Décomposition en série de Fourier

Signaux périodiques

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Organisation de l'UE de TdS

I. **Introduction**

II. **Analyse et traitement de signaux déterministes**

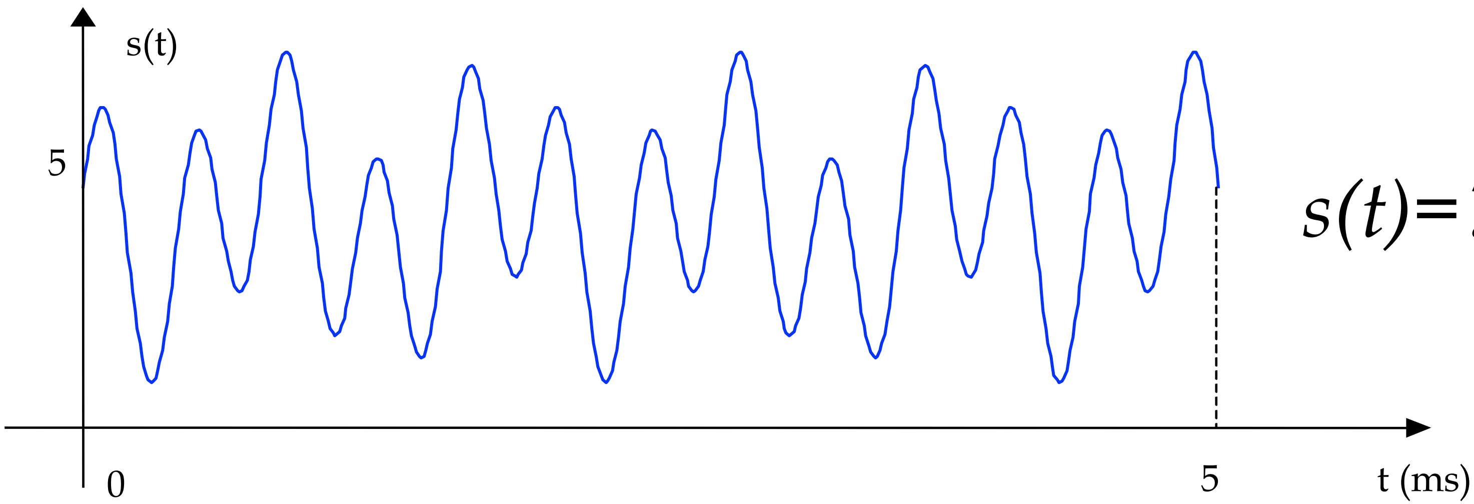
- *Analyse de Fourier de signaux analogiques*
  - Signaux à temps continu
  - **Décomposition en série de Fourier**
  - Transformée de Fourier à temps continu
- De l'analogique au numérique
- Analyse de Fourier de signaux numériques

III. **Filtrage des signaux**

IV. **Analyse et traitement de signaux aléatoires**

Introduction

- Domaine, jusqu'à présent, habituel pour analyser un signal :
  - ***Domaine temporel*** : analyse de l'évolution du signal dans le temps
- Permet de mettre en évidence certaines caractéristiques :
  - signal périodique ou non (détermination de la période),
  - amplitude (valeur moyenne, maximale…),
  - signal analogique/numérique, énergie finie/infinie, ...
- Déterminer l'expression analytique du signal ci-dessous ?



$s(t)=?$

Introduction

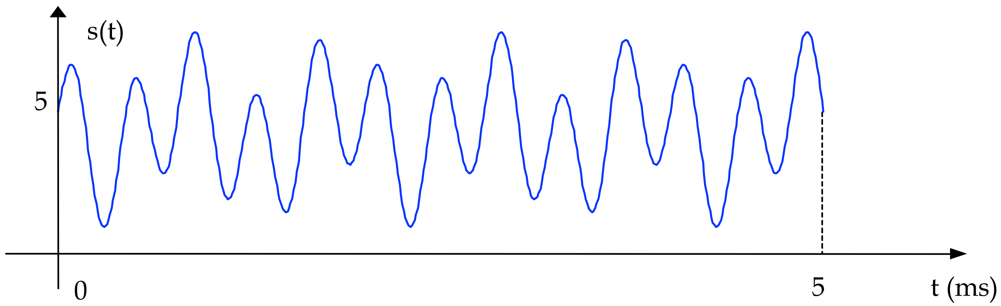
- L'expression mathématique du signal est :

$$s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) + A_1 \cos(2\pi f_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t - \varphi_2)$$

$A_0 = 2 \quad f_0 = 0 \quad \varphi_0 = 0$

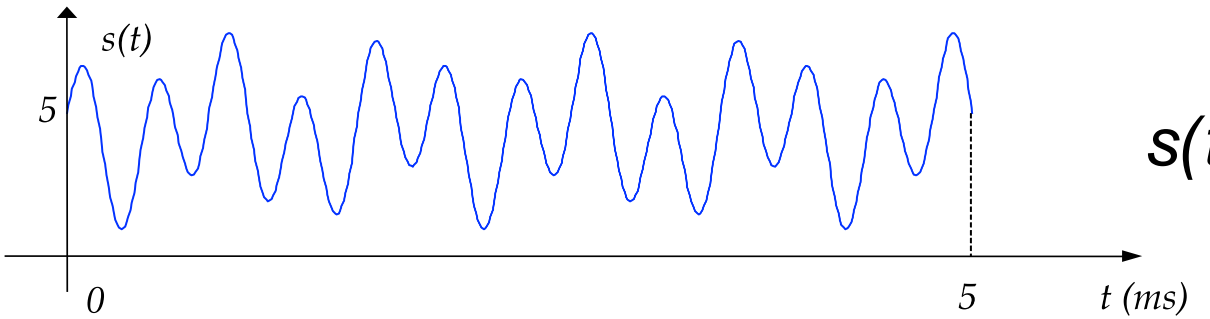
$A_1 = 5 \quad f_1 = 1000 \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$

$A_2 = 10 \quad f_2 = 2500 \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$



- L'observation dans le domaine temporel est souvent insuffisante pour déduire l'expression mathématique du signal
- Il serait intéressant de trouver une autre représentation qui apporterait plus d'informations sur le signal que la représentation usuelle temporelle
- Cette nouvelle représentation devra faire directement apparaître certaines caractéristiques du signal (par exemple A_o, A_1, A_2, φ_o, φ_1, φ_2) non plus dans le domaine temporel (en fonction du temps) mais dans le domaine fréquentiel, c'est à dire en fonction de la fréquence.

- Représentation habituelle : amplitude du signal en fonction du temps

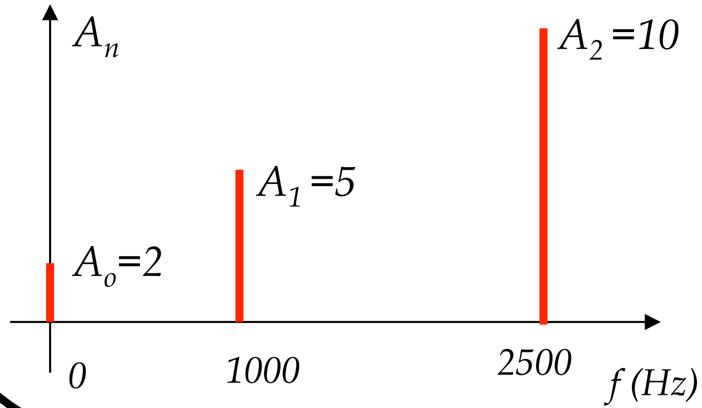


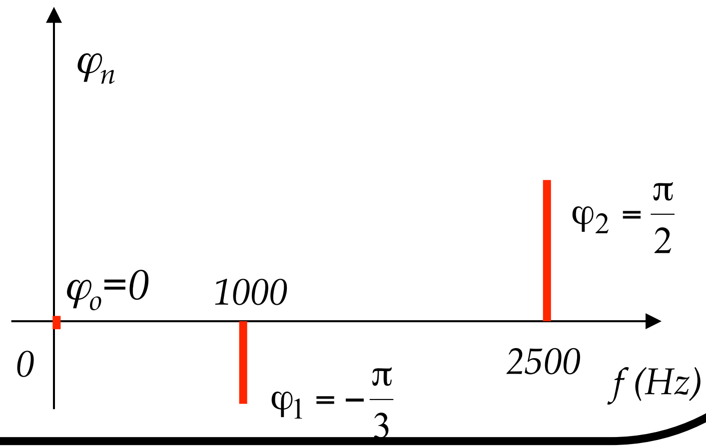
$s(t)=?$

- Nouvelle représentation : amplitude et phase initiale en fonction de la fréquence

$$s(t) = A_o \cos(2\pi f_o t - \varphi_o) + A_1 \cos(2\pi f_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t - \varphi_2)$$

$$f_o = 0 \quad A_o = 2 \quad \varphi_o = 0\,; \quad f_1 = 1000 \quad A_1 = 5 \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{3}\,; \quad f_2 = 2500 \quad A_2 = 10 \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$





Série & transformée de Fourier

Joseph FOURIER

- Auxerre 1768 - Paris 1830
- Grand savant français
- A profondément influencé les mathématiques et la physique des sciences de son siècle
- L'étude de la propagation de la chaleur l'a amené à la découverte des séries trigonométriques portant son nom

Théorème de Fourier

Sous certaines conditions de dérivation et de continuité, tout signal à temps continu s(t) <u>périodique de période</u> T_o peut s'écrire sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux

Cette somme peut s'écrire de deux manières :

- **forme trigonométrique réelle**

- **forme exponentielle complexe**

Forme trigonométrique réelle

Tout signal à temps continu $s(t)$ périodique de période $T_o \left(\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}\right)$ peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(n\omega_o t) + b_n sin(n\omega_o t)$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{T_o}\int_{t_0}^{t_0+T_o} s(t)\,dt \qquad b_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_o}\int_{t_0}^{t_0+T_o} s(t)cos(n\omega_o t)\,dt \qquad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T_o}\int_{t_0}^{t_0+T_o} s(t)sin(n\omega_o t)\,dt \qquad n \geq 1$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n cos(n\omega_o t - \varphi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad A_n \geq 0 \qquad \forall\ n$$

$$\varphi_n = arctan\frac{b_n}{a_n}$$

Le terme général $u_n(t)=a_n cos(n\omega_o t)+b_n sin(n\omega_o t)=A_n cos(n\omega_o t-\varphi_n)$ est appelé ***harmonique de rang n***

C'est un signal cosinusoïdal d'amplitude A_n de période T_o/n (fréquence nf_o) et de phase à l'origine $-\varphi_n$

Remarques et propriétés

- a_0 : ***valeur moyenne*** du signal (composante continue)
- Harmonique d'ordre 1 : ***fondamental***
- Amplitudes A_n tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini
- Décomposition indépendante de l'intervalle $[t_0, t_0+T_o]$
- Si $s(t)$ pair $\Rightarrow \quad b_n = 0 \quad \forall\, n$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_o t) \qquad \begin{vmatrix} A_n = |a_n| & n \geq 0 \\ \varphi_n = 0 & n \geq 0 \end{vmatrix}$$

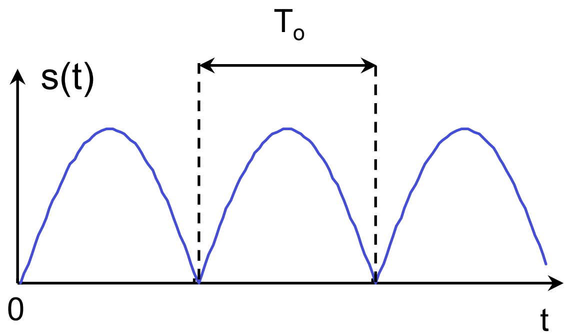
- Si $s(t)$ impair $\Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall\, n$

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(n\omega_o t\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos\left(n\omega_o t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \begin{vmatrix} A_0 = 0 & A_n = |b_n| & & n \geq 1 \\ \varphi_0 = 0 & \varphi_n = \frac{\pi}{2} & si\ b_n \neq 0 & n \geq 1 \\ & \varphi_n = 0 & si\ b_n = 0 & n \geq 1 \end{vmatrix}$$

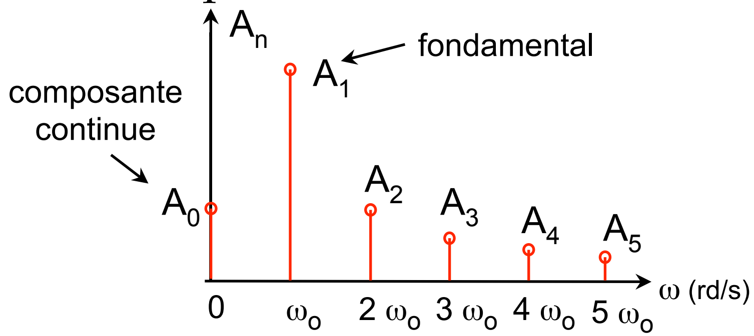
Spectres unilatéraux d'amplitude et de phase

- ***Spectre d'amplitude*** de $s(t)$: tracé de A_n en fonction des pulsations (fréquences)
- ***Spectre de phase*** de $s(t)$: tracé de φ_n en fonction des pulsations (fréquences)
- On parle de représentation fréquentielle ou spectrale
- A_n *et* φ_n n'existant que pour des multiples entiers de ω_o,

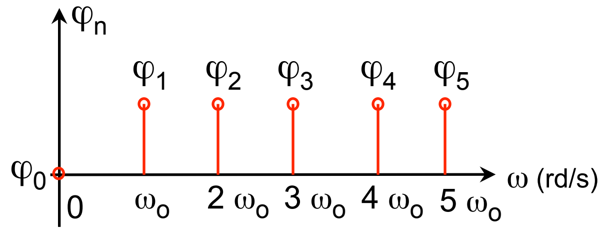
  on parle de ***spectres de raies***.



Evolution temporelle du signal



Spectre unilatéral d 'amplitude



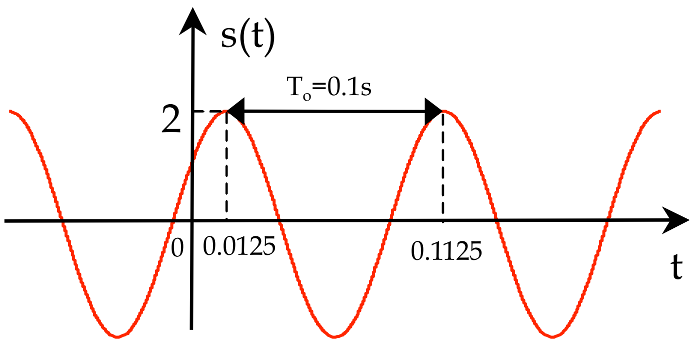
Spectre unilatéral de phase

Exemple 1 : cas d'un signal sinusoïdal

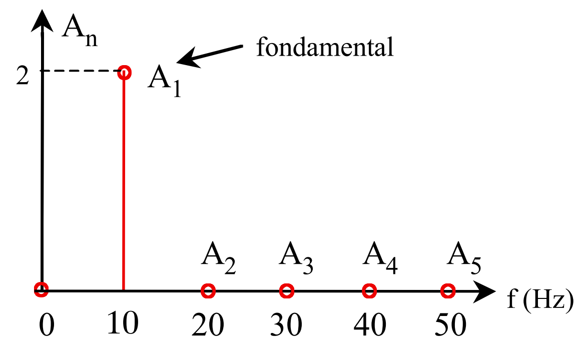
- Soit un signal sinusoïdal décrit par : $s(t) = 2\cos(2\pi 10 t - \frac{\pi}{4})$

  C'est un signal ne contenant qu'un seul harmonique !

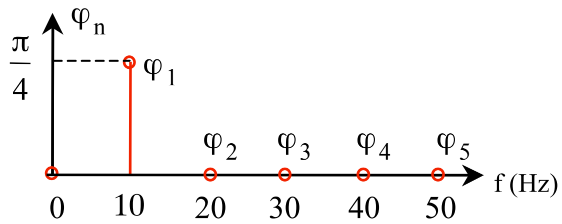
Domaine temporel



Domaine fréquentiel



Spectre unilatéral d'amplitude



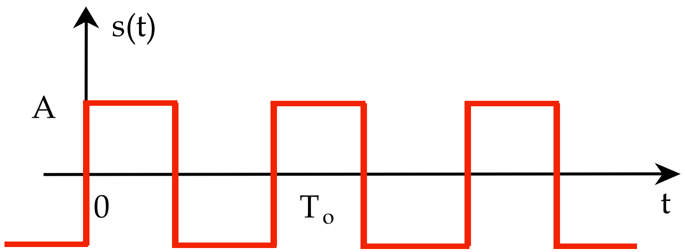
Spectre unilatéral de phase

Exemple 2 : cas d'un créneau

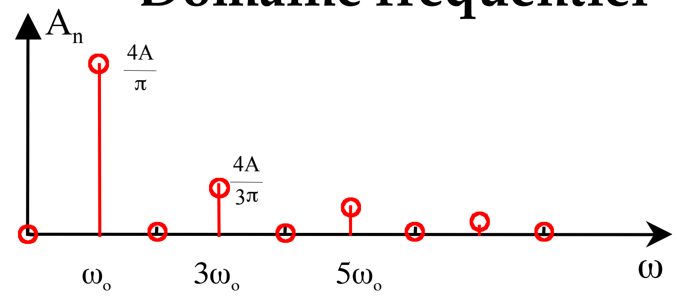
- Montrer que le développement en série de Fourier d'un signal créneau s'écrit :

$$s(t)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4A}{(2p+1)\pi}\sin\big((2p+1)\omega_o t\big)=\frac{4A}{\pi}\cos\left(\omega_o t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4A}{3\pi}\cos\left(3\omega_o t-\frac{\pi}{2}\right)+\ldots$$

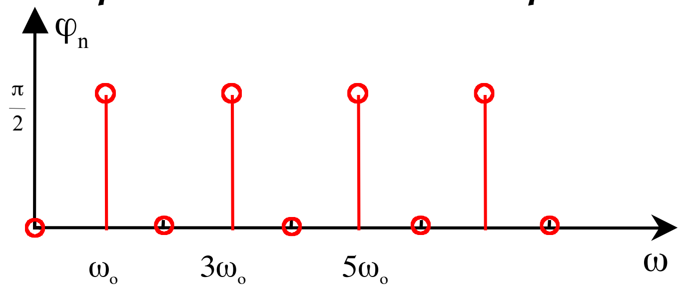
Domaine temporel



Domaine fréquentiel



Spectre unilatéral d'amplitude

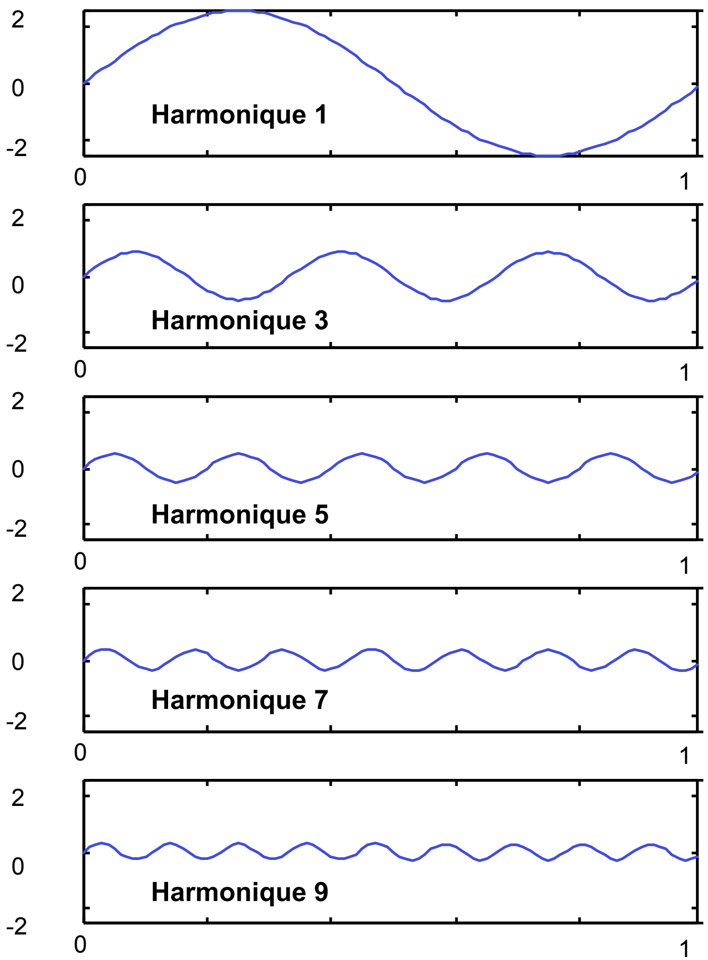


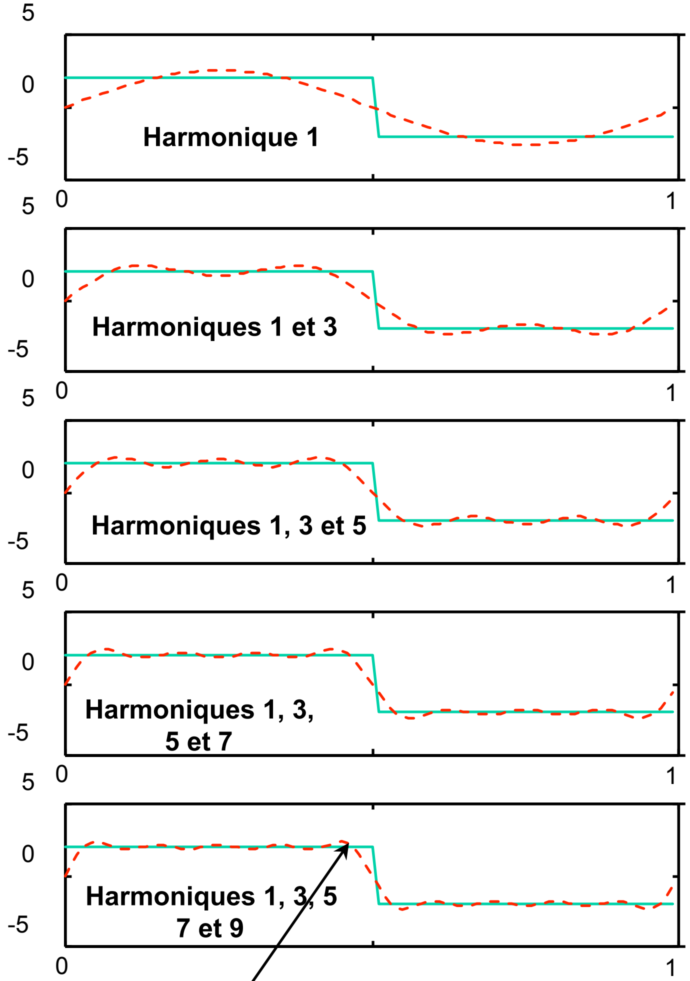
Spectre unilatéral de phase

Evolution temporelle des harmoniques

$A=2\ T_o=1$

Reconstruction du signal à partir des harmoniques





Ondulations = phénomène de Gibbs

Théorème de Fourier

Sous certaines conditions de dérivation et de continuité, tout signal à temps continu s(t) périodique de période T_o peut s'écrire sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux.

Cette somme peut s'écrire de deux manières :

- **forme trigonométrique réelle**

- **forme exponentielle complexe**

De la forme trigonométrique à la forme exponentielle complexe

- Tout signal à temps continu $s(t)$ périodique de période T_o peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(n\omega_o t) + b_n sin(n\omega_o t)$$

Forme trigonométrique réelle

En utilisant les formules d'Euler :

$$cos(n\omega_o t) = \frac{e^{jn\omega_o t} + e^{-jn\omega_o t}}{2} \qquad sin(n\omega_o t) = \frac{e^{jn\omega_o t} - e^{-jn\omega_o t}}{2j}$$

- On montre que tout signal à temps continu $s(t)$ périodique de période T_o peut également s'écrire :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$$

Forme exponentielle complexe

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_{t_0}^{t_0+T_o} s(t) e^{-jn\omega_o t}\, dt$$

Forme exponentielle complexe

- Tout signal à temps continu $s(t)$ périodique de période T_o peut s'écrire :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_{t_0}^{t_0+T_o} s(t) e^{-jn\omega_o t}\, dt \qquad n \in Z$$

- *Remarques*
  - Les coefficients c_n sont appelés coefficients de Fourier
  - Ces coefficients sont généralement complexes et peuvent s'écrire sous forme exponentielle complexe :

$$c_n = |c_n|\, e^{jArg(c_n)}$$

  - L'harmonique de rang n s'écrit également :

$$u_n(t) = c_{-n} e^{-jn\omega_o t} + c_n e^{jn\omega_o t} = 2\,|c_n|\, \cos\left(n\omega_o t + Arg(c_n)\right)$$

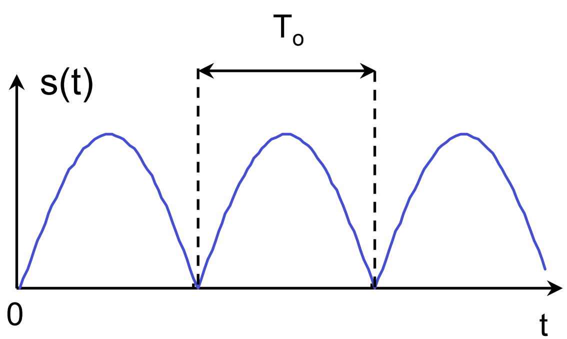
    L'harmonique de rang n est donc une cosinusoïde de pulsation $n\omega_o$, d'amplitude 2 $|c_n|$ et de déphasage $Arg(c_n)$

Spectres bilatéraux d'amplitude et de phase

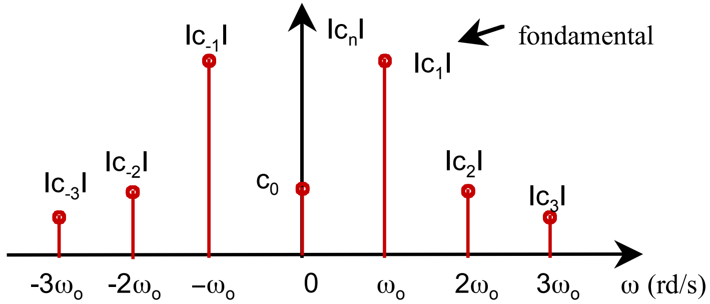
- Les coefficients de Fourier sont généralement complexes et peuvent s'écrire :

$$c_n = |c_n|\, e^{jArg(c_n)} \qquad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|\, e^{j\left(n\omega_o t + Arg(c_n)\right)}$$

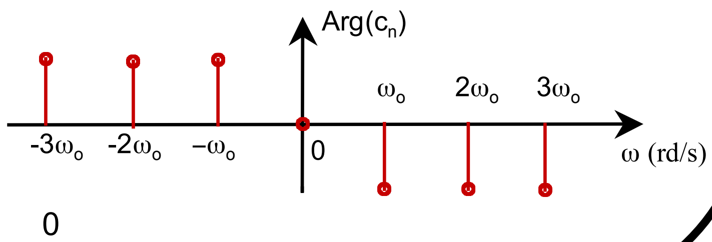
- ***Spectre d'amplitude*** de $s(t)$: tracé de $|c_n|$ en fonction des pulsations
- ***Spectre de phase*** de $s(t)$: tracé de $Arg(c_n)$ en fonction des pulsations



Evolution temporelle du signal



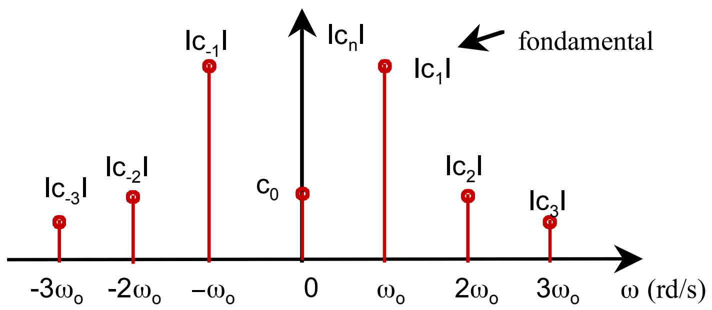
Spectre bilatéral d'amplitude



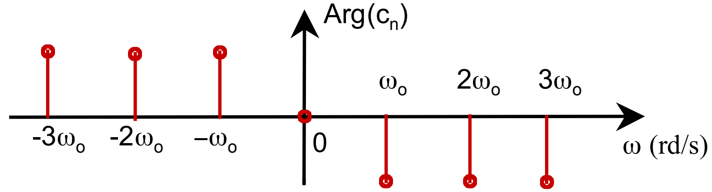
Spectre bilatéral de phase

Propriétés des spectres bilatéraux

- Il apparaît dans l'expression de $s(t)$ des termes pour les fréquences s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$, d'où le nom de ***spectres bilatéraux***
- Le spectre d'amplitude bilatéral est toujours ***pair***
- Le spectre de phase bilatéral est toujours ***impair***
- Les 2 spectres ne comportent des composantes qu'aux multiples entiers de la fréquence du signal, on parle de ***spectres de raies***



Spectre bilatéral d'amplitude



Spectre bilatéral de phase

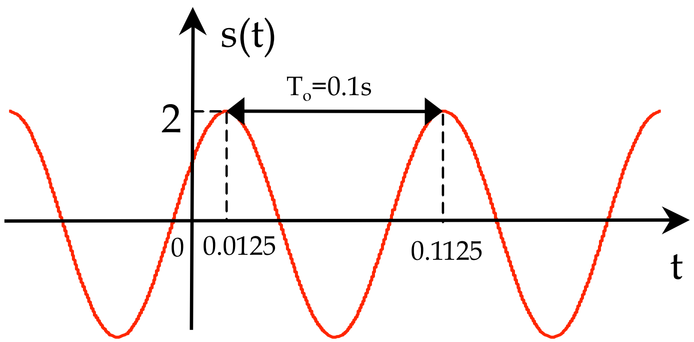
Exemple 1 : cas d'un signal sinusoïdal

- Soit un signal sinusoïdal décrit par : $s(t) = 2\cos(2\pi 10 t - \frac{\pi}{4})$

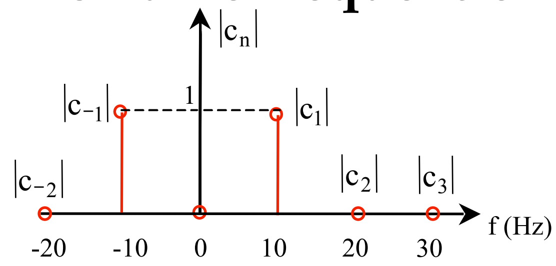
$$s(t) = e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi 10 t} + e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j2\pi 10 t} = c_1 e^{j2\pi f_o t} + c_{-1} e^{-j2\pi f_o t}$$

$$\begin{cases} c_1 = e^{-j\frac{\pi}{4}} & |c_1| = 1 & \arg(c_1) = -\frac{\pi}{4} \\ c_{-1} = e^{j\frac{\pi}{4}} & |c_{-1}| = 1 & \arg(c_{-1}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

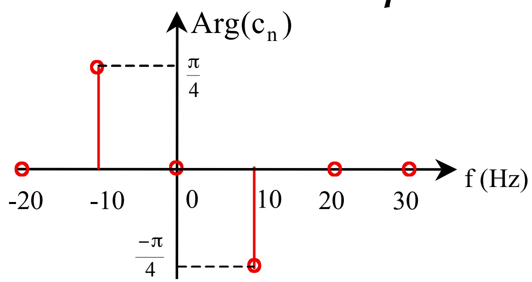
Domaine temporel



Domaine fréquentiel



Spectre bilatéral d 'amplitude



Spectre bilatéral de phase

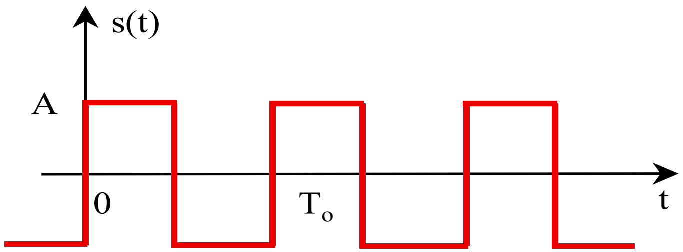
Exemple 2 : cas d'un créneau

- Montrer que les coefficients de Fourier sont donnés par :

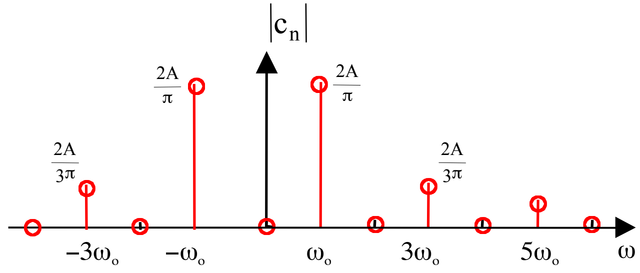
$$c_n = \frac{A}{jn\pi}\left(1-(-1)^n\right) \quad , n \neq 0 \qquad |c_n| = \begin{cases} \dfrac{2A}{|2p+1|\pi} & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases} \qquad Arg(c_{n>0}) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$c_0 = 0 \qquad Arg(c_{-n}) = -Arg(c_n)$$

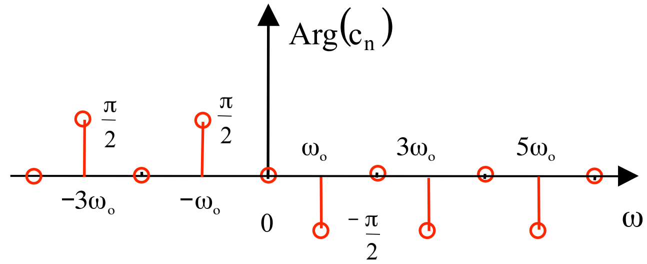
Domaine temporel



Domaine fréquentiel



Spectre bilatéral d'amplitude

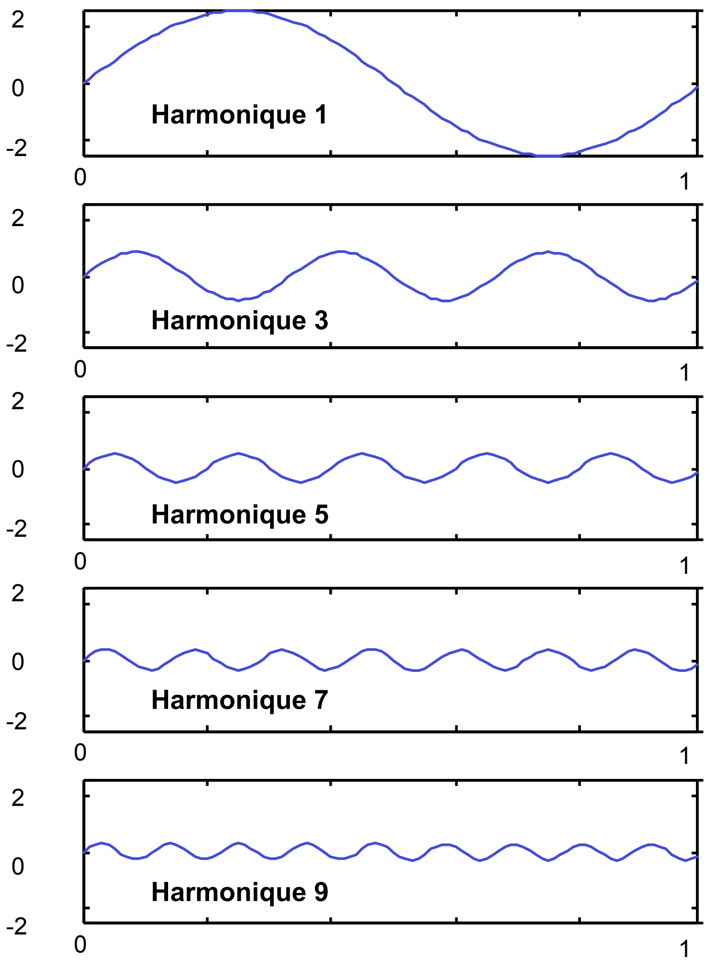


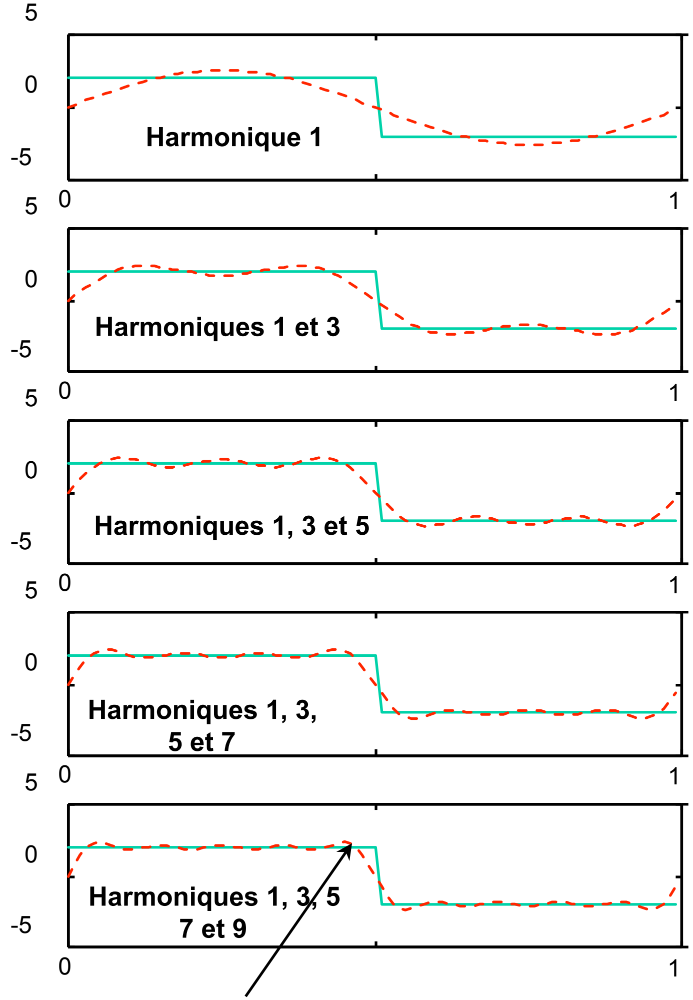
Spectre bilatéral de phase

Evolution temporelle des harmoniques

$A=2\ T_o=1$

Reconstruction du signal à partir des harmoniques





Ondulations = phénomène de Gibbs

Tableau récapitulatif

Tout signal à temps continu $s(t)$ périodique de période T_o peut s'écrire :

Forme trigonométrique réelle

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n cos(n\omega_o t) + b_n sin(n\omega_o t)$$

$$u_n(t) = A_n cos(n\omega_o t - \varphi_n)$$

$$a_n = \frac{2}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T_o} s(t)cos(n\omega_o t)\,dt \qquad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T_o} s(t)sin(n\omega_o t)\,dt \qquad n \geq 1$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad A_n \geq 0 \qquad \forall\ n$$

$$\varphi_n = arctan\frac{b_n}{a_n}$$

Forme exponentielle complexe

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_o t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| e^{j(n\omega_o t + Arg(c_n))}$$

$$u_n(t) = 2|c_n|\ cos\left(n\omega_o t + Arg(c_n)\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T_o}\int_{t_o}^{t_o+T_o} s(t)e^{-jn\omega_o t}\,dt$$

$$c_n = |c_n|\,e^{jArg(c_n)}$$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE — POLYTECH NANCY

Relations entre les spectres unilatéraux et bilatéraux d'amplitude et de phase

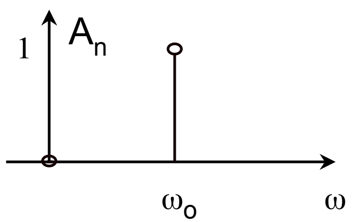
Forme trigonométrique réelle

$$u_n(t) = a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)$$
$$= A_n \cos(n\omega_o t - \varphi_n)$$

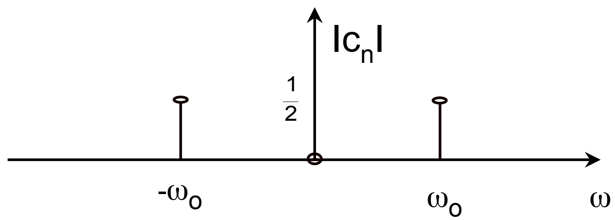
Forme exponentielle complexe

$$u_n(t) = c_{-n} e^{-jn\omega_o t} + c_n e^{jn\omega_o t}$$
$$= 2\left|c_n\right| \cos\left(n\omega_o t + Arg(c_n)\right)$$

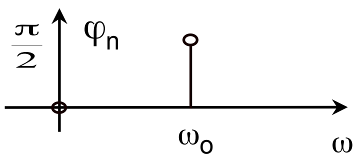
$$\begin{cases} \left|c_0\right| = A_0 \\ \left|c_n\right| = \dfrac{A_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} Arg(c_n) = -\varphi_n \quad pour \quad n \geq 0 \\ Arg(c_{-n}) = -Arg(c_n) \end{cases}$$



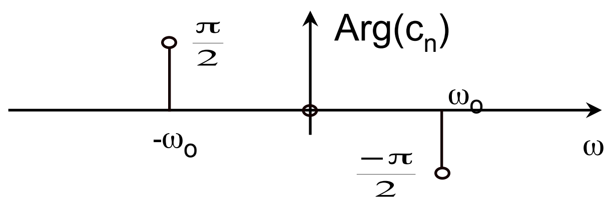
Spectre d'amplitude unilatéral



Spectre d 'amplitude bilatéral



Spectre de phase unilatéral

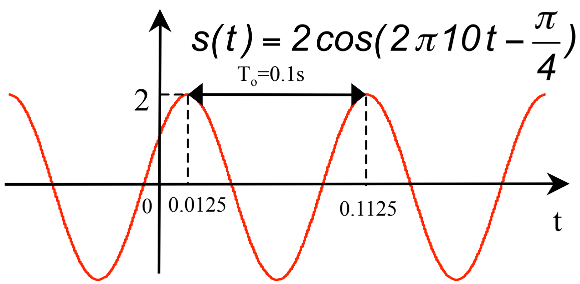


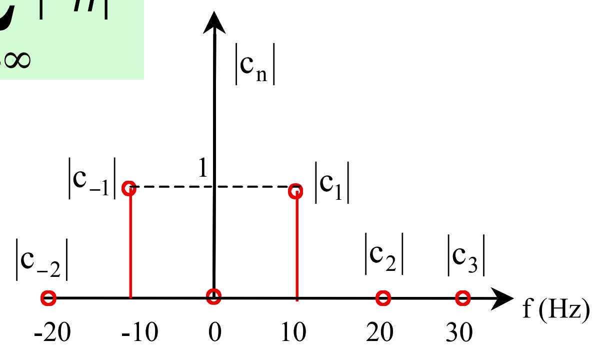
Spectre de phase bilatéral

Identité de Parseval

- Signaux périodiques : signaux à énergie infinie mais à puissance moyenne finie
- L'identité de Parseval montre l'égalité du calcul de la puissance moyenne d'un signal périodique de période T_o à partir de sa représentation dans le domaine temporel ou fréquentiel :

$$P_S = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} |s(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

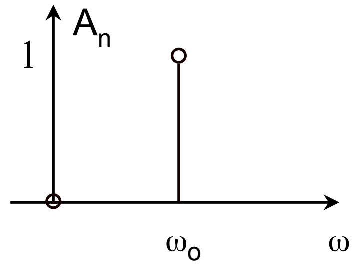




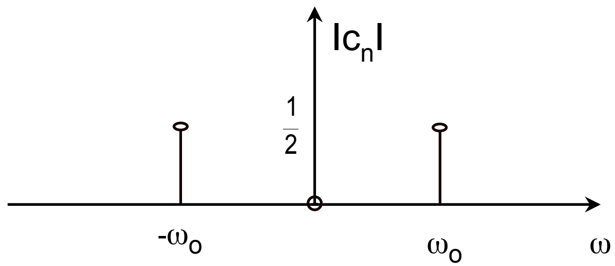
$$P_s = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} |s(t)|^2 \, dt = 2$$

$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |c_{-1}| + |c_1| = 2$$

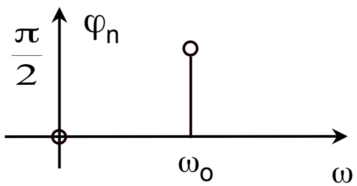
Détermination du signal temporel à partir des spectres d 'amplitude et de phase



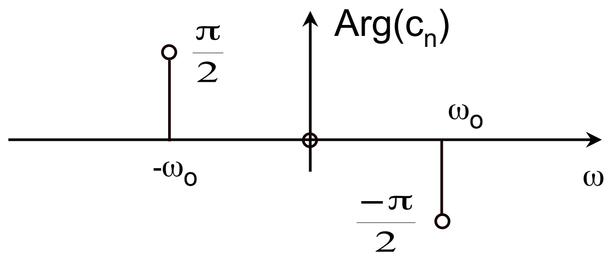
Spectre d'amplitude unilatéral



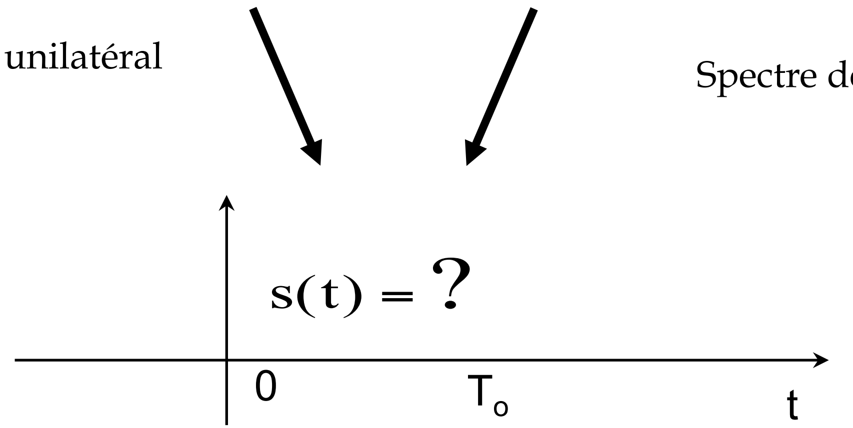
Spectre d 'amplitude bilatéral



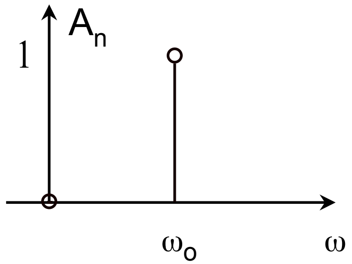
Spectre de phase unilatéral



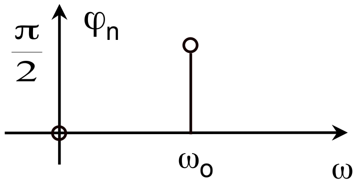
Spectre de phase bilatéral



Détermination du signal temporel à partir des spectres unilatéraux en amplitude et phase



Spectre d'amplitude unilatéral



Spectre de phase unilatéral

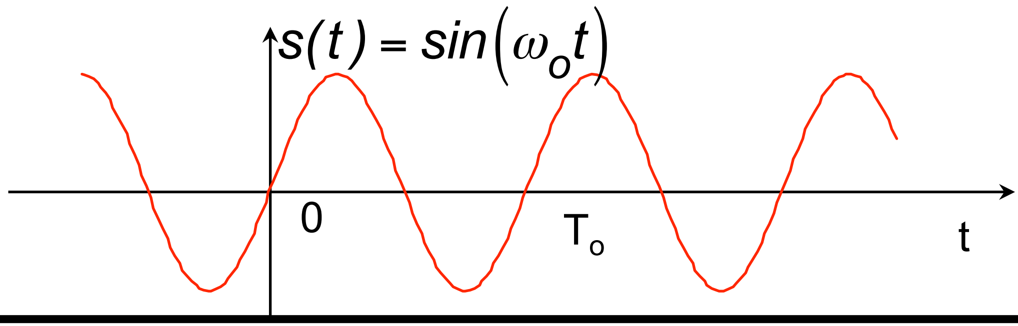
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_o t - \varphi_n)$$

$$s(t) = A_1 \cos(\omega_o t - \varphi_1)$$

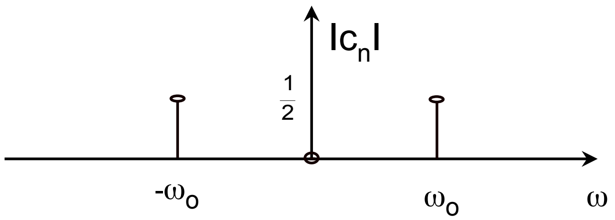
$$A_1 = 1$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2}$$

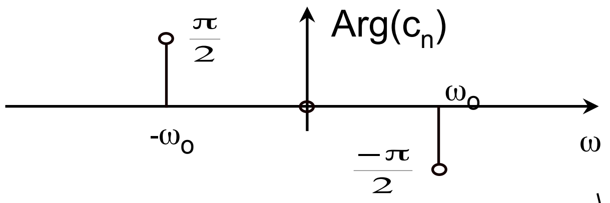
$$s(t) = \cos(\omega_o t - \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega_o t)$$



Détermination du signal temporel à partir des spectres bilatéraux en amplitude et phase



Spectre d 'amplitude bilatéral



Spectre de phase bilatéral

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_o t}=c_{-1}e^{-j\omega_o t}+c_1 e^{j\omega_o t}$$

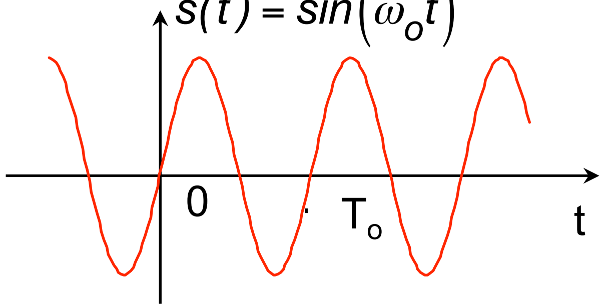
$$c_n=\left|c_n\right| e^{j\,Arg(c_n)}$$

$$c_{-1}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad c_1=\frac{1}{2}e^{j\frac{-\pi}{2}}$$

$$s(t)=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\omega_o t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{-\pi}{2}}e^{j\omega_o t}$$

$$s(t)=\frac{1}{2}\left(j\right)e^{-j\omega_o t}+\frac{1}{2}\left(-j\right)e^{j\omega_o t}$$

$$s(t)=\left[\frac{e^{j\left(\omega_o t\right)}-e^{-j\left(\omega_o t\right)}}{2j}\right]=sin\left(\omega_o t\right)$$



Objectifs à l'issue de ce cours

- Etre capable de :
  - Déterminer la forme trigonométrique réelle ou <u>la forme exponentielle complexe</u> de la décomposition en série de Fourier d 'un signal périodique à temps continu
    - d'en déduire les tracés des spectres unilatéraux et bilatéraux d 'amplitude et de phase
    - d'interpréter les spectres en déduisant, par exemple, de ces tracés la bande de fréquences utilisée par le signal
  - Déterminer la description mathématique du signal à partir des spectres d'amplitude et de phase unilatéraux ou bilatéraux