

---

# Modélisation d'un réacteur biologique à l'aide de multimodèles

## Méthode analytique d'obtention d'un multimodèle

Anca Maria Nagy - Gilles Mourot - José Ragot\* — Georges Schutz\*\*

\* Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy Université, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2, avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex France

\*\* Centre de Recherche Public "Henri Tudor", Laboratoire de Technologies Industrielles et Matériaux, 29, Avenue John F.Kennedy, L-1855 Luxembourg-Kirchberg

---

*RÉSUMÉ.* Cet article propose une méthode analytique de décomposition de systèmes non-linéaires dynamiques, afin d'en réduire la complexité et de pouvoir étudier plus facilement des problèmes d'identification, de commande, d'analyse de stabilité. La plupart des méthodes existantes sont basées sur des techniques de réduction d'ordre, qui s'accompagnent d'une perte d'information. La méthode développée produit un multimodèle qui est un outil très efficace pour la modélisation des systèmes non-linéaires. Le résultat ne constitue pas une approximation basée sur une réduction d'ordre, mais une réécriture du système sous une forme ayant une structure dotée de propriétés particulières. Cette méthode est appliquée au modèle d'un réacteur à boues activées.

*ABSTRACT.* This article propose an analytical method for decomposing dynamical nonlinear systems, in order to reduce his complexity and to study much easier the identification, command or stability analysis problems. The majority of existent methods are based to an order reduction techniques, who come with an information loss. The developed method produce a multiple model who is a very efficient tool to modeling nonlinear systems. The result is not a reduced order based approximation, but a rewriting of system in a form that has a structure provided with particular proprieties. This method is applied to a reactor activated sludge model.

*MOTS-CLÉS :* multimodèle ; LPV ; transformation polytopique ; réacteur biologique

*KEYWORDS:* multiple model; LPV; polytopic transformation; biological reactor

---

## 1. INTRODUCTION

Le problème de la complexité des systèmes dynamiques non-linéaires apparaît dans de nombreux domaines scientifiques et en ingénierie. De nombreuses techniques de décomposition et de simplification ont été développées au cours de ces dernières années, en vue de réaliser une réduction de cette complexité, en fonction d'objectifs d'identification, de commande.

La réduction de la complexité repose, dans la plupart des études réalisées, sur une réduction de l'ordre du système avec une perte d'information [DOL 05, STE 97]. Une autre façon de résoudre ce problème est de réécrire le système non-linéaire d'une manière plus facile à étudier, en le décomposant en unités plus simples, sans perdre de l'information.

Le multimodèle ([MUR 97]) constitue un outil très utilisé actuellement pour la modélisation des systèmes non-linéaires, étant basé sur la décomposition du comportement dynamique du système en plusieurs zones de fonctionnement caractérisées par un sous-modèle. En fonction de la zone où le système évolue, la sortie de chaque sous-modèle contribue plus ou moins à l'approximation du comportement global du système. La contribution de chaque sous-modèle au modèle global, qui est une combinaison convexe des sous-modèles, est définie par une fonction de pondération.

L'intérêt de réaliser une décomposition du système en utilisant ce type de modèles est que des propriétés importantes comme la stabilité, la contrôlabilité, l'observabilité ont été largement étudiées dans le cadre des systèmes linéaires à temps invariant (LTI); elles peuvent être utilisées, au moins partiellement, sur les multimodèles si les sous-systèmes qui les constituent sont de type linéaire et pour des fonctions de pondération particulières ([AKH 04]).

Le multimodèle est ainsi utilisée pour réduire la complexité d'un modèle de type ASM1 (Activated Sludge Model no.1) ([OLS 99]) qui décrit un processus de biodégradation d'un réacteur à boues activées. Différentes techniques de linéarisation ont été proposées, parmi lesquelles une linéarisation autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement ([SME 06]), en vue d'obtenir un multimodèle. La perte d'information constitue un premier inconvénient de ces techniques. Deuxièmement, le choix de variables de prémisses exprimant les différentes non-linéarités du système, ainsi que le choix des différents points de fonctionnement restent encore très délicat.

Dans la suite, on va présenter une procédure systématique de transformation d'un système non-linéaire en le réécrivant sous une forme multimodèle, en évitant ces inconvénients majeurs : la transformation est réalisée sans perte d'information, le choix de différents points de fonctionnement n'est plus nécessaire, le choix de variables de prémisses est réalisé d'une façon plus systématique. En partant d'une forme générale du système non-linéaire, une représentation d'état linéaire à paramètres variables (LPV) est réalisée. Cette représentation LPV constitue une forme polytopique, car les matrices à paramètres variables qui la constituent sont des combinaisons convexes des matrices à coefficients constants calculées à partir des sommets du polytope. Ceux-ci sont obtenus en utilisant la transformation polytopique convexe (TPC) ([WAN 96]). Les matrices à coefficients constants forment les représentations des sous-modèles du multimodèle, la non-linéarité du système étant rejetée dans les fonctions de pondéra-

tion des sous-modèles. Le multimodèle obtenu par cette méthode n'est pas unique, il dépend du choix des scalaires qui définissent la transformation polytopique convexe et du choix de variables de prémisses.

Cette méthode sera appliquée au modèle ASM1 simplifié d'une station d'épuration à boues activées. Dans la dernière section seront données quelques conclusions sur la méthodologie proposée et quelques perspectives.

## 2. MÉTHODOLOGIE

Cette section est consacrée à la méthodologie générale du passage d'un système non-linéaire vers un multimodèle. La méthode proposée est analytique et le multimodèle obtenu est équivalent au système non-linéaire initial. Dans un premier temps, à partir de la forme générale d'un système non-linéaire, on réécrit le système sous la forme LPV. En général, pour un système dynamique non-linéaire, cette représentation n'est pas unique et de ce fait, il faut définir des critères de choix d'une représentation LPV qui correspondent aux objectifs de l'étude. A chaque représentation LPV correspond un ensemble de variables de prémisses. Dans un deuxième temps, ces variables de prémisses seront partitionnées en deux en utilisant la transformation polytopique convexe. Le multimodèle sera ainsi une combinaison convexe de sous-modèles linéaires. Introduisons les deux notions de transformation polytopique convexe et de multimodèle.

### 2.1. Le multimodèle

Le multimodèle permet de représenter les systèmes non-linéaires dynamiques sous la forme d'une combinaison convexe de sous-systèmes linéaires, considérés comme des *modèles locaux* ([MOU 99]) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) \cdot [A_i \cdot x(t) + B_i \cdot u(t) + \beta_i] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) \cdot [C_i \cdot x(t) + D_i \cdot u(t) + \delta_i] \end{cases} \quad [1]$$

$x \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de entrées et  $y \in \mathbb{R}^l$  le vecteur de sorties,  $r$  représente le nombre des sous-modèles.  $A_i, B_i, \beta_i, C_i, D_i, \delta_i$  sont des matrices à coefficients constants de dimensions appropriées.  $\beta_i$  et  $\delta_i$  sont des termes issus de la linéarisation qui expriment la caractéristique locale des sous-modèles. La fonction  $\mu_i(x, u)$  représente la pondération du *modèle local*  $i$ , représenté, dans le modèle global, par  $\{(A_i, B_i, \beta_i, C_i, D_i, \delta_i)\}$ . Les *fonctions de pondération*  $\mu_i(x, u)$  ont la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) = 1; \mu_i(x, u) \geq 0, \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

## 2.2. La transformation polytopique convexe

**Lemme 1.** Soit  $h(x(t), u(t))$  une fonction continue et bornée sur le domaine  $[x_0, x_1] \times [u_0, u_1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec  $x_0, x_1, u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ . Alors il existe deux fonctions ( $i = 1, 2$ )

$$F_i : [x_0, x_1] \times [u_0, u_1] \mapsto [0, 1]$$

$$(x(t), u(t)) \mapsto F_i(x(t), u(t))$$

avec  $F_1(x(t), u(t)) + F_2(x(t), u(t)) = 1$  telles que  $h(x(t), u(t)) = F_1(x(t), u(t)) \cdot h_1 + F_2(x(t), u(t)) \cdot h_2 \forall h_1 \geq \max_{x,u} \{h(x, u)\}$  et  $h_2 \leq \min_{x,u} \{h(x, u)\}$ . Les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sont définies par :

$$F_1(x(t), u(t)) = \frac{h(x(t), u(t)) - h_2}{h_1 - h_2} \quad F_2(x(t), u(t)) = \frac{h_1 - h(x(t), u(t))}{h_1 - h_2}$$

## 2.3. Méthode analytique de simplification de structure

Une large catégorie de systèmes non-linéaires dynamiques peut être représentée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad [2]$$

où  $f(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$  et  $g(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^l$ .

Dans une première étape, sous l'hypothèse que  $f(x(t), u(t))$  et  $g(x(t), u(t))$  soient continues et bornées sur  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  avec  $f(0, \cdot) = 0$  et  $g(0, \cdot) = 0$ , le système [2] peut être représenté sous forme LPV :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t), u(t)) \cdot x(t) + B(x(t), u(t)) \cdot u(t) \\ y(t) = C(x(t), u(t)) \cdot x(t) + D(x(t), u(t)) \cdot u(t) \end{cases} \quad [3]$$

où  $A(x, u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(x, u) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(x, u) \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $D(x, u) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ .

Les matrices  $A(x, u)$ ,  $B(x, u)$ ,  $C(x, u)$  et  $D(x, u)$  dépendent respectivement des coefficients  $a_{i,q}$ ,  $b_{i,s}$ ,  $c_{j,q}$ ,  $d_{j,s}$ . Ainsi :

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(x, u) & \cdots & a_{1,n}(x, u) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x, u) & \cdots & a_{n,n}(x, u) \end{bmatrix} \quad [4]$$

les expressions de  $B$ ,  $C$  et  $D$  étant analogue.

A partir de la représentation LPV issue du système [2] et donnée sous forme explicite dans [3], on définit l'ensemble des variables de prémisse  $V_z$  de la manière suivante :

$$V_z = \{a_{i,q}(x, u) \mid a_{i,q} \neq \text{const}, i = \overline{1, n}, q = \overline{1, n}\} \cup$$

$$\cup \{b_{i,s}(x, u) \mid b_{i,s} \neq \text{const}, i = \overline{1, n}, s = \overline{1, m}\} \cup$$

$$\cup \{c_{j,q}(x, u) \mid c_{j,q} \neq \text{const}, j = \overline{1, l}, q = \overline{1, n}\} \cup$$

$$\cup \{d_{j,s}(x, u) \mid d_{j,s} \neq \text{const}, j = \overline{1, l}, s = \overline{1, m}\}$$

Dans la suite on va noter plus simplement :

$$V_z = \{z_1(x, u), \dots, z_p(x, u) \mid p \leq (n + l)(n + m)\}$$

où  $p$  représente la dimension de l'ensemble  $V_z$  et  $z_1(x, u), \dots, z_p(x, u)$  sont les variables de prémisses, qui représentent les non-linéarités identifiées à partir de la forme LPV du système [2].

En général, la représentation LPV [3] pour un système non-linéaire de la forme [2] n'est pas unique ; à chaque représentation LPV correspond un ensemble particulier de variables de prémisses ; choisir une représentation LPV est équivalent à choisir un ensemble de variables de prémisses. Le choix de l'ensemble des variables de prémisses  $V_z$  est important, car il influe sur le nombre de sous-modèles et la structure du modèle global. De plus, ce choix est lié à la décomposition [3] de chaque variable d'état et de chaque sortie.

**Remarque 1.** *Le nombre de sous-modèles qui constituent le multimodèle est égal à  $r = 2^p$ . En effet, chaque variable de prémisses possède un maximum et un minimum qui seront combinés deux à deux pour constituer ces sous-modèles.*

Les matrices à paramètres variables qui interviennent dans la forme LPV du système [2] sont des combinaisons linéaires de matrices à coefficients constants ( $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j$ ) ; par exemple, la matrice  $A(x, u)$  peut être exprimée comme suit :

$$A(x, u) = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_A} z_j(x, u) \cdot \mathcal{A}_j \quad [5]$$

L'ensemble  $\mathcal{I}_A$  contient les indices correspondants aux variables de prémisses qui interviennent dans la matrice  $A$ . La matrice  $\mathcal{A}_0$ , ayant la même dimension que la matrice  $A$ , correspond aux éventuels termes constants ( $a_{i,j}$ ) qui peuvent intervenir dans la matrice  $A(x, u)$ . Les matrices  $\mathcal{A}_j$  sont des matrices de la même dimension que  $A$  qui contiennent à la position correspondant à  $z_j$  le terme constant 1, et des zéros pour toutes les autres positions. Les matrices  $B(x, u), C(x, u), D(x, u)$  sont exprimées de la même façon que  $A(x, u)$ .

Dans une deuxième étape, on génère les  $2^p$  sous-modèles d'un multimodèle caractérisé par les  $p$  variables de prémisses, chaque variable étant partitionnée en deux, à l'aide de la transformation polytopique convexe (pour tout  $j = 1, \dots, p$ ) :

$$z_j(x, u) = F_{j,1}(z_j) \cdot z_{j,1} + F_{j,2}(z_j) \cdot z_{j,2} \quad [6]$$

avec

$$F_{j,1}(z_j) = \frac{z_j(x) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad F_{j,2}(z_j) = \frac{z_{j,1} - z_j(x)}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad [7]$$

On choisit, par exemple :

$$\begin{aligned} z_{j,1} &= \max_x \{z_j(x, u)\} \\ z_{j,2} &= \min_x \{z_j(x, u)\} \end{aligned} \quad \forall j = 1, \dots, p \quad [8]$$

A chaque sous-modèle  $i$ , représenté dans le tableau 1 par la ligne  $i$ , correspond un  $p$ -uplet  $\sigma_i$  qui code les partitions des variables de prémisses intervenant dans la fonction

de pondération correspondant à ce sous-modèle. On peut ainsi construire, comme dans l'exemple précédent, un tableau regroupant l'ensemble des partitions des variables de prémisses. Ainsi, dans ce tableau, on retient dans la ligne  $i$  les colonnes qui contiennent la valeur binaire 1. A chaque valeur binaire 1 choisie correspond une des deux partitions de chaque variable de prémisses. En multipliant les fonctions qui décrivent ces partitions on obtient la fonction de pondération  $\mu_i(z)$  correspondant au sous-modèle  $i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) :

$$\mu_i(z) = \prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_i^j}(z_j(x, u)) \quad [9]$$

où  $\sigma_i^k$  représente l'indice à la  $k^{\text{ème}}$  position dans le  $p$ -uplet  $\sigma_i$ . Alors  $\sum_{i=1}^r \mu_i(z) = 1$  et  $\mu_i(z) \geq 0$ , car :

$$F_{j,1}(z_j(x, u)) + F_{j,2}(z_j(x, u)) = 1, \forall j = 1, \dots, p$$

Il faut noter que les fonctions matricielles  $A(x, u)$ ,  $B(x, u)$ ,  $C(x, u)$  et  $D(x, u)$  font intervenir les variables de prémisses  $z_j$  pour  $j = 1, \dots, p$ . Notons respectivement  $\mathcal{I}_A$ ,  $\mathcal{I}_B$ ,  $\mathcal{I}_C$ ,  $\mathcal{I}_D$  les ensembles des indices des variables de prémisses qui interviennent dans les matrices  $A(x, u)$ ,  $B(x, u)$ ,  $C(x, u)$  et  $D(x, u)$ . Ainsi, on va évaluer les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  aux sommets du polytope définis par les partitions des variables de prémisses intervenant dans ces matrices pour déterminer les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $D_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ), qui sont les matrices à coefficients constants relatives à chaque sous-modèle :

$$A_i = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_A} z_{j,\sigma_i^j} \cdot \mathcal{A}_j \quad [10]$$

$B_i$ ,  $C_i$  et  $D_i$  s'écrivent de la même façon. Ce fait est détaillé dans la démonstration du résultat suivant :

**Théorème 1.** *Le multimodèle [1], qui représente une combinaison convexe de sous-modèles linéaires  $\{(A_i, B_i, C_i, D_i)\}$  ( $i = 1, \dots, r$ ), est équivalent au système [2].*

On peut remarquer que cette méthode produit un multimodèle sans utiliser de techniques de linéarisation qui nécessitent un choix délicat de différents points de fonctionnement du système.

### 3. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Dans cette section, la méthode analytique de décomposition développée dans la section précédente est appliquée à un modèle d'une station d'épuration (qui utilise un procédé à boues activées), le modèle ASM1 réduit, en considérant seulement la pollution carbonée [OLS 99].

### 3.1. Description du modèle d'une station d'épuration

L'épuration des eaux usées par des procédés boues activées est largement utilisée depuis les deux derniers siècles [VAN 81, HEN 87, GUJ 99, OLS 99]. Elle consiste à mettre en contact par brassage les eaux usées avec un mélange riche en bactéries pour dégrader et éliminer les composants polluants contenus dans l'eau, en suspension ou dissouts.

Initialement, les traitements étaient basés uniquement sur l'injection d'oxygène dans le milieu polluant. Le développement industriel ainsi que l'expansion de la population ont déterminé la mise en œuvre des méthodes de dépollution plus performantes qui soit capables d'éliminer certains composants chimiques (azote, phosphore). Ils existent différents processus, comme celles de nature biologique ou de nature physico-chimique, pour réaliser cette élimination. Dans le cas des processus par boues activées, si l'élimination de l'azote est souhaitée, différentes configurations sont possibles : bassins séparés ou bassin uniques, pour différentes phases de réaction (aérée et non-aérée). Pour des considérations de nature économique, une configuration avec un seul bassin (où les deux phases alternent) a été développée.

Le principe de fonctionnement du procédé est décrit brièvement dans la suite. Le schéma simplifié, donné à la figure 1 comprend un bassin d'aération (réacteur) et un décanteur. L'eau polluée provenant d'une source externe circule dans le bassin d'aération dans lequel la biomasse bactérienne dégrade la matière organique. Les micro-organismes s'agglomèrent en floccs et produisent les boues. La liqueur mixte est ensuite envoyée dans le décanteur où la séparation de l'eau épurée et des floccs bactériennes est faite par gravité. Une fraction des boues décantées est recyclée vers l'aérateur pour maintenir sa capacité d'épuration. L'eau épurée est rejetée dans le milieu naturel. Dans l'aérateur se produit le processus d'épuration de l'eau proprement dit, par alternance des deux phases. La première phase consiste en une période d'aération : de l'air est injecté en grande quantité dans le réacteur afin d'éliminer les composants nitrés et carbonés (phase d'aérobie). Ensuite, l'aération est arrêtée et une source de carbone est éventuellement rajoutée à l'entrée du réacteur pour dégrader les produits azotés (phase d'anoxie, période de dénitrification). L'alternance de phase implique que dans le même bassin (ou réacteur) différentes conditions physiques sont recrées. Du point de vue biochimique, l'aération discontinue se traduit par deux phases : aérobie et anoxie. Pendant la phase aérobie l'oxygène dissous (nécessaire aux micro-organismes pour accomplir le processus de nitrification) est non nul. A un certain moment du processus, l'aération est coupée. Les micro-organismes continuent à consommer l'oxygène restant. Cette période transitoire correspond aussi à la phase aérobie. Pendant la phase anoxie qui suit, le processus de dénitrification a lieu. Au moment du relance de l'aération, la concentration d'oxygène n'est plus nulle et une nouvelle phase aérobie commence.

Dans l'étude du réacteur à boues activées plusieurs modes de fonctionnement peuvent être considérés : réacteur à volume constant, asservissement à partir d'un volume de référence, écoulement libre à la sortie du réacteur, débits entrant et sortant commandés. La première situation est présentée et peut être décrite à partir d'un bilan biomasse, carbone, oxygène en milieu aérobie.

En considérant seulement la pollution carbonée du procédé à boues activées, le processus est réalisée dans un ensemble réacteur-décanteur. Certaines hypothèses ont été faites : l'aérateur est parfaitement mélangés, les réactions biologiques ont lieu seulement dans le bassin d'aération et le décanteur est considéré comme parfait (l'eau épurée ne comporte pas de substances particulaires et les concentrations de composantes solubles sont les mêmes en entrée et en sortie du décanteur). Alors on peut écrire :

$$(q_{in} + q_R)X_{BH} = (q_R + q_W)X_{BH,R} \quad [11]$$

$$S_{S,R} = S_S \quad [12]$$

où  $q_R$ ,  $q_W$  représentent respectivement le débit recyclé et le débit rejeté et  $X_{BH,R}$  est la concentration de la biomasse hétérotrophe recyclée. En général,  $q_R$  et  $q_W$  représentent des fractions du débit d'entrée  $q_{in}$  :

$$q_R = f_R \cdot q_{in}, \quad 1 \leq f_R \leq 2$$

$$q_W = f_W \cdot q_{in}, \quad 0 < f_W < 1$$

Le processus de l'ensemble réacteur et décanteur peut être représenté par le système non-linéaire suivant, en supposant que le volume du réacteur est constant ( $\dot{V}(t) = 0$ ) :

$$\begin{cases} \frac{d(V \cdot X_{BH})}{dt} = q_{in}X_{BH,in} + q_RX_{BH,R} - q_{out}X_{BH,out} + r_H V \\ \frac{d(V \cdot S_S)}{dt} = q_{in}S_{S,in} + q_RS_{S,R} - q_{out}S_{S,out} + r_S V \\ \frac{d(V \cdot S_O)}{dt} = q_{in}S_{O,in} + q_RS_{O,R} - q_{out}S_{O,out} + r_O V + \\ + Kq_a V(S_{O,sat} - S_O) \end{cases} \quad [13]$$

où la signification des variables est la suivante :  $V$  est le volume du réacteur,  $X_{BH}$  est la concentration de la biomasse hétérotrophe,  $S_S$  est la concentration du substrat rapidement biodégradable,  $S_O$  est la concentration de l'oxygène dissout,  $q$  représente le débit et  $q_a$  le débit d'air. Les indices *in* et *out* correspondent à l'entrée et, respectivement à la sortie du réacteur.  $r_H$ ,  $r_S$  et  $r_O$ , représentant respectivement les cinétiques des réactions de la biomasse hétérotrophe  $X_{BH}$ , du carbone  $S_S$  et de l'oxygène  $S_O$ , sont modélisées par :

$$\begin{cases} r_H = \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} - b_H X_{BH} \\ r_S = -\frac{1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} + (1 - f)b_H X_{BH} \\ r_O = -\frac{1 - Y_H}{Y_H} \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} \end{cases} \quad [14]$$

Différente quantités et paramètres qui interviennent dans [13] et [14] sont présentés dans le tableau 2 et correspondent au paramètres "typiques" du modèle de l'I.A.W.Q No.1 proposées dans [HEN 87, OLS 99, CHA 03]. Sous l'hypothèse d'homogénéité

du réacteur, on a les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} X_{BH,out} &= X_{BH} \\ S_{S,out} &= S_S \\ S_{O,out} &= S_O \end{aligned}$$

On suppose nulle la concentration en oxygène dissout à l'entrée du réacteur ( $S_{O,in}$ ). Si on remplace  $r_H$ ,  $r_S$  et  $r_O$  données dans [14], alors le système [13] devient :

$$\begin{cases} \dot{X}_{BH} = \frac{q_{in}}{V} X_{BH,in} - \frac{q_W}{V} \frac{q_{in} + q_R}{q_W + q_R} X_{BH} \\ \quad + \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} - b_H X_{BH} \\ \dot{S}_S = \frac{q_{in}}{V} (S_{S,in} - S_S) + (1-f)b_H X_{BH} - \frac{\mu_H}{Y_H} \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} \\ \dot{S}_O = -\frac{q_{in}}{V} S_O + K q_a (S_{O,sat} - S_O) - \frac{1-Y_H}{Y_H} \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} \end{cases} \quad [15]$$

Le vecteur des états et le vecteur des commandes sont définis par :

$$x = [X_{BH} \ S_S \ S_O]^T \quad u = [X_{BH,in} \ S_{S,in} \ q_a]^T$$

### 3.2. Application de la méthode au modèle d'un réacteur biologique

Pour mettre le système [15] sous une forme multimodèle, il doit être présentée, dans un premier temps, sous une forme LPV, comme dans [3]. Alors, on définit les fonctions matricielles :

$$A = \begin{bmatrix} \mu_H \cdot z_1 - \frac{f_W(1+f_R)}{f_W+f_R} \cdot z_2 - b_H & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_H}{Y_H} \cdot z_1 + (1-f)b_H & -z_2 & 0 \\ \frac{Y_H-1}{Y_H} \mu_H \cdot z_1 & 0 & -K \cdot z_3 - z_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} z_2 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & K \cdot S_{O,sat} \end{bmatrix}$$

Le système présente trois non-linéarités. On prend alors comme variables de pré-misse :

$$\begin{aligned} z_1(S_S, S_O) &= \frac{S_S}{K_S + S_S} \cdot \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \\ z_2(q_{in}, V) &= \frac{q_{in}}{V} \\ z_3(q_a) &= q_a \end{aligned} \quad [16]$$

On remarque que  $A = A(z_1, z_2, z_3)$  et  $B = B(z_2)$ . L'idée de prendre la variable de pré-misse  $z_1$  comme produit entre deux lois de Monod, sans les séparer, est de réduire

ainsi le nombre de variables de prémisses.

Dans un deuxième temps, en utilisant la transformation polytopique convexe (**Lemme 1**), les deux non-linéarités  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  s'écrivent comme dans [6], où les partitions de chaque variable de prémisses sont construites de la même manière que dans [7] et avec les scalaires [8]. Pour calculer les maxima et les minima qui interviennent dans les expressions de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ , on utilise le fait que  $V$ ,  $S_S$ ,  $S_O$  et  $q_{in}$  sont bornées. Alors, on peut calculer les maxima et les minima de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ , et enfin déterminer les scalaires  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) comme dans [8]. On a alors  $2^3 = 8$  sous-modèles représentés par les paires  $(A_i, B_i)$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) et qui sont calculées conformément à [10]. Le multimodèle est obtenu en agrégeant les quatre sous-modèles précédents, les pondérations  $\mu_i(x, u)$  étant calculées conformément à [9]. A la figure 2 on peut voir l'évolution du système [15] pour  $f_R = 1.1$ ,  $f_W = 0.03$  et avec les conditions initiales :

$$\begin{pmatrix} V(0) \\ X_{BH}(0) \\ S_S(0) \\ S_O(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 [m^3] \\ 887 [mg/l] \\ 4.1 [mg/l] \\ 3 [mg/l] \end{pmatrix}$$

Le débit  $q_{in}$  à l'entrée du réacteur influe sur les trois concentrations  $X_{BH}$ ,  $S_S$  et  $S_O$  et sur les fonctions de pondération de chaque sous-modèle. Une croissance du débit d'entrée ( $q_{in}$ ) produit une augmentation de la concentration de biomasse hétérotrophe ( $X_{BH}$ ), ainsi qu'une baisse de la concentration en oxygène dissout ( $S_O$ ). En même temps,  $S_O$  est directement influencé par le débit d'air ( $q_a$ ),  $X_{BH}$  et  $S_S$  à l'intérieur du réacteur étant influencées par les concentrations correspondantes à l'entrée du réacteur ( $X_{BH,in}$  et  $S_{S,in}$ ).

#### 4. CONCLUSION

Cet article propose une méthode analytique générale de simplification de complexité d'un modèle non-linéaire auquel est substitué un ensemble de sous-modèles de structures plus simples, linéaires, et un ensemble de fonctions d'agrégation appropriées afin de réunir ces sous-modèles pour constituer le modèle global. En plus de ces points techniques, les multimodèles obtenus seront utilisés, grâce à leurs propriétés particulières, pour l'estimation d'état et ses applications au diagnostic de fonctionnement de systèmes.

La méthodologie de simplification de la complexité proposée en général dans la littérature suppose une réduction d'ordre du système, obtenu par différents techniques de linéarisation appliquées autour de points de fonctionnement bien choisis. La difficulté du choix de ces points est la raison pour laquelle cet article propose une méthode analytique plus générale qui réalise une réécriture sous forme multimodèle sans la nécessité de choisir ces points de fonctionnement. Il est important de noter que cette méthode offre la possibilité de réduire le nombre de sous-modèles par un choix adéquat de variables de prémisses.

D'un point de vue pratique, cette méthode est appliquée à un modèle ASM1 simplifié de réacteur à boues activées, et conduit à une structure multimodèle construite sur la

base de quatre sous-modèles. Même si dans cet article on a traité le cas d'un modèle ASM1 réduit, en considérant seulement la partie carbonée, la méthode proposée peut s'étendre à un modèle plus général, les difficultés rencontrées étant similaires.

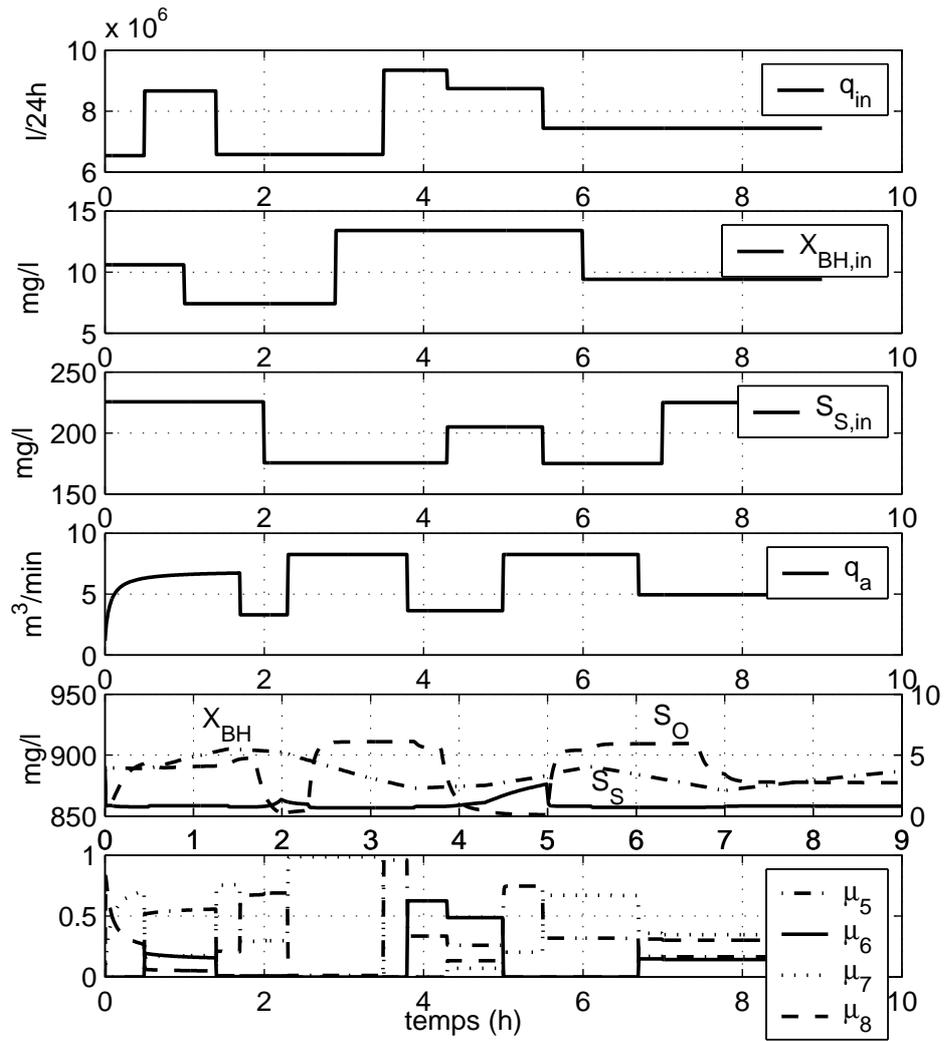
## 5. REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier pour le support financier au "Fonds National de la Recherche Luxembourg". La recherche est partiellement soutenue par le programme TASSILI no.07 MDU grant 714.

## 6. Bibliographie

- [AKH 04] AKHENAK A., CHADLI M., RAGOT J., MAQUIN D., « Estimation of state and unknown inputs of a nonlinear system represented by a multiple model », *11th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing, MMM*, 2004.
- [CHA 03] CHACHUAT B., ROCHE N., LATIFI M., « Reduction of the ASM1 model for optimal control of small-size activated sludge treatment plants », *Revue des Sciences de l'Eau*, vol. 16, 2003, p. 5-26.
- [DOL 05] DOLGIN Y., ZEHEB E., « Model reduction of uncertain systems retaining the uncertainty structure », *Systems and Control Letters*, vol. 54, 2005, p. 771-779.
- [GUJ 99] GUJER W., HENZE M., LOOSDRECHT M., MINO T., « Activated Sludge Model no.3 », *Water Science and Technology*, vol. 39(1), 1999, p. 183-193.
- [HEN 87] HENZE M., LESLIE GRADY JR C., GUJER W., MARAIS G., MATSUO T., « Activated Sludge model no.1. I.A.W.Q. Scientific and Technical Report No.1 », rapport, 1987, I.A.W.Q., London,UK.
- [MOU 99] MOUROT G., GASSO K., RAGOT J., « Modelling of ozone concentrations using a Takagi-Sugeno model », *Control Engineering Practice*, vol. 7, n° 6, 1999, p. 707-715.
- [MUR 97] MURRAY-SMITH R., JOHANSEN T., *Multiple model approaches to modelling and control.*, Taylor & Francis, London, 1997.
- [OLS 99] OLSSON G., NEWELL B., *Wastewater Treatment Systems. Modelling, Diagnosis and Control*, IWA Publishing, 1999.
- [SME 06] SMETS I., VERDICKT L., VAN IMPE J., « A linear ASM1 based multi-model for activated sludge systems », *Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems*, vol. 12, n° 5, 2006, p. 489-503.
- [STE 97] STEFFENS M., LANT P., NEWELL R., « A systematic approach for reducing complex biological wastewater treatment models », *Water Research*, vol. 31, n° 3, 1997, p. 590-606.
- [VAN 81] VAN HAANDEL A., EKAMA G., MARAIS G., « The activated sludge process :Part 3 - Single sludge denitrification », *Water Research*, vol. 15, 1981, page 1135-1152.
- [WAN 96] WANG H. O., TANAKA K., GRIFFIN M., « An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues », *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, n° 1, 1996, p. 14-23.





**Figure 2.** L'évolution du système [15] écrit sous forme multimodèle et quelques fonctions de pondération associées