

Fault Detection using a Robust Principal Component Analysis

Mohamed Faouzi HARKAT, Gilles MOUROT et **José Ragot**

Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL)
Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CNRS)
2, avenue de la forêt de Haye, 54 516 Vandœuvre les Nancy, France

CIFA 2010

Conférence Internationale Francophone d'Automatique



Nancy, France
2-4 juin 2010

- 1 Rappel historique
- 2 Principes de l'Analyse en Composantes Principales
- 3 Influence des valeurs aberrantes et robustesse
- 4 Exemple numérique : mesures avec valeurs aberrantes
- 5 Application au diagnostic
- 6 Conclusion

1. L'ACP ?

- L'ACP a été « inventée » en 1901 par Karl Pearson^a. Actuellement, l'ACP est utilisée comme outil d'exploration et d'analyse de données ainsi que pour la conception de modèles.



- L'ACP est basée sur une transformation de l'espace de représentation des données, le nouvel espace étant de dimension inférieure à celle de l'espace initial.
- Selon les domaines d'application, l'ACP est aussi connue sous le nom de transformation de Karhunen-Loève, de transformation de Hotelling ou encore de décomposition orthogonale.
- L'ACP met en œuvre une **décomposition en valeurs et vecteurs propres** de la matrice de covariance des données ou encore une décomposition en valeurs singulières de la matrice des données.

a. Pearson, K. (1901). On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space. Philosophical Magazine 2 (6) : 559-572. <http://stat.smmu.edu.cn/history/pearson1901.pdf>

Principes de l'Analyse en Composantes Principales

2. Principe de l'Analyse en Composantes Principales

- On dispose d'une matrice de données $X \in \mathcal{R}^{N \times n}$, de vecteurs lignes x_i^T , qui rassemble les N mesures effectuées sur les n variables du système. Critère de réduction de dimension :

$$\phi(p) = \sum_{i=1}^N \|x_i^T - \pi x_i^T\|^2, \quad \pi = pp^T$$

- Evaluer la matrice de covariance expérimentale des données :

$$\mathcal{S} = X^T \left(I - \frac{UU^T}{U^T U} \right) X$$

U , le vecteur de dimension N dont toutes les composantes sont égales à 1, permettant de centrer les données.

- Les directions p_i , $i = 1..n$ sont les vecteurs propres de Σ . Il convient donc de résoudre l'équation :

$$\Sigma P = P \Lambda$$

$P \in \mathcal{R}^{n.n}$ étant la matrice des vecteurs propres p_i de Σ et $\Lambda \in \mathcal{R}^{n.n}$ celle, diagonale, de ses valeurs propres λ_i .

- On peut également montrer la décomposition suivante :

$$X = TP^T$$

$$T = XP$$

2. Principe de la réduction de dimension

- Définition

$$\begin{aligned} X &= TP^T, & T &= (t_1 \ \dots \ t_m) \in \mathcal{R}^{N \times m} : \text{composantes principales} \\ T &= XP, & P &= (p_1 \ \dots \ p_m) \in \mathcal{R}^{m \times m} : \text{vecteurs propres} \\ \Sigma &= P\Lambda P^T, & \Lambda &= \text{diag}(\lambda_1 \ \dots \ \lambda_m) \in \mathcal{R}^{m \times m} : \text{valeurs propres} \end{aligned}$$

- Décomposition de la matrice de variance-covariance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^{(\ell)} & 0 \\ 0 & \Lambda^{(m-\ell)} \end{pmatrix} \quad P = (P^{(\ell)} \mid P^{(m-\ell)}) \quad T = (T^{(\ell)} \mid T^{(m-\ell)})$$

$$X = \hat{X} + \check{X}$$

$$\hat{X} = XC^{(\ell)}$$

$$C^{(\ell)} = P^{(\ell)}P^{(\ell)T}$$

$$\check{X} = XC^{(m-\ell)}$$

$$C^{(m-\ell)} = I_m - P^{(\ell)}P^{(\ell)T}$$

2. Reconstruction d'une variable

- Reconstruction d'état

$$\begin{aligned}x &= (x_1 \quad \dots \quad x_{r-1} \quad \boxed{x_r} \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_m) \\ \hat{x}_r &= (x_1 \quad \dots \quad x_{r-1} \quad \boxed{z_r} \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_m) \\ c_r^T &= (c_{r,1} \quad \dots \quad c_{r,r-1} \quad c_{r,r} \quad c_{r,r+1} \quad \dots \quad c_{r,m})\end{aligned}$$

$$z_r = \frac{[c_{-r}^T \quad 0 \quad c_{+r}^T]}{1 - c_{rr}} x$$

- Un formalisme plus général de reconstruction

$$\begin{aligned}\hat{x}_r^{(\ell)} &= G_r^{(\ell)} x \\ G_r^{(\ell)} &= \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0_{r-1} \\ c_{-r}^T & 0 & c_{+r}^T \\ 0_{r-1} & 0 & I_r \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Il est possible (sous condition) de reconstruire n'importe quelle composante de x en utilisant les $(m - 1)$ composantes restantes.

2. Sommaire des résultats de l'ACP pour le diagnostic

- Projection des données dans le sous-espace résiduel

$$\tilde{x} = (I - C^{(\ell)}) x$$

- Reconstruction des données

$$\hat{x}_r^{(\ell)} = G_r^{(\ell)} x \quad r = 1..n$$

- Projection des reconstructions dans le sous-espace résiduel

$$\tilde{x}_r^{(\ell)} = (I - C^{(\ell)}) \hat{x}_r^{(\ell)} = P_r^{(\ell)} x \quad r = 1..n$$

$$P_r^{(\ell)} = I - C^{(\ell)} - \frac{(I - C^{(\ell)}) \xi_r \xi_r^T (I - C^{(\ell)})}{1 - \xi_r^T C^{(\ell)} \xi_r}$$

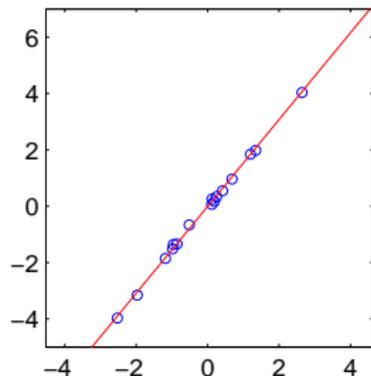
- Détection de défauts

analyse de \tilde{x} , $\hat{x}_r^{(\ell)}$ et $\tilde{x}_r^{(\ell)}$

3. Influence des valeurs aberrantes

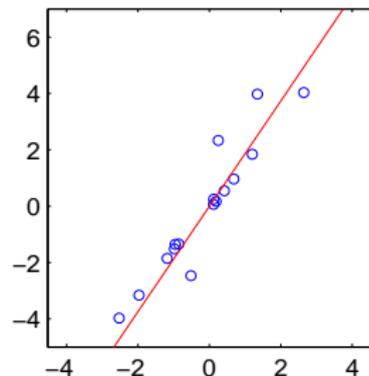
- ACP sur des données sans valeur aberrante

Pente estimée : 1.502



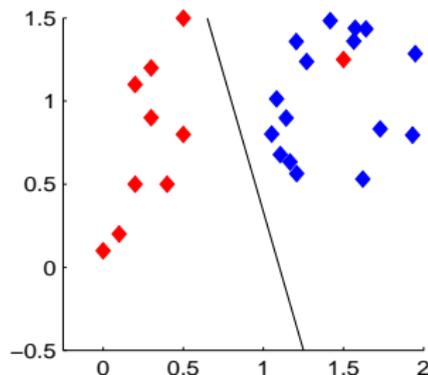
- ACP sur des données avec valeurs aberrantes

Pente estimée : 1.834



3. ACP robuste aux valeurs aberrantes

- ROBPCA : ACP robuste



- Première idée : distributions contaminées

$$p(\varepsilon) = \mu \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) + (1 - \mu) \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$$

- Deuxième idée : matrice de covariance robuste

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w(i,j) (\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j)) (\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j))^T}{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w(i,j)}$$

où les poids $w(i,j)$ sont définis par :

$$w(i,j) = \exp\left(-\frac{\beta}{2} \|\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j)\|_{\Sigma^{-1}}^2\right)$$

3. Distribution contaminée

- L'approche proposée repose sur la prise en compte de deux type d'erreurs dans les données.
- Premier type : erreurs de faibles amplitudes provenant de variations à caractère aléatoire du comportement des capteurs. On les considère comme des réalisations de variables aléatoire de distribution gaussienne.
- Deuxième type d'erreur : relatif aux valeurs accidentelles, se manifestant sous forme de données dites aberrantes ; elles peuvent être dues à des défauts passagers des capteurs. Ces valeurs aberrantes, généralement de forte amplitude, peuvent aussi être considérées comme des réalisations de variables aléatoires de distribution gaussienne.
- Les deux distributions seront caractérisées par des variances différentes. De façon globale, pour représenter ces erreurs, on propose d'utiliser une distribution dite contaminée correspondant au mélange, avec des poids μ et $1 - \mu$, des distributions des deux types d'erreur :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_1}\right)^2\right) \\ f_2(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_2}\right)^2\right) \\ f(\varepsilon) = \mu f_1(\varepsilon) + (1 - \mu) f_2(\varepsilon) \end{array} \right.$$

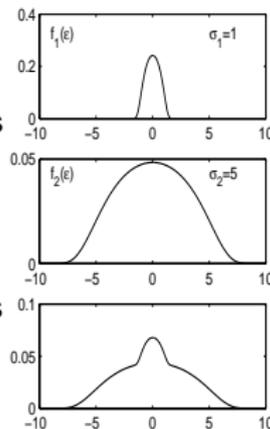


FIGURE: Distribution contaminée ($\mu = 0.1$)

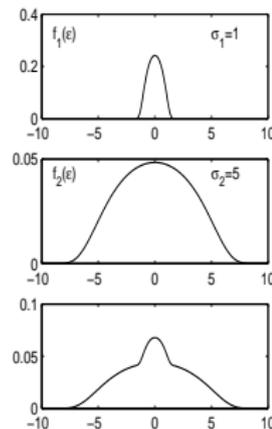
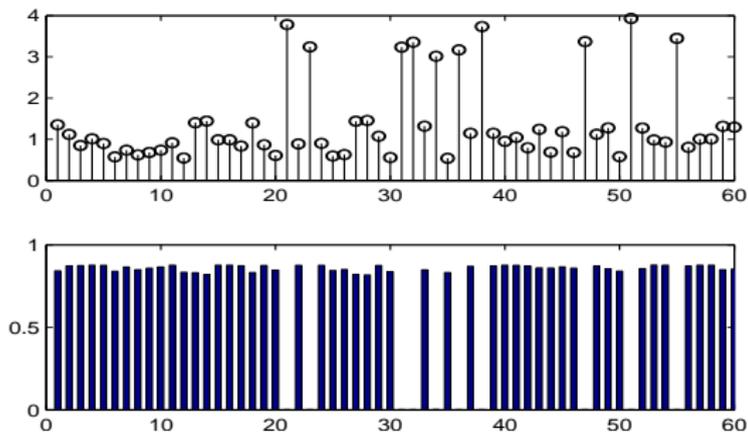


FIGURE: Distribution contaminée ($\mu = 0.5$)

3. Estimation robuste : un exemple simple (moyenne et écart-type)



	Moyenne	Ecart-type
sans val.aberr.	0.964	0.279
avec val. aberr. standard	1.380	0.964
avec val. aberr. robuste	0.970	0.274

3. ACP robuste

- Rappel : projection des données

$$t = Xu, \quad t \in \mathcal{R}^N \quad (1)$$

- L'erreur de reconstruction des données à partir de cet axe est :

$$\tilde{X} = X(I - pp^T) \quad (2)$$

- Hypothèse

$$\tilde{X} \sim \mu \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 I) + (1 - \mu) \mathcal{N}(0, \sigma_2^2 I) \quad (3)$$

- L'erreur de reconstruction relative à l'observation de rang k , définie à partir de (2) :

$$\tilde{x}(k) = (I - pp^T)x(k) \quad (4)$$

est considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire de densité de probabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\tilde{x}(k)) = \mu f_1(\tilde{x}(k)) + (1 - \mu) f_2(\tilde{x}(k)) \\ f_1(\tilde{x}(k)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sigma_1^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{\|\tilde{x}(k)\|^2}{2\sigma_1^2}\right) \\ f_2(\tilde{x}(k)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sigma_2^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{\|\tilde{x}(k)\|^2}{2\sigma_2^2}\right) \end{array} \right. \quad (5)$$

3. ACP robuste

- Afin d'estimer à partir des mesures la direction de projection p , on forme la fonction de log-vraisemblance de l'ensemble des erreurs de reconstruction, sous l'hypothèse d'indépendance statistique de ces erreurs :

$$\mathcal{V} = \sum_{k=1}^N \log f(\tilde{x}(k))$$

- La recherche du maximum de \mathcal{V} vis-à-vis de p conduit à :

$$(X^T W(p) X - \lambda I) p = 0$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} W(p) = \text{diag}(w(1) \dots w(N)) \\ w(k) = \frac{\mu \frac{f_1(\tilde{x}(k))}{\sigma_1^2} + (1-\mu) \frac{f_2(\tilde{x}(k))}{\sigma_2^2}}{\mu f_1(\tilde{x}(k)) + (1-\mu) f_2(\tilde{x}(k))} \\ \tilde{x}(k) = (I - pp^T)x(k) \end{array} \right.$$

3. ACP robuste

Comme la pondération W dépend implicitement de la direction p , la résolution est réalisée par une procédure itérative. Ainsi, une procédure dite à itération directe s'explique, en fonction de l'indice i d'itération, de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 \quad \text{Initialisation } i = 0, w^{(i)}(k) = 0 \\ E_2 \quad i \leftarrow i + 1 \quad \text{Solution à l'étape } i \\ \quad W(p^{(i)}) = \text{diag}(w^{(i-1)}(1) \dots w^{(i-1)}(N)) \\ \quad (X^T W(p^{(i)}) X - \lambda I) p^{(i)} = 0 \\ \\ \quad \tilde{x}^{(i)}(k) = (I - p^{(i)} p^{(i)T}) x(k) \\ \\ \quad w^{(i)}(k) = \frac{\mu \frac{f_1^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}(k))}{\sigma_1^2} + (1 - \mu) \frac{f_2^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}(k))}{\sigma_2^2}}{\mu f_1^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}(k)) + (1 - \mu) f_2^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}(k))} \\ \\ \quad f_1^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}(k)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{v}{2}} \sigma_1^v} \exp\left(-\frac{\|\tilde{x}^{(i)}(k)\|^2}{2\sigma_1^2}\right) \\ \\ \quad f_2^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}(k)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{v}{2}} \sigma_2^v} \exp\left(-\frac{\|\tilde{x}^{(i)}(k)\|^2}{2\sigma_2^2}\right) \\ E_3 \quad \text{test de convergence} \end{array} \right.$$

- A chaque itération, le vecteur p retenu correspond au vecteur propre de la matrice $XW(p^{(i)})X$ associé à la plus grande valeur propre de cette matrice.
- A la fin de cette procédure itérative, on dispose ainsi de la première composante principale déterminée de façon robuste vis-à-vis des valeurs aberrantes.
- Pour rechercher les directions principales suivantes, on propose d'utiliser la méthode classique de déflation qui consiste à soustraire progressivement de la matrice X initiale les informations expliquées par la direction principale qui vient d'être trouvée.

Ainsi à l'étape ℓ , notons $X^{(\ell)}$ la matrice X dont on a soustrait l'influence des directions propres précédentes. On a alors la mise à jour suivante :

$$X^{(\ell+1)} = X^{(\ell)} - Xp^{(\ell)}p^{(\ell T)}$$

Cette procédure de déflation est appliquée jusqu'à avoir extrait l'ensemble de l'information utile de la matrice des données X .

Exemple numérique : mesures avec valeurs aberrantes

4. Exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^*(k) \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ x_2^*(k) = -x_1^*(k) \\ x_3^*(k) = x_1^*(k) - x_2^*(k) \\ x_4^*(k) = x_1^*(k) - 3x_2^*(k) \\ x_5^*(k) = 0.5x_2^*(k) + x_3^*(k) \\ x_6^*(k) = x_1^*(k) - 4x_2^*(k) \\ x_7^*(k) = 0.2x_2^*(k) + x_3^*(k) \end{array} \right.$$

Modèle vrai							
1	1	0	0	0	0	0	
-1	1	1	0	0	0	0	
1	-3	0	-1	0	0	0	
0	0.5	1	0	-1	0	0	
1	-4	0	0	0	-1	0	
0	0.2	1	0	0	0	-1	

Modèle vrai normalisé							
1	0	0	0	0	0	0	-0.556
0	1	0	0	0	0	0	0.556
0	0	1	0	0	0	0	-1.111
0	0	0	1	0	0	0	-2.222
0	0	0	0	1	0	0	-0.833
0	0	0	0	0	1	0	-2.778

TABLE: Coefficients du modèle ayant généré les données

4. Exemple

- A chaque variable ainsi générée à été superposé un bruit issu de la réalisation d'une variable aléatoire à densité gaussienne :

$$x_i(k) = x_i^*(k) + b_i(k), \quad b_i(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

- De plus, des valeurs aberrantes (chacune d'amplitude arbitrairement égale à 2) ont été ajoutées à différentes variables (table 2 où la première ligne indique les variables corrompues, la deuxième ligne indiquant les instants où les valeurs aberrantes ont été appliquées).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
k	2, 10	3, 4	6	10, 19, 28	19	28	37

TABLE: Liste des variables corrompues par des valeurs aberrantes

4. Exemple

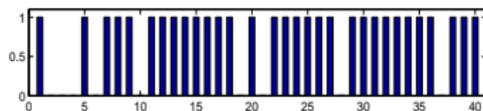


FIGURE: Poids estimés

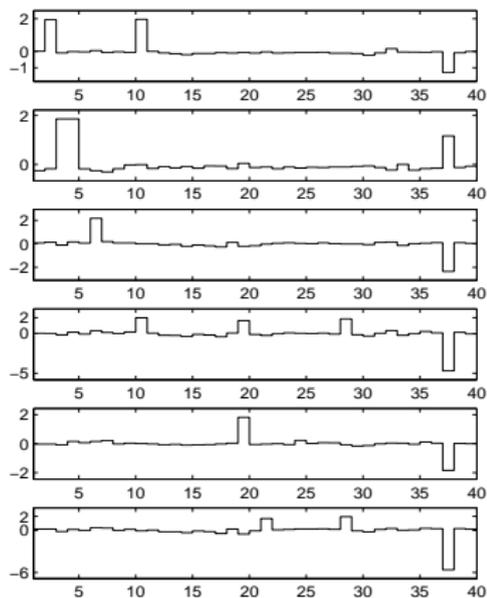


FIGURE: Projection des données

4. Exemple

Modèle vrai normalisé

$$\begin{cases} x_1 - 0.56 x_7 = 0 \\ x_2 + 0.56 x_7 = 0 \\ x_3 - 1.11 x_7 = 0 \\ x_4 - 2.22 x_7 = 0 \\ x_5 - 0.83 x_7 = 0 \\ x_6 - 2.78 x_7 = 0 \end{cases}$$

Modèle estimé de façon robuste

$$\begin{cases} x_1 - 0.57 x_7 = 0 \\ x_2 + 0.53 x_7 = 0 \\ x_3 - 1.11 x_7 = 0 \\ x_4 - 2.23 x_7 = 0 \\ x_5 - 0.83 x_7 = 0 \\ x_6 - 2.76 x_7 = 0 \end{cases}$$

Modèle estimé de façon non robuste

$$\begin{cases} x_1 - 0.61 x_7 = 0 \\ x_2 + 0.49 x_7 = 0 \\ x_3 - 0.98 x_7 = 0 \\ x_4 - 2.89 x_7 = 0 \\ x_5 - 1.04 x_7 = 0 \\ x_6 - 3.19 x_7 = 0 \end{cases}$$

Application au diagnostic

5. Application au diagnostic

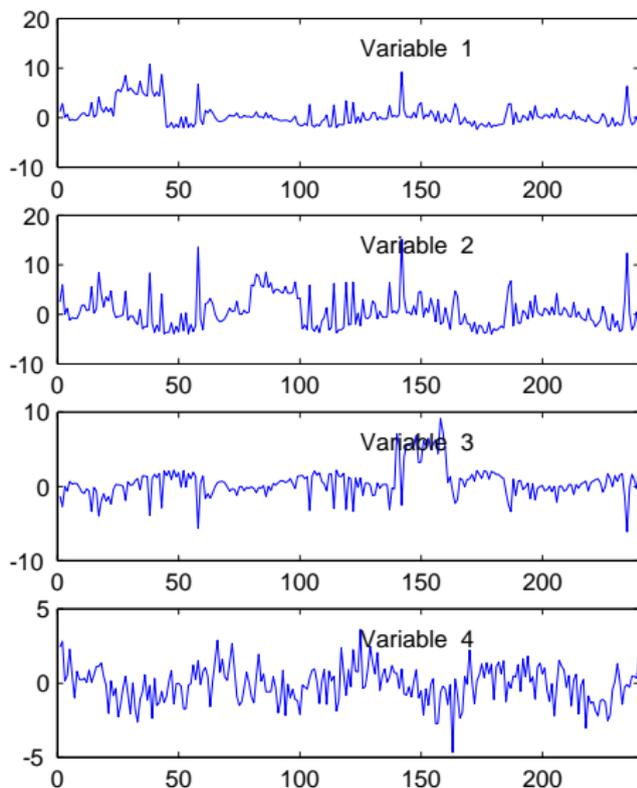
$$X = \begin{pmatrix} u_1 & y_{1,1} & y_{1,2} & e_1 \\ u_2 & y_{2,1} & y_{2,2} & e_2 \\ \dots & & & \\ u_N & y_{N,1} & y_{N,2} & e_N \end{pmatrix}$$

$$u_i = v_i^2 + 1 + \sin(0.1i), \quad v_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$e_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$y_{i,1} = au_j \quad a = 1$$

$$y_{i,2} = bu_j \quad b = -2$$



5. Application au diagnostic

	δu	δy_1	δy_2
r_{11}	0	0	0
r_{12}	0	X	X
r_{13}	0	X	X
r_{14}	0	X	X
r_{21}	X	0	X
r_{22}	0	0	0
r_{23}	X	0	X
r_{24}	X	0	X
r_{31}	X	X	0
r_{12}	X	X	0
r_{33}	0	0	0
r_{34}	X	X	0
r_{41}	X	X	X
r_{42}	X	X	X
r_{43}	X	X	X
r_{44}	0	0	0

Résidus r_{1i} obtenus en : reconstruisant les variables sans utiliser la variable 1 (u), calculant les résidus, puis en projetant les résidus dans l'espace résiduel

Résidus r_{2i} obtenus en : reconstruisant les variables sans utiliser la variable 2 (y_1), calculant les résidus, puis en projetant les résidus dans l'espace résiduel

Résidus r_{3i} obtenus en : reconstruisant les variables sans utiliser la variable 3 (y_2), calculant les résidus, puis en projetant les résidus dans l'espace résiduel

Résidus r_{4i} obtenus en : reconstruisant les variables sans utiliser la variable 4 (e), calculant les résidus, puis en projetant les résidus dans l'espace résiduel

TABLE: Faults signature

5. Application au diagnostic

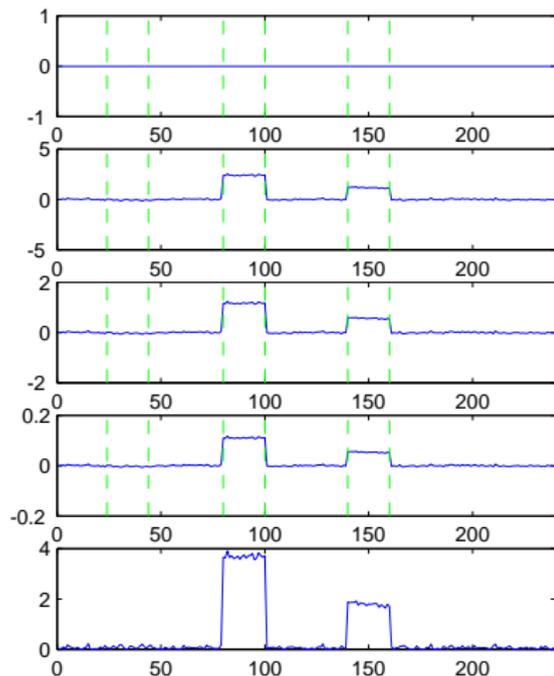


FIGURE: ACP robuste. Projection des erreurs de reconstruction sans utiliser la variable 1

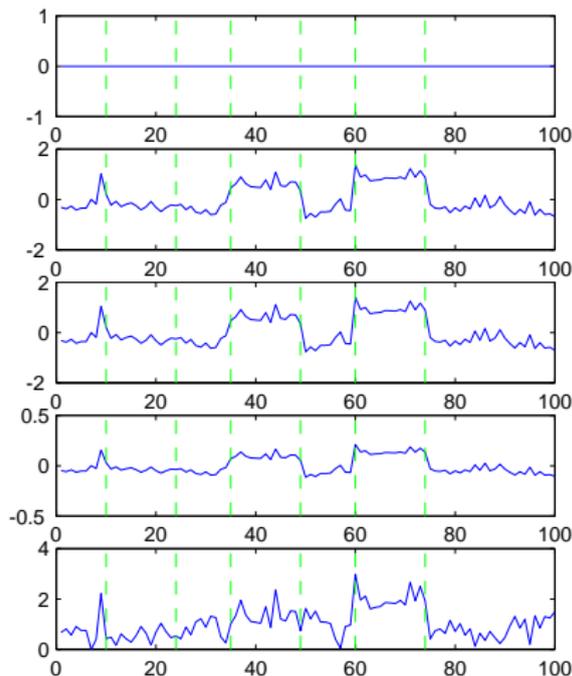


FIGURE: ACP ordinaire. Projection des erreurs de reconstruction sans utiliser la variable 1

5. Application au diagnostic

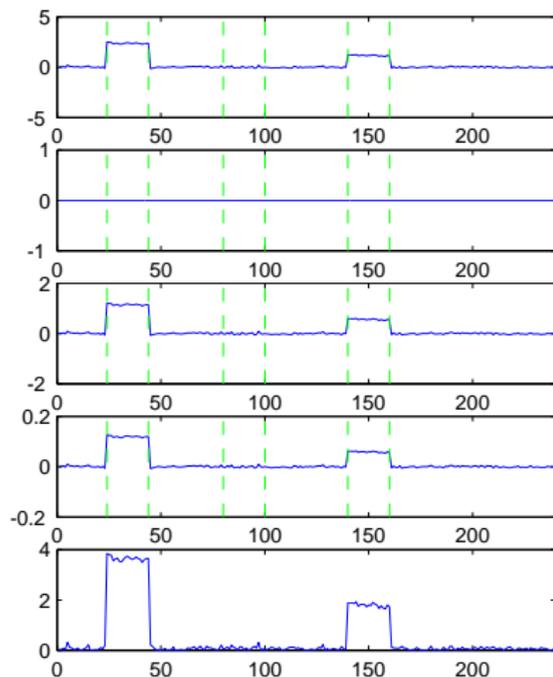


FIGURE: ACP robuste. Projection des erreurs de reconstruction sans utiliser la variable 2

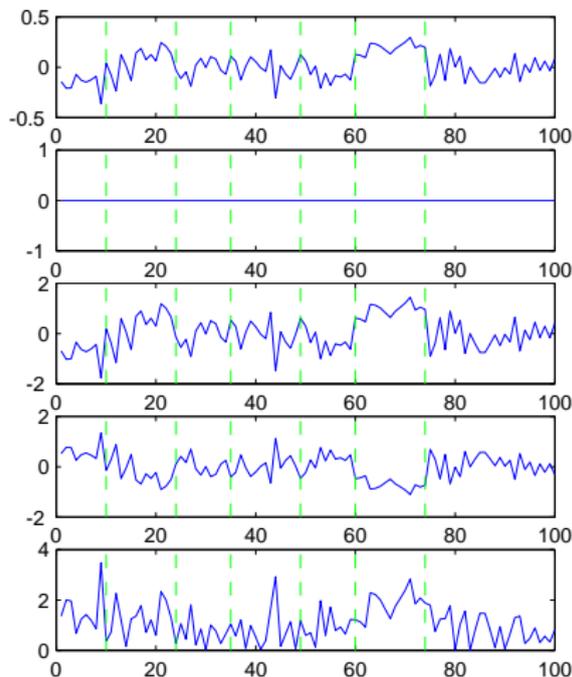


FIGURE: ACP ordinaire. Projection des erreurs de reconstruction sans utiliser la variable 2

5. Application au diagnostic

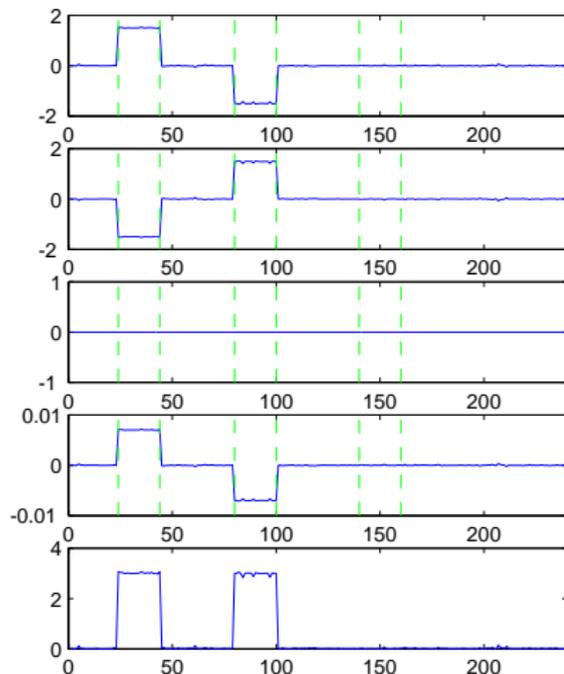


FIGURE: ACP robuste. Projection des erreurs de reconstruction sans utiliser la variable 3

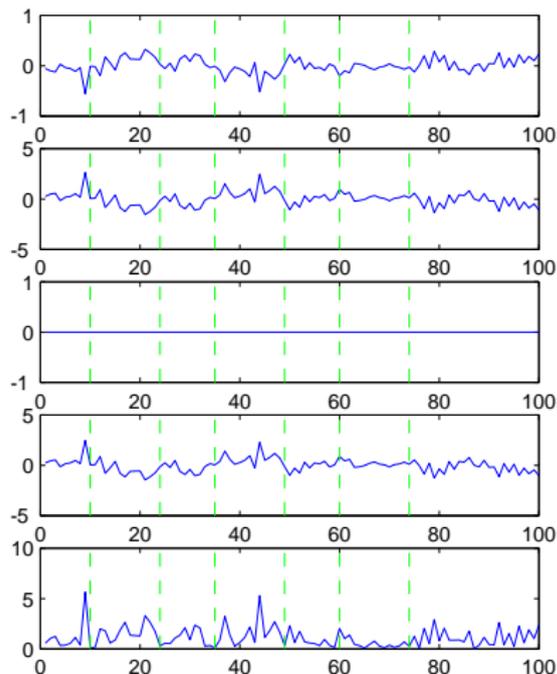


FIGURE: ACP ordinaire. Projection des erreurs de reconstruction sans utiliser la variable 3

Conclusion

Perspectives de développement de l'ACP

- Robustesse vis-à-vis de dérives
- Systèmes dynamiques
- Systèmes non linéaires
- Liens avec d'autres techniques : sous-espaces