

Estimation d'état de systèmes à deux échelles de temps. Application à un réacteur biologique

Anca Maria Nagy-Kiss, Benoît Marx, Gilles Mourot, José Ragot

Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL)
Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CNRS)
2, avenue de la forêt de Haye, 54 516 Vandœuvre les Nancy, France



Nancy-Université
INPL

1er Colloque International Francophone, Ingénierie et Environnement
Annaba, Algérie, Octobre 17-18, 2010



- 1 Introduction. Contexte de l'étude
- 2 Structure multimodèle
- 3 Séparation de modes
- 4 Observateur d'un multi-modèle
- 5 Modèle d'un réacteur biologique
- 6 Conclusion



- ▶ **Processus liés à l'environnement**
Pollution de l'air, pollution de l'eau, stations d'épuration d'eau, réseaux de transport d'eau, bassins versants et écoulement, pluviométrie ...
- ▶ **Diagnostic de fonctionnement de systèmes**
Validation de mesures, détection et localisation de défauts, commande tolérante aux défauts ...
- ▶ **Modèles des processus environnementaux**
Phénomènes difficiles à modéliser, perturbations à effets critiques, variables de concentration difficiles à mesurer ...
- ▶ **Enjeux fondamentaux**
Protection de l'environnement, protection du citoyen. . .

1. Structure multimodèle

Système non linéaire

Structure

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Difficultés d'utilisation

Multi-modèle

Structure

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_i x + B_i u] \\ y = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [C_i x + D_i u] \\ \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) = 1 \text{ et } \mu_i(x, u) \geq 0, \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Facilités d'utilisation

- Système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- Système quasi-LPV

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, u)x + B(x, u)u \\ y = C(x, u)x + D(x, u)u \end{cases}$$

- Décomposition par secteurs

$$\begin{cases} A(x, u) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u)A_i \\ B(x, u) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u)B_i \dots \end{cases}$$

- Multi-modèle

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u)[A_i x + B_i u] \\ y = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u)[C_i x + D_i u] \\ \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_i(x, u) \geq 0, \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{cases}$$

- ▶ Equation d'état non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + (1 + x_1).x_2 + (2 - x_1).u \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_1.x_2 + u \end{cases}$$

- ▶ Le système est non linéaire, mais ...
- ▶ Une forme quasi LPV

$$\dot{x} = A(x).x + B(x).u$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 + x_1 \\ x_1 & -x_1 \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 2 - x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Forme LPV

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1+x_1 \\ x_1 & -x_1 \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 2-x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Si $x \in [-a \ a]$, il est toujours possible d'écrire :

$$\begin{cases} x_1 & = \mu_1(x)(a) + \mu_2(x)(-a) \\ \mu_1(x) & = \frac{x_1 + a}{2a} \cdot (a) \\ \mu_2(x) & = \frac{a - x_1}{2a} \cdot (-a) \end{cases}$$

- ▶ Ainsi :

$$\begin{cases} A(x) & = \mu_1(x).A_1 + \mu_2(x).A_2 \\ A_1 & = \begin{pmatrix} 1 & 1+a \\ a & -a \end{pmatrix} \\ A_2 & = \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ -a & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

- ▶ Même décomposition pour B
- ▶ Finalement, la forme MM est obtenue :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x) (A_i x(k) + B_i u(k))$$

2. Séparation de modes

- ▶ Forme standard des systèmes singuliers à deux échelles de temps :

$$\varepsilon \dot{x}_f(t) = f_f(x_s(t), x_f(t), u(t), \varepsilon)$$

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t), x_f(t), u(t), \varepsilon)$$

où $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$ et $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$ sont respectivement les variables lentes et rapides et ε est un petit paramètre positif, connu sous le nom de *paramètre de perturbation singulière*.

- ▶ Dans le cas limite où $\varepsilon \rightarrow 0$, le système devient :

$$0 = f_f(x_s(t), x_f(t), u(t), 0)$$

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t), x_f(t), u(t), 0)$$

- ▶ Système réduit :

$$x_f(t) = \varphi(x_s(t), u(t))$$

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t), \varphi(x_s(t), u(t)), u(t))$$

- Forme MM avec variables d'état lentes et rapides :

$$\begin{cases} 0 &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_{ff}^i x_f(t) + A_{fs}^i x_s(t) + B_f^i u(t)] \\ \dot{x}_s(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_{sf}^i x_f(t) + A_{ss}^i x_s(t) + B_s^i u(t)] \\ y(t) &= C_f x_f(t) + C_s x_s(t) \end{cases}$$

- Vecteur de sortie augmenté :

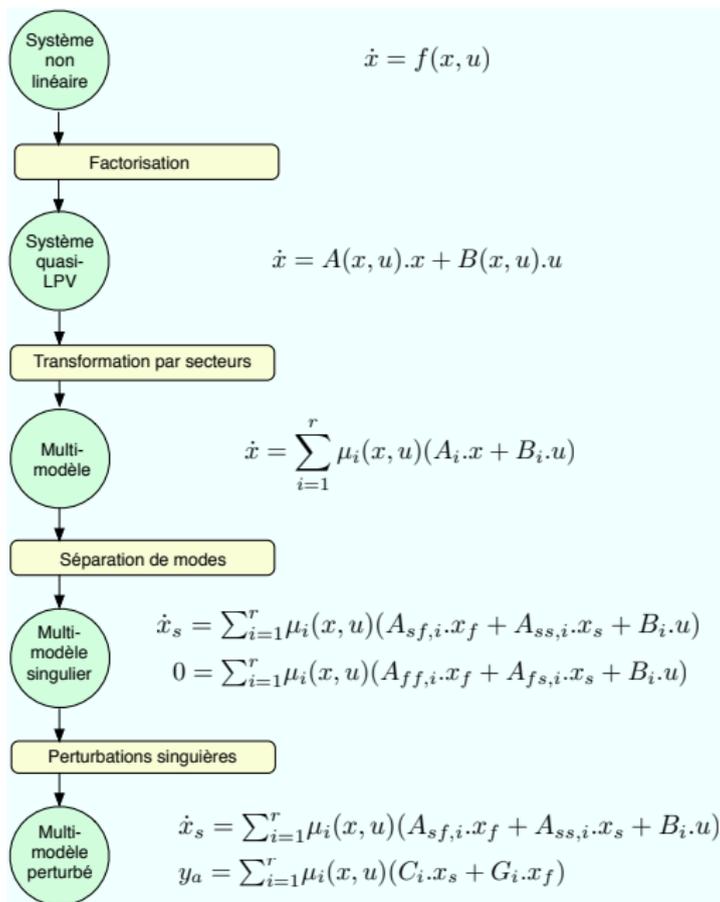
$$y_a(t) = \begin{bmatrix} -B_f(u(t))u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

- Forme MM avec variables d'état lentes et perturbations :

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_{ss}^i x_s(t) + B_s^i u(t) + A_{sf}^i x_f(t)] \\ y_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [C_i x_s(t) + G_i x_f(t)] \end{cases}$$

avec :

$$C_i = \begin{bmatrix} A_{fs}^i \\ C_s \end{bmatrix} \quad G_i = \begin{bmatrix} A_{ff}^i \\ C_f \end{bmatrix}$$



3. Observateur d'un multi-modèle

- Forme MM perturbée

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_{ss}^i x_s(t) + B_s^i u(t) + A_{sf}^i x_f(t)] \\ y_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [C_i x_s(t) + G_i x_f(t)] \end{cases}$$

- Vecteur d'état augmenté

$$x_a = \begin{bmatrix} x_s \\ x_f \end{bmatrix}$$

- Forme MM perturbée à état augmenté

En utilisant les notations précédentes et l'hypothèse d'entrées inconnues variant lentement, le système est équivalent au système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t), u(t)) [\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t)] \\ y_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t), u(t)) \tilde{C}_i x_a(t) \end{cases}$$

- Modèle du système : « forme MM augmentée »

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t), u(t)) [\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t)] \\ y_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t), u(t)) \tilde{C}_i x_a(t) \end{cases}$$

- Observateur proportionnel :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a, u) [\tilde{A}_i \hat{x}_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + K_i(y_a(t) - \hat{y}_a(t))] \\ \hat{y}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a, u) \tilde{C}_i \hat{x}_a(t) \end{cases}$$

- Réglage de l'observateur

4. Modèle d'un réacteur biologique

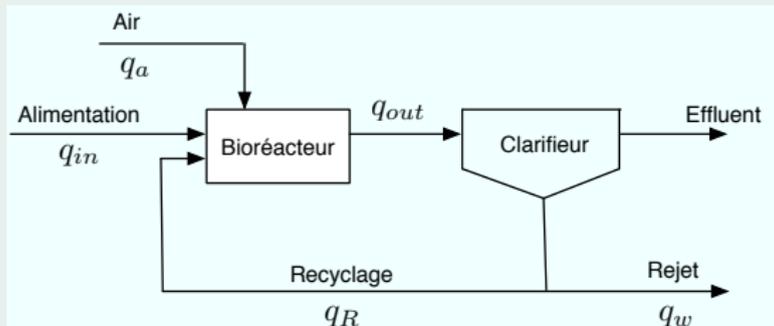
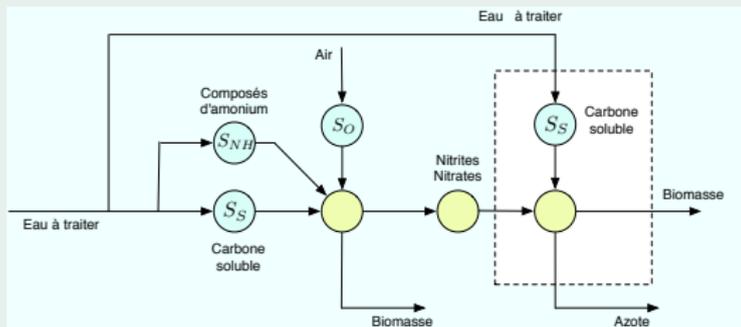


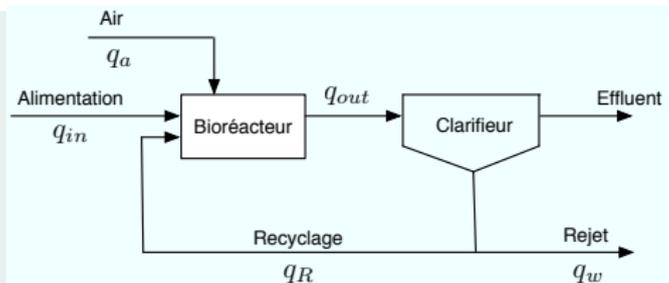
FIGURE: Schéma d'un réacteur biologique



		Entrée réacteur	Sortie réacteur	Recyclé
biomasse hété.	X_{BH}	$X_{BH,in}$	$X_{BH,out}$	$X_{BH,R}$
biomasse auto.	X_{BA}	$X_{BA,in}$	$X_{BA,out}$	$X_{BA,R}$
substrat	S_S	$S_{S,in}$	$S_{S,out}$	$S_{S,R}$
oxygène	S_O	$S_{O,in}$	$S_{O,out}$	$S_{O,R}$
azote amo.	S_{NH}	$S_{NH,in}$	$S_{NH,out}$	$S_{NH,R}$
nitrates	S_{NO}	$S_{NO,in}$	$S_{NO,out}$	$S_{NO,R}$
azote solu.	S_{ND}	$S_{ND,in}$	$S_{ND,out}$	$S_{ND,R}$
amonium	S_{NH}	$S_{NH,in}$	$S_{NH,out}$	$S_{NH,R}$
Débit effluent	q	q_{in}	q_{out}	q_R
Débit air	q_a			
Volume	V			

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{S}_S(t) = -\frac{1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) + (1 - f_P) b_H X_{BH}(t) + \\
 \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{S,in}(t) - S_S(t)] \\
 \dot{S}_O(t) = \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) + \\
 \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{O,in}(t) - S_O(t)] + K q_a(t) [S_{O,sat} - S_O(t)] \\
 \dot{X}_{BH}(t) = \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) - b_H X_{BH}(t) + \\
 \frac{q_{in}(t)}{V} \left[X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BH}(t) \right]
 \end{array} \right.$$

4.4 - Hypothèses de fonctionnement



Absence d'oxygène dissous à l'entrée du réacteur

$$S_{O,in}(t) = 0$$

Réacteur à volume constant

$$q_{out}(t) = q_{in}(t) + q_R(t)$$

Soutirage du décanteur

$$q_R(t) = f_R q_{in}(t), \quad 1 \leq f_R \leq 2$$

$$q_W(t) = f_W q_{in}(t), \quad 0 < f_W < 1$$

Décanteur parfait

$$q_{out}(t) X_{BH}(t) = [q_R(t) + q_W(t)] X_{BH,R}(t)$$

$$S_{S,R}(t) = S_S(t)$$

- Linéarisation du système non linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement (x_0, u_0) :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t)$$

où

$$A_0 = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}$$

$$B_0 = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}$$

- Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres ordonnées de A_0 , la plus grande (respectivement petite) valeur propre correspond à la dynamique la plus lente (respectivement rapide).
- Cette séparation est réalisée en fixant un seuil τ de séparation des deux échelles de temps :

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n_f} \ll \tau \leq \lambda_{n_f+1} \leq \dots \leq \lambda_n$$

4.6 - Modes de fonctionnement

- La séparation des dynamiques lentes et rapides est confirmée par les valeurs propres du jacobien A_0 , comme on peut le remarquer à la figure ci-dessous qui présente ces valeurs propres pour quarante points de fonctionnement.
- Deux valeurs propres (λ_2 et λ_3) sont incluses entre -50 et -0.4 et l'autre (λ_1) autour de -250 . En fixant un seuil à $\tau = 70$, on peut déduire que le système a une dynamique rapide ($x_f = S_S$) et deux dynamiques lentes ($x_s = [S_O \ X_{BH}]^T$).

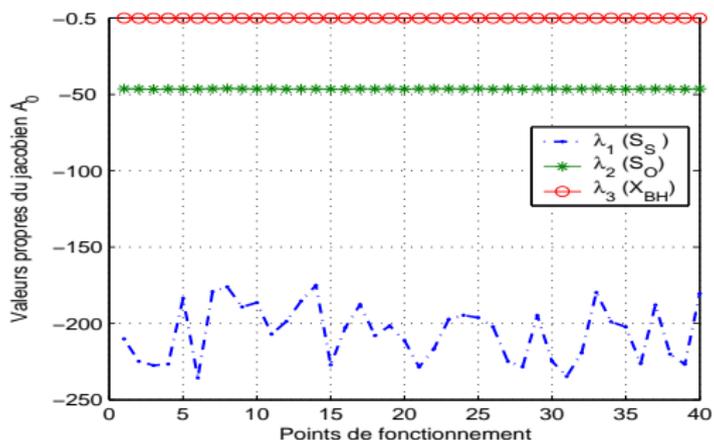


FIGURE: Valeurs propres du jacobien A_0 calculées pour plusieurs points de l'espace de fonctionnement

$$\begin{cases} \dot{S}_S(t) = -\frac{1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) + (1 - f_P) b_H X_{BH}(t) + \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{S,in}(t) - S_S(t)] \\ \dot{S}_O(t) = \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) + \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{O,in}(t) - S_O(t)] + K q_a(t) [S_{O,sat} - S_O(t)] \\ \dot{X}_{BH}(t) = \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) - b_H X_{BH}(t) + \frac{q_{in}(t)}{V} \left[X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BH}(t) \right] \end{cases}$$

- Variables de prémisse

$$\begin{cases} z_1(u(t)) = \frac{q_{in}(t)}{V} \\ z_2(x(t)) = \frac{1}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\ z_3(u(t)) = q_a(t) \end{cases}$$

- Transformation des variables de prémisse

$$z_i(t) = \frac{z_i(t) - z_{i,min}}{z_{i,max} - z_{i,min}} z_{i,max} + \frac{z_{i,max} - z_i(t)}{z_{i,max} - z_{i,min}} z_{i,min}$$

Forme quasi-LPV du modèle : les matrices $A(t) = A(x(t), u(t))$ et $B(t) = B(u(t))$ sont décomposées sous la forme :

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{ff}(t) & A_{fs}(t) \\ A_{sf}(t) & A_{ss}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_f(t) \\ B_s(t) \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{cases} A_{ff}(t) = -z_1(t) - \frac{1}{Y_H} \mu_H z_2(t) & A_{fs}(t) = [0 \quad (1 - f_P) b_H] \\ A_{sf}(t) = \begin{bmatrix} \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H z_2(t) \\ \mu_H z_2(t) \end{bmatrix} & A_{ss}(t) = \begin{bmatrix} -K z_3(t) - z_1(t) & 0 \\ 0 & -\frac{f_W(1+f_R)}{f_W+f_R} z_1(t) - b_H \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_f(t) = [z_1(t) \quad 0 \quad 0] \\ B_s(t) = \begin{bmatrix} 0 & K S_{O_{sat}} & 0 \\ 0 & 0 & z_1(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Les matrices constantes A_i et B_i représentant les 8 sous-modèles sont définies en utilisant les matrices A et B et les scalaires z_i :

$$A_{ff}^i = A_{ff}(z_1, \sigma_i^1, z_2, \sigma_i^2)$$

$$A_{fs}^i = [0 \quad (1 - f_P) b_H]$$

$$A_{sf}^i = A_{sf}(z_2, \sigma_i^2)$$

$$A_{ss}^i = A_{ss}(z_1, \sigma_i^1, z_3, \sigma_i^3)$$

$$B_f^i = B_f(z_1, \sigma_i^1)$$

$$B_s^i = B_s(z_1, \sigma_i^1) \quad i = 1, \dots, 8$$

Le modèle est ainsi écrit de façon équivalente sous la forme MM en utilisant la séparation en variables d'état lentes et rapides.

Considérons le vecteur de sortie $y = C_f x_f + C_s x_s$ ayant les matrices correspondantes :

$$C_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant l'observateur au modèle ASM1, représenté sous une forme MM équivalente, les résultats d'estimation d'état sont tout à fait pertinents. Le gain \mathcal{L}_2 de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est bornée par $\gamma = 1.203$.

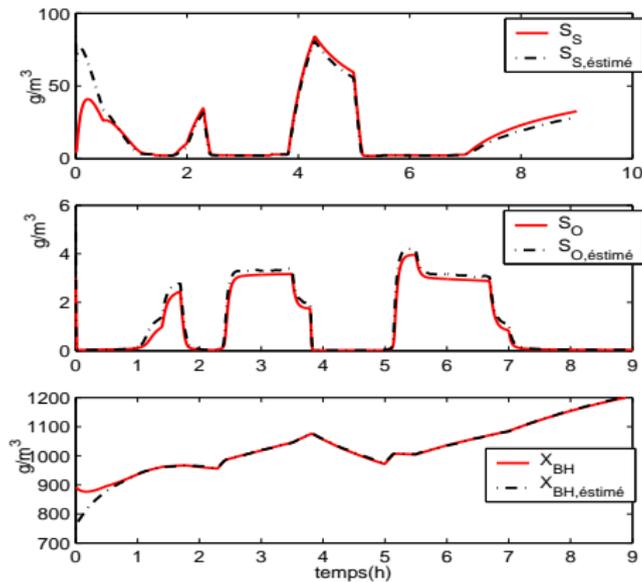


FIGURE: Estimation d'état (observateur proportionnel intégral)

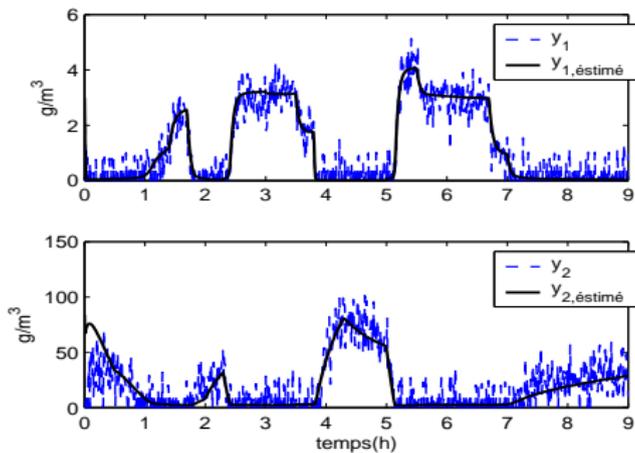


FIGURE: Sorties et sorties estimées

Apports

- ▶ Observateur de systèmes non linéaires
- ▶ Réduction de complexité sans perte d'information
- ▶ Séparation des modes lents et rapides
- ▶ Observateur à entrées inconnues pour l'estimation d'état

Perspectives

- ▶ Optimisation de la transformation **SNL** → **MM**
- ▶ Atténuation de l'effet du bruit de mesure