

Application de l'ACP par intervalles au diagnostic

José RAGOT[†], Gilles MOUROT[†], Anissa BEN AICHA^{*} et Kamel BENOTHMAN[‡]

^{*}ATSI - ENIM. Rue Ibn Eljazzar, 5000 Monastir, Email : ben.aicha_anissa@yahoo.fr

[†]CRAN, UMR 7039, Nancy Université, CNRS. 2, avenue de la Forêt de Haye. 54516 Vandœuvre-Lès Nancy,

Email : {gilles.mourot.jose.ragot}@ensem.inpl-nancy.fr

[‡]LARA Automatique - ENIT. P 37, le Belvédère, 1002 Tunis, Email : kamel.benothman@yahoo.fr

Résumé—Ce travail propose une nouvelle méthode d'extension de l'ACP à des données de type intervalle. Le modèle ainsi obtenu est un modèle ACP par intervalle. L'application de l'ACP intervalle au diagnostic sera également présentée. Cette nouvelle méthode a été validée par un exemple de simulation.

Index Terms—valeurs propres intervalles, vecteurs propres intervalles, modèle ACP intervalle, génération de résidus, détection de défauts, reconstruction de variables.

I. INTRODUCTION

L'analyse en composantes principales (ACP) est une technique largement utilisée pour la détection et la localisation de défauts de capteurs [?], [?], [?], [?] et plus généralement pour la détection d'informations aberrantes. L'ACP permet d'élaborer implicitement un modèle du système et de révéler des relations linéaires entre ses variables sans les formuler explicitement ; ce modèle peut ensuite être utilisé afin de surveiller le comportement du système ou de ses composants [?].

D'un point de vue technique, l'identification d'un modèle ACP consiste à estimer sa structure et ses paramètres par une décomposition en valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance des données. Généralement, l'analyse des valeurs propres révèle le nombre de composantes principales à retenir c'est-à-dire finalement la dimension du nouvel espace de représentation des données.

Une fois le modèle ACP obtenu à partir de données réputées saines collectées sur un système dans un état de fonctionnement normal, la détection de défauts sur de nouvelles données est alors réalisée par génération d'indicateurs encore appelés résidus en comparant le comportement observé à celui donné par le modèle ACP. Classiquement, la localisation des variables défaillantes est effectuée soit par calcul des contributions des variables à l'indicateur de détection, soit par structuration des résidus. La méthode dite des contributions, basée sur une approximation de la contribution d'une variable à l'indicateur de détection, s'avère souvent sensible aux points de fonctionnement du système [?]. La structuration des résidus consiste à générer de nouveaux résidus sensibles uniquement à des sous-ensembles particuliers de défauts. Sous certaines conditions structurelles, l'analyse de ces différents résidus permet ainsi de localiser l'ensemble des variables défaillantes [?].

Les travaux dans le domaine de l'ACP sont généralement effectués dans le cadre des variables monovaluées (les données ont des valeurs uniques). Cependant, dans des situations réelles, l'utilisation des variables monovaluées résulte d'une simplification et peut causer une perte importante d'information [?]. La technique de diagnostic utilisant l'ACP peut être étendue à des données décrites par des variables multivaluées permettant ainsi de prendre en compte les notions d'imprécision, de variations et d'intervalles de confiance des données.

Plusieurs méthodes ont été proposées permettant la généralisation de l'ACP à un ensemble de données de type intervalle. Parmi ces méthodes on peut noter la méthode des sommets proposée par *Cazes et al.* [?], la méthode des Centres proposée par *Cazes et al.* [?]. Cette généralisation doit tout d'abord assurer les fonctions principales d'une ACP classique c'est-à-dire la réduction de dimension et l'extraction de la structure principale des objets. De plus, elle doit restituer l'information de variation ou d'imprécision introduite par ces variables [?]. Les résultats fournis par l'ACP généralisée doivent coïncider avec ceux issus de l'ACP classique. Cependant, jusqu'à présent, ces méthodes ne sont pas appliquées aux procédures de diagnostic. Cette communication propose une méthode de calcul du modèle ACP intervalle en prenant en compte les erreurs bornées affectant les mesures effectuées sur un système. L'application de ce modèle intervalle pour la détection et la localisation de défaut sera également présentée.

II. FORMULATION DE L'ACP INTERVALLE

Considérons le vecteur des mesures recueillies sur le système en fonctionnement normal en absence de défauts et de bruits de mesure à l'instant k :

$$\mathbf{x}^*(k) = (x_1^*(k) \ x_2^*(k) \ \dots \ x_m^*(k))^T \quad (1)$$

La matrice de données $\mathbf{X}^* \in \mathbb{R}^{N \times m}$ formée par la concaténation des vecteurs $\mathbf{x}^*(k)$ obtenus à différents instants est :

$$\mathbf{X}^* = (\mathbf{x}^*(1) \ \dots \ \mathbf{x}^*(N))^T \quad (2)$$

On peut bien évidemment construire le modèle ACP du système à partir de ces données idéales. Il est cependant plus réaliste d'effectuer cette synthèse en prenant en compte les erreurs, ici bornées, affectant les mesures. On se propose donc de chercher le lien existant entre le modèle ACP établi à partir de données exemptes de bruits et le modèle ACP établi à partir de ces données corrompues par des bruits. Pour cela, on établit un lien entre les vecteurs propres des matrices de variance-covariance évaluées à partir des données avec et sans bruit.

Ce lien peut être établi de façon expérimentale en examinant et en quantifiant numériquement l'influence de perturbations $\delta\mathbf{X}$ sur les vecteurs propres de la matrice de variance-covariance des données, ces perturbations pouvant être générées de façon aléatoire. Ce lien peut aussi être établi de façon plus analytique par une étude de sensibilité au premier ordre des vecteurs propres de la matrice de variance-covariance vis-à-vis des variations $\delta\mathbf{X}$.

Pour établir cette analyse de sensibilité, considérons les variations $\delta\mathbf{X}$ que la matrice des données \mathbf{X}^* subit. La nouvelle matrice des données s'écrit :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* + \delta\mathbf{X} \quad (3)$$

Les variations $\delta\mathbf{X}$ sont des réalisations de variables aléatoires centrées, d'amplitudes bornées et qui peuvent représenter les erreurs de mesures affectant les variables du système considéré.

La matrice de variance-covariance :

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \quad (4)$$

peut s'expliquer à partir de l'équation [??], sous la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A} \quad (5)$$

où $\mathbf{A}^* = \mathbf{X}^{*T} \mathbf{X}^*$ et $\delta\mathbf{A} = \mathbf{X}^{*T} \delta\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}^T \mathbf{X}^* + \delta\mathbf{X}^T \delta\mathbf{X}$.

La diagonalisation de la matrice \mathbf{A}^* permet de déterminer les valeurs propres λ_i^* , $i = 1 \dots m$ et les vecteurs propres v_i^* qui leur sont associés. Pour les matrices \mathbf{A}^* et $\mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* v_i^* &= \lambda_i^* v_i^* \\ (\mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A})(v_i^* + \delta v_i) &= (\lambda_i^* + \delta\lambda_i)(v_i^* + \delta v_i) \end{aligned} \quad (6)$$

où δv_i et $\delta\lambda_i$ représentent les variations des vecteurs propres v_i^* et des valeurs propres λ_i^* dues aux variations $\delta\mathbf{A}$ de la matrice \mathbf{A}^* . On se propose d'établir l'expression de la sensibilité des valeurs et vecteurs propres $\delta\lambda_i$ et δv_i de la matrice \mathbf{A}^* vis-à-vis de la variation $\delta\mathbf{A}$ des coefficients de cette matrice.

A. Variation des valeurs propres

En conservant les termes variationnels du premier ordre de (??), il reste :

$$\mathbf{A}^* \delta v_i + \delta A v_i^* = \lambda_i^* \delta v_i + \delta\lambda_i v_i^* \quad (7)$$

Comme :

$$\begin{aligned} v_i^{*T} \mathbf{A}^* &= \lambda_i^* v_i^{*T} \\ v_i^{*T} v_i^* &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

en multipliant à gauche (??) par v_i^{*T} et compte tenu de (??), on déduit alors les variations des valeurs propres :

$$\delta\lambda_i = v_i^{*T} \delta\mathbf{A} v_i^* \quad (9)$$

B. Variation des vecteurs propres

En substituant (??) dans (??), on a :

$$(\mathbf{A}^* - \lambda_i^* I) \delta v_i = (v_i^{*T} v_i^{*T} - I) \delta\mathbf{A} v_i^* \quad (10)$$

Cette expression quantifie donc l'influence des variations $\delta\mathbf{A}$ de \mathbf{A} sur ses vecteurs propres. Malheureusement, comme $(\mathbf{A}^* - \lambda_i^* I)$ est une matrice singulière, on ne peut pas obtenir explicitement δv_i à partir de (??). Cependant, comme les vecteurs propres sont définis à une constante près, on peut imposer la contrainte :

$$v_i^{*T} \delta v_i = 0 \quad (11)$$

En concaténant (??) et (??), on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^* - \lambda_i^* I \\ v_i^{*T} \end{pmatrix} \delta v_i = \begin{pmatrix} (v_i^{*T} v_i^{*T} - I) \delta\mathbf{A} v_i^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Si les valeurs propres ne sont pas multiples, le système obtenu est alors de plein rang et il peut donc être résolu par rapport à δv_i . Notons qu'une alternative à cette évaluation, consiste à utiliser conjointement les expressions (??) et (??). Dans ce cas les variations δv_i et $\delta\lambda_i$ sont liées aux variations $\delta\mathbf{A}$ par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^* - \lambda_i^* I & -v_i^* \\ v_i^{*T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_i \\ \delta\lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta\mathbf{A} v_i^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

De façon explicite, toujours dans le cas de valeurs propres non multiples :

$$\begin{pmatrix} \delta v_i \\ \delta\lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* - \lambda_i^* I & -v_i^* \\ v_i^{*T} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\delta\mathbf{A} v_i^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Ainsi, pour une variation particulière $\delta\mathbf{A}$, on peut évaluer les variations correspondantes δv_i et $\delta\lambda_i$ des vecteurs et valeurs propres de la matrice de variance-covariance, l'expression (??) pouvant être appliquée à l'ensemble des valeurs et vecteurs propres ($i=1, \dots, m$). Cette évaluation peut être réitérée pour un ensemble de N réalisations $\delta\mathbf{A}(k)$, $k = 1, \dots, N$ générant ainsi un ensemble de valeurs $\delta v_i(k)$ et $\delta\lambda_i(k)$.

Pour cet ensemble de réalisations, il est alors simple de déterminer à quels intervalles appartiennent les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{A}(k)$. Le calcul des bornes inférieures et supérieures des valeurs et des vecteurs propres est déterminé comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_{i \min} = \inf_k (\lambda_i^* + \delta\lambda_i(k)) \\ \lambda_{i \max} = \sup_k (\lambda_i^* + \delta\lambda_i(k)) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (15)$$

$$\begin{cases} v_{i,j \min} = \inf_k (v_{i,j}^* + \delta v_{i,j}(k)) \\ v_{i,j \max} = \sup_k (v_{i,j}^* + \delta v_{i,j}(k)) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (16)$$

où $\lambda_{i \min}$ et $\lambda_{i \max}$ représentent respectivement la valeur inférieure et la valeur supérieure des valeurs propres des matrices $\mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A}(k)$, $v_{i,j \min}$ et $v_{i,j \max}$ représentent respectivement la valeur inférieure et la valeur supérieure de la $j^{\text{ème}}$ composante du $i^{\text{ème}}$ vecteur propre de ces mêmes matrices. Ainsi, la matrice des valeurs propres intervalle¹ de $\mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A}(k)$ est donnée par :

$$[\Lambda] = \text{diag}([\lambda_1] \dots [\lambda_m]) \quad (17)$$

où les valeurs propres $[\lambda_i] = [\lambda_{i \min} \lambda_{i \max}]$, $i = 1 \dots m$ sont ordonnées dans l'ordre décroissant de leurs amplitudes. La matrice des vecteurs propres intervalle est donnée par :

$$[P] = ([v_1] \ [v_2] \ \dots \ [v_m]) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [v_i] &= ([v_{i1}] \ [v_{i2}] \ \dots \ [v_{im}])^T \\ [v_{ij}] &= [v_{ij \min} \ v_{ij \max}] \end{aligned}$$

Remarque : Notons que cette procédure de calcul présente l'avantage d'être issue d'une démarche analytique mais fournit un résultat approché. Afin de tester la pertinence des résultats obtenus par ce calcul approché, une méthode de calcul exact peut être utilisée. Cette dernière consiste en une diagonalisation directe de toutes les matrices $\mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A}(k)$. La recherche des bornes inférieures et supérieures des valeurs et des vecteurs propres pour N réalisations de $\delta\mathbf{A}(k)$ permet de trouver les valeurs propres $[\lambda_i]$ et les vecteurs propres $[v_i]$ intervalles.

Compte tenu de la définition intervalle des vecteurs propres de la matrice de variance-covariance des données, on peut alors étendre les outils de modélisation établis pour des données de type singleton à des données de type intervalle. Une fois déterminé le nombre ℓ de composantes à retenir (par exemple, à partir d'un seuil sur l'amplitude des valeurs propres), en considérant le partitionnement suivant :

$$[P] = ([\hat{P}] \mid [\tilde{P}]) \quad [\hat{P}] \in \mathbb{R}^{m \times \ell}, [\tilde{P}] \in \mathbb{R}^{m \times (m-\ell)} \quad (19)$$

1. Dans toute la suite, les crochets seront systématiquement utilisés pour noter des grandeurs de type intervalle.

on définit les matrices $[\hat{C}_\ell] = [\hat{P}] [\hat{P}]^T$ et $[\tilde{C}_\ell] = [\tilde{P}] [\tilde{P}]^T$ qui constituent le modèle ACP intervalle du système. Ces deux matrices décomposent l'espace des données en deux sous-espaces orthogonaux : l'espace principal de représentation constitué par les ℓ premiers vecteurs propres et l'espace résiduel représenté par les $m - \ell$ derniers vecteurs propres. A partir de cette décomposition utilisant des expressions de type intervalle, on peut alors proposer une procédure de diagnostic, c'est-à-dire de détection de mesures traduisant des comportements anormaux du système.

III. APPLICATION AU DIAGNOSTIC

Le diagnostic de fonctionnement de système comporte principalement deux phases complémentaires : la phase de détection et la phase de localisation de défauts. Classiquement, la détection de défauts est liée à l'étape de génération des résidus qui a pour but de construire, à partir du modèle ACP de bon fonctionnement du processus et des mesures disponibles, des signaux révélateurs de la présence de défauts, appelés résidus. Considérons, à l'instant k , un vecteur de mesure $x(k)$. On se pose alors la question de savoir si cette mesure peut être considérée comme valide ou au contraire entachée de valeurs aberrantes qu'il convient alors de détecter et de localiser.

La projection du vecteur des mesures $x(k)$ ² dans les deux sous-espaces est définie par :

$$[\hat{x}(k)] = [\hat{C}_\ell] \mathbf{x}(k) \quad (20)$$

$$[\tilde{x}(k)] = (I - [\hat{C}_\ell]) \mathbf{x}(k) \quad (21)$$

Dans l'expression (??), ℓ rappelle que la reconstruction est faite à partir de ℓ composantes principales.

Ces deux projections peuvent être utilisées à des fins de reconstruction de l'état du système, mais il s'avère préférable de n'utiliser qu'une partie des mesures pour effectuer cette reconstruction, c'est-à-dire une partie des composantes du vecteur $x(k)$.

A. Diagnostic par reconstruction de variables

Cette méthode consiste à suspecter que chaque variable est en défaut et à reconstruire la valeur de sa mesure en se basant sur le modèle ACP et les mesures des autres variables [?]. La localisation de défaut est effectuée par comparaison de valeurs avant et après reconstruction car l'influence du défaut est éliminée quand la variable défective est reconstruite. Cette procédure est répétée pour les différentes variables.

Dans le cas de l'ACP intervalle, la reconstruction de la $i^{\text{ème}}$ variable du vecteur $x(k)$ est donnée par :

$$[\hat{x}_i(k)] = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m [c_{ij}] x_j(k)}{1 - [c_{ii}]} \quad (22)$$

où $[c_{ij}]$ sont les coefficients de la matrice $[\hat{C}_\ell]$. Le vecteur ayant subi cette reconstruction est structuré de la façon suivante :

$$[\hat{x}_R^{(i)}(k)] = (x_1(k) \dots x_{i-1}(k) \, [\hat{x}_i(k)] \, x_{i+1}(k) \dots x_m(k))$$

la notation $\hat{x}_{R,i}$ rappelant qu'il s'agit d'une estimation, par reconstruction, sans utiliser la variable de rang i . A partir de

2. Les mesures sont ici considérés sous forme de singltons. Cependant, la procédure proposée dans la suite de l'exposé, s'étend immédiatement au cas de mesures représentées sous forme intervalle.

l'expression (??), on remarque que la reconstruction de la $i^{\text{ème}}$ variable fait intervenir toutes les autres variables sauf la $i^{\text{ème}}$. Ainsi, si seule cette variable est en défaut, sa reconstruction élimine l'effet du défaut affectant cette dernière ; la reconstruction intervalle ainsi obtenue contient une estimée indépendante du défaut. L'expression (??) étant linéaire par rapport aux mesures, le vecteur reconstruit peut aussi s'écrire de façon plus générale :

$$[\hat{x}_R^{(i)}(k)] = [G_\ell^{(i)}] x(k) \quad (23)$$

la matrice $G_\ell^{(i)}$ s'exprimant aisément en fonction de \hat{C}_ℓ [?]:

$$[G_\ell^{(i)}] = I + \frac{\xi_i \xi_i^T}{1 - \xi_i^T [\hat{C}_\ell] \xi_i} ([\hat{C}_\ell] - I)$$

où ξ_i , qui traduit la direction de reconstruction, est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1.

B. Diagnostic par projection des reconstructions

Avec à l'esprit l'objectif du diagnostic, il est souhaitable de générer des indicateurs (ou résidus) capables de détecter et aussi d'isoler les défauts affectant le système. Pour cela, on peut projeter, dans l'espace résiduel, les reconstructions précédemment établies :

$$[\tilde{x}_R^{(i)}(k)] = (I - [\hat{C}_\ell]) [\hat{x}_R^{(i)}(k)] \quad (24)$$

ou encore compte tenu de (??)

$$[\tilde{x}_R^{(i)}(k)] = [P_\ell] x(k) \quad (25)$$

avec :

$$[P_\ell] = (I - [\hat{C}_\ell]) [G_\ell] \quad (26)$$

Si l'on explique les mesures en fonction des grandeurs vraies x , des bruits de mesure ε et d'un défaut f intervenant dans une direction ξ_f :

$$x(k) = x^*(k) + \varepsilon(k) + \xi_f f(k)$$

alors le résidu s'explique :

$$[\tilde{x}_R^{(i)}(k)] = [P_\ell](x^*(k) + \varepsilon(k) + \xi_f f(k)) \quad (27)$$

$$= [P_\ell]\varepsilon(k) + [P_\ell]\xi_f f(k) \quad (28)$$

Les bruits de mesure peuvent être considérés de valeur moyenne nulle, ce qui permet de négliger leur contribution à la formation des résidus. Le terme $[P_\ell]\xi_f$ explique l'influence du défaut, de direction ξ_f sur le résidu.

Dans le cas de données de type singleton la matrice P_ℓ jouit de propriétés particulières [?] qui sont exploitées dans le cadre de la détection et de l'isolation des défauts. En particulier, il est possible de montrer que l'amplitude de la projection $\tilde{x}_R^{(i)}(k)$ de la variable $\hat{x}_R^{(i)}(k)$ reconstruite sans utiliser la mesure de la variable i est insensible au défaut affectant cette variable. De plus, les projections des variables autres que la $i^{\text{ème}}$ reconstruites sans utiliser la mesure de cette variable sont a priori sensibles aux défauts ; cependant, certains défauts peuvent ne pas être visibles dans ces projections si, en particulier, la direction de ces défauts est orthogonale à la matrice de projection P_ℓ .

Ici, dans le cas intervalle, il conviendrait d'étendre ces propriétés, ce que nous ne pouvons pas faire pour des raisons de concision de l'exposé.

IV. APPLICATION

Afin d'illustrer les techniques présentées précédemment, on considère un système statique régi par 7 variables x_j ; $j = \{1, \dots, 7\}$ et décrit aux différents instants k par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1^*(k) = 0.4v_1(k) + \sin(k/N), & v_1(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_2^*(k) = v_2(k) - 2 \cos(k/4), & v_2(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_3^*(k) = 0.2v_3(k) - 1, & v_3(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_4^*(k) = x_1^*(k) + x_2^*(k) \\ x_5^*(k) = x_2^*(k) + x_3^*(k) \\ x_6^*(k) = 2x_1^*(k) + x_3^*(k) \\ x_7^*(k) = x_4^*(k) + x_5^*(k) \end{array} \right. \quad (29)$$

Ce jeu de données, générées à partir de trois variables issus de trois lois normales, fait apparaître quatre relations de redondance analytique linéaires entre les variables x_i^* , $i = 1, \dots, 7$. Aux données ainsi générées, qui constituent la matrice \mathbf{X}^* , ont été superposées des variations $\delta\mathbf{X}$ qui sont des réalisations de variables aléatoires centrées de façon à simuler la présence de bruits de mesure. Le système est simulé sur une fenêtre de $N = 100$ observations. L'évolution des mesures des variables x_j , $j = 1, \dots, 7$, en présence de défauts, est illustrée sur la figure 1.

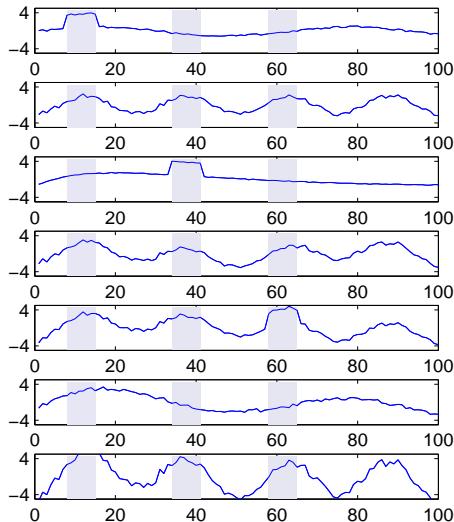


FIGURE 1: Evolution des variables en présence de défaut

La diagonalisation de la matrice de variance-covariance \mathbf{A} de \mathbf{X} permet de déterminer les matrices des valeurs et des vecteurs propres et donc par la suite d'établir le modèle ACP du système.

D'une part, l'application de la méthode de calcul approché présenté en section 2 permet de trouver la matrice des valeurs propres $[\Lambda]$ et la matrice des vecteurs propres $[P]$. D'autre part, la diagonalisation directe de la matrice $\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A}(k)$ permet d'obtenir les matrices des valeurs et vecteurs propres. Pour 500 réalisations de cette matrice, on cherche les bornes inférieures et supérieures des différents valeurs et vecteurs propres. Cette méthode, dite méthode de calcul exact, permet de trouver les matrices intervalles exactes des valeurs propres $[\Lambda_e]$ et des vecteurs propres $[P_e]$.

La table ?? donne les valeurs propres intervalles obtenues par la méthode approchée et par la méthode analytique. Au vu des amplitudes des différentes valeurs propres de la table

??, le nombre de composantes principales à conserver dans le modèle ACP est $\ell = 3$. Ainsi, la matrice $[\Lambda]$ se décompose en deux matrices $[\hat{\Lambda}]$ et $[\tilde{\Lambda}]$ de même pour la matrice $[P]$ qui se décompose en $[\hat{P}]$ et $[\tilde{P}]$.

La méthode de calcul exact est ici utilisée uniquement pour vérifier la performance de la méthode analytique proposée. On a remarqué que les résultats obtenus, pour les composantes principales retenues, par la méthode analytique approchée sont confondus (si l'on considère trois chiffres significatifs) aux résultats fournis par la méthode exact justifiant ainsi de façon expérimentale l'utilisation de la méthode analytique. Cette justification expérimentale nous incite à utiliser le modèle ACP issu de la méthode analytique.

Calcul approché		Calcul exact	
λ_{imin}	λ_{imax}	λ_{imin}	λ_{imax}
1657	1698	1657	1698
239	246	239	246
163	169	163	169
0.250	0.63	0.267	0.666
0.159	0.32	0.147	0.341
0.209	0.53	0.091	0.184
0.084	0.20	0.039	0.105

TABLE I: Valeurs propres sous forme intervalle

$$[P] = ([\hat{P}] \quad [\tilde{P}]) \quad (30)$$

Une forme plus simple sera utilisée pour la matrice $[\tilde{P}]$. Pour cela, remarquons que avant évaluation des formes intervalles, on peut mettre en évidence dans \tilde{P} une partie régulière \tilde{P}_1 et partitionner \tilde{P} sous la forme :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

A ces vecteurs propres formés par les colonnes de \tilde{P} , on peut préférer ceux, équivalents au sens des sous-espaces vectoriels qu'ils sous-tendent, définis par les colonnes de la matrice notée également \tilde{P} :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} I \\ \tilde{P}_2 \hat{P}_1^{-1} \end{pmatrix} \quad (32)$$

La matrice \tilde{P}^T est présentée dans la table ???. Les vecteurs colonnes de type intervalle obtenus sont à rapprocher des équations de redondance qui ont servi à générer les données. En effet, les équations de redondance (??) permettent d'expliquer les variables x_i^* , $i = 1, \dots, 4$ sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1^*(k) & = & -\frac{2}{3}x_5^*(k) + \frac{1}{3}x_6^*(k) + \frac{1}{3}x_7^*(k) \\ x_2^*(k) & = & -\frac{1}{3}x_5^*(k) - \frac{1}{3}x_6^*(k) + \frac{2}{3}x_7^*(k) \\ x_3^*(k) & = & \frac{4}{3}x_5^*(k) + \frac{1}{3}x_6^*(k) - \frac{2}{3}x_7^*(k) \\ x_4^*(k) & = & -x_5^*(k) + x_7^*(k) \end{array} \right. \quad (33)$$

L'examen conjoint de ces relations et des vecteurs propres intervalle de la table ?? montrent la cohérence des estimations de ces vecteurs propres.

A. Détection de défauts

Des défauts ont été ajoutés à la variable x_1 des instants 8 à 15 (zone Z_1), à la variable x_3 des instants 34 à 41 (zone Z_2) et à la variable x_5 des instants 58 à 65 (zone Z_3), chaque

0	0	0	1	$[0.95 \quad 1.06]$	$[-0.02 \quad 0.03]$	$[-1.03 \quad -0.97]$
0	0	1	0	$[-1.37 \quad -1.29]$	$[-0.35 \quad -0.32]$	$[0.65 \quad 0.69]$
0	1	0	0	$[0.30 \quad 0.37]$	$[0.32 \quad 0.35]$	$[-0.68 \quad -0.65]$
1	0	0	0	$[0.64 \quad 0.68]$	$[-0.34 \quad -0.32]$	$[-0.34 \quad -0.32]$

TABLE II: Matrice des 4 derniers vecteurs propres intervalle

défaut correspondant à un biais amplitude égale à 3. Les figures ?? à ?? illustrent l'évolution des vecteurs résidus $[\tilde{x}_R^{(i)}(k)]$ en présence de défauts, pour les quatre premières reconstructions.

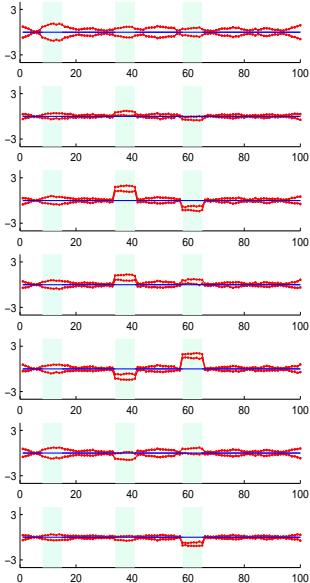


FIGURE 2: Résidus $[\tilde{x}_R^{(1)}]$

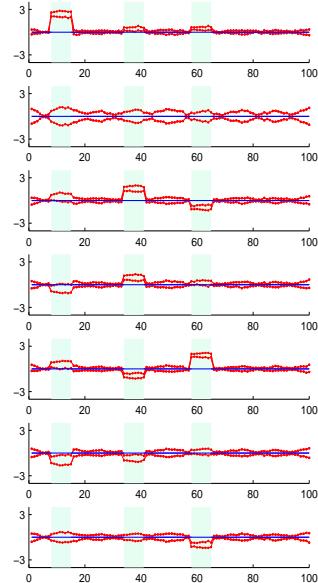


FIGURE 3: Résidus $[\tilde{x}_R^{(2)}]$

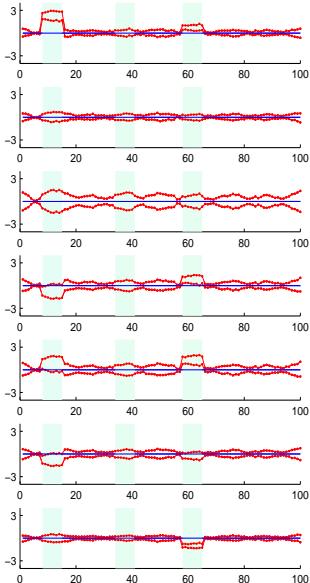


FIGURE 4: Résidus $[\tilde{x}_R^{(3)}]$

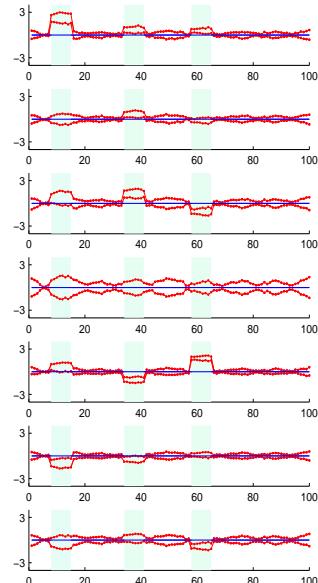


FIGURE 5: Résidus $[\tilde{x}_R^{(4)}]$

Sur la figure ??, le premier graphe montre l'insensibilité du premier résidu aux trois défauts, l'enveloppe du résidu

contenant la valeur 0. Les autres graphes de cette figure, relatifs aux autres résidus montrent une sensibilité plus ou moins importante aux défauts des variables 3 et 5 dans les zones Z_2 et Z_3 où les enveloppes des résidus ne contiennent pas la valeur 0. Indépendamment des sensibilités des résidus aux deux défauts, il est clair qu'un test sur les signes des composantes du vecteur résidu détecte sans ambiguïté la présence de ces deux défauts. De façon similaire, la figure ?? indique l'évolution des résidus construits sans utiliser la deuxième variable (qui n'était pas soumise à un défaut). Le second résidu est insensible à tous les défauts, tous les autres témoignant avec des sensibilités plus ou moins importantes de la présence des trois défauts affectant les variables 1, 3 et 5. Les figures relatives aux autres résidus obtenus par reconstruction et projection, sans utiliser les variables 3, 4, 5, 6 ou 7 ne sont pas indiquées mais s'interprètent de façon similaire. Les figures ?? et ?? qui concernent la reconstruction sans faire usage respectivement des variables 3 et 4, se lisent de façon semblable.

B. Localisation de défauts

Après avoir détecté la présence de défaut, il est important d'identifier avec précision la variable en défaut. La reconstruction des variables puis leurs projections dans l'espace résiduel permettent cette identification. Conformément aux propriétés de la matrice de projection P_ℓ (??), on connaît a priori l'influence des défauts sur les résidus. La table ?? présente les signatures théoriques de défauts pour les trois premières reconstructions/projections, c'est-à-dire celles obtenues sans utiliser respectivement les variables 1 (partie $[\hat{x}_R^{(1)}]$), 2 (partie $[\hat{x}_R^{(2)}]$) et 3 (partie $[\hat{x}_R^{(3)}]$), quatre autres tables de signature pouvant être construites. L'examen de cette table montre que le défaut δx_1 est parfaitement isolable des autres défauts (le vecteur ligne à 21 composantes de δx_1 est indépendant des 6 autres vecteurs ligne δx_2 à δx_7). Avec cette seule partie de la table les vecteurs lignes δx_4 à δx_7 sont identiques; cependant, l'utilisation de la table complète des signatures garantit l'indépendance de ces vecteurs qui comportent alors 49 composantes. Pour reconnaître maintenant un défaut, il convient de comparer les signatures expérimentales aux signatures théoriques de la table ???. La figures ?? présente les indicateurs expérimentaux de défauts construits à partir de la figure ?? en analysant l'appartenance de la valeur 0 aux résidus intervalle. Les figures ??, ?? et ?? ont été construites de façon similaire à partir des résidus présentés aux figures ??, ?? et ??.

La table ?? est un extrait des signatures expérimentales. Elle a été établie aux instants 10, 35 et 60 appartenant respectivement aux zones Z_1 , Z_2 et Z_3 . On a fait uniquement figurer les signatures obtenues par reconstruction/projection sans utiliser la première, puis la deuxième et enfin la troisième variable mesurée (le symbole 0 mentionne la nullité du résidu au sens intervalle et la symbole \times la situation opposée).

La comparaison, à chaque instant, entre la signature expérimentale et les signatures théoriques peut se faire par un calcul de similarité, de corrélation ou de distance, cette dernière possibilité ayant été retenue pour notre exemple. Finalement, l'analyse des différentes distances renseigne sur la présence des défauts et leurs localisation. La figure ?? est l'indicateur résultant de cette analyse qui prend des valeurs correspondant aux numéros des variables en défaut. Les variables effectivement en défaut sont bien retrouvées dans les trois zones Z_1 , Z_2 et Z_3 avec un fausse alarme de courte durée au voisinage de l'instant

6. Ces fausses alarmes peuvent être assez aisément supprimées si l'on admet qu'un défaut est significatif si sa durée de présence est supérieure à un seuil. On peut alors synthétiser un filtre capable de rejeter les détections dont la durée reste en dessous de ce seuil de persistance.

	$\tilde{x}_R^{(1)}$	$\tilde{x}_R^{(2)}$	$\tilde{x}_R^{(3)}$
δx_1	0 0 0 0 0 0 0	\times 0 \times \times \times \times 0	\times \times 0 \times \times \times 0
δx_2	0 \times \times \times \times \times 0	0 0 0 0 0 0 0	\times 0 \times \times \times \times 0
δx_3	0 \times \times \times \times \times 0	\times 0 \times \times \times \times 0	0 0 0 0 0 0 0
δx_4	0 \times \times \times \times \times 0	\times 0 \times \times \times \times 0	\times 0 \times \times \times \times 0
δx_5	0 \times \times \times \times \times 0	\times 0 \times \times \times \times 0	\times \times 0 \times \times \times 0
δx_6	0 \times \times \times \times \times 0	\times 0 \times \times \times \times 0	\times 0 \times \times \times \times 0
δx_7	0 \times \times \times \times \times 0	\times 0 \times \times \times \times 0	\times 0 \times \times \times \times 0

TABLE III: Signatures théoriques des défauts

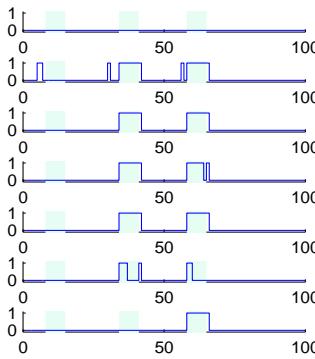


FIGURE 6: Indicateurs de défauts sans utiliser la variable 1

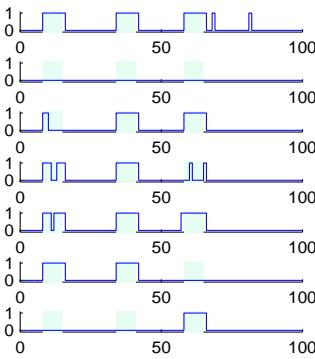


FIGURE 7: Indicateurs de défauts sans utiliser la variable 2

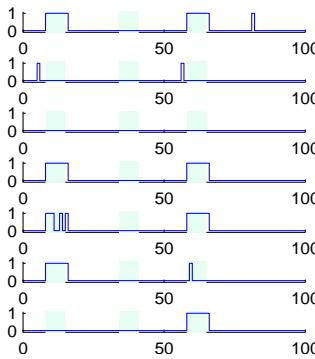


FIGURE 8: Indicateurs de défauts sans utiliser la variable 3

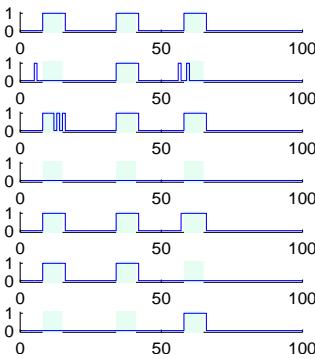


FIGURE 9: Indicateurs de défauts sans utiliser la variable 4

Z_1	0 0 0 0 0 0 0	\times 0 \times \times \times \times 0	\times 0 0 \times \times \times 0
Z_2	0 \times \times \times \times 0	\times 0 \times \times \times 0	0 0 0 0 0 0 0
Z_3	0 \times \times \times 0 \times	\times 0 \times \times 0 \times	\times 0 0 \times \times 0 \times

TABLE IV: Signatures expérimentales des défauts

V. CONCLUSION

La validation des mesures est sans doute la première phase importante et indispensable à la surveillance du fonctionnement des systèmes et à l'appréciation de leurs performances. Ici, on a abordé un point particulier de cette phase de validation qui

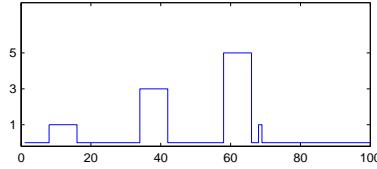


FIGURE 10: Indicateurs de localisation de défauts

concerne la détection et la localisation de mesures incohérentes. Le cadre est ici celui des méthodes sans modèle a priori, le modèle se révélant a posteriori par l'étude des données, étude réalisée ici par un des outils classique en analyse de données que constitue l'analyse en composantes principales. La portée de cet outil a été étendue au cas de mesures incertaines représentées sous forme intervalle et le modèle ACP qui en résulte, ainsi que la technique de détection de mesures incohérentes, est lui-même présenté avec un formalisme intervalle.

Les résultats présentés ici sont novateurs et par conséquent les techniques dont ils sont issus ne demandent qu'à être développées. Parmi les axes envisagés, la détection et localisation de défauts multiples semblent être une extension réaliste. Un point technique mérite également une attention particulière : le résultat de l'évaluation des résidus sous forme intervalle est lié à l'expression mathématique même de ces résidus. De façon à limiter le pessimisme de cette évaluation, il est sans doute intéressant de réfléchir sur la forme à donner à cette expression.

RÉFÉRENCES

- [1] Cazes P., Chouakria A., Diday E., Schektman Y. Extension de l'analyse en composantes principales à des données de type intervalle, *Revue de statistique appliquée*, 45 (3), pp. 5- 24, 1997.
- [2] Palumbo F., Gettler-Summa M. Symbolic Interpretation of PCA on Interval Data, *Actes de la XL réunion scientifique de la Société Italienne de statistique*, pp. 103-114, France, 2000.
- [3] Dunia R., Qin S.J. A subspace approach to multidimensional fault identification and reconstruction, *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 44 (8), pp. 1813-1831, 1998.
- [4] Gertler J., Singer D. A new structural framework for parity equation based fault detection and isolation, *Automatica*, 26, pp. 381-388, 1990.
- [5] Harkat M. F., Mourot G., Ragot J. Différentes méthodes de localisation de défauts basées sur les dernières composantes principales, *Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA*, Nantes- France, 2002.
- [6] Harkat M. F., Mourot G., Ragot J. An improved PCA scheme for sensor FDI : application to an air quality monitoring network, *Journal of Process Control*, 16, pp. 625-634, 2006.
- [7] Harkat M., Tharrault Y., Mourot G., Ragot J. Multiple Sensor Fault detection and Isolation of an Air Quality Monitoring Network using RBF-NLPCA mode. *International Journal of Adaptive and Innovative Systems*, 1 (3,4), pp. 267-284, 2010.
- [8] Huang Y., Gertler J., McAvoy T. Sensor and actuator fault isolation by structured partial PCA with nonlinear extensions, *Journal of Process Control*, 10, pp. 444-459, 2000.
- [9] Kano M., Nagao K., Hasebe S., Hashimoto I., Ohno H., Strauss R. Comparison of multivariate statistical process control monitoring methods with applications to the Eastman challenge problem, *Computers and Chemical Engineering*, 26, pp. 161-174, 2002.
- [10] Qin S.J. Statistical process monitoring : basis and beyond, *Journal of Chemometrics*, 17, pp. 480-502, 2003.
- [11] Tamura M., Tsujita S. A study on the number of principal components and sensitivity of fault detection using PCA, *Journal of Computers and chemical Engineering*, 31, pp. 1035-1046, 2007.
- [12] Tharrault Y., Mourot G., Ragot J., Maquin D. Fault detection and isolation with robust principal component analysis, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science AMCS*, 18, 2008.