

Détection et isolation de défauts multiples par analyse en composantes principales

Y. Tharrault¹, M.-F. Harkat², G. Mourot¹, J. Ragot¹

¹Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 Nancy-université, CNRS
2, Avenue de la forêt de Haye
54516 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

²Université Badj Moktar - Annaba
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Electroniue, BP. 12
ANNABA, 23000 Algérie

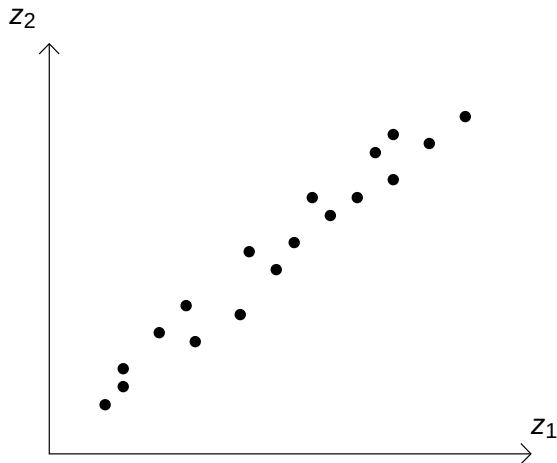
41èmes Journées de Statistique
du 25 au 29 mai 2009 - Bordeaux, France



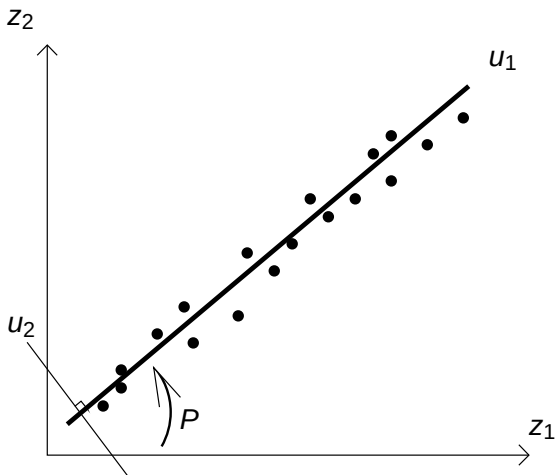
Plan

- 1 Principe de l'analyse en composantes principales
- 2 Détection et localisation de défauts
- 3 Application : Cas multi-défauts
- 4 Conclusion

Principe de l'analyse en composantes principales



Principe de l'analyse en composantes principales





Principe de l'Analyse en Composantes Principales (ACP)

- Matrice de données $X \in \Re^{N \times n}$ collectées sur le système en fonctionnement normal

ACP

Maximisation de la variance des projections des données sur des axes particuliers

$$T = X P$$

- $T \in \Re^{N \times n}$: Matrice des composantes principales
- $P \in \Re^{n \times n}$: Matrice de projection

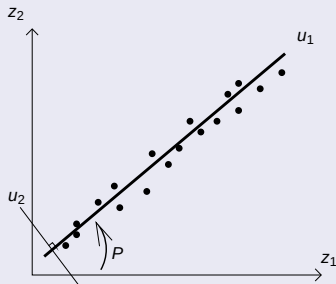
Décomposition en valeurs/vecteurs propres de la matrice de covariance

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} X^T X = P \Lambda P^T \quad \text{avec} \quad P P^T = P^T P = I_n$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \hat{P} & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_\ell & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda}_{n-\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}^T \\ \tilde{P}^T \end{bmatrix}$$

Principe de l'Analyse en Composantes Principales (ACP)

Décomposition de la matrice des données



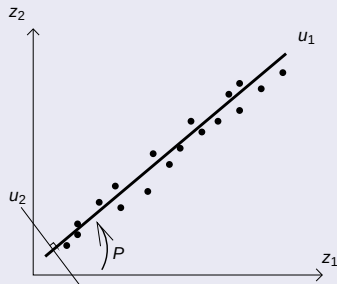
Principe de l'Analyse en Composantes Principales (ACP)

Décomposition de la matrice des données

Partie principale

$$\hat{X} = X \hat{C}^{(\ell)}$$

$$\text{où } C_{\ell} = \hat{P} \hat{P}^T$$



Principe de l'Analyse en Composantes Principales (ACP)

Décomposition de la matrice des données

Partie principale

$$\hat{X} = X \hat{C}^{(\ell)}$$

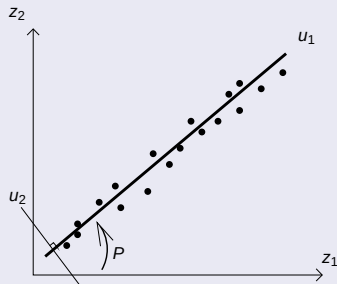
$$\text{où } C_\ell = \hat{P} \hat{P}^T$$

Partie résiduelle

$$E = X - \hat{X}$$

$$= X (I_n - \hat{C}^{(\ell)})$$

$$= X \tilde{P} \tilde{P}^T$$



Principe de l'Analyse en Composantes Principales (ACP)

Décomposition de la matrice des données

Partie principale

$$\hat{X} = X \hat{C}^{(\ell)}$$

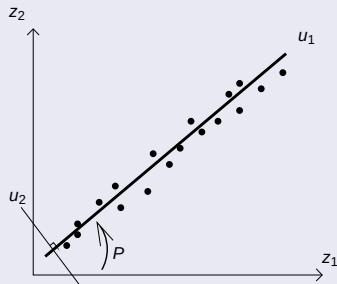
$$\text{où } C_{\ell} = \hat{P} \hat{P}^T$$

Partie résiduelle

$$E = X - \hat{X}$$

$$= X (I_n - \hat{C}^{(\ell)})$$

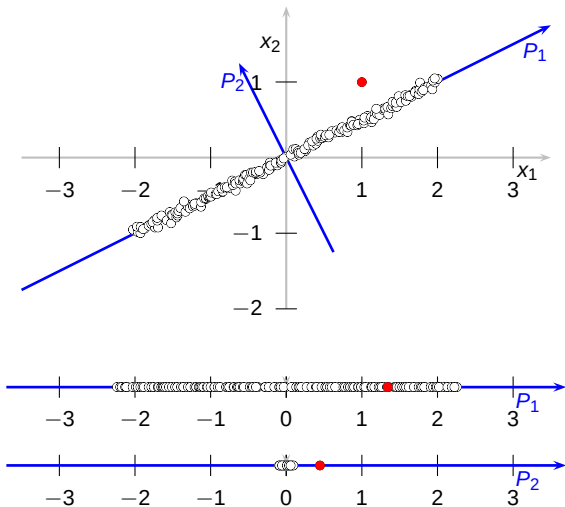
$$= X \tilde{P} \tilde{P}^T$$



Détermination du nombre de composantes principales ℓ

Projection des défauts dans l'espace principal et l'espace résiduel

- $n = 2$ variables x_1 et x_2
- $X = [x_1 \ x_2]$
- $\ell = 1$
- défaut :
observation rouge



Génération de résidus

Principe de reconstruction

Estimer r variables à partir des $n - r$ variables restantes et du modèle

$$\hat{x}_R = [I - D_R (\tilde{D}_R^T \tilde{D}_R)^{-1} \tilde{D}_R^T] x$$

$$\tilde{D}_R = (I - \hat{C}^{(\ell)}) D_R$$

avec D_R : matrice des directions de reconstruction

Pour reconstruire 2 variables ($R = 2, 4$) parmi 5 variables

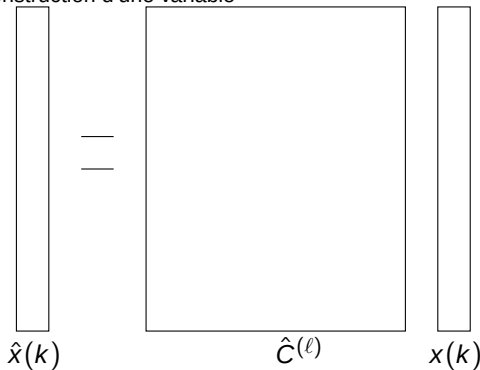
$$D_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Condition de reconstruction : $(\tilde{D}_R^T \tilde{D}_R)^{-1}$

$r \leq n - \ell$: structure

Génération de résidus

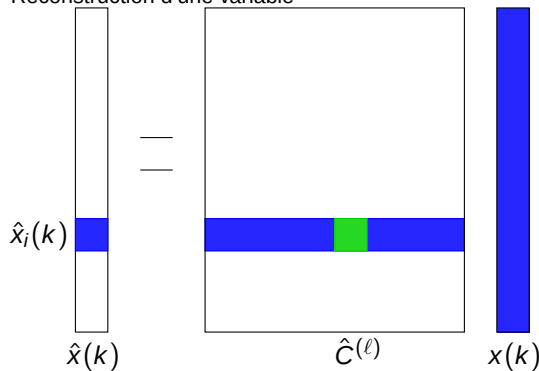
Reconstruction d'une variable



$$\hat{x}_i(k) = \frac{\begin{pmatrix} c_{-i} & 0 & c_{+i} \end{pmatrix}}{1 - c_{ii}} x(k)$$

Génération de résidus

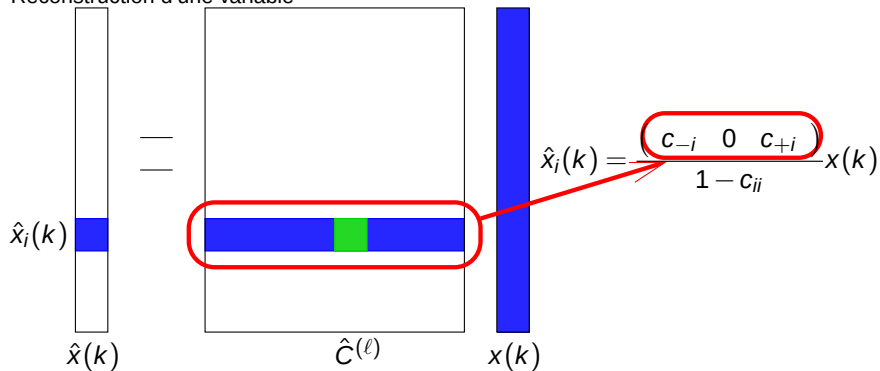
Reconstruction d'une variable



$$\hat{x}_i(k) = \frac{\begin{pmatrix} c_{-i} & 0 & c_{+i} \end{pmatrix}}{1 - c_{ii}} x(k)$$

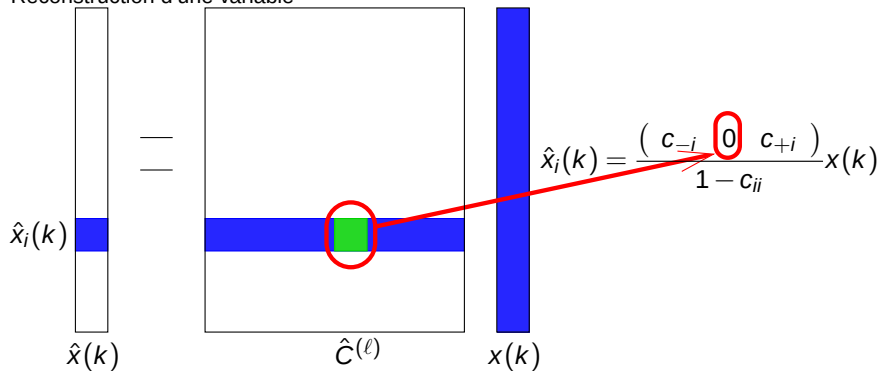
Génération de résidus

Reconstruction d'une variable



Génération de résidus

Reconstruction d'une variable



Génération de résidus

Projection de x_R dans l'espace résiduel

$$\tilde{x}_R = P_R^{(\ell)} x, \quad P_R^{(\ell)} = (I - \hat{C}^{(\ell)}) [I - D_R (\tilde{D}_R^T \tilde{D}_R)^{-1} \tilde{D}_R^T]$$

Propriété : $P_R^{(\ell)} D_R = 0, \quad D_R^T P_R^{(\ell)} = 0$

Illustration :

$$x = x^* + \varepsilon + D_F d$$

$$\tilde{x}_R = P_R^{(\ell)} (x^* + \varepsilon + D_F d) = P_R^{(\ell)} (\varepsilon + D_F d)$$

dont l'espérance mathématique vaut : $\mathcal{E}(\tilde{x}_R) = P_R^{(\ell)} D_F d$

- $D_F = D_R : P_R^{(\ell)} D_R = 0$ et $\mathcal{E}(\tilde{x}_R) = 0$
- $D_F \neq D_R : P_R^{(\ell)} D_R \neq 0$ et $\mathcal{E}(\tilde{x}_R) \neq 0$

Indicateur global calculé pour chaque observation

$$\Delta_R = \| \tilde{x}_R \|^2 < \delta$$

Application : Cas multi-défauts

On considère :

- $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{bmatrix}$
- $N = 108$ observations

$$x_{i,1} = v_i^2 + \sin(0.1i), \quad v_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$x_{i,2} = 2 \sin(i/6) \cos(i/4) \exp(-i/N)$$

$$x_{i,3} = \log(x_{i,2}^2)$$

$$x_{i,4} = x_{i,1} + x_{i,2}$$

$$x_{i,5} = x_{i,1} - x_{i,2}$$

$$x_{i,6} = 2x_{i,1} + x_{i,2}$$

$$x_{i,7} = x_{i,1} + x_{i,3}$$

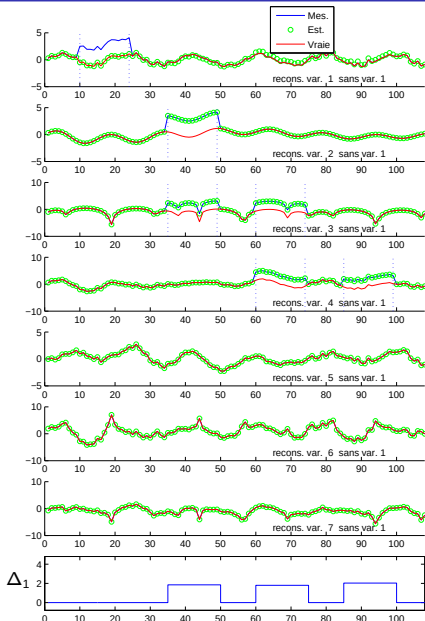
	l_1 {10 : 24}	l_2 {35 : 49}	l_3 {60 : 74}	l_4 {85 : 99}
x_1	×	0	0	0
x_2	0	×	0	0
x_3	0	×	×	0
x_4	0	0	×	×

Application : Cas multi-défauts

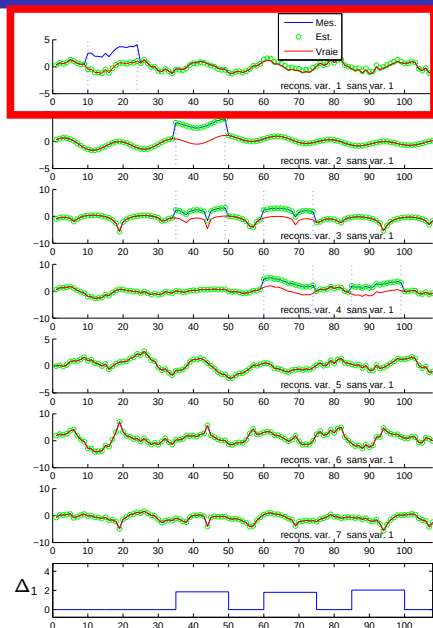
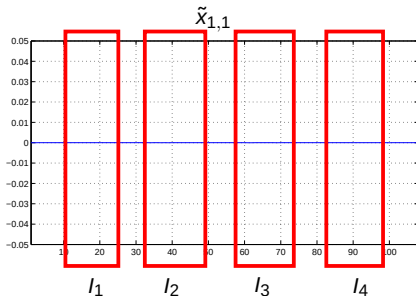
Sensibilité de l'indicateur global Δ_R à la présence de défauts δ

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{34}
Δ_1	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_2	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_3	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×
Δ_4	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×
Δ_5	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_{12}	0	0	×	×	0	×	×	×	×	×
Δ_{13}	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×
Δ_{14}	0	×	×	0	×	×	0	×	×	×
Δ_{15}	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_{16}	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Δ_{23}	×	0	0	×	×	×	×	0	×	×

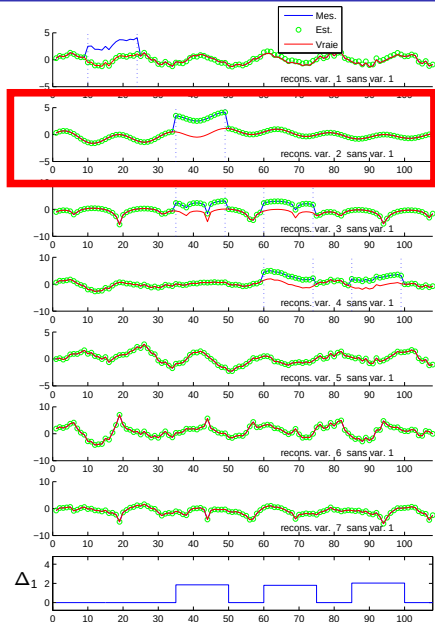
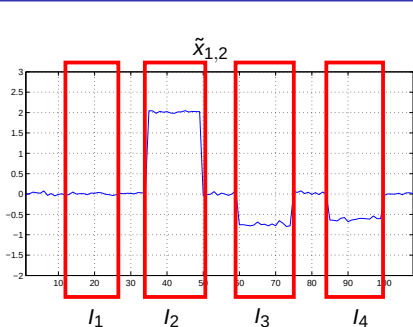
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



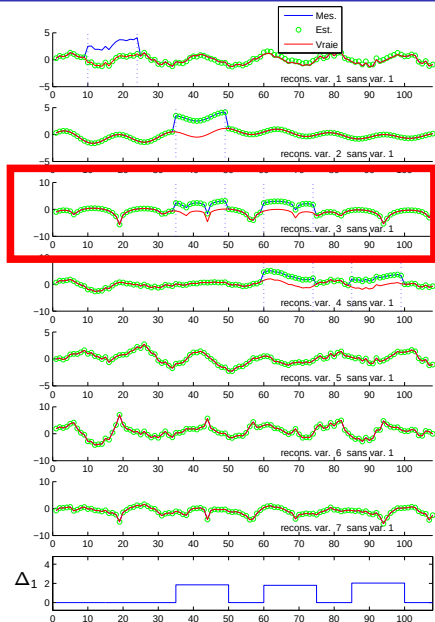
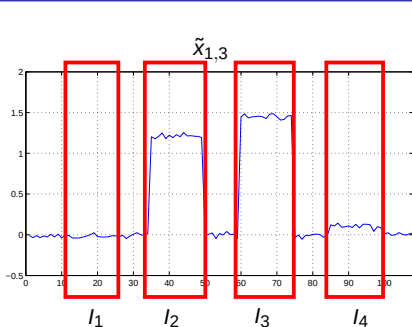
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



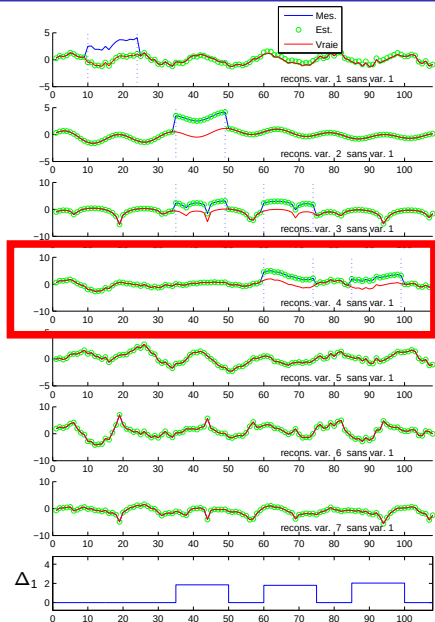
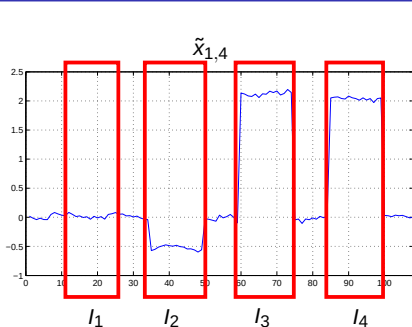
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



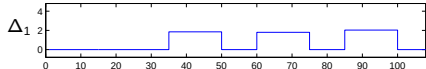
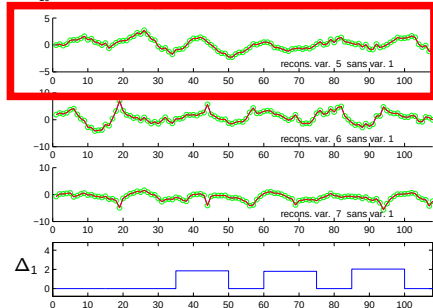
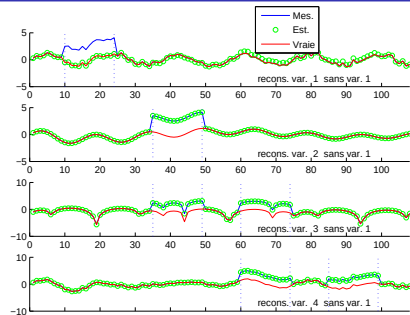
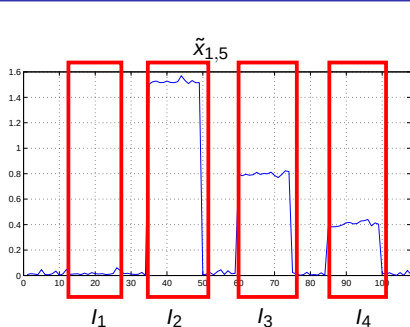
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



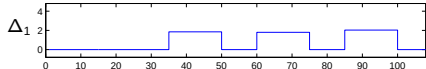
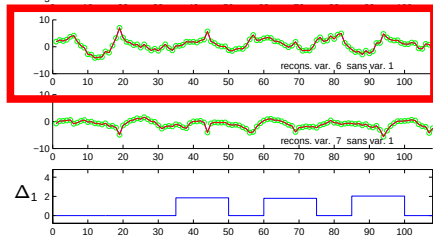
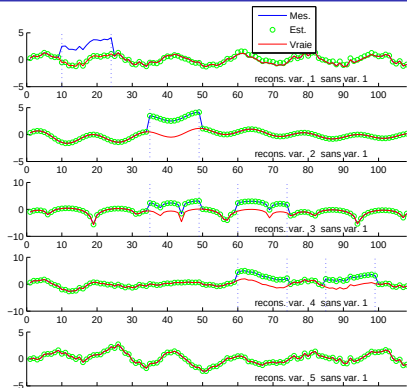
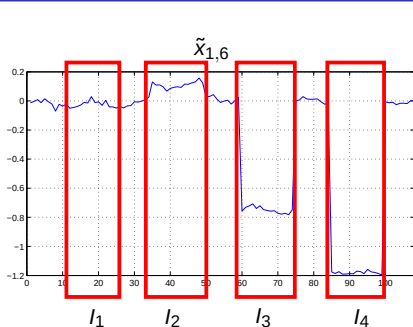
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



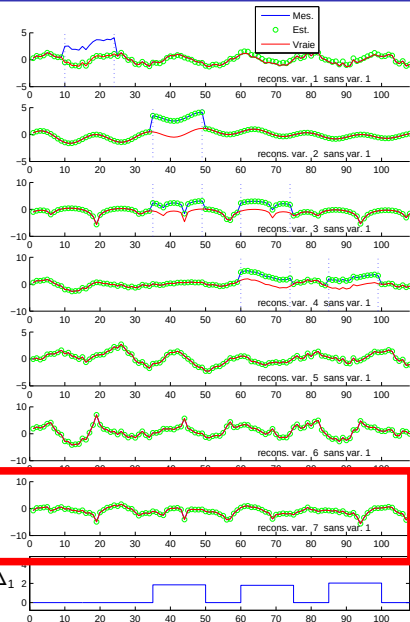
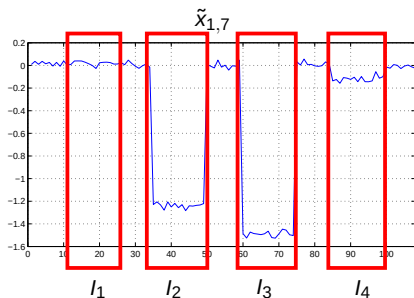
Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1

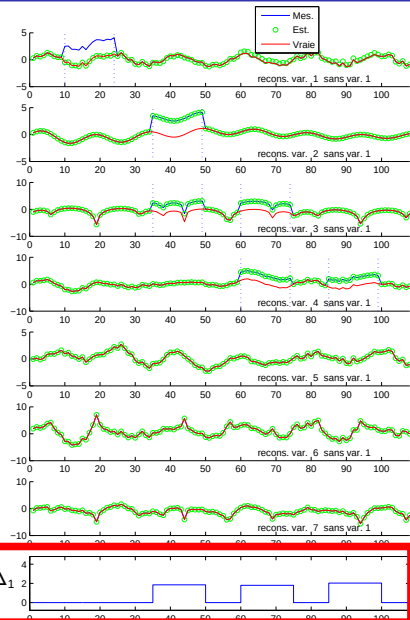


Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1



Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1

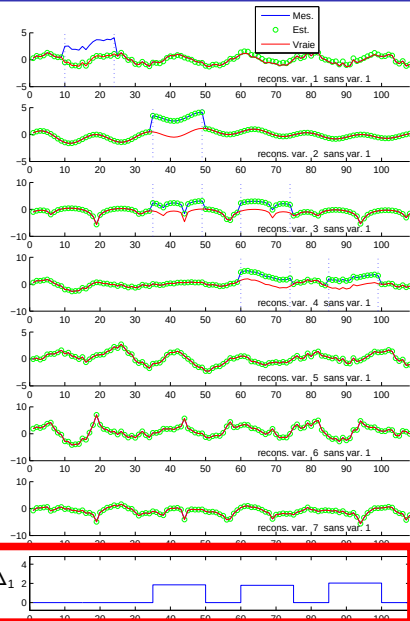
	l_1	l_2	l_3	l_4
Δ_1	0	×	×	×



Reconstruction des variables sans utiliser la variable 1

	l_1	l_2	l_3	l_4
Δ_1	0	×	×	×

⇒ Défaut sur x_1 sur la période l_1



Application : Cas multi-défauts

Localisation des défauts

	I_1	I_2	I_3	I_4
Δ_1	0	×	×	×
Δ_{23}	×	0	×	×
Δ_{24}	×	×	×	0
Δ_{34}	×	×	0	0

Signatures des défauts étudiés

Application : Cas multi-défauts

Localisation des défauts

	I_1	I_2	I_3	I_4
Δ_1	0	×	×	×
Δ_{23}	×	0	×	×
Δ_{24}	×	×	×	0
Δ_{34}	×	×	0	0

Signatures des défauts étudiés

- dans l'intervalle I_1 , x_1 est en défaut
- dans l'intervalle I_2 , x_2 et x_3 sont en défaut
- dans l'intervalle I_3 , x_3 et x_4 sont en défaut
- dans l'intervalle I_4 , x_4 est en défaut

Conclusion

Conclusion

- ACP
→ détermination des relations de redondance
- utilisation conjointe des principes de reconstruction et de projection des données
→ détection et localisation de défauts multiples

Conclusion

Conclusion

- ACP
→ détermination des relations de redondance
- utilisation conjointe des principes de reconstruction et de projection des données
→ détection et localisation de défauts multiples



Conclusion

Conclusion

- ACP
→ détermination des relations de redondance
- utilisation conjointe des principes de reconstruction et de projection des données
→ détection et localisation de défauts multiples