Transformée en Z

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Outil d'analyse des caractéristiques d'un filtre numérique linéaire

- Un filtre numérique linéaire peut être décrit mathématiquement par :
  - une équation aux différences
  - un produit de convolution
  - sa fonction de transfert

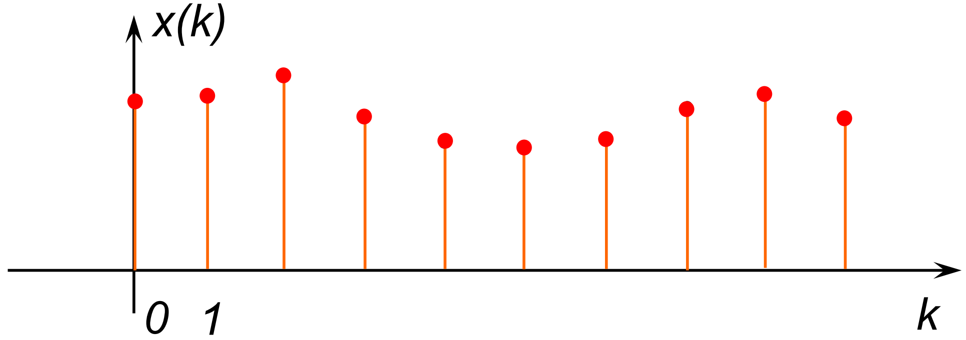
- ***L'outil mathématique*** exploité pour faciliter son analyse est :

la transformée en Z

Transformée en Z

- Soit un signal numérique $x(k)$ causal. ***La transformée en Z*** est définie par :

$$Z\left(x(k)\right) = X\left(z\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k}$$



où

– z est la variable de la transformée en Z

– $z = r\, e^{j\theta} = \alpha + j\beta$

- On dit que $X(z)$ est la transformée en Z du signal $x(k)$

Lien entre transformée de Fourier et transformée en Z

- La transformée en Z définie précédemment est en fait la transformée en Z monolatère

  Il existe en effet la transformée en Z bilatère définie par :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, z^{-k}$$

- Il existe une relation entre la transformée en Z bilatère et la transformée de Fourier d'un signal à temps discret :

$$X(f) = X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f T_e}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{-j2\pi f k T_e}$$

Lien entre transformée de Laplace et transformée en Z

Pour un <u>signal échantillonné</u> $x(kT_e)=x(k)$, la ***transformée de Laplace*** est donnée par :

$$X_e(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)e^{-ksT_e}=\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\left(e^{-sT_e}\right)^k$$

En posant $z=e^{sT_e}$

$$X(z)=Z\left(x_e(t)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k}$$

La ***transformée en Z*** peut donc être vue comme *la* ***transformée de Laplace*** appliquée à un signal échantillonné *(idéalement)* dans laquelle on a effectué le changement de variable :

$$z=e^{sT_e}$$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE POLYTECH NANCY

Série entière *(rappels)*

- ***Définition***

  On appelle ***série entière*** de la variable x toute somme (finie ou infinie) des éléments d'une suite numérique de terme général $\boldsymbol{u_k = a_k x^k}$ où a_k est un réel et k un ***entier*** naturel.

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

  Sur tout intervalle où elle est convergente, une série entière a pour somme une fonction. Une série entière est donc une fonction de la forme :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, x^k$$

- ***Remarques***
  - Une série entière ne converge pas nécessairement pour tout x.
  - Il existe un entier R appelé ***rayon ou région de convergen***ce tel que la série entière converge pour $|x| < R$ et diverge pour $|x| > R$

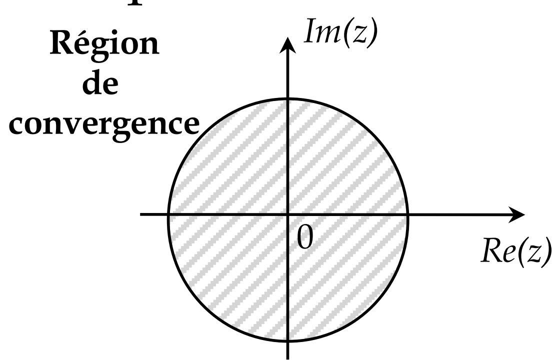
Région de convergence

- La transformée en Z d'un signal *x(k)* est définie par une série entière *(somme infinie des termes d'une suite numérique)*

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \left(z^{-1}\right)^{k}$$

- Quand cette somme est finie, la série est dite convergente et *X(z)* existe
- C'est le cas pour certaines valeurs de la variable *z* qui définissent la Région de Convergence (RdC)

$$\text{RdC} = \left\{ z = \alpha + j\beta \text{ telles que } \sum_{k=0}^{+\infty} \left| x(k) z^{-k} \right| < \infty \right\}$$



- RdC ne contient pas de pôle de *X(z)*. Elle correspond, en général, pour les signaux causaux à l'extérieur d'un cercle $|z| > a$
- Pour les signaux physiques (qui ont une durée d'existence finie) :

RdC= ensemble du plan complexe avec l'exclusion possible de $z=0$ ou $z=\infty$

Région de convergence - Exemple

- Soit le signal numérique dont les premières valeurs sont :
  x(0) = 1, x(1) = 4, x(2) = 16, x(3) = 64, x(4) = 256 …

En appliquant la définition de la transformée en *z*, déterminer *X(z)*. A quelle condition la série obtenue converge-t-elle ? Cette condition étant supposée respectée, donner la valeur de *X(z)*.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \ldots$$

$$X(z) = 1 + 4z^{-1} + 4^2 z^{-2} + \ldots = \left(\frac{4}{z}\right)^0 + \left(\frac{4}{z}\right)^1 + \left(\frac{4}{z}\right)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{z}\right)^k$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{z}} = \frac{z}{z-4} \quad si \quad |z| > 4$$

Rappel *: somme d'une suite géométrique de raison q*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{si} \quad |q| < 1$$

Transformée en Z - Exemple

- Soit le signal à temps discret à durée d'existence finie défini par :

x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 3, x(k>2) = 0

En appliquant la définition de la transformée en Z, déterminer *X(z)*

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1}$$

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2}$$

Forme courante d'une transformée en Z

- La transformée en Z peut s'écrire sous 2 formes :
  - ***Série entière (forme peu pratique)*** : obtenue à partir de la définition

    On obtient une série entière en puissance négative de *z* pondérée par *x(k)*

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots + x(i)z^{-i} + \ldots$$

  - ***Fonction rationnelle (forme la plus courante)*** en puissance positive de *z* ou en puissance négative de *z* (z^{-1})

$$Exemple : X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad ou \qquad X(z) = \frac{z^2}{z^2-2z+1}$$

Transformée en Z de signaux usuels

- ***Impulsion unité*** $Z\left(\delta(k)\right) = 1$

$$Z\left(\delta(k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)\ z^{-k} = \delta(0)z^{-0} + \delta(1)z^{-1} + \ldots = 1$$

- ***Echelon unité*** $Z\left(\Gamma(k)\right) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} = \dfrac{z}{z - 1}$

$$Z\left(\Gamma(k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} 1\ z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{k}$$

Somme d'une suite géométrique de raison z^{-1}

$$Z\left(\Gamma(k)\right) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{si} \quad \left|z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|z\right| > 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k} = \frac{1}{1 - q} \quad si \quad \left|q\right| < 1$$

Transformée en Z de signaux usuels

- ***Signal géométrique (causal)***

$$Z\left(a^k \Gamma(k)\right) = \frac{z}{z-a}$$

$$si\ a = e^{bT_e}, \qquad Z\left(\left(e^{bT_e}\right)^k \Gamma(k)\right) = \frac{z}{z-e^{bT_e}}$$

- ***Signaux sinusoïdaux (causaux)***

$$Z\left(\sin\left(\omega_o k T_e\right)\Gamma(k)\right) = \frac{z \sin\left(\omega_o T_e\right)}{z^2 - 2\cos\left(\omega_o T_e\right)z + 1}$$

$$Z\left(\cos\left(\omega_o k T_e\right)\Gamma(k)\right) = \frac{z\left(z-\cos\left(\omega_o T_e\right)\right)}{z^2 - 2\cos\left(\omega_o T_e\right)z + 1}$$

Propriétés de la transformée en Z
les plus importantes

- ***Linéarité***

$$Z\left(a\,x(k)+b\,y(k)\right)=a\,X(z)+bY(z)$$

- ***Retard temporel***

$$Z\left(x(k-i)\right)=z^{-i}X(z)$$

$$Z\left(x(k-1)\right)=z^{-1}X(z)$$

$$Z\left(x(k-2)\right)=z^{-2}X(z)$$

- ***Avance temporelle***

$$Z\left(x(k+i)\right)=z^{i}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{i-1}x(k)\,z^{-k}\right]$$

$$Z\left(x(k+1)\right)=zX(z)-zx(0)$$

Propriétés de la transformée en Z

- ***Produit de convolution temporel***

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i)\, y(k-i)$$

$$Z\big(x(k) * y(k)\big) = X(z) \times Y(z)$$

- ***Théorème de la valeur initiale*** ***Théorème de la valeur finale***

$$\lim_{k \to 0}\big(x(k)\big) = \lim_{z \to +\infty}\big(X(z)\big)$$

$$\lim_{k \to +\infty}\big(x(k)\big) = \lim_{z \to 1}\Big(\big(z-1\big)X(z)\Big)$$

Si les limites existent

Transformée en Z inverse

- ***La transformée en Z inverse permet de retrouver les échantillons du signal***

$$Z^{-1}\left(S(z)\right) = s(k)$$

- ***Plusieurs méthodes existent :***

1. *Décomposition en somme de fonctions rationnelles et utilisation de tables*

$$S(z) = A_1 \frac{z}{z-a_1} + A_2 \frac{z}{z-a_2} + \ldots$$

$$s(k) = Z^{-1}\left(S(z)\right) = Z^{-1}\left(A_1 \frac{z}{z-a_1} + A_2 \frac{z}{z-a_2} + \ldots\right)$$

$$s(k) = A_1 Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a_1}\right] + A_2 Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a_2}\right] + \ldots$$ *car la transformée en Z inverse est linéaire*

$$s(k) = A_1 \left(a_1\right)^k u(k) + A_2 \left(a_2\right)^k u(k) + \ldots \qquad \text{car } Z\left(a^k u(k)\right) = \frac{z}{z-a}$$

Attention, ce n'est pas une décomposition en éléments simples habituelles. Présence d'un z au numérateur !

Transformée en Z inverse - Exemple

Trouver l'original *x(k)* de la transformée ci-dessous :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

En déduire les valeurs de $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.

Transformée en Z inverse - Exemple

Trouver l'original *x(k)* de la transformée ci-dessous :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = A_1 \frac{z}{z-1} + A_2 \frac{z}{z-2}$$

$$A_1 = \lim_{z \to 1} \frac{z\text{-}1}{z} X(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z\text{-}1}{z} \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = -1$$

$$A_2 = \lim_{z \to 2} \frac{z\text{-}2}{z} X(z) = \lim_{z \to 2} \frac{z\text{-}2}{z} \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = 2$$

$$x(k) = Z^{-1}\big(X(z)\big) = -Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] + 2Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right]$$

$$x(k) = -\Gamma(k) + 2 \times 2^k \Gamma(k) = (-1 + 2^{k+1})\Gamma(k)$$

$$k = 0, \quad x(0) = 1; \qquad k = 2, \quad x(2) = 7$$
$$k = 1, \quad x(1) = 3; \qquad k = 3, \quad x(3) = 15$$

Transformée en Z inverse

2. <u>*Division polynomiale*</u>

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^{n_b} + b_1 z^{n_b-1} + \ldots + b_{n_b}}{a_0 z^{n_a} + a_1 z^{n_a-1} + \ldots + a_{n_a}}$$

Il suffit de diviser *B(z)* par *A(z)* définis en puissance positive de *z* pour obtenir une série en puissance décroissante de z^{-1} dont les coefficients sont les valeurs *x(k)* recherchées.

$$\begin{array}{l|l} B(z) & A(z) \\ \cline{2-2} & X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots \end{array}$$

Par identification, on en déduit : $x(0), \quad x(1), \quad x(2), \quad x(3), \cdots$

Transformée en Z inverse

2. *Division polynomiale - Exemple*

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

$$\begin{array}{r|l}
z^2 & z^2 - 3z + 2 \\ \cline{2-2}
-z^2 + 3z - 2 & 1 + 3z^{-1} + 7z^{-2} + 15z^{-3} + \ldots + x(i)z^{-i} + \ldots \\
3z + 2 & \\
\vdots &
\end{array}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots + x(i)z^{-i} + \ldots$$

Par identification, on en déduit : $x(0) = 1, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 7, \quad x(3) = 15, \cdots$

Intérêt de la transformée en Z pour le filtrage numérique

- *Permet de déterminer la réponse fréquentielle à partir de $H(z)$*
- On connaît $H(z)$ $\left.\begin{array}{l} z = e^{sT_e} \\ s = j\omega = j2\pi f \end{array}\right\} z = e^{j2\pi f T_e}$ $$H(f) = H(z)\Big|_{z = e^{j2\pi f T_e}}$$
- Permet d'en déduire la réponse fréquentielle en amplitude et en phase

$$H(f) = \left|H(f)\right| e^{j\varphi(f)} \qquad \left|H(f)\right| = \left|\frac{Y(f)}{E(f)}\right| \qquad \varphi(f) = Arg\left(H(f)\right)$$

- Caractéristiques
  - Réponses fréquentielles ***périodiques de « période » f_e***
  - ***L'analyse et le tracé se <u>limitent à la plage de fréquences</u> [0 ; f_e /2]***
  - ***Pas de pentes particulières au niveau du diagramme de Bode***