

Estimation d'état des multimodèles à deux échelles de temps. Application au réacteur biologique

Anca Maria Nagy-Kiss, Benoît Marx, Gilles Mourot, José Ragot

Abstract— Cette communication concerne l'estimation d'état de systèmes non linéaires caractérisés par deux échelles de temps. L'estimation d'état est réalisée en construisant un observateur proportionnel intégral à entrées inconnues. Pour construire un tel observateur, le système non linéaire est transformé sous une forme multimodèle équivalente et les dynamiques rapides sont considérées comme des entrées inconnues. Une application au modèle ASM1 réduit d'une station d'épuration est considérée, les résultats numériques obtenus illustrent les performances de l'approche proposée.

Index Terms— multimodèle, systèmes singuliers, variables de prémisses non mesurables, LMI, approche $\mathcal{L}_2$

I. INTRODUCTION

L'application des méthodes linéaires aux systèmes non linéaires représente un problème délicat surtout concernant la synthèse d'observateur ou de loi de commande. Le multimodèle (MM) [12] - également appelé dans la littérature le modèle Takagi-Sugeno [17] ou modèle linéaire polytopique [1]- a reçu beaucoup d'attention dans les deux dernières décennies, pour résoudre cette difficulté. La structure multimodèle est basée sur le principe de la réduction de complexité de systèmes non linéaires, en construisant des sous-modèles linéaires qui sont ensuite interpolés en utilisant des fonctions de pondération appropriées [17]. Différentes techniques ont été développées pour obtenir un MM à partir d'une représentation générale d'un système non linéaire. Dans cette communication, le MM est obtenu en appliquant une méthode proposée dans [13]. Seules les étapes essentielles de cette méthode seront données ici.

Dans la pratique, les systèmes peuvent avoir plusieurs échelles de temps. Pour pouvoir étudier de tels systèmes, la théorie des perturbations singulières est souvent utilisée pour proposer la décomposition du système en plusieurs échelles de temps. Pourtant, il n'est pas toujours trivial de modéliser un procédé sous forme singulière standard à deux échelles de temps.

La première étape de cette technique de modélisation est la séparation des dynamiques lentes et rapides. Différentes méthodes sont proposées dans la littérature [16], [15], [6]; la plus courante, basée sur une évaluation des valeurs propres du jacobien du système linéarisé, est utilisée dans cette communication.

Après la séparation en plusieurs échelles de temps, un système singulièrement perturbé standard est obtenu. Dans

le cas limite, où le paramètre de perturbation singulière tend vers zéro, cette forme a une partie dynamique, représentée par une équation différentielle ordinaire (ODE) et une partie statique exprimée par une équation algébrique. Ainsi, une deuxième difficulté est la résolution du système algébrique afin d'extraire les variables rapides et les remplacer dans l'ODE correspondant aux variables lentes, ce qui n'est pas un problème trivial. Une méthode souvent utilisée pour résoudre ce problème est basée sur un changement de coordonnées [16], [18] qui nécessite une transformation linéaire afin d'éliminer les composantes dynamiques rapides. Pour pouvoir appliquer cette méthode, le système non linéaire doit respecter quelques contraintes structurelles, ce qui n'est pas le cas de tous les systèmes.

En considérant la forme "perturbation singulière standard", un multimodèle équivalent peut être écrit. La forme classique du MM est légèrement modifiée afin de séparer les différentes échelles de temps.

La contribution de cette communication est d'estimer les variables d'état de systèmes non linéaires à deux échelles de temps en évitant la résolution de l'équation algébrique - statique- correspondant aux variables d'état rapides. Ceci est possible en construisant un vecteur de sortie augmenté en utilisant l'équation statique et en considérant les variables d'état rapides comme des entrées inconnues. Ainsi, un observateur proportionnel intégral (PIO) à entrées inconnues peut être construit en utilisant la forme MM à deux échelles de temps. À cause du nombre limité de capteurs, cette approche s'avère intéressante grâce au choix des variables rapides comme des entrées inconnues. Cet observateur permet de reconstruire simultanément les variables d'état lentes et rapides et donne des résultats plus précis en ce qui concerne l'influence du bruit sur la reconstruction de l'état, qu'un observateur classique à entrées inconnues [8].

Dans [11] est présentée une méthode d'estimation d'état pour les MM sous forme singulière affectés par des entrées inconnues et à variables de prémisses mesurables. Comme dans [11], la plupart des travaux existants, dédiés aux MM en général et à la construction d'un observateur en particulier [4], [9], sont basés sur des variables de prémisses mesurables (entrées/sorties). Cependant, dans beaucoup de situations, ces variables de prémisses dépendent des variables d'état, qui ne sont pas toujours accessibles. Récemment, ont été publiés quelques travaux [2], [8], [19] dédiés au cas de variables de prémisses non mesurables. Cette dernière situation est traitée ici. Les conditions de convergence de l'erreur d'estimation de l'état et des entrées inconnues sont exprimées sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) en utilisant la

A. M. Nagy-Kiss, B. Marx, G. Mourot, J. Ragot are with Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039 - Nancy-Université, CNRS, 2, avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex France anca-maria.nagy, gilles.mourot, benoit.marx, jose.ragot@ensem.inpl-nancy.fr

méthode de Lyapunov et l'approche $\mathcal{L}_2$.

Dans cet article, la structure MM et la théorie des perturbations singulières sont utilisées pour estimer les états d'une version réduite du modèle ASM1 (Activate Sludge Model 1)[14] décrivant un processus d'épuration des eaux usées caractérisé par deux échelles de temps. L'observateur proportionnel intégral proposé précédemment est appliqué à ce modèle pour réaliser l'estimation d'état.

À la section II sont donnés les outils de base de modélisation des systèmes non linéaires qui sont utilisés dans cette communication, l'observateur étant présenté à la section III. La section IV contient l'application au modèle de la station d'épuration. L'article présente enfin quelques conclusions et perspectives.

II. OUTILS DE MODÉLISATION

A. Représentation multimodèle

Soit le système non linéaire décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^l$ le vecteur de sortie et les fonctions $f(x, u) \in \mathbb{R}^n$, $g(x, u) \in \mathbb{R}^l$.

Le multimodèle permet de représenter un système non linéaire comme une combinaison convexe de r sous-modèles linéaires :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t), u(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t), u(t)) [C_i x(t) + D_i u(t)] \end{aligned} \quad (2)$$

où A_i , B_i , C_i et D_i sont des matrices à coefficients constants de dimensions appropriées. Les fonctions $\mu_i(x, u)$ représentent les pondérations des sous-modèles $\{A_i, B_i, C_i, D_i\}$ dans la description du modèle global. Ces fonctions ont les propriétés suivantes :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_i(x, u) \geq 0, \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Pour obtenir la forme MM, on utilise une méthode qui offre une réécriture équivalente à celle du système non linéaire (1) [13].

Premièrement, en extrayant les vecteurs d'état et d'entrée contenus dans les fonctions f et g , le système (1) est transformé en une forme quasi-linéaire à paramètres variables (quasi-LPV) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t), u(t)) x(t) + B(x(t), u(t)) u(t) \\ y(t) &= C(x(t), u(t)) x(t) + D(x(t), u(t)) u(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Deuxièmement, quelques composantes non linéaires des matrices A , B , C et D sont considérées comme "variables de prémisses" et notées $z_j(x, u)$ ($j = 1, \dots, q$). Plusieurs choix de ces variables de prémisses sont possibles grâce à l'existence des plusieurs formes quasi-LPV (plus de détails sur la procédure de sélection peuvent être trouvés dans [13]).

Troisièmement, une transformation polytopique convexe est

réalisée pour toutes les variables de prémisses ($j = 1, \dots, q$), comme suit :

$$z_j(x, u) = F_{j,1}(z_j(x, u)) z_{j,1} + F_{j,2}(z_j(x, u)) z_{j,2} \quad (4)$$

où

$$z_{j,1} = \max_{x,u} \{z_j(x, u)\} \quad (5a)$$

$$z_{j,2} = \min_{x,u} \{z_j(x, u)\} \quad (5b)$$

$$F_{j,1}(z_j(x, u)) = \frac{z_j(x, u) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad (6a)$$

$$F_{j,2}(z_j(x, u)) = \frac{z_{j,1} - z_j(x, u)}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad (6b)$$

Remarque 1. Pour q variables de prémisses z_j , $r = 2^q$ sous-modèles sont obtenus. En multipliant entre elles les fonctions F_{j,σ_i^j} , les fonctions de pondération sont obtenues :

$$\mu_i(x, u) = \prod_{j=1}^q F_{j,\sigma_i^j}(z_j(x, u)), \quad i = 1, \dots, r \quad (7)$$

où les indices σ_i^j ($i = 1, \dots, 2^q$ et $j = 1, \dots, q$), égaux à 1 ou 2, indiquent quelle partition de la $j^{\text{ème}}$ variable de prémisses ($F_{j,1}$ ou $F_{j,2}$) est impliquée dans le $i^{\text{ème}}$ sous-modèle.

Dans (2), les matrices constantes A_i , B_i , C_i et D_i ($i = 1, \dots, 2^q$) sont obtenues en remplaçant les variables de prémisses $z_j(x, u)$ impliquées dans les matrices $A(x, u)$, $B(x, u)$, $C(x, u)$ et $D(x, u)$ par les scalaires définies dans (5). Ici, seules les matrices A_i sont présentées, les autres matrices B_i , C_i et D_i étant obtenues de façon similaire :

$$A_i = A(z_{1,\sigma_i^1}, \dots, z_{q,\sigma_i^q}), \quad i = 1, \dots, r \quad (8)$$

B. Systèmes singuliers

En considérant l'équation (1), la forme standard des systèmes singuliers à deux échelles de temps est exprimée par le système suivant :

$$\varepsilon \dot{x}_f(t) = f_f(x_s(t), x_f(t), u(t), \varepsilon) \quad (9a)$$

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t), x_f(t), u(t), \varepsilon) \quad (9b)$$

où $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$ et $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$ sont respectivement les variables lentes et rapides, $f_f(x, u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_f}$, $f_s(x, u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_s}$, $n = n_s + n_f$ et ε est un petit paramètre positif, connu sous le nom de *paramètre de perturbation singulière*.

Pour obtenir la forme standard des systèmes singuliers, l'identification et la séparation des dynamiques lentes et rapides est le point essentiel. Dans cet article, ceci est réalisé en utilisant la méthode d'homotopie pour le système linéarisé [18]. Cette méthode permet de lier chaque variable d'état à une valeur propre. En comparant toutes les valeurs propres, les plus grandes (respectivement petites) seront associées avec les dynamiques les plus lentes (respectivement rapides). La comparaison doit être réalisée après avoir effectué la linéarisation du système autour plusieurs points de fonctionnement afin de tester si la classification reste la même quel que soit le point de fonctionnement.

Remarque 2. Notons que le système linéarisé est utilisé seulement pour identifier les dynamiques rapides et lentes, et non pour construire l'observateur afin d'estimer les variables d'état. Une forme MM équivalente au système non linéaire sera utilisée pour réaliser cette reconstruction.

Dans le cas limite où $\varepsilon \rightarrow 0$, le degré du système (9) dégénère de n à $n_s < n$ et le système devient :

$$0 = f_f(x_s(t), x_f(t), u(t), 0) \quad (10a)$$

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t), x_f(t), u(t), 0) \quad (10b)$$

En résolvant les équations algébriques (10a), la solution $x_f(t) = \varphi(x_s(t), u(t))$ est obtenue et utilisée dans (10b) pour déduire le système réduit :

$$x_f(t) = \varphi(x_s(t), u(t)) \quad (11a)$$

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t), x_f(t), u(t)) \quad (11b)$$

Remarque 3. Les variables rapides ne peuvent pas toujours être exprimées de façon explicite à partir de l'équation (10a). L'une des méthodes les plus connues qui traitent ce problème est basée sur un changement de coordonnées [16], [18], qui suppose l'existence d'une transformation linéaire afin d'éliminer les dynamiques rapides. Cependant, cette méthode peut seulement être appliquée aux systèmes pour lesquels une telle transformation peut être trouvée.

Tenant compte des précédentes remarques, on ne va pas chercher à réaliser un changement de coordonnées pour expliciter la solution (11a); la forme réduite standard du système singulier (10) sera considérée, en supposant que les variables rapides ne peuvent pas être obtenues en résolvant l'équation algébrique (10a). Ainsi, cette dernière équation sera utilisée pour construire un vecteur de sortie augmenté, comme décrit en détail dans la section qui suit, dans laquelle la construction d'un observateur proportionnel intégral est présentée.

III. ESTIMATION D'ÉTAT

A. Multimodèle à deux échelles de temps

Considérons le système réduit (10) sous une forme MM équivalente, qui est obtenue en utilisant la méthodologie décrite dans [13]. La forme MM est légèrement modifiée afin de mettre en évidence les variables d'état lentes et rapides, comme suit :

$$0 = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_{ff}^i x_f(t) + A_{fs}^i x_s(t) + B_f^i u(t)] \quad (12)$$

$$\dot{x}_s(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_{ss}^i x_s(t) + A_{sf}^i x_f(t) + B_s^i u(t)] \quad (13)$$

$$y(t) = C_f x_f(t) + C_s x_s(t) \quad (14)$$

où les matrices $A_{ff}^i, A_{fs}^i, A_{sf}^i, A_{ss}^i, B_f^i, B_s^i$ correspondent aux dynamiques lentes et rapides identifiées dans les matrices A_i et B_i :

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{ff}^i & A_{fs}^i \\ A_{sf}^i & A_{ss}^i \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} B_f^i \\ B_s^i \end{bmatrix} \quad (15)$$

On peut considérer que l'équation de mesure (14) est linéaire et invariante dans le temps.

Remarque 4. L'existence de plusieurs formes quasi-LPV (3) d'un système non linéaire (1) permet parfois le choix d'une forme quasi-LPV dans laquelle la matrice B ne dépend que de la variable d'entrée : $B = B(u(t))$. Dans ce cas particulier, les variables de prémisse provenant de la matrice B ne dépendront que de u . Cependant, les fonctions de pondération dépendront de x et de u , car elles sont construites à partir des produits des fonctions de partitions de toutes les variables de prémisse (voir équation (7)). Dans la première équation (12) on déplace le terme de commande de la partie droite vers la partie gauche de l'égalité. On obtient :

$$\begin{aligned} -B_f(u(t)) u(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_{ff}^i x_f(t) + A_{fs}^i x_s(t)] \\ \dot{x}_s(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_{ss}^i x_s(t) + A_{sf}^i x_f(t) \\ &\quad + B_s^i u(t)] \\ y(t) &= C_f x_f(t) + C_s x_s(t) \end{aligned} \quad (16)$$

Alors, un vecteur de sortie augmenté est proposé :

$$y_a(t) = \begin{bmatrix} -B_f(u(t))u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Le système (16) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_{ss}^i x_s(t) + B_s^i u(t) + A_{sf}^i x_f(t)] \\ y_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [C_i x_s(t) + G_i x_f(t)] \end{aligned} \quad (18)$$

où les matrices C_i et G_i sont données par :

$$C_i = \begin{bmatrix} A_{fs}^i \\ C_s \end{bmatrix} \quad G_i = \begin{bmatrix} A_{ff}^i \\ C_f \end{bmatrix} \quad (19)$$

Comme on peut le remarquer, le nouveau vecteur de sortie y_a n'est plus linéaire par rapport à la variable d'état x (comme l'était le vecteur initial $y(t)$).

On considère ainsi le système (18) comme un MM affecté par des entrées inconnues x_f . Notons le vecteur des entrées inconnues $d(t) = x_f(t)$, avec la propriété suivante :

$$\dot{d}(t) = 0 \quad (20)$$

La supposition que $d(t)$ soit constante est nécessaire dans le cadre de la construction d'un PIO pour pouvoir démontrer théoriquement la convergence de l'erreur d'estimation d'état [10]. Cependant, il est connu qu'en pratique il suffit d'avoir un signal de basse fréquence. Le terme "rapide" se réfère aux dynamiques de x_s . En effet, $x_f(t)$ est - pour $\varepsilon \rightarrow 0$ - une fonction statique de $x_s(t)$ qui obéit à un processus dynamique lent. En conséquence, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (i.e. quand on néglige le comportement dynamique de la partie rapide du système), $x_f(t)$ est aussi un signal à dynamique lente.

Considérons le vecteur d'état augmenté

$$x_a = \begin{bmatrix} x_s \\ d \end{bmatrix}$$

et les matrices:

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_{ss}^i & A_{sf}^i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_s^i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_i = [C_i \quad G_i]$$

En utilisant les notations précédentes et la propriété des entrées inconnues (20), le système (18) est équivalent au système augmenté :

$$\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t), u(t)) [\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t)] \quad (21a)$$

$$y_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t), u(t)) \tilde{C}_i x_a(t) \quad (21b)$$

Afin de faciliter la synthèse de l'observateur, en utilisant dans les fonctions μ_i l'état estimé $\hat{x}_a$, l'équation d'état peut s'écrire :

$$\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a, u) [\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + \Gamma \tilde{w}(t)] \quad (22a)$$

$$y_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a, u) \tilde{C}_i x_a(t) + \Psi \tilde{w}(t) \quad (22b)$$

où $\Gamma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Psi = [0 \quad I]$ et le terme $\tilde{w}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ joue le rôle d'une perturbation bornée dont les composantes s'explicitent :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^r [\mu_i(x_a, u) - \mu_i(\hat{x}_a, u)] [\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t)] \quad (23)$$

$$v(t) = \sum_{i=1}^r [\mu_i(x_a, u) - \mu_i(\hat{x}_a, u)] \tilde{C}_i \hat{x}_a \quad (24)$$

B. Observateur Proportionnel Intégral

L'observateur proportionnel intégral avec une forme augmentée est donné par :

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a, u) [\tilde{A}_i \hat{x}_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + K_i(y_a(t) - \hat{y}_a(t))] \quad (25a)$$

$$\hat{y}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a, u) \tilde{C}_i \hat{x}_a(t) \quad (25b)$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \quad (26)$$

Les conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état $e_a(t)$ sont données par le résultat suivant :

Théorème 1. L'erreur d'estimation d'état entre l'observateur proportionnel intégral (25) et le système (22) converge, s'il existe une matrice symétrique et définie positive X , des matrices M_i et un scalaire positif λ telle que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout $i, j = 1, \dots, r$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T X + X \tilde{A}_i - \tilde{C}_j^T M_i^T - M_i \tilde{C}_j + I & X \Gamma - M_i \Psi \\ \Gamma^T X - \Psi^T M_i^T & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

Les gains de l'observateur sont donnés par: $K_i = X^{-1} M_i$.

Démonstration. En tenant compte de (22a) et (25a) l'erreur d'estimation de l'état augmentée est gouvernée par :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\hat{x}_a, u) \mu_j(\hat{x}_a, u) [\phi_{i,j} e_a(t) + \Gamma_i \tilde{w}(t)] \quad (28)$$

où les notations suivantes sont utilisées :

$$\phi_{i,j} = \tilde{A}_i - K_i \tilde{C}_j \quad (29)$$

$$\Gamma_i = \Gamma - K_i \Psi \quad (30)$$

On note que la dynamique de l'erreur d'estimation d'état $\dot{e}_a(t)$ est seulement perturbée par $\tilde{w}(t)$. Rappelons quelques outils basés sur l'approche $\mathcal{L}_2$ qui mènent au résultat final. Conformément à [3], l'erreur d'estimation d'état $e_a(t)$ converge et le gain $\mathcal{L}_2$ de $\tilde{w}(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par γ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \phi_{i,j}^T X + X \phi_{i,j} + I & X \Gamma_i \\ \Gamma_i^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad i, j = 1, \dots, r \quad (31)$$

En utilisant les changements de variables suivants

$$\lambda = \gamma^2 \quad M_i = X K_i$$

on obtient les LMI données dans (27), ce qui conclut la preuve du théorème. $\square$

Corolaire. Afin d'augmenter la qualité de l'estimation, quelques conditions supplémentaires [5] peuvent être rajoutées aux conditions (27) :

$$\tilde{A}_i^T X + X \tilde{A}_i - \tilde{C}_j^T M_i^T - M_i \tilde{C}_j + 2\alpha X < 0 \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} RX & \tilde{A}_i^T X - M_i \tilde{C}_j \\ X \tilde{A}_i - \tilde{C}_j^T M_i^T & RX \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

pour tout $i, j = 1, \dots, r$. Ces conditions assurent le fait que les valeurs propres du système générant l'erreur d'estimation d'état (28) se retrouvent dans la région du plan complexe suivante (voir figure 1) :

$$\mathcal{S}(\alpha, R) = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(w) < -\alpha, |w| < R\} \quad (34)$$

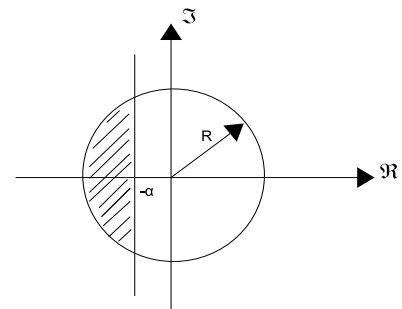


Fig. 1. Région du plan complexe

On présente dans la suite l'application de la procédure d'estimation d'état proposée au modèle d'une station d'épuration.

IV. APPLICATION

A. Description du processus et du modèle non linéaire ASM1

L'épuration des eaux usées consiste à mettre en contact par brassage les eaux usées avec un mélange riche en bactéries pour dégrader et éliminer les polluants contenus dans l'eau, en suspension ou dissous [14].

Le principe de fonctionnement du procédé est décrit brièvement dans la suite. Le schéma simplifié, donné dans la figure 2, inclut un bioréacteur et un décanteur. Dans cette figure, q_{in} représente le débit d'entrée, q_{out} le débit de sortie du réacteur, q_a le débit d'air, q_R , q_W représentent respectivement le débit recyclé et rejeté. Le volume du réacteur est supposé constant : $q_{out} = q_{in} + q_R$. En général, q_R et q_W représentent des fractions du débit d'entrée q_{in} :

$$q_R(t) = f_R q_{in}(t), \quad 1 \leq f_R \leq 2 \quad (35)$$

$$q_W(t) = f_W q_{in}(t), \quad 0 < f_W < 1 \quad (36)$$

L'eau polluée provenant d'une source externe circule dans le bassin d'aération dans lequel la biomasse bactérienne dégrade la matière organique. Les micro-organismes s'agglomèrent en flocs et produisent les boues. La liqueur mixte est ensuite envoyée dans le décanteur où la séparation de l'eau épurée et des flocs bactériens est faite par gravité. Une fraction des boues décantées est recyclée vers l'aérateur pour maintenir sa capacité d'épuration. L'eau épurée est rejetée dans le milieu naturel.

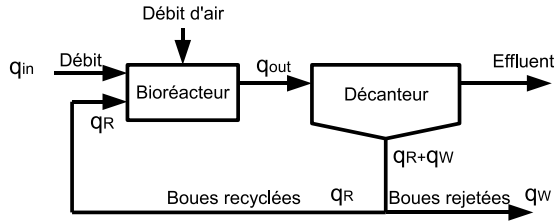


Fig. 2. Le schéma de fonctionnement d'un réacteur biologique

Le modèle ASM1 est souvent utilisé pour décrire ce processus. Pour des raisons de simplicité, seule la pollution carbonée au niveau du réacteur est considérée. Ainsi, la méthode d'estimation proposée est illustrée en utilisant un modèle réduit à trois états $x = [S_S, S_O, X_{BH}]^T$:

$$\begin{aligned} \dot{S}_S(t) &= -\frac{1}{Y_H} \mu_H \phi_1(t) + (1 - f_P) b_H \phi_2(t) + D_1(t) \\ \dot{S}_O(t) &= \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H \phi_1(t) + D_2(t) \\ \dot{X}_{BH}(t) &= \mu_H \phi_1(t) - b_H \phi_2(t) + D_3(t) \end{aligned} \quad (37)$$

où :

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{S,in}(t) - S_S(t)] \\ D_2(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{O,in}(t) - S_O(t)] + K q_a(t) [S_{O,sat} - S_O(t)] \\ D_3(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \left[X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BH}(t) \right] \end{aligned} \quad (38)$$

Les cinétiques du processus sont :

$$\phi_1(t) = \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \quad (39)$$

$$\phi_2(t) = X_{BH}(t) \quad (40)$$

Les variables impliquées sont présentées dans le tableau I. On suppose que la concentration d'oxygène dissous à l'entrée du réacteur est nulle :

$$S_{O,in}(t) = 0$$

Le décanteur est supposé parfait, i.e. tout ce qui entre dans le décanteur est recirculé ou rejeté. Dans ce cas, on peut écrire à chaque instant :

$$[q_{in}(t) + q_R(t)] X_{BH}(t) = [q_R(t) + q_W(t)] X_{BH,R}(t) \quad (41a)$$

$$S_{S,R}(t) = S_S(t) \quad (41b)$$

	Entrée du réacteur	Sortie du réacteur	Recyclé
X_{BH}	Concentration biomasse hétérotrophe		
	$X_{BH,in}$	$X_{BH,out}$	$X_{BH,R}$
S_S	Concentration du substrat rapidement biodégradable		
	$S_{S,in}$	$S_{S,out}$	$S_{S,R}$
S_O	Concentration d'oxygène dissout		
	$S_{O,in}$	$S_{O,out}$	$S_{O,R}$
q	Débit		
	q_{in}	q_{out}	q_R
q_a	Débit d'air		
V	Volume du réacteur		

TABLE I

TABLEAU DES VARIABLES

On utilise les paramètres suivants de croissance et de décroissance [14] : $\mu_H = 3.733[1/24h]$, $K_S = 20[g/m^3]$, $K_{OH} = 0.2[g/m^3]$, $b_H = 0.3[1/24h]$. Les paramètres stoechiométriques sont $Y_H = 0.6$, $f_P = 0.1$ et la concentration de saturation de l'oxygène est $S_{O,sat} = 10[g/m^3]$. Les valeurs numériques considérées pour les fractions f_R et f_W sont : $f_R = 1.1$ et $f_W = 0.04$.

B. Dynamiques rapides et lentes

Considérons la linéarisation du système non linéaire (37) autour de plusieurs points de fonctionnement (x_0, u_0) :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) \quad (42)$$

où $A_0 = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \big|_{(x_0, u_0)}$ et $B_0 = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \big|_{(x_0, u_0)}$.

Si on considère $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres ordonnées de A_0 , la plus grande (respectivement petite) valeur propre correspond à la dynamique la plus lente (respectivement rapide). Cette séparation est réalisée en fixant un seuil τ de séparation des deux échelles de temps :

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n_f} < \tau \leq \lambda_{n_f+1} \leq \dots \leq \lambda_n$$

Pour le modèle ASM1 réduit (37), la séparation des dynamiques lentes et rapides est confirmée par les valeurs propres du jacobien A_0 , comme on peut le remarquer à la figure 3 qui présente ces valeurs propres pour quarante points

de fonctionnement. Deux valeurs propres (λ_2 et λ_3) sont incluses entre -50 et -0.4 et l'autre (λ_1) autour de -250 . En fixant un seuil à $\tau = 70$, on peut déduire que le système a une dynamique rapide ($x_f = S_S$) et deux dynamiques lentes ($x_s = [S_O \ X_{BH}]^T$).

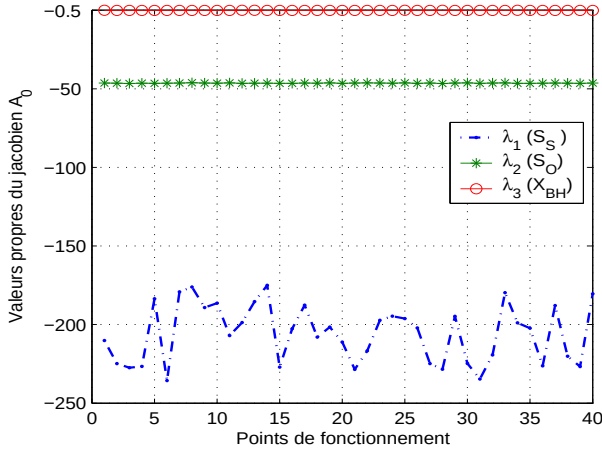


Fig. 3. Les valeurs propres du jacobien A_0 calculées dans plusieurs points de l'espace de fonctionnement

C. La forme multimodèle

Un multimodèle équivalent est construit pour concevoir un observateur qui permet d'estimer les variables d'état rapides et lentes.

En considérant les équations du processus (37) et (38), il est naturel de définir les variables de prémisse suivantes :

$$z_1(u(t)) = \frac{q_{in}(t)}{V} \quad (43a)$$

$$z_2(x(t)) = \frac{1}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \quad (43b)$$

$$z_3(u(t)) = q_a(t) \quad (43c)$$

On considère le vecteur d'entrée défini par :

$$u(t) = [S_{S,in}(t) \ q_a(t) \ X_{BH,in}(t)]^T \quad (44)$$

On construit la forme quasi-LPV du modèle (37) caractérisée par les matrices $A(t) = A(x(t), u(t))$ et $B(t) = B(u(t))$ décomposées de la façon suivante :

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{ff}(t) & A_{fs}(t) \\ A_{sf}(t) & A_{ss}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_f(t) \\ B_s(t) \end{bmatrix} \quad (45)$$

où

$$A_{ff}(t) = -z_1(t) - \frac{1}{Y_H} \mu_H z_2(t) \quad (46)$$

$$A_{fs}(t) = \begin{bmatrix} 0 & (1 - f_P)b_H \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$B_f(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$A_{sf}(t) = \begin{bmatrix} \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H z_2(t) \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$A_{ss}(t) = \begin{bmatrix} -Kz_3(t) - z_1(t) & 0 \\ 0 & \left[\frac{f_R(1-f_W)}{f_W+f_R} - 1 \right] z_1(t) - b_H \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$B_s(t) = \begin{bmatrix} 0 & K S_{O,sat} & 0 \\ 0 & 0 & z_1(t) \end{bmatrix} \quad (51)$$

La décomposition des variables de prémisse (43) est réalisée en utilisant la transformation polytopique convexe, comme dans (4), (5) et (6). En multipliant les fonctions $F_{i,j}$, les $r = 8$ fonctions de pondérations $\mu_i(z(x, u))$ sont obtenues :

$$\mu_i(z(x, u)) = F_{1,\sigma_i^1}(x, u) F_{2,\sigma_i^2}(x, u) F_{3,\sigma_i^3}(x, u)$$

Les matrices constantes A_i et B_i représentant les 8 sous-modèles sont définies comme dans (15) en utilisant les matrices A et B et les scalaires (5) :

$$\begin{aligned} A_{ff}^i &= A_{ff}(z_{1,\sigma_i^1}, z_{2,\sigma_i^2}) \\ A_{fs}^i &= [0 \ (1 - f_P)b_H] \\ A_{sf}^i &= A_{sf}(z_{2,\sigma_i^2}) \\ A_{ss}^i &= A_{ss}(z_{1,\sigma_i^1}, z_{3,\sigma_i^3}) \\ B_f^i &= B_f(z_{1,\sigma_i^1}) \\ B_s^i &= B_s(z_{1,\sigma_i^1}) \quad i = 1, \dots, 8 \end{aligned} \quad (52)$$

Le modèle (37) est ainsi écrit de façon équivalente sous la forme MM en utilisant la séparation en variables d'état lentes et rapides.

Considérons le vecteur de sortie $y = C_f x_f + C_s x_s$ ayant les matrices correspondantes :

$$C_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

En appliquant le **Théorème 1** au modèle ASM1 réduit (37), représenté sous une forme MM équivalente, les résultats d'estimation d'état présentés à la figure 4 sont tout à fait pertinents. Le gain $\mathcal{L}_2$ de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est bornée par $\gamma = 1.203$.

L'estimation de l'état rapide S_S , considéré comme entrée inconnue dans le multimodèle, est présentée en premier, étant suivie par les résultats d'estimation des états lents S_O et X_{BH} . Un bruit de mesure est considéré sur la sortie, comme on peut le remarquer à la figure 5. Malgré la présence de ce bruit, l'observateur proposé dans cet article permet d'assurer une convergence rapide vers zéro de l'erreur d'estimation d'état. En plus, comme on peut le remarquer à la figure 4, l'état S_S considéré comme entrée inconnue n'est pas constant, ce qui est une hypothèse demandée dans le cadre de la construction du PIO. Toutefois, les résultats d'estimation obtenus dans la pratique pour le modèle d'un réacteur biologique montrent qu'il suffit d'avoir un signal de base fréquence afin d'obtenir des bons résultats d'estimation.

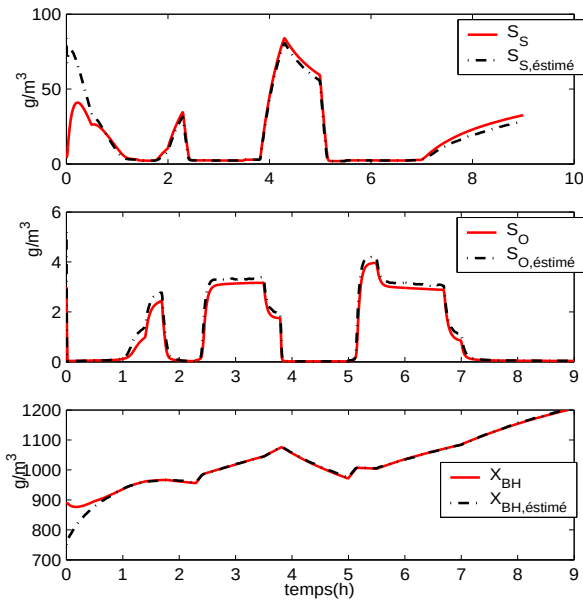


Fig. 4. Estimation d'état en utilisant l'observateur proportionnel intégral

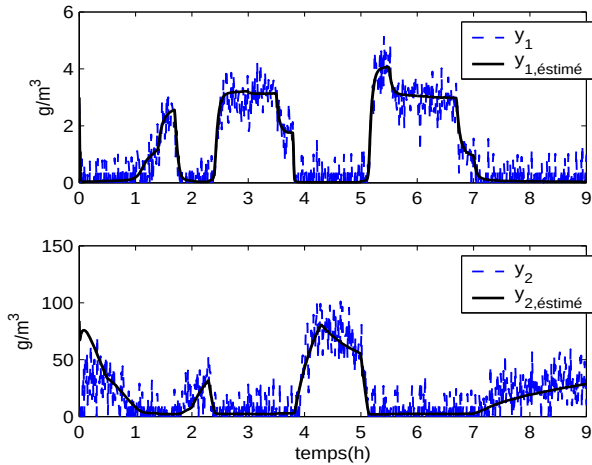


Fig. 5. Sorties

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Cet article propose l'estimation d'état des systèmes à deux échelles de temps représentés sous forme multimodèle à variables de prémisses non mesurables, en utilisant un observateur proportionnel intégral à entrées inconnues. Le système non linéaire est mis sous une forme MM qui met en évidence les dynamiques lentes et rapides, les variables d'état rapides étant ensuite considérées comme des entrées inconnues et estimées simultanément avec les variables d'état lentes.

L'application au modèle ASM1 réduit offre des bons résultats d'estimation d'état. Comme travaux futurs, on envisage premièrement la construction d'un observateur proportionnel multi-intégral, et deuxièmement, une extension au modèle ASM1 complet.

VI. REMERCIEMENTS

Nous remercions le Fonds National de la Recherche du Luxembourg pour son support financier. Cette recherche est également supportée par le programme TASSILI sous le numéro PAI 07 MDU grant 714 et par le Groupement pour l'Évaluation des Mesures en Continu dans les Eaux et en Assainissement.

REFERENCES

- [1] G. Angelis, R. Kamidi, R. Van De Molengraft, H. Nijmeijer. "Optimal polytopic control system design." *Proc. of the 2000 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 43-48, 2000.
- [2] P. Bergsten, R. Palm, D. Driankov. "Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems." *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Part B, Vol. 32, 114-121, 2002.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. "Linear matrix inequalities in system and control theory." *Studies in Applied and Numerical Mathematics*, 1994.
- [4] M. Chadli, A. Akhenak, J. Ragot, D. Maquin. "On the design of observer for unknown inputs fuzzy models." *International Journal of Automation and Control*, Vol. 2(1), 113-125, 2008.
- [5] M. Chilali and P. Gahinet. "H-infinity design with pole placement constraints: an LMI approach." *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41(3), 358-367, 1996.
- [6] G. Dong, L. Jakobowski, M. A. Iafolla, D. R. McMillen. "Simplification of Stochastic Chemical Reaction Models with Fast and Slow Dynamics." *Journal of Biological Physics*, Vol. 33, 67-95, 2007.
- [7] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, D. Maquin. "Design of Observers for Takagi-Sugeno Systems with Immeasurable Premise Variables: an L2 Approach." in *Proc. of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
- [8] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, D. Maquin. "Multi-observateurs à entrées inconnues pour un système de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables." *e-STA*, Vol. 6, 9-15, 2009.
- [9] A. Khedher, K. Benothman, D. Maquin, M. Benrejeb. "State and sensor faults estimation via a proportional integral observer." in *Proc. of the 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, 1-6, 2009.
- [10] D. Koenig, S. Mammar. "Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47(12), 2057-2062, 2002.
- [11] B. Marx, D. Koenig, J. Ragot. "Design of observers for Takagi-Sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis." *IET Control Theory and Applications*, Vol. 1, 1487-1495, 2007.
- [12] R. Murray-Smith, T. Johansen. "Multiple model approaches to modeling and control." Taylor & Francis, London, 1997.
- [13] A.M. Nagy, G. Mourot, B. Marx, G. Schutz, J. Ragot. "Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model." *Industrial Engineering Chemistry Research*, Vol. 49, 2790-2799, 2010.
- [14] G. Olsson, B. Newell. *Wastewater Treatment Systems. Modelling, Diagnosis and Control*. IWA Publishing, 1999.
- [15] G. Robertson. "Mathematical Modelling of Startup and Shutdown Operation of Process Plants." The University of Queensland, Brisbane, QLD, Australia, 1992.
- [16] V. Van Breusegem, G. Bastin. "Reduced order dynamical modelling of reaction systems: a singular perturbation approach." in *Proc. of the 30th Conference on Decision and Control*, Vol. 2, 1049-1054, 1991.
- [17] T. Takagi, M. Sugeno. "Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control." *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 15, 166-172, 1985.
- [18] N. Vora, M. Contou-Carrere, P. Daoutidis. "Model Reduction and Coarse-Graining Approaches for Multiscale Phenomena Model Reduction of Multiple Time Scale Processes in Non-standard Singularly Perturbed Form." Springer Berlin Heidelberg, 99-113, 2006.
- [19] J. Yoneyama. "H_∞ Filtering for Fuzzy Systems with Immeasurable Premise Variables: An Uncertain System Approach." *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 160(12), 1738-1748, 2009.