

Estimation d'état des systèmes non linéaires incertains sous forme multimodèle de type Takagi-Sugeno

Dalil Ichalal, Benoît Marx, Didier Maquin, José Ragot

Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL)
Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CNRS)
2, avenue de la forêt de Haye, 54 516 Vandœuvre les Nancy, France



Nancy-Université
INPL

1er Colloque International Francophone, Ingénierie et Environnement
Annaba, Algérie, Octobre 17-18, 2010



- 1 Introduction
- 2 Modèle de Takagi-Sugeno
- 3 Estimation d'état
- 4 Exemple
- 5 Variante pour la synthèse d'un observateur
- 6 Conclusion

- ▶ Systèmes incertains

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u, \theta), & \theta \in \mathcal{D} \\ y &= Cx \end{cases}$$

- ▶ Estimation d'état

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, u, y, \theta_0)$$

- ▶ Détection de dysfonctionnement

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u, \theta), & \theta \in \mathcal{D} \\ y &= Cx + Fd \end{cases}$$

- ▶ Réaction face aux dysfonctionnements

- ▶ Modèle TS ou multi-modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- ▶ Variable d'interpolation ξ
- ▶ Propriétés des fonctions poids

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\} \end{cases}$$

- ▶ Observateur d'état

- ▶ Modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) + D\omega(t) \end{cases}$$

- ▶ Incertitudes structurées. Hypothèses

$$\begin{cases} \Delta A_i(t) = M_i^A \Sigma_A(t) N_i^A \\ \Delta B_i(t) = M_i^B \Sigma_B(t) N_i^B \\ \Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) \leq I, \quad \forall t \\ \Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) \leq I, \quad \forall t \end{cases}$$

- ▶ Le signal $\omega(t)$ est un bruit de mesure borné en amplitude.
- ▶ Estimation d'état
- ▶ Difficultés

► Modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) + D\omega(t) \end{cases}$$

► En utilisant les matrices A_0 , B_0 , \bar{A}_i et \bar{B}_i :

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r A_i & B_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r B_i \\ A_i = \bar{A}_i + A_0 & B_i = \bar{B}_i + B_0 \end{cases}$$

on obtient une formulation équivalente de l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))((\bar{A}_i + \Delta A_i(t))x(t) + (\bar{B}_i + \Delta B_i(t))u(t))$$

► Intérêt

- Système

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x + B_0 u + \sum_{i=1}^r \mu_i(x) ((\bar{A}_i + \Delta A_i)x + (\bar{B}_i + \Delta B_i)u) \\ y = Cx \end{cases}$$

- Observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_0 \hat{x} + B_0 u + \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}) (\bar{A}_i \hat{x} + \bar{B}_i u + G_i (y - \hat{y})) \\ \hat{y} = C \hat{x} \end{cases}$$

- Erreur d'estimation d'état

$$e = x - \hat{x}$$

- Evolution de l'erreur d'estimation d'état

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}) ((A_0 - G_i C)e - G_i D \omega) + \sum_{i=1}^r \mu_i(x) (\Delta A_i x + \Delta B_i u) + \sum_{i=1}^r (\bar{A}_i \delta_i + \bar{B}_i \Delta_i)$$

où :

$$\delta_i = \mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}$$

$$\Delta_i = (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u$$

- ▶ De façon plus compacte, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état peut être écrite sous la forme équivalente :

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^r (\mu_i(\hat{x})(A_0 - G_i C)e + H_i \tilde{\omega} + \bar{A}_i \delta_i + \bar{B}_i \Delta_i)$$

où :

$$H_i = \begin{bmatrix} -\mu_i(\hat{x})G_i D & \mu_i(x)\Delta A_i & \mu_i(x)\Delta B_i \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\omega}^T = \begin{bmatrix} \omega^T & x^T & u^T \end{bmatrix}$$

- ▶ Principe du réglage de l'observateur
 - Stabilité en l'absence de perturbation et convergence de l'erreur vers 0
 - Atténuation de l'influence des perturbation sur l'erreur

Hypothèse

Dans cette section, on fait les hypothèses suivantes :

- ▶ **A1.** La stabilité entrée-état du système est vérifiée.
- ▶ **A2.** Les fonctions d'activation $\mu_i(x)$ sont de type Lipschitz :

$$|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| < \gamma_1 |x - \hat{x}|$$

- ▶ **A3.** Les fonctions $\mu_i(x)x$ sont de type Lipschitz :

$$|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| < \gamma_2 |x - \hat{x}|$$

- ▶ **A4.** L'entrée $u(t)$ du système est bornée :

$$|u(t)| \leq \beta$$

Conservatisme des hypothèses ?

Oservateur optimal

$$\min_{P, Q, K_i, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \sigma, \bar{\mu}} \bar{\mu}$$

s.c.

$$A_0^T P + P A_0 - K_i C - C^T K_i^T < -Q$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & P M_i^A & P M_i^B & K_i D & \gamma_1 \sigma I \\ * & M_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & M_{2i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & M_{3i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\lambda_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\lambda_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$i \in \{1, \dots, r\}$$

$$\sigma - \lambda_2 \beta > 0$$

où :

$$M = -Q + (\lambda_1 \gamma_2^2 + 1)I$$

$$M_{1i} = (-\bar{\mu} + \varepsilon_2)I \quad M_{2i} = -\bar{\mu}I + \varepsilon_3(N_i^A)^T N_i^A \quad \dots$$

3. Exemple

- ▶ On considère le système défini par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -18.5 & 5 & 18.5 \\ 0 & -20.9 & 15 \\ 18.5 & 15 & -33.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -22.1 & 0 & 22.1 \\ 1 & -23.3 & 17.6 \\ 17.1 & 17.6 & -39.5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

$$M_i^A = N_i^A = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1], M_i^B = N_i^B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2$$

- ▶ Les fonctions d'activation sont :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1 - \tanh(x_1)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) \end{cases}$$

3. Exemple

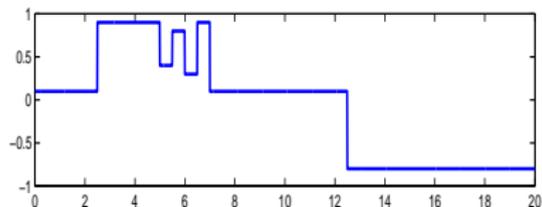
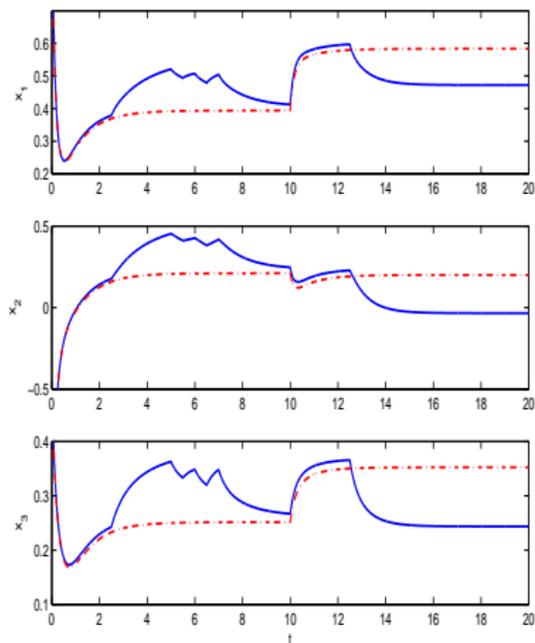


FIGURE: Evolution temporelle des incertitudes $\Sigma_A(t)$



Comparaison entre le modèle T-S avec incertitudes de modélisation (courbes bleues continues) et sans incertitudes (courbes rouge discontinues) : on note clairement l'influence significative des incertitudes sur l'évolution des états dans le temps.

3. Exemple

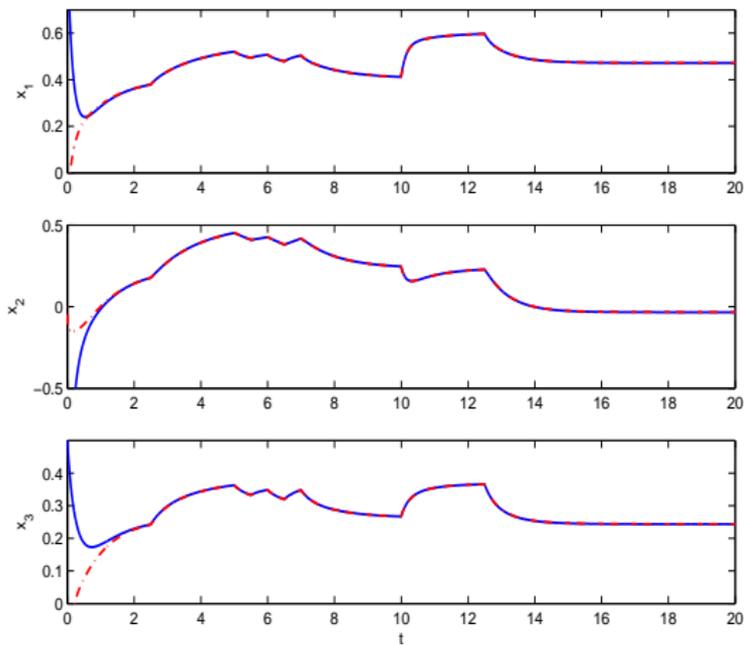


FIGURE: Etats réels (trait continu bleu) et estimés (pointillés)

4. Variante pour la synthèse d'un observateur

- Modèle

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x)((A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u) \\ y &= Cx + D\omega \end{cases}$$

- Forme équivalente du système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x})((A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u + v) \\ y &= Cx + D\omega \\ v &= \sum_{i=1}^r (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))((A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u) \end{cases}$$

- Observateur proposé

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x})(A_i \hat{x} + B_i u + L_i(y - \hat{y})) \\ \hat{y} &= C \hat{x} \end{cases}$$

- Principe du réglage de l'observateur

4. Variante pour la synthèse d'un observateur

- ▶ Modèle d'un bioréacteur.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{ax_1x_2}{x_2 + b} - x_1u \\ \dot{x}_2 = -\frac{cax_1x_2}{x_2 + b} + (d - x_2)u \end{cases}$$

$x_1(t)$ représente la concentration en biomasse
 $x_2(t)$ est la concentration en substrat et $u(t)$ est le taux de dilution.

- ▶ Valeurs nominales des paramètres $a = 0.5$, $b = 0.07$, $c = 0.7$, $d = 2.5$.
Ils varient de 10% autour de ces valeurs nominales.
- ▶ Mesure de x_1 disponible
- ▶ Forme multi-modèle

4. Variante pour la synthèse d'un observateur

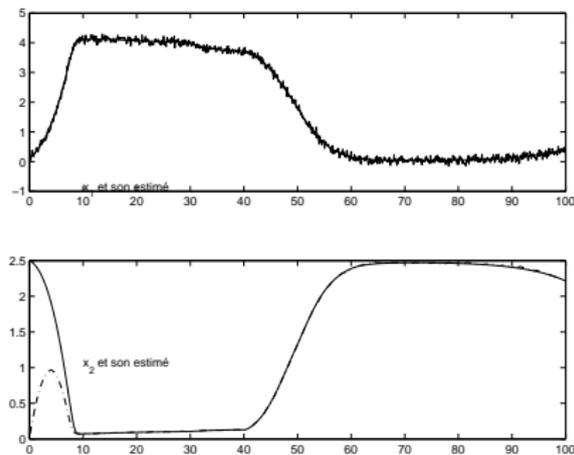
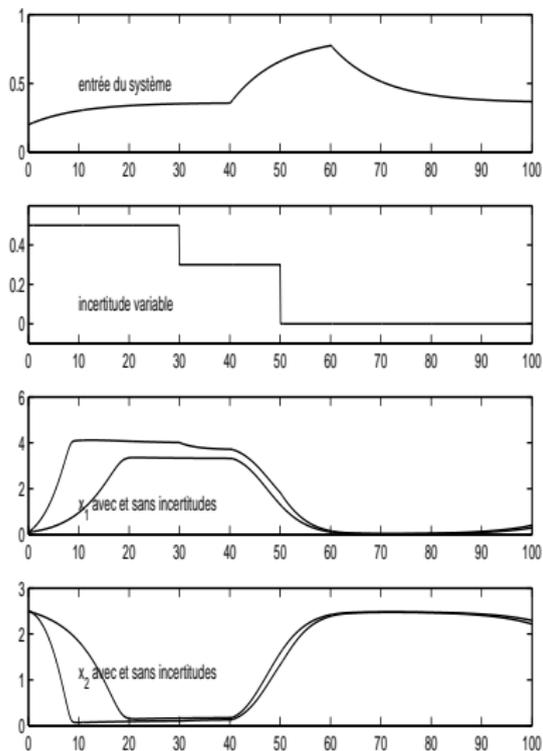


FIGURE: Estimation d'état du bioréacteur

Sommaire

- ▶ Système multi-modèle TS à paramètres incertains bornés
- ▶ Restructuration du modèle sous forme multi-modèle
- ▶ Synthèse de l'observateur sous forme multi-modèle

Extensions

- ▶ Système de grande dimension
- ▶ Autres procédures de synthèse de l'observateur
- ▶ Mesures discrètes à pas variable