and parameters for noisy dynamic systems. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-9, p.5-12, 1964.
- [4] H. El Sherief, N.K. Sinha. Determination of the structure of a system. IEEE Trans. on systems, man and cybernetic, 12 (5), p. 568-673, 1982.
- [5] T.W. Karjala, D.M. Himmelblau. Dynamic rectification of data via recurrent neural nets and the extended Kalman filter. AIChE Journal, 42 (8), p. 2225-2239, 1996.
- [6] M.J. Liebman, T.F. Edgar, L.S. Lasdon. Efficient data reconciliation and estimation for dynamic process using non linear programming techniques. Computer Chem. Eng., 16, p. 963, 1992.
- [7] S. Makni, D. Hodouin, C. Bazin. A recursive imbalance method incorporating a model of flowrate dynamics for on line material balance. Minerals Engineering, 8 (7), p. 753-766, 1995.
- [8] K.R. Muske, J.B. Rawlings, J.H. Lee. Receding horizon recursive state estimation. Proceeding of the American Control Conference, p.900, 1993.
- [9] G. Nicolao, G. Sparacino, C. Cobelli. Non-parametric input estimation in physiological systems : problems, methods and case studies. Automatica, 33 (5), p. 851-870, 1997.
- [10] J. Ragot., D. Maquin., D. Sauter. Data validation using orthogonal filters. IEE Proceedings D, control theory and applications, vol. 139, n° 1, p. 47-52, 1992.
- [11] J. Ragot, M. Darouach, D. Maquin., G. Bloch. Validation de données par équilibrage de bilan. Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, HERMES, juin 1990.
- [12] D.G. Robertson, J.H. Lee, J.B. Rawlings. A moving horizon-based approach for least-squares estimation. AIChE Journal, 42 (8), p. 2209-2224, 1996.
- [13] D.E. Simson, M.G. Everett, V.R. Voller. Reducing the number of unknown in a constrained minimisation problem - an application to material balance. Applied Mathematical Modelling, 12, p. 204-211, 1988.