

# Identification de modèles paramétriques à temps continu. Méthodes, outil logiciel et avantages

Hugues GARNIER, Marion GILSON, Thierry BASTOGNE  
Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy-Université  
CNRS, BP 239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France

hugues.garnier@cran.uhp-nancy.fr, marion.gilson@cran.uhp-nancy.fr,  
thierry.bastogne@cran.uhp-nancy.fr

**Résumé**— *Le but de cet article est de dresser un panorama des méthodes directes d'identification de modèles paramétriques à temps continu à partir de données échantillonnées. Nous rappelons les principales méthodes d'estimation de fonctions de transfert à temps continu : estimateurs classiques des filtres de variable d'état, de la variable instrumentale optimale et de l'erreur de sortie. Nous présentons la boîte à outils logicielle CONTSID et discutons les principaux avantages de ces approches directes. Enfin nous décrivons brièvement quelques aspects plus avancés tels que l'identification de systèmes multivariables, l'identification en boucle fermée et l'identification dans un contexte d'erreurs en les variables.*

**Mots-clés**— *modèles à temps continu, identification des systèmes, variable instrumentale.*

## I. INTRODUCTION

L'identification consiste à rechercher des modèles mathématiques de systèmes à partir de données expérimentales et de connaissances disponibles *a priori*. Ces modèles doivent fournir une approximation fidèle du comportement du système physique sous-jacent dans le but d'estimer des paramètres physiques ou de concevoir des algorithmes de simulation, de prévision, de surveillance ou de commande. La démarche classique consiste à formaliser les connaissances disponibles *a priori*, à recueillir des données expérimentales, puis à estimer la structure, les paramètres et les incertitudes d'un modèle, enfin à valider (ou invalider) celui-ci. Ce champ thématique à caractère pluridisciplinaire trouve ses applications dans des domaines très variés.

L'utilisation de données expérimentales pour déterminer les paramètres de modèles mathématiques de systèmes dynamiques représente un sujet classique de l'automatique [1]. Les modèles issus de l'identification sont appelés *modèles boîte-noire*, lorsqu'ils sont peu, voire pas du tout, inspirés de la connaissance physique sur le procédé considéré.

Durant les trois dernières décennies du XX<sup>e</sup> siècle, l'identification de modèles boîte-noire a connu un développement considérable tant sur le plan de la proposition de nouvelles techniques que sur le plan des applications. Durant cette période, la théorie de l'identification s'est principalement développée en considérant des modèles linéaires à *temps discret*. La boîte à outils «System Identification» de Matlab développée par L. Ljung [2] a largement contribué à la popularité de ces approches. Il existe de nombreux ouvrages de référence qui synthétisent la majeure partie des travaux de recherche effectués dans le domaine, parmi lesquels nous citerons [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]. Tous ces ouvrages traitent essentiellement du problème de l'estimation

paramétrique de modèles à temps discret. En effet, le formidable développement des calculateurs numériques a rendu l'utilisation des modèles à temps discret de plus en plus courante, non seulement en raison de la nature discrète des données acquises, mais surtout à cause de la facilité de l'implantation de l'algorithme d'identification puis de commande ou de diagnostic préventif développés à partir du modèle identifié. La domination de l'identification de modèles à temps discret était telle que les chercheurs travaillant sur les approches d'estimation paramétrique de modèles à temps continu étaient considérés, soit comme «des inconditionnels de l'époque analogique», soit comme «des personnes s'intéressant uniquement aux cas d'école» [14].

Pour identifier un modèle à temps continu, deux approches principales sont envisageables dans le domaine temporel : l'approche directe et l'approche indirecte [15]. Toutes deux utilisent des données d'entrée/sortie échantillonnées, car les moyens de mesure actuels sont pour la plupart des instruments numériques et les données recueillies sont par conséquent à temps discret. L'approche indirecte consiste dans un premier temps, à déterminer un modèle à temps discret à l'aide de techniques maintenant considérées comme conventionnelles [7], [8], [13], puis à convertir ce dernier en un modèle à temps continu. Les propriétés statistiques de ces estimateurs (biais, variance, convergence) sont bien connues et expliquent en grande partie l'attrait pour cette stratégie.

Cette approche indirecte fondée sur l'estimation initiale d'un modèle à temps discret fait, en général, appel à des algorithmes d'optimisation itératifs très coûteux en termes de calculs sans garantie de convergence vers l'optimum global. En effet, pour la plupart de ces algorithmes, la procédure d'initialisation conditionne la convergence vers l'optimum global. Les approches directes, discutées dans cet article, ne souffrent pas de cet inconvénient.

L'identification directe de modèles à temps continu, longtemps dans l'ombre de l'identification de modèles à temps discret, est à présent mature. C'est un sujet important qui a de nombreuses applications s'étendant du traitement du signal, à la commande, au diagnostic, à l'astrophysique [16], aux sciences économiques [17] ou environnementales [18]. Elle possède depuis quelques années son propre outil logiciel avec la boîte à outils CONTSID. L'objectif de cet article est de rappeler les approches temporelles classiques disponibles et de discuter leurs avantages.

## II. FORMULATION DU PROBLÈME D'IDENTIFICATION

Soit un système mono-entrée, mono-sortie, linéaire, à temps continu, causal et invariant dans le temps soumis à un en-

semble de conditions initiales quelconques. Ce système est décrit par l'équation différentielle à coefficients constants<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} a_0^o \hat{y}(t) + a_1^o \hat{y}^{(1)}(t) + \dots + \hat{y}^{(n_a)}(t) = \\ b_0^o u(t) + b_1^o u^{(1)}(t) + \dots + b_{n_b}^o u^{(n_b)}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

où  $u(t)$  représente le signal d'entrée,  $\hat{y}(t)$  la réponse non bruitée du système à  $u(t)$ ,  $x^{(i)}(t)$  représente la  $i^e$  dérivée par rapport au temps du signal à temps continu  $x(t)$ .

L'équation (1) permet de représenter la sortie du système pour toutes les valeurs de la variable continue  $t$  et peut également s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\hat{y}(t) = G_o(p)u(t) = \frac{B_o(p)}{A_o(p)}u(t), \quad (2)$$

avec

$$\begin{aligned} B_o(p) &= b_0^o + b_1^o p + \dots + b_{n_b}^o p^{n_b}, \\ A_o(p) &= a_0^o + a_1^o p + \dots + p^{n_a}, \quad n_a \geq n_b, \end{aligned}$$

où  $p$  représente l'opérateur différentiel  $px(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ .  $G_o(p)$  est l'opérateur de transfert du système vrai ; les polynômes  $A_o(p)$  et  $B_o(p)$  sont supposés être premiers entre eux et le système est supposé être asymptotiquement stable. On suppose de plus que les perturbations agissent sur la sortie non bruitée sous la forme d'un terme additif. Le système «vrai» est alors décrit par :

$$S : y(t) = G_o(p)u(t) + H_o(p)e_o(t), \quad (3)$$

où  $y(t)$  représente la sortie bruitée,  $H_o(p)$  est une fonction rationnelle propre et inversement propre qui décrit le bruit additif sur la sortie et  $e_o(t)$  est un bruit blanc à temps continu à moyenne nulle.

Le terme de perturbation  $e_o(t)$  est supposé être non-corrélé avec le signal d'entrée  $u(t)$  ; le cas d'un système évoluant en boucle ouverte est considéré. Les signaux à temps continu  $u(t)$  et  $y(t)$  sont également supposés être échantillonnés à pas non nécessairement constant.

Les modèles que l'on recherche ont la forme suivante :

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \hat{y}(t_k) = G(p, \theta)u(t_k) \\ y(t_k) = \hat{y}(t_k) + v(t_k) \end{cases} \quad (4)$$

avec

$$\theta = [a_{n_a-1}, \dots, a_0, b_{n_b}, \dots, b_0]^T. \quad (5)$$

$x(t_k)$  représente l'amplitude du signal à temps continu  $x(t)$  à l'instant  $t_k = kT_e$  et  $G(p, \theta)$  est l'opérateur de transfert défini par :

$$G : G(p, \theta) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_{n_b} p^{n_b}}{a_0 + a_1 p + \dots + p^{n_a}}. \quad (6)$$

Le terme de perturbation est modélisé ici comme un bruit à temps discret à moyenne nulle noté  $v(t_k)$ .

Le problème d'identification peut être formulé ainsi : en supposant les ordres  $n_a$  and  $n_b$  connus ( $G_o \in \mathcal{G}$ ), l'objectif consiste à estimer le vecteur des paramètres du modèle à temps continu à partir de  $N$  échantillons des signaux d'entrée/sortie  $Z_N = \{u(t_k); y(t_k)\}_{k=1}^N$ .

<sup>1</sup>La présence d'un retard pur *a priori* connu, multiple entier de la période d'échantillonnage, peut être traitée sans difficulté. Celui-ci est supposé nul ici afin d'alléger les notations.

### III. MÉTHODES D'ESTIMATION PARAMÉTRIQUE DE MODÈLES À TEMPS CONTINU

Les techniques d'identification de modèles paramétriques linéaires à temps continu reposent principalement sur la minimisation d'un critère fondé soit sur une erreur de sortie, soit sur une erreur d'équation nécessitant l'utilisation d'une transformation linéaire couplée à une méthode issue des moindres carrés. De nombreuses méthodes de type erreur d'équation ont été proposées au cours des trente dernières années. L'intérêt essentiel de ces méthodes, fondées sur l'erreur d'équation, est la formulation d'une solution explicite qui conduit à un optimum unique. Toutefois ces techniques nécessitent l'estimation des dérivées successives des signaux d'entrée/sortie. Diverses méthodes ont été développées pour résoudre ce problème inverse. Plusieurs publications ou ouvrages dressant l'état de l'art des approches d'identification de modèles à temps continu sont disponibles dont les plus significatives sont [15], [19], [20], [21], [22], [18], [23], [24].

Dans cet article, nous nous focalisons sur trois approches qui ont marqué le cheminement historique pour l'identification directe de modèles paramétriques à temps continu. La première remonte à l'époque des calculateurs analogiques et est connue sous le nom de méthode des filtres de variables d'état (FVE) [25]. Cette technique est présentée avec l'objectif de mettre en évidence certains aspects spécifiques à l'identification de modèles à temps continu. La seconde fondée sur une méthode de variable instrumentale optimale a fait ses preuves dans un cadre applicatif [26], [27], [28]. Enfin, la méthode de l'erreur de sortie est brièvement discutée [29], [30], [31].

#### A. La méthode des filtres de variables d'état (FVE)

La méthode des filtres de variables d'état est une des approches conventionnelles d'identification de modèles paramétriques à temps continu. Elle repose sur la minimisation de l'énergie de l'erreur d'équation et se décompose en deux étapes :

- la première consiste à appliquer un filtrage linéaire aux données échantillonnées afin de reconstruire les dérivées successives des signaux d'entrée/sortie. Cette étape est spécifique aux approches d'identification de modèles à temps continu de type erreur d'équation ;
- la seconde étape est dédiée à l'estimation paramétrique proprement dite, à l'aide de techniques d'estimation de type moindres carrés ; cette étape n'est pas spécifique aux approches d'identification de modèles à temps continu et la plupart des algorithmes d'estimation de modèles linéaires à temps discret peuvent être adaptés au cas de l'estimation paramétrique de modèles à temps continu.

#### Filtrage linéaire

Considérons l'équation différentielle du modèle recherché dans un contexte non bruité (4). L'application de la transformée de Laplace aux deux membres de cette équation différentielle soumise à des conditions initiales supposées nulles conduit à :

$$s^{n_a} \hat{Y}(s) + \sum_{i=0}^{n_a-1} a_i s^i \hat{Y}(s) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i s^i U(s), \quad (7)$$

où  $s$  représente la variable de Laplace ;  $\dot{Y}(s)$  et  $U(s)$  sont respectivement les transformées de Laplace de  $\dot{y}(t)$  et  $u(t)$ . L'application d'un filtre linéaire, de fonction de transfert  $F(s) = 1/E(s)$ , aux deux membres de l'équation (7) donne :

$$\frac{s^{n_a}}{E(s)}\dot{Y}(s) + \sum_{i=0}^{n_a-1} a_i \frac{s^i}{E(s)}\dot{Y}(s) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i \frac{s^i}{E(s)}U(s). \quad (8)$$

Le filtre des variables d'état (FVE) d'ordre minimal ( $n = n_a$ ) prend souvent la forme suivante :

$$F(s) = \frac{1}{E(s)} = \left( \frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^n, \quad (9)$$

où  $\lambda$  représente la pulsation de coupure du filtre. Définissons à présent un ensemble de filtres  $L_j(s)$  pour  $j = 0, 1, \dots, n_a$  ayant pour forme

$$L_j(s) = \frac{s^j}{E(s)} = \frac{(\lambda)^{n_a} s^j}{(s + \lambda)^{n_a}}, \quad (10)$$

et soit  $l_j(t)$  leur réponse impulsionnelle. L'utilisation de ces filtres (10) permet de récrire l'équation (8) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (L_{n_a}(s) + a_{n_a-1}L_{n_a-1}(s) + \dots + a_0L_0(s))\dot{Y}(s) \\ = (b_{n_b}L_{n_b}(s) + \dots + b_0L_0(s))U(s). \end{aligned} \quad (11)$$

Dans le domaine temporel, cette équation devient :

$$\begin{aligned} [L_{n_a}\dot{y}](t) + a_{n_a-1}[L_{n_a-1}\dot{y}](t) + \dots + a_0[L_0\dot{y}](t) \\ = b_{n_b}[L_{n_b}u](t) + \dots + b_0[L_0u](t), \end{aligned} \quad (12)$$

où

$$\begin{cases} [L_i\dot{y}](t) = [l_i \star \dot{y}](t) \\ [L_iu](t) = [l_i \star u](t), \end{cases} \quad (13)$$

et  $\star$  représente l'opérateur de convolution. Les sorties des filtres  $[L_i\dot{y}](t)$  et  $[L_iu](t)$  fournissent ainsi une estimation des dérivées des signaux d'entrée/sortie dans la bande fréquentielle d'intérêt (plage de fréquence dans laquelle on recherche l'adéquation entre le système et le modèle). Ces estimées peuvent ensuite être utilisées au sein de techniques de régression linéaire.

A l'instant  $t = t_k$ , en considérant la présence du bruit additif sur la sortie, l'équation (12) devient :

$$\begin{aligned} [L_{n_a}y](t_k) + a_{n_a-1}[L_{n_a-1}y](t_k) + \dots + a_0[L_0y](t_k) \\ = b_{n_b}[L_{n_b}u](t_k) + \dots + b_0[L_0u](t_k) + \varepsilon_{EE}(t_k, \theta), \end{aligned} \quad (14)$$

où  $\varepsilon_{EE}(t_k, \theta)$  représente l'erreur d'équation. L'équation (14) peut également se récrire sous une forme standard de régression linéaire :

$$[L_{n_a}y](t_k) = \varphi^T(t_k)\theta + \varepsilon_{EE}(t_k, \theta), \quad (15)$$

où  $\varphi(t_k)$  le vecteur de régression prend la forme :

$$\begin{aligned} \varphi^T(t_k) = [-[L_{n_a-1}y](t_k) \dots - [L_0y](t_k) \\ [L_{n_b}u](t_k) \dots [L_0u](t_k)], \end{aligned} \quad (16)$$

et  $\theta$  est le vecteur de paramètres défini par l'équation (5).

*Estimateur des moindres carrés/FVE*

L'estimée  $\hat{\theta}$  du vecteur des paramètres est le vecteur minimisant :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, Z_N), \quad (17)$$

où  $V_N$  la fonction de coût, dépend de l'ensemble des vecteurs de paramètres admissibles et de l'ensemble  $Z_N$  des données :

$$V_N(\theta, Z_N) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{EE}^2(t_k, \theta). \quad (18)$$

A partir de  $N$  échantillons des signaux d'entrée/sortie, l'estimateur des moindres carrés (mc)/FVE est alors donné par :

$$\hat{\theta}_{mc} = \left[ \sum_{k=1}^N \varphi(t_k)\varphi^T(t_k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi(t_k)[L_{n_a}y](t_k), \quad (19)$$

en supposant que la matrice inverse existe. Il faut rappeler ici que la solution (19) est très peu robuste numériquement et que ce n'est pas de cette façon que les calculs doivent être conduits (voir [7], [32] par exemple).

Malheureusement, l'estimateur des moindres carrés associé au filtre de variables d'état est asymptotiquement biaisé en présence de bruit de mesure, que ce dernier soit blanc ou coloré.

*Estimateur de la variable instrumentale/FVE*

L'estimateur de la variable instrumentale est une variante classique de la méthode des moindres carrés [8], [7], [33], [5]. Elle présente ainsi l'avantage de reposer sur les techniques de régression linéaire.

Le principe de la méthode de la variable instrumentale consiste à introduire un vecteur  $\zeta(t_k)$ , tel que ses composantes appelées instruments ou variables instrumentales soient suffisamment corrélées avec les composantes du vecteur de régression  $\varphi(t_k)$  mais non corrélées avec le bruit additif sur la sortie  $v(t_k)$ . Les conditions que doit remplir le vecteur de variables instrumentales sont ainsi résumées par :

$$\begin{cases} E [\zeta(t_k)\varphi^T(t_k)] \text{ est non singulière,} \\ E [\zeta(t_k)v(t_k)] = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Plusieurs solutions ont été proposées. Parmi celles-ci, l'estimateur de la variable instrumentale à modèle auxiliaire [34] est particulièrement simple à mettre en œuvre. Le vecteur de variables instrumentales est dans ce cas construit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \zeta^T(t_k) = F(p) [-\dot{y}^{(n_a-1)}(t_k, \hat{\theta}_{mc}) \dots - \dot{y}^{(0)}(t_k, \hat{\theta}_{mc}) \\ u^{(n_b)}(t_k) \dots u^{(0)}(t_k)], \end{aligned} \quad (21)$$

où  $F(p)$  correspond au filtre de variables d'état défini par l'équation (9) et  $\dot{y}(t_k, \hat{\theta}_{mc})$  représente la sortie d'un modèle auxiliaire obtenu à partir de l'estimation par moindres carrés/FVE :

$$\dot{y}(t_k, \hat{\theta}_{mc}) = G(p, \hat{\theta}_{mc})u(t_k). \quad (22)$$

Le vecteur des instruments (21) peut également s'écrire sous la forme :

$$\zeta^T(t_k) = [-[L_{n_a-1}\hat{y}](t_k, \hat{\theta}_{mc}) \dots - [L_0\hat{y}](t_k, \hat{\theta}_{mc}) \\ [L_{n_b}u](t_k) \dots [L_0u](t_k)]. \quad (23)$$

L'estimateur de la variable instrumentale à modèle auxiliaire associé au filtre de variables d'état est alors donné par :

$$\hat{\theta}_{vi} = \left[ \sum_{k=1}^N \zeta(t_k) \varphi^T(t_k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \zeta(t_k) [L_{n_a}y](t_k). \quad (24)$$

Cet estimateur est asymptotiquement sans biais mais n'est pas à variance minimale. Cependant, on ne saurait négliger cette méthode. Elle est, en effet, souvent utile pour fournir une estimation initiale pour les techniques itératives discutées dans la section qui suit.

Remarques :

- dans ce qui précède, nous avons supposé le système initialement au repos. Dans le cas contraire, il convient de prendre en compte l'effet des conditions initiales. Plusieurs approches sont envisageables [20]. L'une d'entre elles consiste à augmenter le vecteur des paramètres et à estimer simultanément des termes supplémentaires liés aux conditions initiales et les paramètres du modèle à temps continu [20], [25], [35]. Ceci peut s'avérer très utile en présence de régimes transitoires ;
- la stratégie de traitement de données via un pré-filtrage parallèle des signaux d'entrée/sortie est une pratique courante en identification de modèles paramétriques à temps discret [7], [36]. Cette étape de pré-filtrage permet notamment d'améliorer l'efficacité statistique des estimateurs. Comme nous l'avons vu, cette étape de pré-filtrage est implicite dans le cas de l'identification directe de modèles paramétriques à temps continu. Le rôle du pré-filtrage est double ici : le premier est d'estimer les dérivées des signaux d'entrée/sortie dans la bande fréquentielle d'intérêt ; le second permet de diminuer la variance de l'estimateur ;
- l'utilisateur choisit la pulsation de coupure du filtre  $\lambda$  (9) qui constitue l'hyper-paramètre de la méthode FVE. De manière intuitive, le filtre FVE doit être choisi par rapport à la plage de fréquence dans laquelle on recherche l'adéquation entre le système et le modèle. En pratique, une estimation des paramètres du filtre est préférable et une méthode qui réalise ce choix automatique est présentée dans la partie III-B ;
- le filtrage (13) est effectué de manière numérique, soit en utilisant un solveur différentiel, soit en discrétisant la représentation d'état des filtres [37] à l'aide d'une méthode appropriée à l'évolution des signaux entre les instants d'échantillonnage. Cette implantation est la source d'erreurs de simulation [38] qui peuvent cependant être, en général, réduites en choisissant une faible période d'échantillonnage  $T_e$ . Si les données sont échantillonnées à pas variable, des approches spécifiques de résolution numérique d'équations différentielles peuvent être utilisées [39] ;
- les algorithmes présentés ici sont non-récursifs mais leur version récursive est également disponible (voir [34], par exemple) ;

- la méthode des filtres de variables d'état peut s'interpréter en termes de régularisation [40] ;
- l'estimation simultanée d'un retard constant et des paramètres est rendue possible par l'incorporation d'un intégrateur dans le filtre de variables d'état [41] ;
- la méthode des filtres de variables d'état représente une approche classique d'identification de modèles paramétriques à temps continu. Plusieurs types de transformations linéaires opérant un filtrage des données ont été proposés au cours des trente dernières années donnant lieu à de nombreuses méthodes. Le lecteur intéressé par ces différentes techniques pourra consulter les références : [20], [23].

### B. Estimateur optimal de la variable instrumentale (srivc)

L'estimateur optimal (asymptotiquement sans biais et à variance minimale) de la variable instrumentale est obtenu pour les conditions suivantes [33], [7] :

$$\begin{cases} F^{opt}(p) = \frac{1}{H_o(p)A_o(p)} \\ \zeta^{opt}(t_k) = F^{opt}(p) \left[ -\hat{y}^{(n_a-1)}(t_k) \dots - \hat{y}^{(0)}(t_k) \right. \\ \left. u^{(n_b)}(t_k) \dots u^{(0)}(t_k) \right] \end{cases}$$

où  $H_o(p)$  représente le « vrai » modèle de bruit (3) ;  $A_o(p)$  représente le dénominateur de la fonction de transfert du système vrai ;  $\hat{y}^{(i)}(t_k)$  représente la sortie non-bruitée du système à l'instant  $t_k$ .

L'estimateur optimal nécessite la connaissance de plusieurs caractéristiques du système à identifier. En effet, ce dernier ne peut être obtenu que si les vrais modèles du système et du bruit sont connus ; l'optimalité ne peut donc pas être atteinte dans un cas pratique. Des solutions approchées ont été proposées ; elles font appel soit à des procédures itératives, soit à des algorithmes comprenant plusieurs étapes [7].

Une approche stochastique (au sens où elle estime un modèle de bruit), qui s'est révélée être particulièrement performante dans un cadre applicatif, est la méthode de variable instrumentale optimale proposée par P. Young [26], [27], [28]. Cette approche comprend un pré-filtrage adaptatif fondé sur la solution optimale lorsque le bruit additif est blanc gaussien ( $H_o(p) = 1$  et  $e_o$  blanc gaussien). Cet estimateur est abrégé par son acronyme anglo-saxon *srivc* (pour simplified refined instrumental variable for continuous-time models). Comme nous allons le voir plus loin, il représente une extension logique de l'estimateur de la variable instrumentale/FVE. Cet estimateur a été développé à l'origine pour l'identification de modèles paramétriques à temps discret [5], [42]. Il présente l'avantage additionnel de choisir de manière automatique (et optimale) les paramètres du filtre  $F(p)$ .

Cette méthode s'appuie sur le raisonnement suivant : le bruit additif étant supposé blanc gaussien, l'erreur de sortie  $\varepsilon(t)$  est donnée par :

$$\varepsilon(t) = y(t) - \frac{B(p)}{A(p)} u(t).$$

La minimisation d'une fonction de coût fondée sur  $\varepsilon(t)$ , conduit à l'utilisation de la classe des techniques de l'erreur de sortie. Cependant, l'erreur de sortie  $\varepsilon(t)$  peut être convertie en une erreur d'équation en factorisant par  $1/A(p)$  (les

opérateurs commutent dans ce cas linéaire en les entrées)

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{A(p)} (A(p)y(t) - B(p)u(t)), \quad (25)$$

$$= A(p) \left( \frac{1}{A(p)} y(t) \right) - B(p) \left( \frac{1}{A(p)} u(t) \right). \quad (26)$$

Dans le domaine temporel, cette équation devient :

$$\varepsilon(t) = [L_{n_a} y](t) + a_{n_a-1} [L_{n_a-1} y](t) + \dots + a_0 [L_0 y](t) - b_{n_b} [L_{n_b} u](t) - \dots - b_0 [L_0 u](t), \quad (27)$$

où

$$\begin{cases} [L_j y](t) = [l_j \star y](t), \\ [L_j u](t) = [l_j \star u](t), \end{cases} \quad (28)$$

et l'ensemble des filtres sont à présent définis par

$$L_j(p) = \frac{p^j}{A(p)}. \quad (29)$$

A l'instant  $t = t_k$ , l'équation (27) peut s'écrire sous une forme de régression linéaire :

$$[L_{n_a} y](t_k) = \varphi^T(t_k) \theta + \varepsilon(t_k) \quad (30)$$

où le vecteur de régression est défini par

$$\varphi^T(t_k) = [-[L_{n_a-1} y](t_k) \dots - [L_0 y](t_k) \quad [L_{n_b} u](t_k) \dots [L_0 u](t_k)], \quad (31)$$

et où le vecteur des paramètres  $\theta$  est donné par l'équation (5).

La transformation de l'erreur de sortie en erreur d'équation nécessite de connaître  $A(p)$  qui est *a priori* inconnu. On utilise alors un algorithme itératif qui va ajuster progressivement l'estimée de la variable instrumentale  $\hat{\theta}^i$  à partir d'une estimée initiale  $A(p, \hat{\theta}^0)$  jusqu'à convergence.

L'algorithme de l'estimateur de la variable instrumentale optimale *srivc* est le suivant :

1. Estimer un vecteur de paramètres initial  $\hat{\theta}^0$ .
2.  $i = 0, \dots, N_{Iter} - 1$ 
  - (a) Utiliser  $\hat{\theta}^i$  pour calculer la sortie du modèle auxiliaire

$$\hat{y}(t_k, \hat{\theta}^i) = G(p, \hat{\theta}^i) u(t_k). \quad (32)$$

Calculer les sorties filtrées des signaux d'entrée/sortie ainsi que de la sortie du modèle auxiliaire,

$$\begin{cases} [L_j y](t_k, \hat{\theta}^i) = [l_j(\hat{\theta}^i) \star y](t_k) \\ [L_j u](t_k, \hat{\theta}^i) = [l_j(\hat{\theta}^i) \star u](t_k) \\ [L_j \hat{y}](t_k, \hat{\theta}^i) = [l_j(\hat{\theta}^i) \star \hat{y}(\hat{\theta}^i)](t_k), \end{cases} \quad (33)$$

avec

$$L_j(p, \hat{\theta}^i) = \frac{p^j}{A(p, \hat{\theta}^i)}.$$

- (b) Calculer une estimée  $\hat{\theta}^{i+1}$  par la méthode de variable instrumentale à modèle auxiliaire :

$$\hat{\theta}^{i+1} = \left[ \sum_{k=1}^N \left[ \zeta(t_k, \hat{\theta}^i) \varphi^T(t_k, \hat{\theta}^i) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \zeta(t_k, \hat{\theta}^i) [L_{n_a} y](t_k, \hat{\theta}^i) \right] \quad (34)$$

avec

$$\zeta^T(t_k, \hat{\theta}^i) = [-[L_{n_a-1} \hat{y}](t_k, \hat{\theta}^i) \dots - [L_0 \hat{y}](t_k, \hat{\theta}^i) \quad [L_{n_b} u](t_k, \hat{\theta}^i) \dots [L_0 u](t_k, \hat{\theta}^i)], \quad (35)$$

$$\varphi^T(t_k, \hat{\theta}^i) = [-[L_{n_a-1} y](t_k, \hat{\theta}^i) \dots - [L_0 y](t_k, \hat{\theta}^i) \quad [L_{n_b} u](t_k, \hat{\theta}^i) \dots [L_0 u](t_k, \hat{\theta}^i)]. \quad (36)$$

Répéter les étapes (2a), (2b) jusqu'à ce que la variation relative sur les paramètres soit faible :

$$\sum_{j=1}^{n_p} \left| \frac{\hat{\theta}_j^{i+1} - \hat{\theta}_j^i}{\hat{\theta}_j^i} \right| < \gamma, \quad (37)$$

où  $\hat{\theta}_j^i$  désigne le  $j^e$  élément du vecteur des paramètres estimé à la  $i^e$  itération,  $n_p = n_a + n_b + 1$  est le nombre de paramètres à estimer,  $\gamma$  est un seuil de tolérance donné et  $N_{Iter}$  est le nombre d'itérations.

3.  $\hat{\theta}_{srivc} = \hat{\theta}^{N_{Iter}}$ .

L'estimateur *srivc* est asymptotiquement sans biais quelle que soit la nature du bruit additif (à moyenne nulle), et à variance minimale lorsque le bruit additif est blanc.

Remarques :

- la méthode *srivc* exploite des techniques de régression linéaire et converge en général beaucoup plus rapidement (typiquement en 4 ou 5 itérations) qu'une méthode minimisant une erreur de sortie ;
- la convergence de l'algorithme est peu sensible au choix du vecteur de paramètres initial  $\hat{\theta}^0$ . Celui-ci peut être calculé en utilisant par exemple, l'estimateur de la variable instrumentale/FVE ;
- une indication sur l'incertitude des paramètres estimés est délivrée via l'estimée de la matrice de covariance des paramètres, ce qui permet d'apprécier la qualité de l'estimation :

$$\hat{P} = \sigma_\varepsilon^2 \left[ \sum_{k=1}^N \zeta(t_k, \hat{\theta}_{srivc}) \zeta^T(t_k, \hat{\theta}_{srivc}) \right]^{-1}, \quad (38)$$

où  $\sigma_\varepsilon^2$  représente la variance empirique de l'erreur de simulation  $\hat{\varepsilon}(t_k) = y(t_k) - \hat{y}(t_k, \hat{\theta}_{srivc})$  ;

- cette approche peut être mise en œuvre de façon récursive [26] ;
- cette approche peut identifier très facilement un système à partir de données échantillonnées à pas variable [39]. Les opérations de filtrage des signaux sont alors réalisées en utilisant un solveur différentiel, du type Kutta-Runge par exemple ;
- dans le cas où le bruit additif est coloré, l'estimateur *srivc* perd ses propriétés statistiques. Cependant les nombreuses

applications de l'algorithme ont montré qu'il était suffisamment robuste par rapport à l'hypothèse de blancheur et qu'il fournissait des paramètres estimés avec une variance relativement faible. Dans le cas d'un bruit coloré, il est également possible d'utiliser une approche de type Box-Jenkins hybride dans laquelle le bruit est représenté à l'aide d'un modèle à temps discret [43], [44] ;

- La méthode *srivc* a également été étendue au cas des systèmes multi-entrées mono-sortie (MISO) représentés par des modèles de la forme [45] :

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{n_u} \frac{B_i(p)}{A_i(p)} u_i(t) \quad (39)$$

$$y(t_k) = \hat{y}(t_k) + v(t_k) \quad (40)$$

avec :

$$\begin{aligned} B_i(p) &= b_{i,0} + b_{i,1}p + \dots + b_{i,m_i}p^{m_i}, \\ A_i(p) &= a_{i,0} + a_{i,1}p + \dots + p^{n_i}, \\ n_i &\geq m_i, \quad i = 1 \dots n_u. \end{aligned}$$

Ce modèle présente l'avantage de posséder un dénominateur différent pour chaque entrée, ce qui est plus réaliste en pratique. Il n'est cependant plus linéaire par rapport aux paramètres. La version MISO de la méthode *srivc* repose sur la régression multilinéaire [13]. Le vecteur des paramètres  $\theta$  est partitionné en classes  $\theta_1, \dots, \theta_{n_u}$  de façon à ce que l'erreur soit affine par rapport à chacune des classes de paramètres, quand les paramètres des autres classes sont fixés. Il est alors possible de chercher  $\hat{\theta}$  en appliquant successivement la version SISO de la méthode *srivc* pour l'estimation de chacune des classes de paramètres en explorant cycliquement toutes les classes. A chaque étape, la valeur du critère décroît jusqu'à convergence. Rien ne garantit cependant la convergence vers un optimum global (ou même local) du critère. C'est un problème général de ce type d'algorithmes qui gèrent certains paramètres pendant qu'ils en optimisent d'autres. Cependant, les essais effectués en simulation ainsi que sur des données provenant de procédés industriels ont montré l'intérêt de cette version MISO de la méthode *srivc* [45] ;

- la version de l'estimateur *srivc* pour l'identification de modèles à temps discret, abrégé par *sriv*, ne doit pas être confondue avec la méthode de la variable instrumentale optimale abrégée par *iv4*, disponible dans la boîte à outils «System Identification» de Matlab [7]. L'algorithme *iv4* n'est pas itératif et comprend quatre étapes. Il fournit en général de nettement moins bons résultats d'estimation que la méthode itérative *sriv* ;
- l'estimateur *srivc* présente une étroite parenté avec celui de Steiglitz-McBride [46] revisité au début des années 80 [47]. Ils diffèrent toutefois par le fait que l'un (*srivc*) s'appuie sur l'estimateur de la variable instrumentale alors que l'autre (Steiglitz-McBride) repose sur l'estimateur des moindres carrés simples.

Une version MISO de l'estimateur optimal de la variable instrumentale *srivc* est disponible au sein de la boîte à outils CONTSID (voir section IV-A).

### C. Méthode de l'erreur de sortie (*coe*)

Cette méthode est aussi connue en France sous l'appellation historique de méthode du modèle [29], [30]. Elle repose sur la minimisation de l'énergie de l'erreur de sortie. Ce critère se distingue de celui fondé sur une erreur d'équation par sa signification physique et sa sensibilité plus importantes aux erreurs de structure de modèles et aux valeurs des paramètres. Cette méthode se différencie également par sa mise en œuvre plus délicate due à la non-linéarité de l'erreur de sortie par rapport aux paramètres. Elle consiste à exploiter les propriétés locales du critère au voisinage d'un point courant  $\hat{\theta}^i$  dans l'espace des paramètres pour en déduire un point suivant  $\hat{\theta}^{i+1}$  meilleur au sens du critère à minimiser. Diverses méthodes garantissent une convergence vers l'optimum local du critère dans le bassin d'attraction où se trouvait le vecteur initial  $\hat{\theta}^0$ . Les algorithmes de Gauss-Newton et sa variante due à Levenberg-Marquardt, de quasi-Newton et des gradients conjugués font partie des plus utilisés [13]. Il utilise la connaissance de la valeur du critère et de son gradient au point courant. Ce dernier peut être calculé en utilisant les fonctions de sensibilité de la sortie du modèle par rapport aux paramètres. Celles-ci peuvent être obtenues par simulation d'équations déduites de celles du modèle. Au cours de l'optimisation, il est souvent nécessaire de calculer le critère et son gradient de nombreuses fois, ce qui se traduit par un très grand nombre de simulations. Cette méthode abrégée par son acronyme anglo-saxon *coe* (pour continuous-time output error method) est une technique classique de l'identification et n'est pas détaillée dans cet article. Le lecteur intéressé pourra consulter les références [13], [9], [31].

#### Remarques :

- la méthode *coe* fournit une évaluation de l'incertitude des paramètres estimés. En effet, une approche simple consiste à exploiter les propriétés asymptotiques de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance, et à assimiler la covariance de l'erreur d'estimation à l'inverse de la matrice d'information de Fisher, aisément calculable à partir des informations du bruit utilisé pour construire l'estimateur. Cette méthode est de loin la plus utilisée mais le caractère très approximatif des résultats obtenus quand le nombre de données est faible ne doit cependant pas être dissimulé ;
- elle permet l'identification de systèmes multi-entrées mono-sortie représentés par une structure de modèles du type (39) ;
- le problème principal des méthodes à erreur de sortie est l'existence possible de plusieurs minima locaux vers lesquels peut converger l'algorithme d'optimisation. L'initialisation des algorithmes joue, en général, un rôle important sur la convergence et il est nécessaire de faire appel à des procédures particulières afin d'éviter les optimiseurs locaux parasites (voir [48] par exemple).

Une version MISO utilisant l'algorithme de Gauss-Newton ou sa variante due à Levenberg-Marquardt via la simulation numérique des fonctions de sensibilité de la sortie par rapport aux paramètres, est disponible dans la boîte à outils CONTSID.

Le lecteur aura compris à la lecture de ce panorama que les auteurs ont une préférence très nette pour l'estimateur optimal de la variable instrumentale. Cette approche a démontré en pratique son potentiel à de nombreuses occasions [49], [50], [51], [52], [18] et nous la conseillons en premier lieu. Le panorama présenté ici n'a toutefois pas la prétention d'être exhaustif; d'autres approches existent, comme par exemple, celle fondée sur une approche algébrique [53], [54], ou encore les approches récursives décrites dans [55].

#### IV. OUTIL LOGICIEL ET AVANTAGES

##### A. La boîte à outils CONTSID

Alors que de nombreux logiciels rassemblant les différentes techniques d'identification de modèles à temps discret sont disponibles, aucun outil n'existait dans le cas de l'identification de modèles à temps continu. C'est à partir de ce constat que nous avons décidé de réaliser une boîte à outils Matlab appelée CONTSID (pour CONtinuous-Time System IDentification) [56]. L'objectif est de mettre à disposition des utilisateurs potentiels le plus grand nombre de méthodes permettant d'identifier des systèmes linéaires (SISO, MISO et MIMO) représentés sous la forme de modèles à temps continu, directement à partir des données échantillonnées. Cette boîte à outils Matlab rassemble la plupart des méthodes développées au cours des trente dernières années et est conçue comme une extension de la boîte à outils commerciale «System Identification» de Matlab développée par L. LJUNG. Elle est téléchargeable à l'adresse suivante :

<http://www.cran.uhp-nancy.fr/contsid/>

Les principales fonctions d'estimation paramétrique ainsi que l'interface utilisateur récemment développée, sont présentés dans [57].

##### B. Avantages

la plupart des systèmes réels régis par les lois de la Physique (systèmes électroniques, mécaniques, thermiques, hydrauliques, ...) évoluent par nature continûment dans le temps. Leur comportement peut être décrit approximativement après linéarisation autour d'un point de fonctionnement par des équations différentielles ordinaires à coefficients constants. Cette représentation dans le domaine continu est donc naturelle pour l'étude des systèmes linéaires.

L'identification directe de modèles à temps continu présente en elle-même de nombreux avantages dont les principaux sont<sup>2</sup> :

- de fournir directement un modèle à temps continu à partir de données échantillonnées. Les paramètres du modèle identifié sont fortement liés aux propriétés et aux coefficients physiques du système à identifier. Ce modèle peut être interprété physiquement beaucoup plus aisément que l'équivalent discret délivré par les approches traditionnelles d'identification de modèles à temps discret; cet aspect est particulièrement attrayant pour un ingénieur;

<sup>2</sup>Des exemples illustrant ces avantages sont disponibles dans les programmes de démonstration de la boîte à outils CONTSID (voir fichier *idc-demo.m*).

- de s'appuyer sur une paramétrisation parcimonieuse. La connaissance *a priori* de l'ordre relatif du système est facilement prise en compte ce qui permet d'éviter l'estimation de zéros de discrétisation rencontrés lors de l'identification de modèles à temps discret [58], [36];
- de pouvoir plus naturellement traiter des données échantillonnées rapidement. Ces approches sont en effet beaucoup moins sensibles aux problèmes numériques que les approches discrètes. Elles sont par conséquent très bien adaptées aux équipements actuels d'acquisition de données qui délivrent des mesures quasiment à temps continu;
- de pouvoir aisément traiter le cas de données échantillonnées à pas variable [39]. Ce type de données est souvent rencontré dans le cas des systèmes mécaniques où un échantillonnage angulaire est réalisé, ou encore dans le domaine biomédical [59] ou biologique;
- de simplifier l'application de la procédure complète d'identification de systèmes pour l'utilisateur non-spécialiste. La théorie de l'identification de modèles à temps discret est bien établie; la pratique, quant à elle, n'est pas toujours simple à mettre en œuvre pour l'utilisateur qui se retrouve souvent démuni devant les choix multiples à effectuer, concernant par exemple le pré-filtrage des signaux bruts avant d'effectuer l'estimation paramétrique. Les approches directes intègrent toutes un pré-filtrage implicite des données (le filtre est de plus choisi de manière automatique et optimale dans le cas de l'estimateur *srivc*). Cette étape de pré-filtrage est souvent primordiale dans le cas de l'identification de modèles à temps discret, comme le montre l'étude en simulation suivante.

##### C. Exemple : cas du benchmark Rao-Garnier

Les résultats présentés dans cette section sont représentatifs d'un ensemble de simulations de Monte Carlo visant à comparer les performances des approches directe et indirecte [60], [36], [61], [20]. Le modèle simulé est un système du 4<sup>e</sup> ordre. Son opérateur de transfert est donné par :

$$G_o(p) = \frac{K(-Tp + 1)}{\left(\frac{p^2}{\omega_{n,1}^2} + \frac{2\zeta_1 p}{\omega_{n,1}} + 1\right)\left(\frac{p^2}{\omega_{n,2}^2} + \frac{2\zeta_2 p}{\omega_{n,2}} + 1\right)}, \quad (41)$$

avec  $K = 1$ ,  $T = 4s$ ,  $\omega_{n,1} = 20$  rad/s,  $\zeta_1 = 0.1$ ,  $\omega_{n,2} = 2$  rad/s,  $\zeta_2 = 0.25$ .

Ce système possède deux modes, l'un rapide ( $\omega_{n,1} = 20$  rad/s) avec un coefficient d'amortissement de 0.1, l'autre lent ( $\omega_{n,2} = 2$  rad/s) avec un coefficient d'amortissement de 0.25. De plus, il présente un zéro instable et est donc à non minimum de phase. Les données d'entrée/sortie sont engendrées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{y}(t_k) = G_o(p)u(t_k) \\ y(t_k) = \dot{y}(t_k) + e(t_k) \end{cases} \quad (42)$$

L'entrée est une somme de cinq sinusoïdes  $u(t) = \sin(t) + \sin(1.9t) + \sin(2.1t) + \sin(18t) + \sin(22t)$  et  $e(t_k)$  est un bruit blanc gaussien à temps discret. Une simulation de Monte Carlo (200 jeux de données) a été effectuée pour un rapport signal-sur-bruit (RSB) :

$$RSB = 10 \log \frac{P_y}{P_e} = 10\text{dB}, \quad (43)$$

où  $P_e$  représente la puissance moyenne du bruit additif à moyenne nulle sur la sortie et  $P_y$  la puissance moyenne des fluctuations de la sortie non bruitée. Ceci correspond à l'essai dénommé "trial2" dans [61]. La période d'échantillonnage est égale à 10 ms. Le modèle à temps discret équivalent à (41) possède quatre pôles, et en général quatre zéros. La connaissance *a priori* de l'ordre relatif du système à temps continu à identifier est difficile à prendre en compte lorsque l'on utilise l'approche indirecte.

Les diagrammes de Bode des 200 modèles estimés par les méthodes directe *srivc* (voir paragraphe III-B) et indirecte *pem* (dans sa version *oe* ici) [7], choisies pour illustrer les résultats obtenus par les deux classes de méthodes, sont représentés sur les figures 1 et 2.

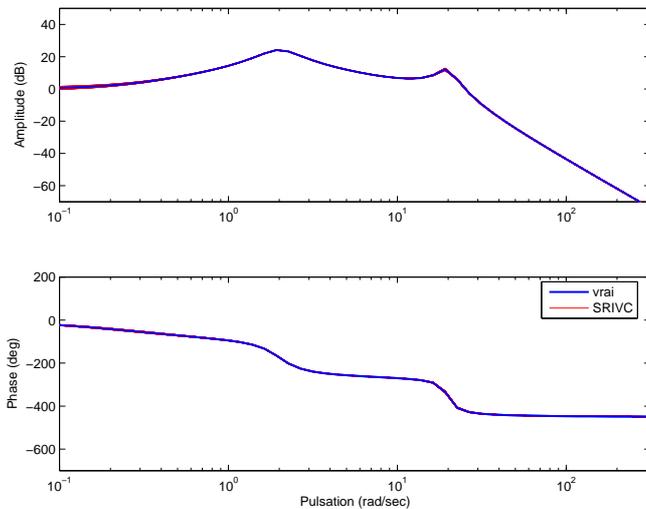


Fig. 1. Diagrammes de Bode des 200 modèles à temps continu estimés par la méthode *srivc*.

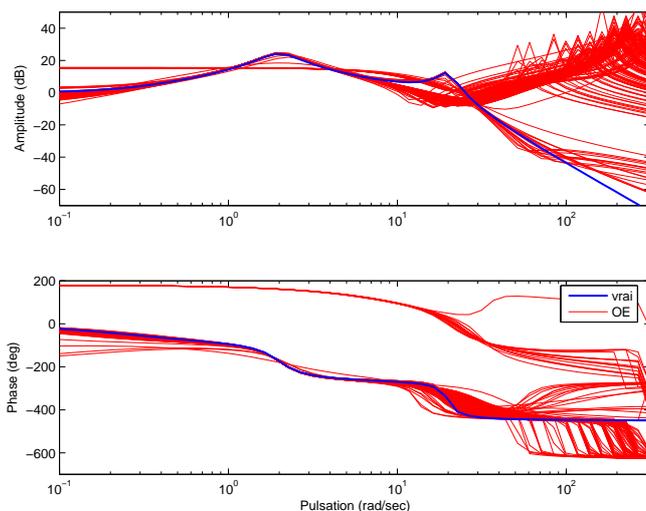


Fig. 2. Diagrammes de Bode des 200 modèles à temps discret estimés par la méthode *oe*.

Ces résultats sont représentatifs de l'ensemble des résultats de simulation [60], [61], [20]. On peut observer sur les figures 1 et 2 que la méthode d'estimation de modèles à temps

discret (*oe*) disponible dans la boîte à outils «System Identification» de Matlab conduit à de très mauvais résultats d'estimation comparativement à la méthode d'estimation directe de modèles à temps continu (*srivc*). Cela est surprenant à première vue car le système considéré ne semble pas constituer une véritable difficulté en termes d'identification. Les très mauvaises performances obtenues ici par l'approche fondée sur l'erreur de sortie *oe* peuvent être attribuées à plusieurs facteurs selon L. Ljung [36]. Dans son analyse, il conclut que ces résultats sont principalement dus à l'extrême sensibilité numérique de l'estimation de modèles de type ARX ( $A(q^{-1}, \theta)y(t_k) = B(q^{-1}, \theta)u(t_k) + e(t_k)$ ) dans le cas de cet exemple du 4<sup>e</sup> ordre. L'estimation de modèles de type ARX est en effet souvent utilisée afin d'initialiser les méthodes d'estimation itératives. La méthode d'erreur de sortie *oe* initialisée à partir de l'estimation d'un modèle ARX va, dans le cas de cet exemple, converger vers un minimum local comme le montrent les résultats de la figure 2 (le modèle ARX initial se situe dans une vallée d'attraction d'un modèle erroné).

Cet exemple illustre quelques-unes des difficultés qui apparaissent lorsque l'on recherche un modèle à temps discret : sensibilité des méthodes d'estimation itératives à l'initialisation, problèmes numériques en présence d'échantillonnage rapide, difficulté à prendre en compte la connaissance *a priori* de l'ordre relatif du système à temps continu à identifier, pré-filtrage des données non implicite ; les approches directes d'estimation paramétrique de modèles à temps continu ne rencontrent pas ces difficultés. L'application de la méthodologie complète d'identification se trouve alors grandement simplifiée pour l'utilisateur.

## V. ASPECTS PLUS AVANCÉS

Dans cette partie, nous présentons une introduction à trois aspects plus avancés de l'identification des systèmes :

- les systèmes multivariables représentés sous forme d'état ;
- l'identification en boucle fermée lorsqu'une loi de commande régit le système à identifier ;
- l'identification dans un contexte d'«erreurs en les variables» lorsque non seulement la sortie mais également l'entrée sont perturbées par des bruits de mesure.

### A. Identification de modèles d'état

Le cas de l'identification de systèmes à entrées et sorties multiples par des modèles à temps continu a été jusqu'à présent, peu développé. Une solution possible est d'utiliser la décomposition en sous-espaces. Cette approche est très intéressante car elle permet d'identifier directement des modèles d'état à partir des données d'entrée/sortie mesurées, sans connaissance *a priori* des indices structuraux. Si plusieurs algorithmes ont été développés pour traiter le cas des modèles à temps discret, seuls quelques travaux sont relatifs aux modèles d'état à temps continu [62], [63], [64], [65]. Les premières études [62], [63] proposent d'introduire des opérateurs de translation discret/continu particuliers pour analyser et récrire le problème d'identification à temps continu à l'aide d'une approche algébrique. Plus récemment, nous avons proposé de combiner un préfiltrage de type moment de Poisson à l'algorithme des sous-espaces décrit dans [66] dans le cas

de bruits colorés ; les algorithmes correspondant sont disponibles dans la boîte à outils CONTSID.

### B. Identification des systèmes en boucle fermée

Il n'est pas toujours possible de conduire des expérimentations en boucle ouverte sur des procédés industriels, soit pour des raisons de production, soit pour des problèmes d'instabilité. Dans ce cas, il est possible, sous certaines conditions, d'identifier les systèmes à partir de signaux acquis en boucle fermée. La principale difficulté est due à la corrélation induite par le bouclage entre les perturbations et les signaux de commande. Une seconde difficulté est liée au fait que les données comportent moins d'information que celles recueillies en boucle ouverte. En effet, un objectif important de la commande est de minimiser la sensibilité du système bouclé aux perturbations, ce qui rend le problème d'identification plus délicat à traiter [67].

Pour pallier ces difficultés, plusieurs méthodes d'identification en boucle fermée ont été proposées. Elles visent toutes à rendre le signal utilisé comme entrée du modèle indépendant des perturbations. Il est cependant important de noter que l'application directe d'une méthode minimisant une fonction de l'erreur de prédiction à des données recueillies en boucle fermée fournit des estimations convergentes, si le processus appartient à la classe de modèles choisie. Cependant, ce cas étant restrictif et surtout peu réaliste, d'autres méthodes ont été proposées pour identifier des modèles à temps continu. Les articles [68] et [69] présentent une revue de ces différentes approches.

En revanche, l'identification en boucle fermée de modèles à temps continu n'a pas encore atteint le degré de maturité du cas discret. P.C. Young a été le premier à proposer une approche. Celle-ci repose sur l'association d'une technique de variable instrumentale à modèle auxiliaire avec la technique des filtres de variables d'état [34].

Plus récemment, des méthodes permettant de prendre en compte le bruit sur les signaux de mesure et permettant d'obtenir directement un modèle convergent et précis du système ont été proposées. Une première technique consiste à éliminer le biais (moyenne des erreurs d'estimation) issu d'une identification par moindres carrés [70]. Il s'agit d'effectuer dans un premier temps une estimation par moindres carrés, puis d'estimer le biais relatif à cette estimation afin de le retrancher pour obtenir le modèle final. Les approches de type variable instrumentale peuvent également être utilisées. La première technique consiste à utiliser le signal d'excitation comme instruments, ce qui permet de vérifier les deux conditions de convergence des techniques de variable instrumentale ; puis afin d'améliorer la précision du modèle estimé (variance minimale), des méthodes de variable instrumentale optimale sont également développées [71]. En effet, les choix des instruments peuvent avoir un effet considérable sur la matrice de covariance. La limite inférieure peut être obtenue en choisissant<sup>3</sup> :

$$\begin{cases} F^{opt}(p) = \frac{1}{A_0(p)H_0(p)} \\ \zeta^{opt}(t_k) = [F^{opt}(p)\hat{\varphi}^T(t_k)]^T, \end{cases} \quad (44)$$

<sup>3</sup>avec  $G_0(p) = \frac{B_0(p)}{A_0(p)}$

où  $\hat{\varphi}(t_k)$  représente le vecteur de régression déterministe, c'est-à-dire construit à partir des signaux d'entrée/sortie non bruités ainsi que de leurs dérivées. Ainsi, l'estimateur optimal de variable instrumentale, comme dans le cas de l'identification en boucle ouverte (III-B), ne peut être obtenu que si les vrais modèles du système et du bruit sont connus ; l'optimalité ne peut donc pas être atteinte dans un cas pratique. Plusieurs méthodes de type «bootstrap» ont été proposées pour pallier ce problème [72].

### C. Identification dans un contexte d'erreurs en les variables

Mis à part le cas particulier de l'identification en boucle fermée, la majorité des méthodes d'identification de modèles à temps discret ou continu reposent sur l'hypothèse de bruit additif sur la sortie uniquement, l'entrée du système étant supposée parfaitement maîtrisée. Or, dans de nombreux cas pratiques, l'entrée est également mesurée et donc entachée de bruits de mesure ; il s'avère que l'utilisation des méthodes classiques ne prenant pas en compte le bruit sur l'entrée conduit à des estimations biaisées. L'identification de systèmes lorsque les signaux de sortie et d'entrée sont entachés de bruit, mais non liés par l'intermédiaire d'une boucle fermée, est dite «erreurs-en-les-variables». Ce type de modèle est très intéressant lorsque le but de l'identification est la détermination des lois internes régissant le procédé, plus que la prédiction de son comportement futur. De nombreuses disciplines utilisent ce type de modèles [73].

Ce problème d'identification dans un contexte erreurs-en-les-variables a fait l'objet de travaux récents dans le cas de modèles à temps discret. On peut diviser ces travaux en deux classes : ceux exploitant les statistiques au second ordre des signaux d'entrée/sortie [74], [73], [75], [76], [77], et ceux utilisant les statistiques d'ordre supérieur (à deux) [78], [79], [80]. En revanche, ce problème n'a été que très peu traité dans le cadre de l'identification de modèles à temps continu. On peut toutefois citer l'approche utilisant les statistiques d'ordre deux [81] et celle fondée sur les statistiques d'ordre supérieur couplées à la méthode de Steiglitz-McBride [82], [83].

## VI. CONCLUSION

Cet article a présenté un panorama des méthodes d'identification directe de modèles linéaires de type boîte-noire à temps continu à partir de données échantillonnées. Ces approches sont longtemps restées dans l'ombre des méthodes traditionnelles d'identification de modèles à temps discret. Les approches d'identification directe de modèles à temps continu présentent les avantages de fournir un modèle directement interprétable physiquement par l'utilisateur, de faciliter la mise en œuvre de la procédure complète de l'identification des systèmes (pré-filtrage implicite), d'être bien adaptées aux conditions actuelles d'acquisition de données (échantillonnage rapide), ou encore de pouvoir traiter le cas de données échantillonnées à pas variable. La boîte à outils CONTSID a contribué à la diffusion et facilite l'utilisation des approches. Ces approches ne doivent cependant pas être considérées comme concurrentes mais plutôt comme complémentaires aux techniques d'identification de modèles à temps discret. Ces dernières ont en effet depuis trente ans fait leurs preuves sur le

plan des applications. Il est cependant important de rappeler que d'autres approches d'identification existent : les techniques d'identification de modèles à temps continu présentées dans cet article en font partie, sans oublier les méthodes d'identification dans le domaine fréquentiel [10], [84]. L'utilisateur doit donc connaître l'ensemble des outils existants puis choisir (ou être guidé) vers la méthode la plus appropriée pour résoudre son problème d'identification.

## VII. REMERCIEMENTS

Nous souhaiterions remercier notre collègue Alain RICHARD pour ses nombreuses remarques constructives lors de la relecture de cet article.

## RÉFÉRENCES

- [1] A. Barraud. L'identification : une technique d'un autre type ? *R.A.I.R.O. APII*, 20(5) :433–453, 1986.
- [2] L. Ljung. *System identification toolbox for use with Matlab - User's guide - version 6.0*. The Mathworks, Inc., November 2003.
- [3] P. Eykhoff. *System identification - Parameter and state estimation*. John Wiley and Sons, 1974.
- [4] G.C. Goodwin et R.P. Payne. *Dynamic system identification. Experiment design and data analysis*. Academic Press, 1977.
- [5] P.C. Young. *Recursive estimation and time-series analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [6] J.P. Norton. *An introduction to identification*. Academic Press, New-York, 1986.
- [7] L. Ljung. *System identification. Theory for the user*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2nd edition, 1999.
- [8] T. Söderström et P. Stoica. *System Identification*. Series in Systems and Control Engineering. Prentice Hall, 1989.
- [9] J. Richalet. *Pratique de l'identification*. Hermes, Paris, 1991.
- [10] J. Schoukens et R. Pintelon. *Identification of linear systems. A practical guideline to accurate modeling*. Pergamon Press, 1991.
- [11] I.D. Landau. *Identification et commande des systèmes*. Hermès, Paris, 1993.
- [12] R. Johansson. *System modeling & identification*. Information and system sciences series. Prentice Hall, 1993.
- [13] E. Walter et L. Pronzato. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson, 1994.
- [14] G.P. Rao et N.K. Sinha. *Identification of continuous-time systems. Methodology and computer implementation*, chapter Continuous-time models and approaches, pages 1–15. Kluwer Academic Publishers, N.K. Sinha and G.P. Rao edition, 1991.
- [15] H. Unbehauen et G.P. Rao. Continuous-time approaches to system identification - a survey. *Automatica*, 26(1) :23–35, 1990.
- [16] M.S. Phadke et S.M. Wu. Modelling of continuous stochastic processes from discrete observations with application to sunspots data. *Journal American Stat. Assoc.*, 29(346), 1974.
- [17] A.R. Bergström. *Continuous time econometric modeling*. Oxford Univ. Press, 1990.
- [18] P.C. Young et H. Garnier. Identification and estimation of continuous-time data-based mechanistic (DBM) models for environmental systems. *Environmental Modelling and Software*, 21(8) :1055–1072, August 2006.
- [19] N.K. Sinha et G.P. Rao. *Identification of continuous-time systems. Methodology and computer implementation*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [20] H. Garnier, M. Mensler, et A. Richard. Continuous-time model identification from sampled data. Implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76(13) :1337–1357, 2003.
- [21] P. Young. Parameter estimation for continuous-time models - a survey. *Automatica*, 17(1) :23–39, 1981.
- [22] H. Unbehauen et G.P. Rao. A review of identification in continuous-time systems. *Annual reviews in Control*, 22 :145–171, 1998.
- [23] G.P. Rao et H. Unbehauen. Identification of continuous-time systems. *IEE Proceedings - Control theory and applications*, 153(2) :185–220, 2006.
- [24] H. Garnier et L. Wang, editors. *Identification of continuous-time models from sampled data*. Springer Verlag, To be published, 2007.
- [25] P.C. Young. The determination of the parameters of a dynamic process. *Radio and Electronic Eng. (Jnl. Of IERE)*, 29 :345–361, 1965.
- [26] P.C. Young et A.J. Jakeman. Refined instrumental variable methods of time-series analysis : Part III, extensions. *International Journal of Control*, 31 :741–764, 1980.
- [27] P.C. Young. Optimal IV identification and estimation of continuous-time TF models. *15th Triennial IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona (Spain), July 2002.
- [28] P.C. Young. Comments on "On the estimation of continuous-time transfer functions". *International Journal of Control*, 75(9) :693–697, 2002.
- [29] J. Richalet, A. Rault, et R. Pouliquen. *Identification des processus par la méthode du modèle*. Gordon & Breach, Londres, 1971.
- [30] J.C. Trigeassou. *Recherche de modèles expérimentaux assistée par ordinateur*. Lavoisier, Paris, tec et doc edition, 1988.
- [31] J.C. Trigeassou et T. Poinot. *Identification des systèmes*, chapter Identification des systèmes à représentation continue, pages 177–212. Hermes, I.D. Landau and A. Besançon-Voda edition, 2001.
- [32] Alain Barraud (sous la Direction de). *Outils d'analyse numérique pour l'automatique*. Hermès, 2002.
- [33] T. Söderström et P. Stoica. *Instrumental variable methods for system identification*. Springer Verlag, New York, 1983.
- [34] P.C. Young. An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. *Automatica*, 6 :271–287, 1970.
- [35] P.J. Gawthrop. Parametric identification of transient signals. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 1 :117–128, 1984.
- [36] L. Ljung. Initialisation aspects for subspace and output-error identification methods. *European Control Conference (ECC'2003)*, Cambridge (U.K.), September 2003.
- [37] R. Isermann, K.H. Lachmann, et D. Matko. *Adaptive control systems*. Systems and Control Engineering. Prentice Hall International, 1992.
- [38] C.T. Chou, M. Verhaegen, et R. Johansson. Continuous-time identification of SISO systems using Laguerre functions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(2) :349–362, 1999.
- [39] E. Huselstein et H. Garnier. An approach to continuous-time model identification from non-uniformly sampled data. *41st IEEE Conference on Decision and Control (CDC'02)*, Las-Vegas, Nevada (USA), December 2002.
- [40] S. Moussaoui, D. Brie, et A. Richard. Regularization aspects in continuous-time model identification. *Automatica*, 41(2) :197–208, February 2005.
- [41] S. Ahmed, B. Huang, et S. Shah. Parameter and delay estimation of continuous-time models using a linear filter. *Journal of Process Control*, 16(4) :323–331, 2006.
- [42] P.C. Young. Some observations on instrumental variable methods of time-series analysis. *International Journal of Control*, 23 :593–612, 1976.
- [43] P.C. Young, H. Garnier, et M. Gilson. An optimal instrumental variable approach for identifying hybrid continuous-time Box-Jenkins model. *14th IFAC Symposium on System Identification (SYSID'2006)*, pages 225–230, Newcastle (Australia), March 2006.
- [44] P.C. Young, H. Garnier, et M. Gilson. *Identification of continuous-time models from sampled data*, chapter Refined instrumental variable for identifying continuous-time hybrid Box-Jenkins models. Springer-Verlag, To be published, H. Garnier and L. Wang (Eds) edition, 2007.
- [45] H. Garnier, M. Gilson, P.C. Young, et E. Huselstein. An optimal IV technique for identifying continuous-time transfer function model of multiple input systems. *Control Engineering Practice*, to appear 2007. Accepted for publication.
- [46] K. Steiglitz et L. E. McBride. A technique for the identification of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10 :461–464, October 1965.
- [47] P. Stoica et T. Söderström. The Steiglitz-McBride identification algorithms revisited. Convergence analysis and accuracy aspects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26 :712–717, 1981.
- [48] L. Pronzato et E. Walter. Comment éviter les optimiseurs locaux parasites en estimation paramétrique non linéaire. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 36 :351–362, 2002.
- [49] P.C. Young. Identification and estimation of continuous-time hydrological models from discrete-time data. *International Conference on Hydrology : Science and Practice for the 21st century*, London (U.K.), July 2004.
- [50] P.C. Young. Data-based mechanistic modeling of engineering systems. *Journal of vibration and control*, 4 :5–28, 1998.
- [51] P.C. Young. Data-based mechanistic modeling of environmental, ecological, economic and engineering systems. *Journal of Modelling & Software*, 13 :105–122, 1998.

- [52] P.C. Young et H. Garnier. Identification and estimation of continuous-time rainfall-flow models. *14th IFAC Symposium on System Identification (SYSID'2006)*, pages 1276–1281, Newcastle (Australia), March 2006.
- [53] M. Fliess et H. Sira-Ramirez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, 9 :151–168, 2003.
- [54] M. Fliess, C. Join, et H. Sira-Ramirez. Complex continuous nonlinear systems : their black box identification and their control. *14th IFAC Symposium on System Identification (SYSID'2006)*, Newcastle (Australia), March 2006.
- [55] R. Lozano et D. Taoutaou. *Identification et commande adaptative*. Hermes, 2001.
- [56] H. Garnier, M. Gilson, et O. Cervellin. Latest developments for the Matlab CONTSID toolbox. *14th IFAC Symposium on System Identification (SYSID'2006)*, pages 714–719, Newcastle (Australia), March 2006.
- [57] H. Garnier, M. Gilson, T. Bastogne, et H. Zbali. CONTSID : un outil logiciel pour l'identification de modèles paramétriques à temps continu à partir de données expérimentales. *Journées Identification et Modélisation Expérimentale (JIME'2006)*, Poitiers (France), November 2006.
- [58] K.J. Aström, P. Hagander, et J. Sternby. Zeros of sampled systems. *Automatica*, 20(1) :31–38, 1984.
- [59] K.P. Wong, D. Feng, et W.C. Siu. Generalized linear least squares algorithm for non-uniformly sampled biomedical system identification with possible repeated eigenvalues. *Computer methods and programs in biomedicine*, 57 :167–177, 1998.
- [60] G.P. Rao et H. Garnier. Numerical illustrations of the relevance of direct continuous-time model identification. *15th Triennial IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona (Spain), July 2002.
- [61] G.P. Rao et H. Garnier. Identification of continuous-time systems : direct or indirect ? *Systems Science*, 30(3) :25–50, 2004.
- [62] B.R.J. Haverkamp, C.T. Chou, M. Verhaegen, et R. Johansson. Identification of continuous-time mimo state-space models from sampled data in the presence of process and measurement noise. *35th Conference on Decision and Control*, Kobe - Japan, December 1996.
- [63] R. Johansson, M. Verhaegen, et C.T. Chou. Stochastic theory of continuous-time state-space identification. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(1) :41–50, 1999.
- [64] T. Bastogne, H. Garnier, et P. Sibille. A PMF-based subspace method for continuous-time model identification. Application to a multivariable winding process. *International Journal of Control*, 74(2) :118–132, 2001.
- [65] A. Ohsumi, K. Kameyama, et K.I. Yamagushi. Subspace identification for continuous-time stochastic systems via distribution based approach. *Automatica*, 38 :63–79, 2002.
- [66] M. Moonen, B. de Moor, et J. Vandewalle. *Identification of continuous-time systems. Methodology and computer implementation*, chapter SVD-based subspace methods for multivariable continuous-time systems identification, pages 473–488. Kluwer Academic Publishers, N.K. Sinha and G.P. Rao edition, 1991.
- [67] U. Forsell et L. Ljung. Closed-loop identification revisited. *Automatica*, 35(7) :1215–1241, 1999.
- [68] P.M.J. Van den Hof. Closed-loop issues in system identification. *Annual Reviews in Control*, 22 :173–186, 1998.
- [69] M. Gilson et P. Van den Hof. Instrumental variable methods for closed-loop system identification. *Automatica*, 41(2) :241–249, 2005.
- [70] H. Garnier, M. Gilson, et W.X. Zheng. A bias-eliminated least-squares method for continuous-time model identification of closed-loop systems. *International Journal of Control*, 73(1) :38–48, 2000.
- [71] M. Gilson, H. Garnier, et P. Van den Hof. Instrumental variable methods for continuous-time model identification in closed-loop. *American Control Conference*, Boston - USA, 2004.
- [72] M. Gilson, H. Garnier, P.C. Young, et P. Van den Hof. *Identification of continuous-time models from sampled data*, chapter Instrumental variable methods for continuous-time closed-loop model identification. Springer-Verlag, To be published, H. Garnier and L. Wang edition, 2007.
- [73] S. Van Huffel et P. Lemmerling. *Total least-squares and errors-in-variables modeling*. Kluwer Academic Publishers, S. Van Huffel edition, 2002.
- [74] T. Söderström, U. Soverini, et K. Mahata. Perspectives on errors-in-variables estimation for dynamic system. *Signal Processing*, 82 :1139–1154, 2002.
- [75] K. Mahata. *Identification of dynamic errors-in-variables models*. Licentiate thesis, Uppsala University, Sweden, 2002.
- [76] W.X. Zheng. A bias correction method for identification of linear dynamic errors-in-variables models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7) :1142–1147, July 2002.
- [77] S. Thil, M. Gilson, et H. Garnier. Méthodes de compensation de biais pour l'identification de modèles erreurs-en-les-variables. *Journées doctorales du GdR MACS*, Lyon (France), septembre 2005.
- [78] A. Delopoulos et G.B. Giannakis. Consistent identification of stochastic linear systems with noisy input-output data. *Automatica*, 30(8) :1271–1294, 1994.
- [79] J.K. Tugnait. Stochastic system identification with noisy input using cumulant statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :476–485, 1992.
- [80] M. Deistler et B.D.O. Anderson. Linear dynamic errors-in-variables models. *Journal of Econometrics*, 41 :39–63, 1989.
- [81] K. Mahata et H. Garnier. Identification of continuous-time errors-in-variables models. *Automatica*, 46(9) :1477–1490, September 2006.
- [82] S. Thil, H. Garnier, et M. Gilson. A cumulant statistic-based method for continuous-time errors-in-variables model identification. *4th International Workshop on total least squares and errors-in-variables modeling*, Leuven (Belgium), August 2006.
- [83] S. Thil, H. Garnier, et M. Gilson. Une méthode pour l'identification de modèles à temps continu dans un contexte erreurs-en-les-variables. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'2006)*, Bordeaux (France), Juin 2006.
- [84] R. Pintelon et J. Schoukens. *System identification : a frequency domain approach*. IEEE Press, 2001.