

Une nouvelle technique pour la caractérisation des incertitudes : l'approche bornante.

Olivier ADROT, Stéphane PLOIX, José RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy

Ecole Nationale Supérieure de Géologie

2, Avenue de la Forêt de Haye

Institut National Polytechnique de Lorraine

F - 54 516 Vandoeuvre les Nancy

1. Motivation

La métrologie recouvre un ensemble de moyens matériels et logiciels concourant à produire des informations fiables. Les moyens matériels concernent la conception de capteurs aptes à donner une image la plus fidèle possible de la grandeur à mesurer ; les moyens logiciels regroupent l'ensemble des traitements numériques des données brutes pour fournir des données validées. La frontière entre ces deux domaines est de plus en plus étroite et ce qui les lie est très certainement la modélisation des phénomènes au sens large. De très nombreuses techniques de validation de données brutes existent et la plupart d'entre elles reposent d'une part sur l'existence de modèles ou de relations liant les informations afin de les corrélérer entre elles et d'autre part sur l'établissement d'hypothèses statistiques sur les défauts des systèmes de mesure (loi de distribution des erreurs par exemple).

Dans de nombreux cas, ces hypothèses ont peu de fondement (pourquoi les erreurs de mesure seraient-elles à distribution gaussienne ?) et les modèles peuvent présenter des incertitudes, ce qui rend délicat le recoupement d'informations qu'ils génèrent. On présente ici une technique originale qui examine ces problèmes d'incertitudes avec des hypothèses plus réalistes.

2. Introduction

L'analyse de régression consiste à mettre en évidence et déterminer une relation entre des variables explicatives et une variable à expliquer. La qualité de la représentation ainsi obtenue peut être analysée en terme de reconstruction de la variable à expliquer ; généralement, on procède à une comparaison entre les mesures de la variable à expliquer et son estimation fournie par le modèle. Les écarts éventuellement constatés peuvent être imputés à différentes sources : erreur de structure de modèles, erreurs de paramètres de modèles, erreurs affectant les mesures.

On examine ce problème classique en introduisant la notion d'incertitude paramétrique [PLOIX, 1999] qui permet d'expliquer, pour une part, l'écart observé entre mesures et estimations. Cela conduit à caractériser les paramètres du modèle de régression par un polytope et ensuite à en définir l'équation.

Seuls les systèmes linéaires statiques sont considérés ici, mais l'extension à des systèmes linéaires dynamiques est possible [PLOIX, 1998]. Les variables physiques sont notées y et x et les mesures \tilde{y} et \tilde{x} . Les modèles du système physique et de son système de mesure sont mis sous une forme linéaire par rapport aux paramètres $\theta_{i,k}$:

$$y_k = \sum_{i=1}^p \theta_{i,k} x_{i,k} \quad k = 1, \dots, n \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= y_k \\ \tilde{x}_{i,k} &= x_{i,k} \end{aligned} \quad i = 1, \dots, p \quad (1b)$$

Sous forme vectorielle, on note aussi :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} \quad x_k^T = (x_{k1} \quad \dots \quad x_{kp}) \quad X = \begin{pmatrix} x_1^T \\ \dots \\ x_N^T \end{pmatrix} \quad y_k = x_k^T \theta_k$$

S'agissant d'un système dont les paramètres présentent des variations, lorsque les mesures sont effectuées, on ignore les valeurs des paramètres du système et d'un instant à un autre elles varient. Le problème considéré ici est précisément la caractérisation des paramètres des modèles. A titre d'exemple, on utilisera dans la suite les données suivantes :

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.8 \\ 3.4 \end{pmatrix} \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.1 \\ 0.2 & 1.2 \\ 1.3 & 0.8 \end{pmatrix} \quad (2)$$

3. Méthode de caractérisation des incertitudes

Elle comporte les trois étapes suivantes.

Première étape : on peut constater qu'aucun couple (θ_1, θ_2) ne vérifie (1a) compte tenu des valeurs numériques (2). On peut rechercher une solution approchée qui minimise (par exemple) :

$$\Phi = \|\tilde{y} - \tilde{X}\theta\|^2$$

$$\text{On obtient : } \hat{\theta} = \begin{pmatrix} 1.4462 \\ 0.4880 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Le modèle est alors vérifié de façon approchée, puis que l'on obtient les résidus :

$$\tilde{y}_k - \tilde{X}\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 0.1396 \\ 0.0748 \\ -0.1296 \end{pmatrix}$$

Les mesures étant supposées exactes, la seule explication possible de l'écart constaté est la présence d'incertitudes sur les paramètres. En faisant l'hypothèse d'indépendance entre incertitudes paramétriques, ces dernières sont explicitées sous la forme :

$$\theta_k = \theta_c + \lambda v_k \quad \text{avec } v_k = \begin{pmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathfrak{R}^{*+} \quad \|v_k\|_{\infty} \leq 1 \quad (4)$$

où l'on peut prendre, par exemple, $\theta_c = \hat{\theta}$.

Deuxième étape : on peut alors définir les domaines de majoration Θ^- et Θ^+ relatifs aux valeurs de θ_k conduisant à des estimations $\tilde{x}_k \theta_k$ inférieures ou supérieures aux mesures \tilde{y}_k :

$$\Theta^+ = \{\theta_k : \tilde{y}_k \leq \tilde{x}_k \theta_k ; k \in \{1..3\}\}$$

$$\Theta^- = \{\theta_k : \tilde{y}_k \geq \tilde{x}_k \theta_k ; k \in \{1..3\}\}$$

Troisième étape : définissons le domaine Θ des valeurs de θ_k de la façon suivante :

$$\Theta \cap \Theta^- \neq \emptyset \quad \Theta \cap \Theta^+ \neq \emptyset$$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \exists (\theta', \theta'') \in \Theta^2 / \tilde{x}_k \theta'_k \leq \tilde{y}_k \leq \tilde{x}_k \theta''_k$$

Il est clair que l'ensemble des valeurs $\tilde{x}_k \theta_k$ ainsi définies contient les points de mesure y_k . Les valeurs de θ_k admissibles appartiennent nécessairement au plus petit domaine Θ de façon à obtenir la caractérisation la plus précise du modèle. Avec la contrainte (4), ce domaine est une boîte qui est complètement défini dès que λ l'est. Une procédure analytique peut être proposée. Elle consiste à analyser les intersections des hyperplans d'équation :

$$\tilde{x}_k \theta_k - \tilde{y}_k = 0$$

avec la boîte définie en (4). On peut montrer qu'il faut choisir λ tel que :

$$\lambda > \lambda_k, \quad \lambda_k = \frac{|\tilde{y}_k - \tilde{x}_k \theta_c|}{\tilde{x}_k \text{sign}(\tilde{x}_k)^T} \quad k \in \{1, \dots, 3\} \quad (5)$$

On peut donc définir la borne inférieure admissible permettant d'obtenir le plus petit domaine vérifiant (4) :

$$\lambda_l = \sup_k \frac{|\tilde{y}_k - \tilde{x}_k \theta_c|}{\|\tilde{x}_k\|_1} \quad (6)$$

Les données (2) ont été utilisées pour construire la figure 1. Dans le plan (θ_1, θ_2) , on a fait apparaître les droites d'équation $\tilde{y}_k = \tilde{x}_{k1} \theta_1 + \tilde{x}_{k2} \theta_2$ ($k=1,2,3$). Puis à partir de la valeur $\theta_c = \theta$ (3), on peut calculer λ_k . Enfin, avec les valeurs choisies, on obtient comme valeur limite $\lambda_l = 0.1163$. Cela permet de construire le domaine Θ sous forme d'un orthotope aligné (figure 1) ce qui achève la caractérisation du modèle incertain.

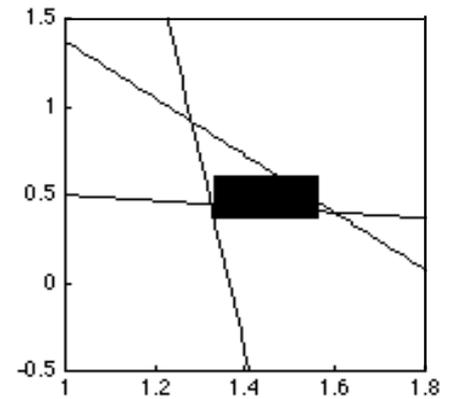


Figure 1. Caractérisation du modèle incertain - plan (θ_1, θ_2)

4. Détection de défauts de capteurs

Les données à partir desquelles le modèle d'un système est établi peuvent contenir des valeurs aberrantes. Celles-ci peuvent avoir comme origine une déficience du système de mesure ou du système de collecte des mesures. On considère ici le cas de biais accidentel se traduisant par la présence de mesures d'amplitude anormalement faible ou forte. On considère toujours un modèle affine en les paramètres, mais en prenant en compte la présence de biais sur une mesure. La partie gauche de la figure 2a a été construite avec un jeu de 15 mesures semblable à celui donné en (2). La plus grande valeur de λ_k (équation 5) a été détectée et la valeur de k correspondante fournit le rang de la mesure en défaut. Cette dernière a été éliminée du jeu de données et la partie droite de la figure 2a est obtenue ; la boîte obtenue est alors de dimension plus restreinte. Les valeurs correspondant aux deux boîtes sont :

$$\lambda_l = 0.154 \quad (\text{avec toutes les mesures})$$

$$\lambda_l = 0.057 \quad (\text{après suppression de la mesure aberrante})$$

ce qui montre une réduction très sensible du domaine d'incertitude dès que les mesures aberrantes ont été supprimées. La figure 2b compare les prédictions de la variable y fournies par le modèle (compte tenu de l'incertitude paramétrique (4)) avec les mesures ; la encore, on apprécie la réduction du domaine d'incertitude après suppression de la mesure aberrante.

Conclusion

Reprenant l'idée classique de l'analyse de la régression linéaire, une nouvelle interprétation des écarts de modèle est proposée. Ces écarts sont interprétés comme le résultat de variations des paramètres du modèle du système considéré et on a proposé une technique simple, mais systématique, pour déterminer l'enveloppe de ces paramètres. Il est également possible de compléter cette analyse par une étape de détection de mesures incohérentes. Bien que présentée dans un cadre restrictif à propos d'exemple de faibles dimensions et pour des systèmes statiques, l'approche proposée se généralise à des systèmes dynamiques.

Références

S. Ploix. Diagnostic des systèmes incertains : l'approche bornante. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 1998.

S. Ploix, O. Adrot, J. Ragot. Computation of parameters uncertainties in linear model. 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, USA, 1999.

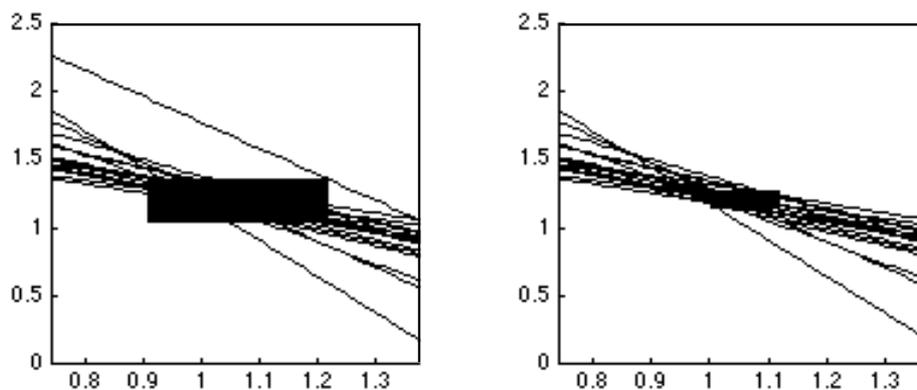


Figure 2a. Caractérisation du modèle incertain dans le plan (θ_1, θ_2) avant et après suppression de la mesure aberrante

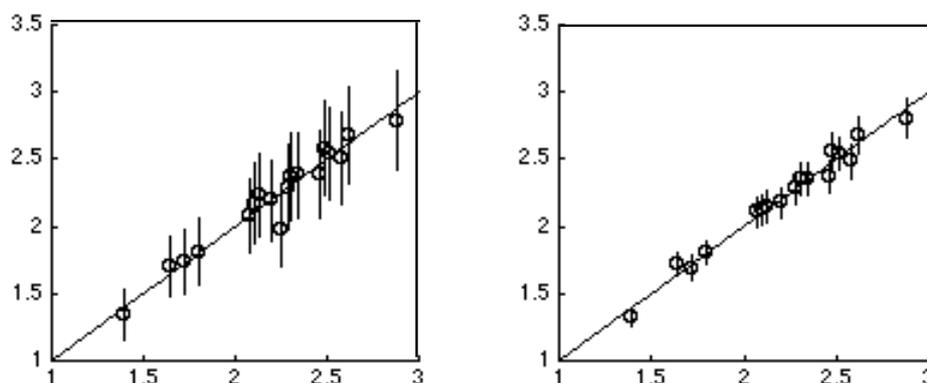


Figure 2b. Caractérisation du modèle dans le plan (mesure-estimation) avant et après détection-suppression de la mesure aberrante.