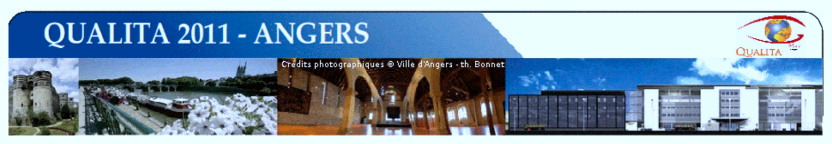

Application de l'ACP par intervalles au diagnostic

José Ragot, Gilles Mourot,
Kamel Benothman, Anissa Ben Aicha

Centre de Recherche en Automatique de Nancy

LARA Automatique - ENIT

Points principaux

Objectifs de l'étude

- Supervision de systèmes
- Détection de défauts (FD)
- Isolation de défauts (FI)
- Caractérisation de défauts
- Garantie du diagnostic

Hypothèses de travail

- Systèmes linéaires
- Pas de modèle a priori
- Erreurs de mesures bornées

Mesure intervalle

$$x = x^* + \varepsilon, \qquad |\, \varepsilon \,| \leq \delta$$

$$x \in [x_{min} \quad x_{max}]$$

Plan

Modèle ACP

- ▷ Les erreurs de mesure peuvent être assimilées à des variables bornées
- ▷ Ce travail propose une nouvelle méthode d'extension de l'ACP à des données de type intervalle.
- ▷ Le modèle ainsi obtenu est un modèle ACP par intervalle. L'application de l'ACP intervalle au diagnostic sera également présentée.
- ▷ Cette nouvelle méthode a été validée par un exemple de simulation. Des essais sont en cours sur un parc de pompes.

Modèle ACP intervalle

- Vecteur de mesures à l'instant k

$$\mathbf{x}^*(k) = (x_1^*(k)\; x_2^*(k)\; \ldots\; x_m^*(k))^\mathsf{T}$$

- Matrice des données

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^* &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}^*(1) & \cdots & \mathbf{x}^*(N) \end{pmatrix}^\mathsf{T} \\ &= \begin{pmatrix} x_1^*(1) & x_2^*(1) & \cdots & x_m^*(1) \\ x_1^*(2) & x_2^*(2) & \cdot & x_m^*(2) \\ \cdots & & & \\ x_1^*(N) & x_2^*(N) & \cdot & x_m^*(N) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Modèle *ACP*
  Valeurs et vecteurs propres de la matrice $X^{*T}X^*$

- Influence des erreurs de mesure
  Modification des vecteurs propres
  Analyse de sensibilité du modèle ACP

Modèle ACP intervalle

- Matrice de mesures

$$\mathbf{X}^*$$

- Matrice de variance-covariance

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{X}^{*T}\mathbf{X}^*$$

- Matrice de mesures perturbée

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* + \delta\mathbf{X}$$

- Nouvelle matrice de variance-covariance

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A}$$

où $\delta\mathbf{A} = \mathbf{X}^{*T}\delta\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}^T\mathbf{X}^* + \delta\mathbf{X}^T\delta\mathbf{X}$.

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}^* v_i^* = \lambda_i^* v_i^* \\ (\mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A})(v_i^* + \delta v_i) = (\lambda_i^* + \delta\lambda_i)(v_i^* + \delta v_i) \end{array}$$

Modèle ACP intervalle

- On peut montrer que :

$$\begin{pmatrix} \delta v_i \\ \delta \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* - \lambda_i^* I & -v_i^* \\ {v_i^*}^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\delta \mathbf{A}.v_i^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

- On réitère cette évaluation pour N réalisations $\delta \mathbf{A}(k), k = 1, \ldots, N$
- On génére ainsi un ensemble de valeurs $\delta v_i(k)$ et $\delta \lambda_i(k)$.
- On en déduit les bornes des valeurs et vecteurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_{i\,\min} = \inf_k \left(\lambda_i^* + \delta \lambda_i(k)\right) \\ \lambda_{i\,\max} = \sup_k \left(\lambda_i^* + \delta \lambda_i(k)\right) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\begin{cases} v_{i,j\,\min} = \inf_k \left(v_{i,j}^* + \delta v_{i,j}(k)\right) \\ v_{i,j\,\max} = \sup_k \left(v_{i,j}^* + \delta v_{i,j}(k)\right) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m$$

- Définition

$$
\begin{aligned}
X &= TP^T, \qquad & T &= \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} \in \mathscr{R}^{N\times m} : \text{composantes principales}\\
T &= XP, \qquad & P &= \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix} \in \mathscr{R}^{m\times m} : \text{vecteurs propres}\\
\Sigma &= P\Lambda P^T, \qquad & \Lambda &= diag(\lambda_1 \dots \lambda_m) \in \mathscr{R}^{m\times m} : \text{valeurs propres}
\end{aligned}
$$

- Décomposition de la matrice de variance-covariance

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^{(\ell)} & 0 \\ 0 & \Lambda^{(m-\ell)} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} P^{(\ell)} \mid P^{(m-\ell)} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} T^{(\ell)} \mid T^{(m-\ell)} \end{pmatrix}
$$

$$
\boxed{X = \hat{X} + \tilde{X}}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= XC^{(\ell)} \qquad & C^{(\ell)} &= P^{(\ell)} P^{(\ell)T}\\
\tilde{X} &= XC^{(m-\ell)} \qquad & C^{(m-\ell)} &= I_m - P^{(\ell)} P^{(\ell)T}
\end{aligned}
$$

Diagnostic. Projection des mesures

- Le diagnostic de fonctionnement de système comporte deux phases complémentaires : la détection et la localisation de défauts.

- Considérons, à l'instant k, un vecteur de mesure $x(k)$. Comment savoir si cette mesure peut être considérée comme valide ou au contraire entachée de valeurs aberrantes ?

- Comment détecter et localiser la composante aberrante de la mesure ?

- La projection du vecteur des mesures $x(k)$ dans les deux sous-espaces est définie par :

$$[\hat{x}(k)] = [C_\ell]\,\mathbf{x}(k)$$
$$[\tilde{x}(k)] = (I - [C_\ell])\,\mathbf{x}(k)$$

L'indice ℓ rappelle que la reconstruction est faite à partir de ℓ composantes principales.

- Analyse des résidus $[\tilde{x}(k)]$

Diagnostic. Reconstruction de variables

- Reconstruction de la variable de rang i

$$[\hat{x}_i(k)] = \frac{\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{m} [c_{ij}]\, x_j(k)}{1 - [c_{ii}]}$$

- Vecteur issu de la reconstruction

$$[\hat{x}_R^{(i)}(k)] = \begin{pmatrix} x_1(k) & \dots & x_{i-1}(k) & [\hat{x}_i(k)] & x_{i+1}(k) & \dots & x_m(k) \end{pmatrix}$$

$$\left[\hat{x}_R^{(i)}(k)\right] = \left[G_\ell^{(i)}\right] x(k)$$

$$\left[G_\ell^{(i)}\right] = I + \frac{\xi_i \xi_i^T}{1 - \xi_i^T [\hat{C}_\ell] \xi_i} ([\hat{C}_\ell] - I)$$

- Analyse des résidus $\left[\tilde{x}^{(i)}(k)\right] = x(k) - \left[\hat{x}_R^{(i)}(k)\right]$

Diagnostic. projection des reconstructions

- Projection des reconstructions dans l'espace résiduel :

$$\left[\tilde{x}_R^{(i)}(k)\right] = (I - [C_\ell])\left[\hat{x}_R^{(i)}(k)\right]$$

$$\left[\tilde{x}_R^{(i)}(k)\right] = [P_\ell]\ x(k) \qquad [P_\ell] = (I - [C_\ell])[G_\ell]$$

- Expression d'une mesure en fonction des grandeurs vraies x^*, des bruits de mesure ε et d'un défaut f intervenant dans une direction ξ_f :

$$x(k) = x^*(k) + \varepsilon(k) + \xi_f f(k)$$

- Projection ou résidu :

$$\begin{aligned}\left[\tilde{x}_R^{(i)}(k)\right] &= [P_\ell](x^*(k) + \varepsilon(k) + \xi_f f(k)) \\ &= [P_\ell]\varepsilon(k) + [P_\ell]\xi_f f(k)\end{aligned}$$

Diagnostic

En résumé : 3 sources d'information pour le diagnostic

- Projection des données dans l'espace résiduel
- Reconstruction des données
- Projection des reconstructions dans l'espace résiduel

Application

On considère un système statique régi par 7 variables x_j; $j = \{1, \ldots, 7\}$ et décrit aux différents instants k par les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1^*(k) = 0.4v_1(k) + \sin(k/N), & v_1(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_2^*(k) = v_2(k) - 2\cos(k/4), & v_2(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_3^*(k) = 0.2v_3(k) - 1, & v_3(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_4^*(k) = x_1^*(k) + x_2^*(k) & \\ x_5^*(k) = x_2^*(k) + x_3^*(k) & \\ x_6^*(k) = 2x_1^*(k) + x_3^*(k) & \\ x_7^*(k) = x_4^*(k) + x_5^*(k) & \end{array}\right. \tag{1}$$

Données générées à partir de 3 variables issus de 3 lois normales, fait apparaître quatre relations de redondance analytique linéaires entre les variables $x_i^*, i = 1, \ldots, 7$.

Des variations $\delta \mathbf{X}$, réalisations de variables aléatoires centrées de façon à simuler la présence de bruits de mesure.

Système simulé sur une fenêtre de $N = 100$ observations. L'évolution des mesures des variables $x_j, j = 1, \ldots, 7$, en présence de défauts, est illustrée sur la figure.

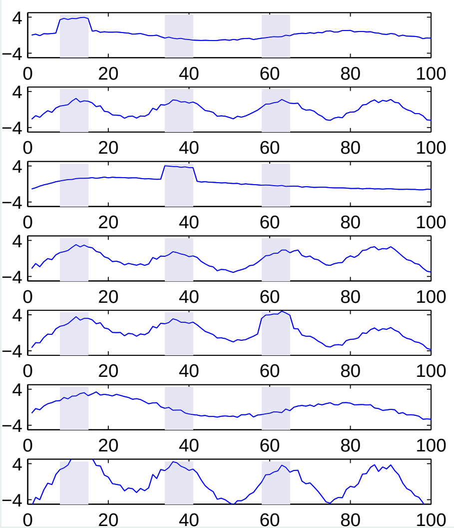

FIGURE: Variables en présence de défaut

Application

L'examen conjoint de ces relations et des vecteurs propres intervalle de la table 1 montrent la cohérence des estimations de ces vecteurs propres.

0	0	0	1	$[\ \ 0.95 \quad 1.06]$	$[-0.02 \quad 0.03]$	$[-1.03 \quad -0.97]$
0	0	1	0	$[-1.37 \quad -1.29]$	$[-0.35 \quad -0.32]$	$[\ \ 0.65 \quad 0.69]$
0	1	0	0	$[\ \ 0.30 \quad 0.37]$	$[\ \ 0.32 \quad 0.35]$	$[-0.68 \quad -0.65]$
1	0	0	0	$[\ \ 0.64 \quad 0.68]$	$[-0.34 \quad -0.32]$	$[-0.34 \quad -0.32]$

TABLE: Matrice des 4 derniers vecteurs propres intervalle

Application

Défauts ajoutés à la x_1 des instants 8 à 15 (zone Z_1), à x_3 des instants 34 à 41 (zone Z_2) et à x_5 des instants 58 à 65 (zone Z_3).

Vecteurs résidus $[\tilde{x}_R^{(1)}(k)]$ sans utiliser la première variable.

Vecteurs résidus $[\tilde{x}_R^{(2)}(k)]$ sans utiliser la deuxième variable.

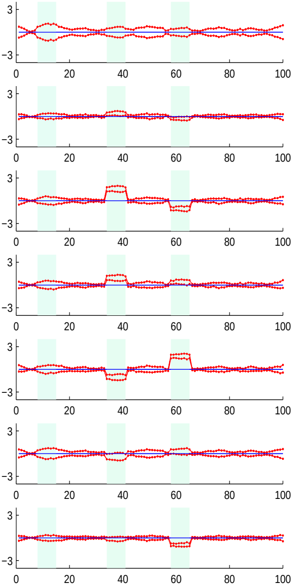

FIGURE: Résidus $[\tilde{x}_R^{(1)}]$

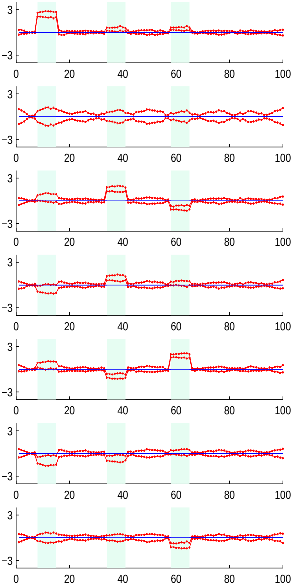

FIGURE: Résidus $[\tilde{x}_R^{(2)}]$

Vecteurs résidus $[\tilde{x}_R^{(1)}(k)]$ sans utiliser la troisième variable.

Vecteurs résidus $[\tilde{x}_R^{(2)}(k)]$ sans utiliser la quatrième variable.

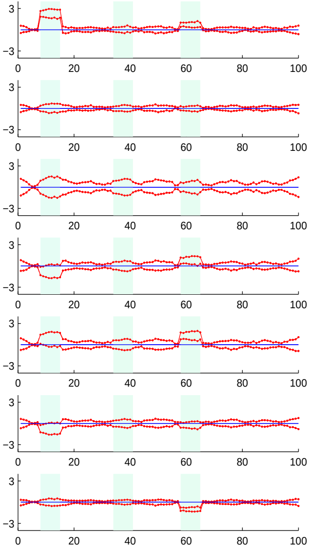

FIGURE: Résidus $[\tilde{x}_R^{(3)}]$

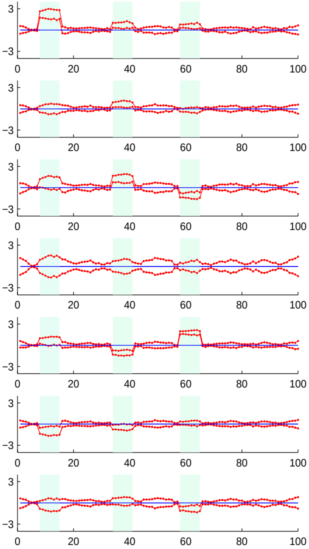

FIGURE: Résidus $[\tilde{x}_R(4)]$

Application

	$\tilde{x}_R^{(1)}$							$\tilde{x}_R^{(2)}$							$\tilde{x}_R^{(3)}$						
δx_1	0	0	0	0	0	0	0	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
δx_2	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	0	0	0	0	0	0	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
δx_3	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	0	0	0	0	0	0
δx_4	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
δx_5	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
δx_6	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
δx_7	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

TABLE: Signatures théoriques des défauts

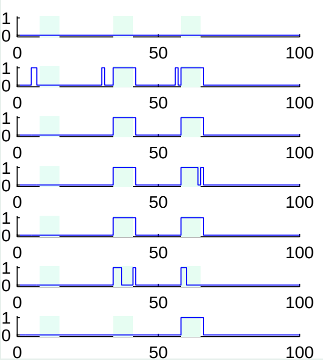

FIGURE: Indicateurs de défauts sans utiliser la variable 1

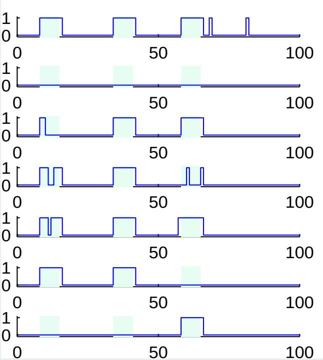

FIGURE: Indicateurs de défauts sans utiliser la variable 2

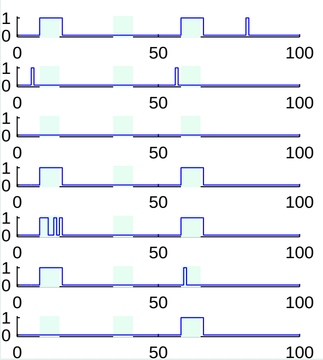

FIGURE: Indicateurs de défauts sans utiliser la variable 3

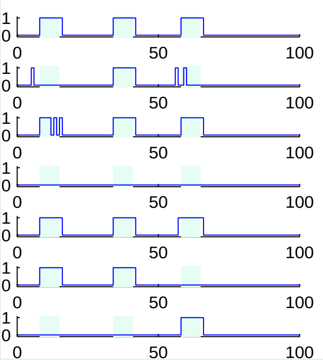

FIGURE: Indicateurs de défauts sans utiliser la variable 4

Application

Zone Z_1	0	0	0	0	0	0	0	×	0	×	×	×	×	0	×	0	0	×	×	×	0
Zone Z_2	0	×	×	×	×	×	0	×	0	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0	0
Zone Z_3	0	×	×	×	×	0	×	×	0	×	×	×	0	×	×	0	0	×	×	0	×

TABLE: Signatures expérimentales des défauts

	$\tilde{x}_R^{(1)}$							$\tilde{x}_R^{(2)}$							$\tilde{x}_R^{(3)}$						
δx_1	0	0	0	0	0	0	0	×	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×
δx_2	0	×	×	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0	×	×	0	×	×	×	×
δx_3	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
δx_4	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×
δx_5	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×
δx_6	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×
δx_7	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×

TABLE: Signatures théoriques des défauts

Application

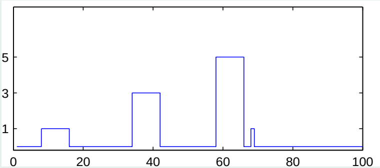

FIGURE: Indicateurs de localisation de défauts

Conclusion

- Prise en compte de mesures sous forme intervalle
- Pas d'hypothèse de loi de distribution des erreurs de mesure
- Modèle ACP sous forme intervalle

Mesdames et Messieurs, merci pour votre attention !