# Modélisation d'un réacteur biologique à l'aide de multimodèle

Anca Maria Nagy \*, Gilles Mourot\*, José Ragot\*, Georges Schutz\*\*, Serge Gillé \*\*

\* Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy Université, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2, avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex France (E-mail : {anca-maria.nagy, gilles.mourot, jose.ragot }@ensem.inpl-nancy.fr)
\*\* Centre de Recherche Public "Henri Tudor", Laboratoire de Technologies Industrielles et Matériaux, 29, Avenue John F.Kennedy, L-1855 Luxembourg-Kirchberg (E-mail : {georges.schutz, serge.gille }@tudor.lu)

#### Résumé

Cet article propose une méthode analytique de décomposition de systèmes non-linéaires dynamiques sous forme multimodèle, afin d'en réduire la complexité. Cette réduction s'avère nécessaire afin de pouvoir étudier plus facilement des problèmes d'identification, de commande, d'analyse de stabilité. La plupart des méthodes existantes sont basées sur des techniques de réduction d'ordre, qui s'accompagnent d'une perte d'information du système non-linéaire initial, la méthode proposée ici ne l'apportant pas. La structure multimodèle constitue un outil efficace de représentation des systèmes non-linéaires, car présente l'avantage de décomposer un système non-linéaire en plusieurs sous-modèles linéaires à temps invariant (LTI) qui sont pondérés et qui permettent de bénéficier de propriétés importantes comme l'analyse de la stabilité, la contrôlabilité, l'observabilité. Cette méthode est appliquée au modèle ASM1 simplifié d'une station d'épuration à boues activées.

#### Mots clés

multimodèle ; réacteur biologique ; réduction de complexité ; transformation polytopique

### **INTRODUCTION**

Le problème de la complexité des systèmes dynamiques non-linéaires apparait dans de nombreux domaines scientifiques et en ingénierie. De nombreuses techniques de décomposition et de simplification ont été développées au cours de ces dernières années, en vue de réaliser une réduction de cette complexité, en fonction d'objectifs d'identification, de commande,...

La réduction de la complexité repose, dans la plupart des études réalisées, sur une réduction de l'ordre du système avec une perte d'information (Dolgin and Zeheb (2005), Sayesel and Barlas (2006), Steffens et al. (1997)). Une autre façon de résoudre le problème de la complexité des systèmes dynamiques non-linéaires est de réécrire le système non-linéaire d'une manière plus facile à étudier, en le décomposant en unités plus simples et maitrisables, sans perdre de l'information. Le multimodèle (Murray-Smith and Johansen (1997)) constitue une alternative très intéressante et un outil très utilisé actuellement pour la modélisation des systèmes non-linéaires. Le multimodèle est basée sur la décomposition du comportement dynamique du système en plusieurs zones de fonctionnement, chaque zone étant caractérisée par un sous-modèle. En fonction de la zone où le système évolue, la sortie de chaque sousmodèle contribue plus ou moins à l'approximation du comportement global du système. La contribution de chaque sous-modèle au modèle global, qui est une combinaison convexe des sous-modèles, est définie par une fonction de pondération. Dans la littérature sont utilisées plusieurs terminologies, qui sont équivalentes, pour définir ce type de modèles : le multimodèle (Murray-Smith and Johansen (1997)), le modèle flou de Takagi-Sugeno (Takagi and Sugeno (1985)), le modèle linéaire polytopique (PLM) (Angelis (2001)).

L'intérêt de réaliser une décomposition du système en utilisant ce type de modèles est que des propriétés importantes comme la stabilité, la contrôlabilité, l'observabilité ont été largement étudiées dans le cadre des systèmes linéaires à temps invariant (LTI); elles peuvent être utilisées, au moins partiellement, sur les multimodèles si les sous-systèmes qui les constituent sont de type linéaire et pour des fonctions de pondération particulières (Akhenak et al. (2004)).

La structure multimodèle est ainsi utilisée pour réduire la complexité d'un modèle de type ASM1 (Activated Sludge Model no.1) (Olsson and Newell (1999)) qui décrit un processus de biodégradation d'un réacteur à boues activées. Différentes techniques de linéarisation ont été proposées, parmi lesquelles une linéarisation autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement (Smets et al. (2006)), en vue d'obtenir un multimodèle. La perte d'information constitue un premier inconvénient de ces techniques. Deuxièmement, le choix de variables de prémisse exprimant les différentes non-linéarités du système, ainsi que le choix des différents points de fonctionnement restent encore très délicat.

Dans la suite, on va présenter une procédure systématique de transformation d'un système nonlinéaire en le récrivant sous une forme multimodèle, en évitant ces inconvénients majeurs : la transformation est réalisée sans perte d'information, le choix de différents points de fonctionnement n'est plus nécessaire, le choix de variables de prémisse est réalisé d'une façon plus systématique. En partant d'une forme générale du système nonlinéaire, une représentation d'état linéaire à paramètres variables (LPV) est réalisée. Cette représentation LPV constitue une forme polytopique, car les matrices à paramètres variables qui la constituent sont des combinaisons convexes des matrices à coefficients constants calculées à partir des sommets du polytope. Ceux-ci sont obtenus en utilisant la transformation polytopique convexe (TPC) (Wang et al. (1996)). Les matrices à coefficients constants forment les représentations des sous-modèles du multimodèle, la non-linéarité du système étant rejetée dans les fonctions de pondération des sousmodèles. Le multimodèle obtenu par cette méthode n'est pas unique, il dépend du choix des scalaires qui définissent la transformation polytopique convexe et du choix de variables de prémisse.

Cette méthode sera appliquée au modèle ASM1 simplifié d'une station d'épuration à boues activées. Dans la dernière section seront données quelques conclusions sur la méthodologie proposée et quelques perspectives.

# MÉTHODOLOGIE

Cette section est consacrée à la méthodologie générale du passage d'un système non-linéaire, présenté sous forme générale, vers un multimodèle. La méthode proposée est analytique et le multimodèle obtenu est équivalent au système non-linéaire initial. Dans un premier temps, à partir de la forme générale d'un système non-linéaire, on réécrit le système sous la forme LPV. En général, pour un système dynamique non-linéaire, cette représentation n'est pas unique et de ce fait, il faut définir des critères de choix d'une représentation LPV qui correspondent aux objectifs de l'étude. A chaque représentation LPV correspond un ensemble de variables de prémisse. Dans un deuxième temps, ces variables de prémisse seront partitionnées en deux en utilisant la transformation polytopique convexe. La combinaison des partitions des différentes variables de prémisse contribueront à la construction des sous-modèles du multimodèle et des fonctions de pondération correspondantes. Le multimodèle sera ainsi une combinaison convexe de sous-modèles linéaires, la non-linéarité du système étant transférée dans les fonctions de pondération de chaque sousmodèle.

Introduisons les deux notions de transformation polytopique convexe et de multimodèle.

#### Le multimodèle

Ce type de modèle permet de représenter les systèmes non-linéaires dynamiques sous la forme d'une combinaison convexe de r sous-systèmes linéaires, considérés comme des *modèles locaux*  (Mourot et al. (1999)) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x, u) \cdot [A_i \cdot x(t) + B_i \cdot u(t) + \beta_i] \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x, u) \cdot [C_i \cdot x(t) + D_i \cdot u(t) + \delta_i] \end{cases}$$
(1)

 $x \in \mathbf{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u \in \mathbf{R}^m$  le vecteur de entrées et  $y \in \mathbf{R}^l$  le vecteur de sorties.  $A_i, B_i, \beta_i, C_i, D_i, \delta_i$  sont des matrices à coefficients constants de dimensions appropriées.  $\beta_i$  et  $\delta_i$  sont des termes issus de la linéarisation qui expriment la caractéristique locale des sous-modèles. La fonction  $\mu_i(x, u)$  représente la pondération du modèle local *i*, représenté, dans le modèle global, par  $\{(A_i, B_i, \beta_i, C_i, D_i, \delta_i)\}$ . Les fonctions de pondération  $\mu_i(x, u)$  ont la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x, u) = 1; \mu_i(x, u) \ge 0, \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$$

#### La transformation polytopique convexe

**Lemme 1.** Soit h(x(t),u(t)) une fonction continue et bornée sur le domaine  $[x_0, x_1] \times [u_0, u_1]$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , avec  $x_0, x_1, u_0, u_1 \in \mathbf{R}$ . Alors il existe deux fonctions (i = 1, 2)

$$F_i : [x_0, x_1] \times [u_0, u_1] \longmapsto [0, 1]$$
$$(x(t), u(t)) \longmapsto F_i(x(t), u(t))$$

avec  $F_1(x(t), u(t)) + F_2(x(t), u(t)) = 1$  telles que :

$$h(x(t), u(t)) = F_1(x(t), u(t)) \cdot h_1 + F_2(x(t), u(t)) \cdot h_1$$

$$\forall h_1 \ge \max_{x,u} \{h(x,u)\} \text{ et } h_2 \le \min_{x,u} \{h(x,u)\}$$

Les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sont définies par :

$$F_1(x(t), u(t)) = \frac{h(x(t), u(t)) - h_2}{h_1 - h_2}$$
$$F_2(x(t), u(t)) = \frac{h_1 - h(x(t), u(t))}{h_1 - h_2}$$

Notons que cette décomposition n'est pas unique.

# Méthode analytique de simplification de structure

Une large catégorie de systèmes non-linéaires dynamiques peut être représentée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))\\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$
(2)

où  $f(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{R}^{n}$  et  $g(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{R}^{l}$ .

Dans une première étape, sous l'hypothèse que f(x(t), u(t)) et g(x(t), u(t)) soient continues et bornées sur  $U \subseteq \mathbf{R}^n$  avec  $f(0, \cdot) = 0$  et  $g(0, \cdot) = 0$ , le système (2) peut être représenté sous forme LPV :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t), u(t)) \cdot x(t) + B(x(t), u(t)) \cdot u(t) \\ y(t) = C(x(t), u(t)) \cdot x(t) + D(x(t), u(t)) \cdot u(t) \\ (3) \\ \text{où } A(x, u) \in \mathbf{R}^{n \cdot n}, B(x, u) \in \mathbf{R}^{n \cdot m}, C(x, u) \in \mathbf{R}^{l \cdot n}, D(x, u) \in \mathbf{R}^{l \cdot m}. \end{cases}$$

Présenter le système non-linéaire (2) sous la forme LPV (3) revient à exprimer chaque composante  $x_i(t)$  de l'état x(t) et chaque composante  $y_j(t)$  de la sortie y(t) de la façon suivante :

$$\dot{x}_{i}(t) = \sum_{\substack{q=1\\q=1}}^{n} a_{i,q}(x,u) \cdot x_{q}(t) + \sum_{\substack{s=1\\s=1}}^{m} b_{i,s}(x,u) \cdot u_{s}(t)$$
$$y_{j}(t) = \sum_{\substack{q=1\\q=1}}^{n} c_{j,q}(x,u) \cdot x_{q}(t) + \sum_{\substack{s=1\\s=1}}^{m} d_{j,s}(x,u) \cdot u_{s}(t)$$
(4)

pour tout i = 1, ..., n et j = 1, ..., l.

Cette forme LPV explicite (4) réalise une répartition des différentes non-linéarités du système ( $a_{i,q}$ ,  $b_{i,s}, c_{j,q}, d_{j,s}$ ) auprès des différentes composantes de l'état et/ou de l'entrée.

Les matrices A(x, u), B(x, u), C(x, u) et D(x, u)dépendent respectivement des coefficients  $a_{i,q}$ ,  $b_{i,s}$ ,  $c_{j,q}$ ,  $d_{j,s}$ . Ainsi :

$$A(x,u) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(x,u) & \cdots & a_{1,n}(x,u) \\ \vdots & & \\ a_{n,1}(x,u) & \cdots & a_{n,n}(x,u) \end{bmatrix}$$
(5)

les expressions de B, C et D étant analogue.

A partir de la représentation LPV issue du système

(2) et donnée sous forme explicite dans (3) et (4), on définit l'*ensemble des variables de prémisse*  $V_z$ de la manière suivante :

$$V_{z} = \left\{ a_{i,q}(x,u) \mid a_{i,q} \neq const, i = \overline{1,n}, q = \overline{1,n} \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ b_{i,s}(x,u) \mid b_{i,s} \neq const, i = \overline{1,n}, s = \overline{1,m} \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ c_{j,q}(x,u) \mid c_{j,q} \neq const, j = \overline{1,l}, q = \overline{1,n} \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ d_{j,s}(x,u) \mid d_{j,s} \neq const, j = \overline{1,l}, s = \overline{1,m} \right\}$$

Dans la suite on va noter plus simplement :

$$V_z = \{ z_1(x, u), \dots, z_p(x, u) \mid p \le (n+l)(n+m) \}$$

où *p* représente la dimension de l'ensemble  $V_z$  et  $z_1(x, u), \ldots, z_p(x, u)$  sont les variables de prémisse, qui représentent les non-linéarités identifiées à partir de la forme LPV du système (2).

**Remarque 1.**  $(n + l) \times (n + m)$  représente le nombre maximal de variables de prémisse.

En général, la représentation LPV (3) pour un système non-linéaire de la forme (2) n'est pas unique ; à chaque représentation LPV correspond un ensemble particulier de variables de prémisse ; choisir une représentation LPV est équivalent à choisir un ensemble de variables de prémisse.

Le choix de l'ensemble des variables de prémisse  $V_z$  est important, car il influe sur le nombre de sousmodèles et la structure du modèle global. De plus, ce choix est lié à la décomposition (4) de chaque variable d'état et de chaque sortie, car très souvent, comme déjà mentionné, cette décomposition n'est pas unique.

**Remarque 2.** Le nombre de sous-modèles qui constituent le multimodèle est égal à  $r = 2^p$ . En effet, chaque variable de prémisse possède un maximum et un minimum qui seront combinées deux à deux pour constituer ces sous-modèles.

Les matrices à paramètres variables qui interviennent dans la forme LPV du système (2) sont des combinaisons linéaires de matrices à coefficients constants  $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j)$ ; par exemple, la matrice A(x, u) peut être exprimée comme suit :

$$A(x,u) = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_A} z_j(x,u) \cdot \mathcal{A}_j$$
 (6)

L'ensemble  $\mathcal{I}_A$  contient les indices correspondants aux variables de prémisse qui interviennent dans la matrice A. La matrice  $\mathcal{A}_0$ , ayant la même dimension que la matrice A, correspond aux éventuels termes constants  $(a_{i,j})$  qui peuvent intervenir dans la matrice A(x, u). Les matrices  $\mathcal{A}_j$  sont des matrices de la même dimension que A qui contiennent à la position correspondant à  $z_j$  le terme constant 1, et des zéros pour toutes les autres positions. Les matrices B(x, u), C(x, u), D(x, u) sont exprimées de la même façon que A(x, u).

Dans une deuxième étape, on génère les  $2^p$  sousmodèles d'un multimodèle caractérisé par les p variables de prémisse, chaque variable étant partitionné en deux, à l'aide de la transformation polytopique convexe (pour tout j = 1, ..., p) :

$$z_j(x,u) = F_{j,1}(z_j) \cdot z_{j,1} + F_{j,2}(z_j) \cdot z_{j,2}$$
(7)

avec

$$F_{j,1}(z_j) = \frac{z_j(x) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}}$$
  

$$F_{j,2}(z_j) = \frac{z_{j,1} - z_j(x)}{z_{j,1} - z_{j,2}}$$
(8)

On choisit, par exemple :

$$z_{j,1} = \max_{x} \{ z_j(x, u) \}$$
  

$$z_{j,2} = \min_{x} \{ z_j(x, u) \}$$
  

$$\forall j = 1, ..., p$$
(9)

A chaque sous-modèle *i*, représenté dans le tableau par la ligne *i*, correspond un *p*-uplet  $\sigma_i$  qui code les partitions des variables de prémisse intervenant dans la fonction de pondération correspondant à ce sous-modèle. On peut ainsi construire, comme dans l'exemple précédent, un tableau regroupant l'ensemble des partitions des variables de prémisse. Ainsi, dans ce tableau, on retient dans la ligne *i* les colonnes qui contiennent la valeur binaire 1. A chaque valeur binaire 1 choisie correspond une des deux partitions de chaque variable de prémisse. En multipliant les fonctions qui décrivent ces partitions on obtient la fonction de pondération  $\mu_i(z)$  correspondant au sous-modèle *i* (*i* = 1, ..., *r*) :

$$\mu_i(z) = \prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_i^j}(z_j(x,u))$$
(10)

où  $\sigma_i^k$  représente l'indice à la  $k^{ime}$  position dans le  $B_i, C_i$  et  $D_i$  s'écrivent de la même façon. Ce fait est *p*-uplet  $\sigma_i$ . Alors  $\sum_{i=1}^r \mu_i(z) = 1$  et  $\mu_i(z) \ge 0$ , car :  $F_{j,1}(z_j(x,u)) + F_{j,2}(z_j(x,u)) = 1, \forall j = 1, ..., p$ 

**Table 1**. – Tableau de partitionnement des variables de prémisse pour un multimodèle à p variables de prémisse et deux partitions pour chaque variable

| Sous-         | Partitions           |           |           |           |       |                      |           |            |
|---------------|----------------------|-----------|-----------|-----------|-------|----------------------|-----------|------------|
| modèle        | $z_1$                |           | $z_2$     |           | • • • | $z_p$                |           | $\sigma_i$ |
| i             | $\overline{F_{1,1}}$ | $F_{1,2}$ | $F_{2,1}$ | $F_{2,2}$ | ••••  | $\overline{F_{p,1}}$ | $F_{p,2}$ | -          |
| 1             | 1                    | 0         | 1         | 0         |       | 1                    | 0         | (1,1,,1)   |
| 2             | 1                    | 0         | 1         | 0         |       | 0                    | 1         | (1,1,,2)   |
| ÷             | ÷                    | ÷         | ÷         | ÷         | • • • | ÷                    | ÷         | :          |
| $2^{p-2}$     | ÷                    | :         | 1         | 0         |       | ÷                    | ÷         | :          |
| $2^{p-2} + 1$ | ÷                    | ÷         | 0         | 1         |       | ÷                    | ÷         | :          |
| :             | ÷                    | ÷         | ÷         | ÷         | •••   | ÷                    | ÷         | :          |
|               |                      |           |           |           |       | 1                    | 0         | (1,2,,1)   |
| $2^{p-1}$     | 1                    | 0         | 0         | 1         |       | 0                    | 1         | (1,2,,2)   |
| $2^{p-1} + 1$ | 0                    | 1         | 1         | 0         |       | 1                    | 0         | (2,1,,1)   |
|               |                      |           |           |           |       | 0                    | 1         | (2,1,,2)   |
| ÷             | ÷                    | ÷         | ÷         | ÷         | •••   | ÷                    | ÷         | ÷          |
| :             | ÷                    | ÷         | 1         | 0         |       | ÷                    | ÷         | :          |
| ÷             | ÷                    | ÷         | 0         | 1         |       | ÷                    | ÷         | :          |
| :             | ÷                    | ÷         | ÷         | ÷         | •••   | ÷                    | ÷         | :          |
|               |                      |           |           |           |       | 1                    | 0         | (2,2,,1)   |
| $2^p$         | 0                    | 1         | 0         | 1         |       | 0                    | 1         | (2,2,,2)   |

Il faut noter que les fonctions matricielles A(x, u), B(x, u), C(x, u) et D(x, u) font intervenir les variables de prémisse  $z_j$  pour j = 1, ..., p. Notons respectivement  $\mathcal{I}_A$ ,  $\mathcal{I}_B$ ,  $\mathcal{I}_C$ ,  $\mathcal{I}_D$  les ensembles des indices des variables de prémisse qui interviennent dans les matrices A(x, u), B(x, u), C(x, u) et D(x, u). Ainsi, on va évaluer les matrices A, B, C et D aux sommets du polytope définis par les partitions des variables de prémisse intervenant dans ces matrices pour déterminer les matrices  $A_i, B_i, C_i$  et  $D_i$  (i = 1, ..., r), qui sont les matrices à coefficients constants relatives à chaque sous-modèle :

$$A_i = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}} z_{j,\sigma_i^j} \cdot \mathcal{A}_j \tag{11}$$

détaillé dans la démonstration du résultat suivant :

Théorème 1. Le multimodèle (1), qui représente une combinaison convexe de sous-modèles li*néaires*  $\{(A_i, B_i, C_i, D_i)\}$  (i = 1, ..., r), est équivalent au système (2).

On peut remarquer que cette méthode produit un multimodèle sans utiliser de techniques de linéarisation qui nécessitent un choix délicat de différents points de fonctionnement du système, ainsi qu'un choix des variables de prémisse.

#### **RESULTATS ET DISCUSIONS**

# Application de la méthode au modèle d'un réacteur à boues activées

Dans cette section, la méthode analytique de décomposition développée dans la section précédente est appliquée à un modèle de réacteur à boues activées, le modèle ASM1 réduit, en considérant seulement la pollution carbonée(Olsson and Newell (1999)).

L'épuration par boues activées consiste à mettre en contact par brassage les eaux usées avec un mélange riche en bactéries pour dégrader la matière organique en suspension ou dissoute. Dans l'étude du réacteur à boues activées plusieurs modes de fonctionnement peuvent être considérés : asservissement à partir d'un volume de référence, réacteur à volume constant, écoulement libre à la sortie du réacteur, débits entrant et sortant commandés. La première situation est présentée et peut être décrite à partir d'un bilan biomasse, carbone, oxygène en milieu aérobie.

En considérant seulement la pollution carbonée, le réacteur à boues activées peut être représenté par le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases}
\frac{dV}{dt} = q_{in} - q_{out} \\
\frac{d(V \cdot X_{BH})}{dt} = q_{in} X_{BH,in} - q_{out} X_{BH,out} + r_H V \\
\frac{d(V \cdot S_S)}{dt} = q_{in} S_{S,in} - q_{out} S_{S,out} + r_S V \\
\frac{d(V \cdot S_O)}{dt} = q_{in} S_{O,in} - q_{out} S_{O,out} + r_O V + \\
+ K q_a V (S_{O,sat} - S_O)
\end{cases}$$
(12)

où la signification des variables est la suivante : Vest le volume du réacteur,  $X_{BH}$  est la concentration de la biomasse hétérotrophe,  $S_S$  est la concentration du substrat rapidement biodégradable,  $S_O$  est la concentration de l'oxygène dissout, q représente le débit et  $q_a$  le débit d'air. Les indices *in* et *out* correspondent à l'entrée et, respectivement à la sortie du réacteur.  $r_H$ ,  $r_S$  et  $r_O$ , représentant respectivement les cinétiques des réactions de la biomasse hétérotrophe  $X_{BH}$ , du carbone  $S_S$  et de l'oxygène  $S_O$ , sont modélisées par :

$$\begin{pmatrix}
r_{H} = \frac{1}{Y_{H}} \mu_{H} \frac{S_{S}}{K_{S}+S_{S}} \frac{S_{O}}{K_{OH}+S_{O}} X_{BH} - \\
- (1-f) b_{H} X_{BH} \\
r_{S} = -\frac{1}{Y_{Y}} \mu_{H} \frac{S_{S}}{K_{S}+S_{S}} \frac{S_{O}}{K_{OH}+S_{O}} X_{BH} + \\
+ (1-f) b_{H} X_{BH} \\
r_{O} = \frac{Y_{H}-1}{Y_{H}} \mu_{H} \frac{S_{S}}{K_{S}+S_{S}} \frac{S_{O}}{K_{OH}+S_{O}} X_{BH}
\end{cases}$$
(13)

Différente quantités interviennent dans (12) et (13):  $S_{O,sat}$  la concentration de saturation de l'oxygène;  $K_S$ ,  $K_{OH}$  des constantes de demi-saturation;  $Y_Y$ ,  $Y_H$  et f des coefficients pour le calcul des taux de conversion des différents produits dans différents processus réactionnels (croissance ou mortalité),  $b_H$ ,  $\mu_H$  des coefficients cinétiques hétérotrophe, K le gain du régulateur en oxygène.

Sous l'hypothèse d'homogénéité du réacteur, on a les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} X_{BH,out} = X_{BH} \\ S_{S,out} = S_S \\ S_{O,out} = S_O \end{cases}$$

On suppose nulle la concentration en oxygène dissout à l'entrée du réacteur  $(S_{O,in})$ .

D'un point de vue pratique, le système est contrôlé et on prend en compte un asservissement à partir d'un volume de référence  $V_{ref}$ . Ce dernier utilise une commande combinée a priori/a posteriori du type :

$$q_{out} = q_{in} + K_1 \cdot (V_{ref} - V)$$

Si on remplace  $r_H$ ,  $r_S$  et  $r_O$  données dans (13),

alors le système (12) devient :

$$\dot{V} = -K_{1} \cdot (V_{ref} - V)$$

$$\dot{X}_{BH} = \frac{q_{in}}{V} (X_{BH,in} - X_{BH}) - (1 - f)b_{H}X_{BH} + \frac{\mu_{H}}{Y_{H}} \frac{S_{S}}{K_{S} + S_{S}} \frac{S_{O}}{K_{OH} + S_{O}} X_{BH}$$

$$\dot{S}_{S} = \frac{q_{in}}{V} (S_{S,in} - S_{S}) + (1 - f)b_{H}X_{BH} - \frac{\mu_{H}}{Y_{Y}} \frac{S_{S}}{K_{S} + S_{S}} \frac{S_{O}}{K_{OH} + S_{O}} X_{BH}$$

$$\dot{S}_{O} = -\frac{q_{in}}{V} S_{O} + Kq_{a} (S_{O,sat} - S_{O}) + \frac{Y_{H} - 1}{Y_{H}} \mu_{H} \frac{S_{S}}{K_{S} + S_{S}} \frac{S_{O}}{K_{OH} + S_{O}} X_{BH}$$
(14)

Le vecteur des états et le vecteur des commandes sont définis par :

$$x = \begin{bmatrix} V \ X_{BH} \ S_S \ S_O \end{bmatrix}^T$$
$$u = \begin{bmatrix} X_{BH,in} \ S_{S,in} \ q_a \ V_{ref} \end{bmatrix}^T$$

Pour mettre le système sous une forme multimodèle, chaque équation d'état de (14) doit être présentée, dans un premier temps, sous une forme LPV, comme dans (4). Alors, on définit les fonctions matricielles :

$$A(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0\\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0\\ 0 & a_{4,2} & 0 & a_{4,4} \end{pmatrix}$$
$$B(z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{1,4}\\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_{3,2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_{4,3} & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$a_{1,1} = K_1$$

$$a_{2,2} = \frac{\mu_H}{Y_H} \cdot z_1 - z_2 - (1 - f)b_H$$

$$a_{3,2} = -\frac{\mu_H}{Y_Y} \cdot z_1 + (1 - f)b_H$$

$$a_{3,3} = -z_2$$

$$a_{4,2} = \frac{Y_H - 1}{Y_H}\mu_H \cdot z_1$$

$$a_{4,4} = -K \cdot q_a - z_2$$

$$b_{1,4} = -K_1$$

$$b_{2,1} = b_{3,2} = z_2$$

$$b_{4,3} = K \cdot S_O \text{ sat}$$

Le système présente deux non-linéarités. On prend alors comme variables de prémisse :

$$\begin{cases} z_1(S_S, S_O) = \frac{S_S}{K_S + S_S} \cdot \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \\ z_2(q_{in}, V) = \frac{q_{in}}{V} \end{cases}$$
(15)

L'idée de prendre la variable de prémisse  $z_1$  comme produit entre deux lois de Monod, sans les séparer, est de réduire ainsi le nombre de variables de prémisse.

Dans un deuxième temps, en utilisant la transformation polytopique convexe (**Lemme 1**), les deux non-linéarités  $z_1$  et  $z_2$  s'écrivent comme dans (7), où les partitions de chaque variable de prémisse sont construites de la même manière que dans (8) et avec les scalaires (9). Pour calculer les maxima et les minima qui interviennent dans les expressions de  $z_1$  et  $z_2$ , on utilise le fait que V,  $S_S$ ,  $S_O$  et  $q_{in}$ sont bornées. Alors, on peut calculer les maxima et les minima de  $z_1$  et  $z_2$ , et enfin déterminer les scalaires  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  (j = 1, 2) comme dans (9). On a alors  $2^2 = 4$  sous-modèles représentés par les paires ( $A_i$ ,  $B_i$ ) (i = 1, ..., 4) :

$$A_{1} = A(z_{1,1}, z_{2,1}) \qquad B_{1} = B(z_{2,1}) A_{2} = A(z_{1,1}, z_{2,2}) \qquad B_{2} = B(z_{2,2}) A_{3} = A(z_{1,2}, z_{2,1}) \qquad B_{3} = B(z_{2,1}) A_{4} = A(z_{1,2}, z_{2,2}) \qquad B_{4} = B(z_{2,2})$$

Le multimodèle est obtenu en agrégeant les quatre sous-modèles précédents, les pondérations  $\mu_i(x, u)$ étant calculées conformément à (10). A la figure 1 on peut voir l'évolution du système (14) pour :  $K_1 = 0.01, V_{ref} = 8[10^6 l], K_S = 20[mg/l],$  $K_{OH} = 0.2[mg/l], S_{O,sat} = 10[mg/l], K =$  $2.3[mg/l], b_H = 0.4[1/24h], \mu_H = 3.733[1/24h],$  $Y_Y = 0.3, Y_H = 0.6$  et f = 0.1, avec les conditions initiales :

$$(V(0), X_{BH}(0), S_S(0), S_O(0))^T = (8, 5, 4.2, 3)^T$$

Le débit  $q_{in}$  à l'entrée du réacteur influe sur les trois concentrations  $X_{BH}$ ,  $S_S$  et  $S_O$  et sur les fonctions de pondération de chaque sous-modèle. Une croissance du débit d'entrée  $(q_{in})$  produit une augmentation de la concentration du substrat  $(S_S)$  et de la concentration de biomasse hétérotrophe  $(X_{BH})$ , ainsi qu'une baisse de la concentration en oxygène dissout  $(S_O)$ . En même temps,  $S_O$  est directement influencé par le débit d'air  $(q_a)$ ,  $X_{BH}$  et  $S_S$ à l'intérieur du réacteur étant influencées par les concentrations correspondantes à l'entrée du réacteur  $(X_{BH,in}$  et  $S_{S,in})$ .



**Figure 1**. – L'évolution du système (14) et les fonctions de pondération du multimodèle associées

#### CONCLUSION

Cet article propose une méthode analytique générale de simplification de complexité d'un modèle non-linéaire auquel est substitué un ensemble de sous-modèles de structures plus simples, linéaires, et un ensemble de fonctions d'agrégation appropriées afin de réunir ces sous-modèles pour constituer le modèle global.

En plus de ces points techniques, les multimodèles obtenus seront utilisés, grâce à leurs propriétés particulières, pour l'estimation d'état et ses applications au diagnostic de fonctionnement de systèmes. La méthodologie de simplification de la complexité proposée en général dans la littérature suppose une réduction d'ordre du système, obtenu par différents techniques de linéarisation appliquées autour de points de fonctionnement bien choisis. La difficulté du choix de ces points est la raison pour laquelle cet article propose une méthode analytique plus générale qui réalise une réécriture sous forme multimodèle sans la nécessité de choisir ces points de fonctionnement. Il est important de noter que le multimodèle obtenu est identique au système initial, cette méthode offrant la possibilité de réduire le nombre de sous-modèles par un choix adéquat de variables de prémisse.

D'un point de vue pratique, cette méthode est appliquée à un modèle ASM1 simplifié de réacteur à boues activées, et conduit à une structure multimodèle construite sur la base de quatre sous-modèles. Même si dans cet article on a traité le cas d'un modèle ASM1 réduit, en considérant seulement la partie carbonée, la méthode proposée peut s'étendre à un modèle plus général, les difficultés rencontrées étant similaires.

Comme perspectives de développement de cette méthode, on envisage de définir des critères de choix d'une structure LPV en fonction de l'usage du modèle en commande, simulation et diagnostic.

# Bibliographie

- Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., and Maquin, D. (2004). Estimation of state and unknown inputs of a nonlinear system represented by a multiple model. In 11th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing, MMM.
- Angelis, G. Z. (2001). *System Analysis, Modelling and Control with Polytopic Linear Models*. Technische Universiteit Eindhoven.
- Dolgin, Y. and Zeheb, E. (2005). Model reduction of uncertain systems retaining the uncertainty structure. *Systems and Control Letters*, 54 :771– 779.
- Mourot, G., Gasso, K., and Ragot, J. (1999). Modelling of ozone concentrations using a takagisugeno model. *Control Engineering Practice*, 7(6):707–715.

- Murray-Smith, R. and Johansen, T. (1997). *Multiple model approaches to modelling and control.* Taylor & Francis, London.
- Olsson, G. and Newell, B. (1999). Wastewater Treatment Systems. Modelling, Diagnosis and Control. IWA Publishing.
- Sayesel, A. K. and Barlas, Y. (2006). Model simplification and validation with indirect structure validity tests. *System Dynamics Reviews*, 22(3):241–262.
- Smets, I., Verdickt, L., and Van Impe, J. (2006). A linear ASM1 based multi-model for activated sludge systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 12(5):489– 503.
- Steffens, M., Lant, P., and Newell, R. (1997). A systematic approach for reducing complex biological wastewater treatement models. *Water Research*, 31(3):590–606.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernet*, 15 :166–172.
- Wang, H. O., Tanaka, K., and Griffin, M. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :14–23.