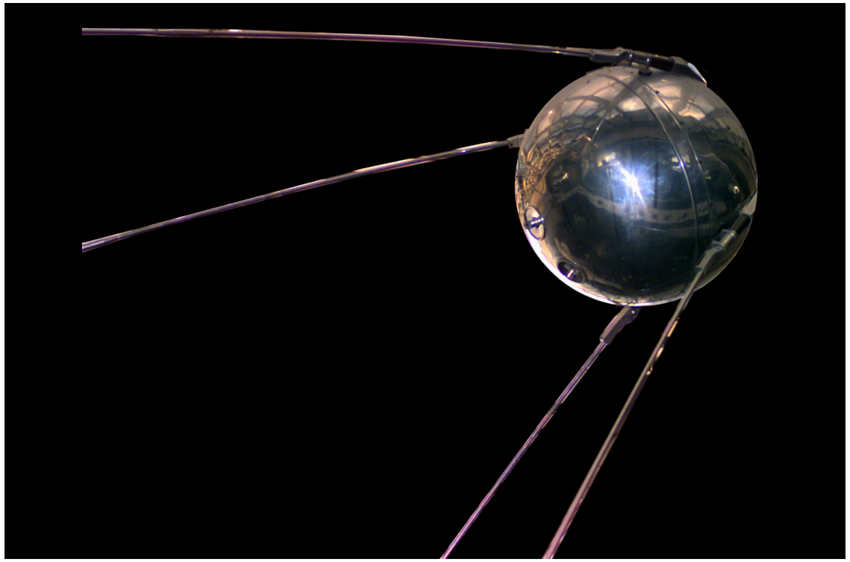
Signaux aléatoires

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

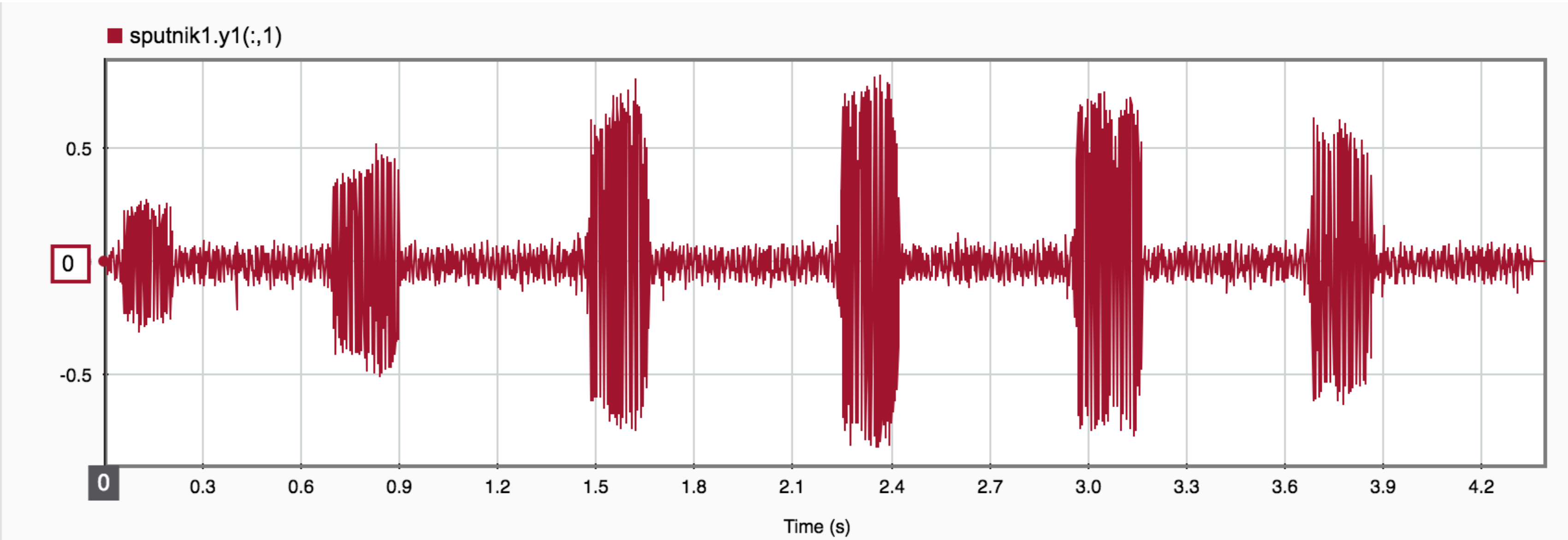
Image du jour



- Le 4 octobre 1957, Spoutnik, premier satellite artificiel est mis en orbite autour de la Terre par les Russes
- 1958 : la NASA est créée

Signal du jour

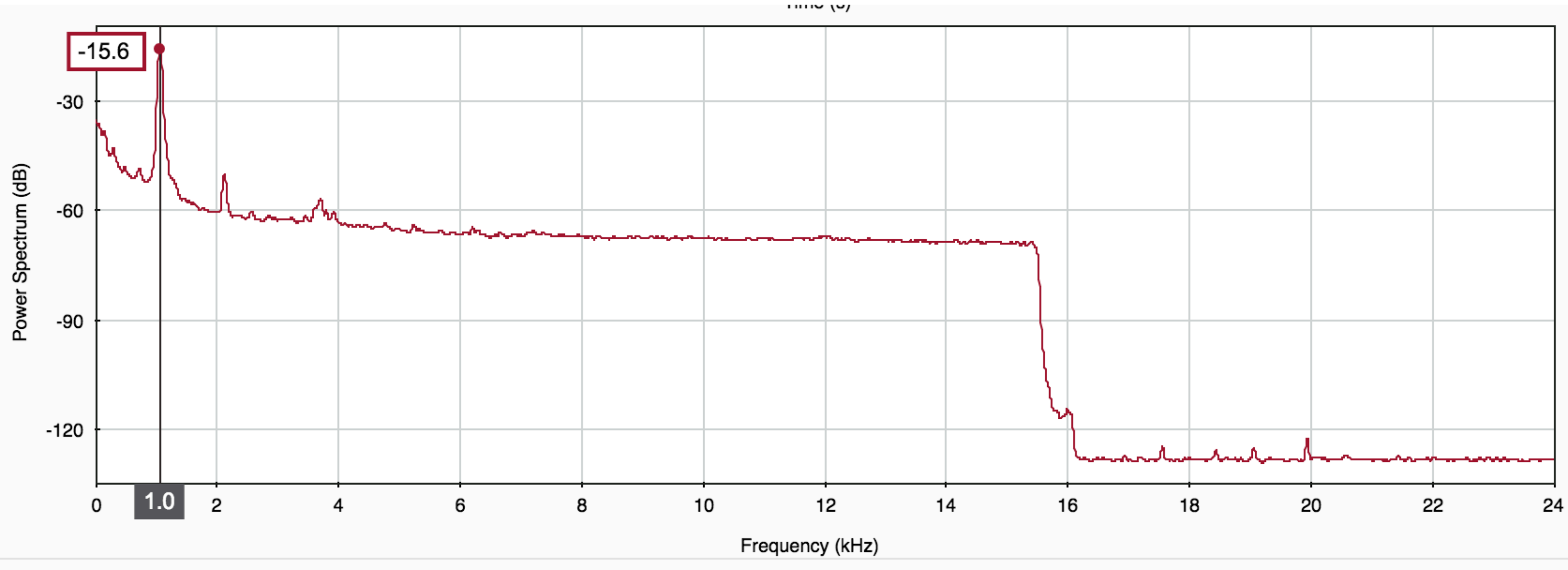
Le bip-bip émis par Sputnik, premier signal extra-terrestre créé par l'homme



Source : https://soundcloud.com/nasa/sputnik-beep

Spectre du signal du jour

Spectre du signal émis par Sputnik



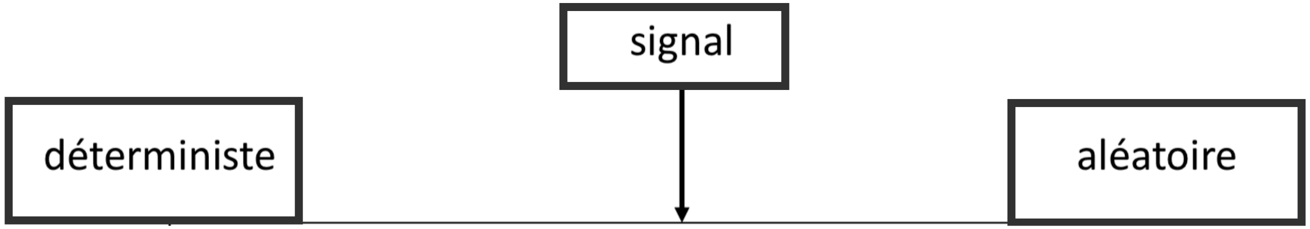
Sommaire de l'EC de TdS

Pré-requis

- Probabilité et statistiques (3A)
  - Variables aléatoires
  - Densités de probabilité d'ordre 1, 2, …, n
  - Statistiques d'ordre 1
    - moyenne
    - variance
  - Statistiques d'ordre 2
    - fonction d'autocorrélation
    - fonction d'intercorrélation

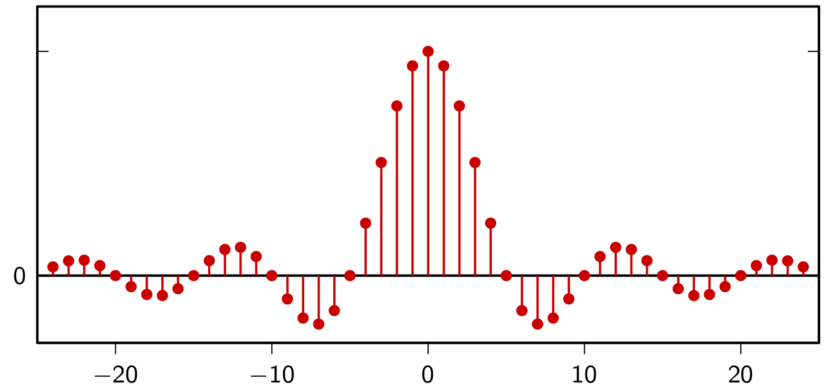
- Théorie de l'estimation *(voir transparents rubrique pré-requis)*

Classification des signaux
selon leur caractère déterministe ou aléatoire



Les signaux déterministes - *Rappels*

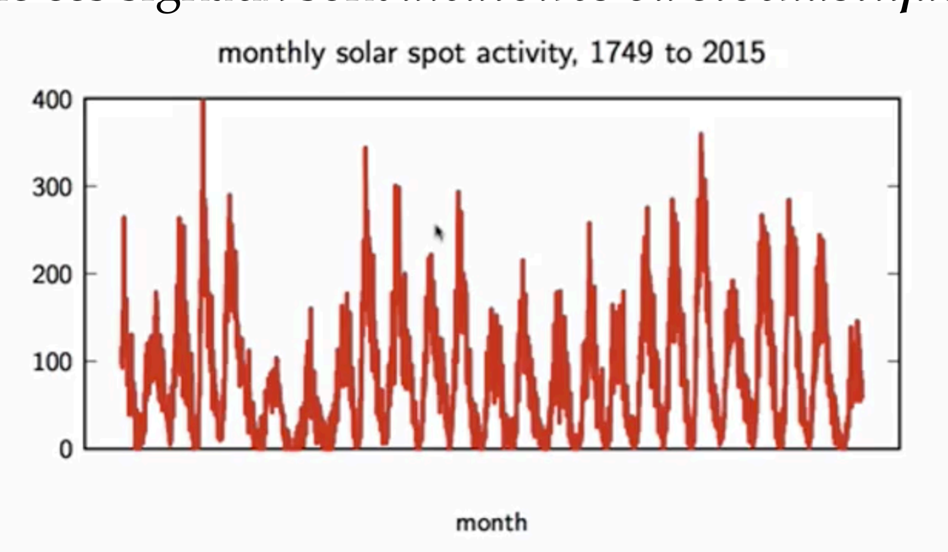
- Jusqu'à présent, les signaux considérés étaient supposés parfaitement connus
  - on dit que ces signaux sont ***déterministes ou certains***



- Pour décrire l'évolution des signaux déterministes, on a recours à des ***modèles déterministes*** qui s'appuient sur les ***fonctions mathématiques usuelles*** qui nous permettent de prévoir parfaitement leur évolution

Mais en pratique…

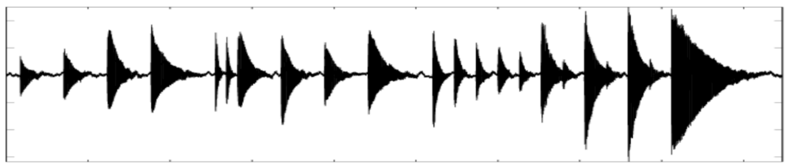
- Dans beaucoup de cas pratiques, les phénomènes observés dans des situations apparemment identiques semblent présenter des ***variations imprévisibles***
  - on dit que ces signaux sont ***aléatoires ou stochastiques***



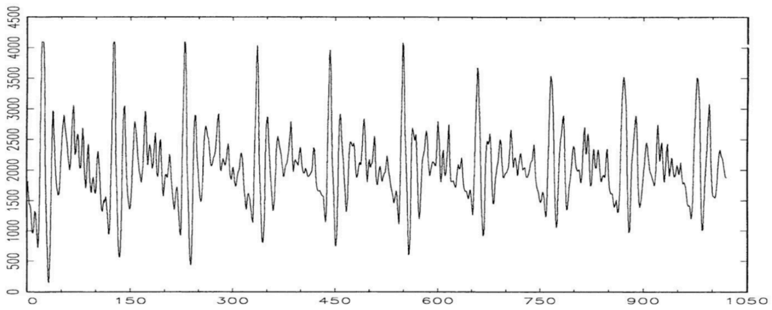
- Pour décrire l'évolution des signaux aléatoires, on a recours à des ***modèles probabilistes*** qui s'appuient sur la ***théorie des probabilités et statistiques***

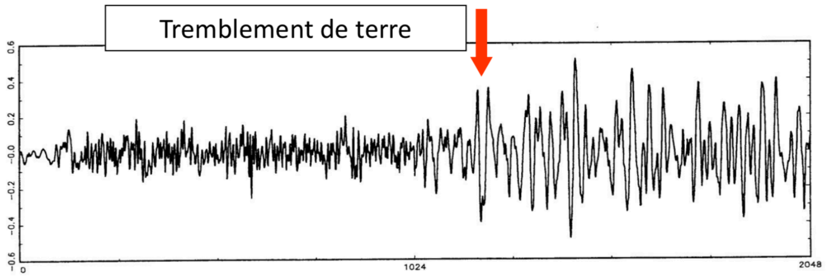
En fait, tous les signaux réels présentent un caractère aléatoire !

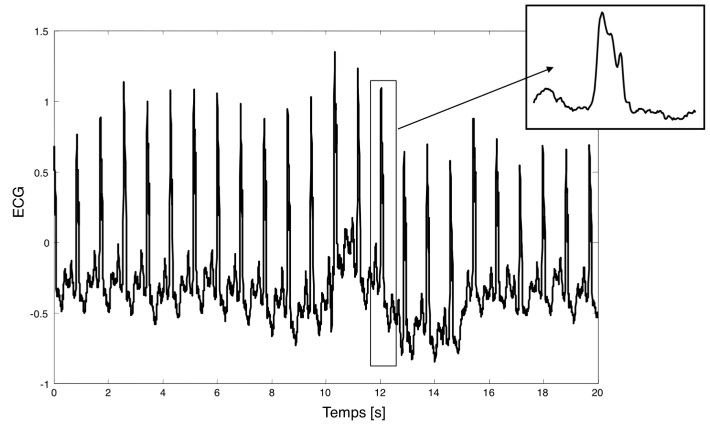
signal de musique : Bach

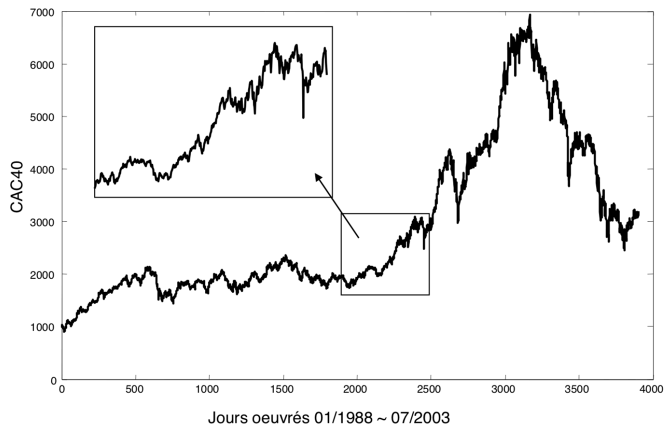


signal de parole : « aaaah… »









D'après J. Antoni – Université de Lyon

L'aléatoire en *théorie du signal*

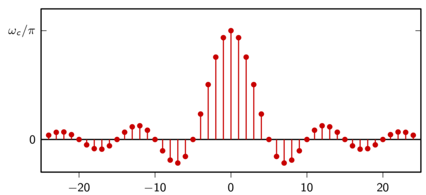
- Pour étudier l'évolution des signaux aléatoires, on s'appuie sur la ***théorie des probabilités et statistiques***

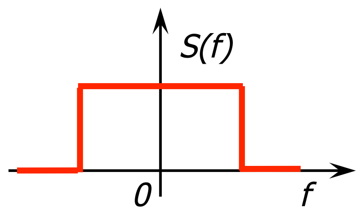
- Cette théorie constitue les ***bases fondamentales*** pour comprendre
  - l'apprentissage automatique (***machine learning***) exploitée en IA
  - les techniques avancées de traitement du signal
  - le traitement des images
  - la modélisation et la reconnaissance de la parole
  - la prévision de séries temporelles
  - l'apprentissage statistique de modèles dynamiques en automatique continue
  - la commande optimale via le filtre de Kalman
  - les techniques de détection de défaut
  - la maintenance prédictive

  …

Rappels - Classification des ***signaux déterministes*** selon le caractère paramétrique ou non de son modèle

- Signaux déterministes
  - Modèles non paramétriques
    - Evolution temporelle
    - Spectre
  - Modèles paramétriques
    - Fomule mathématique

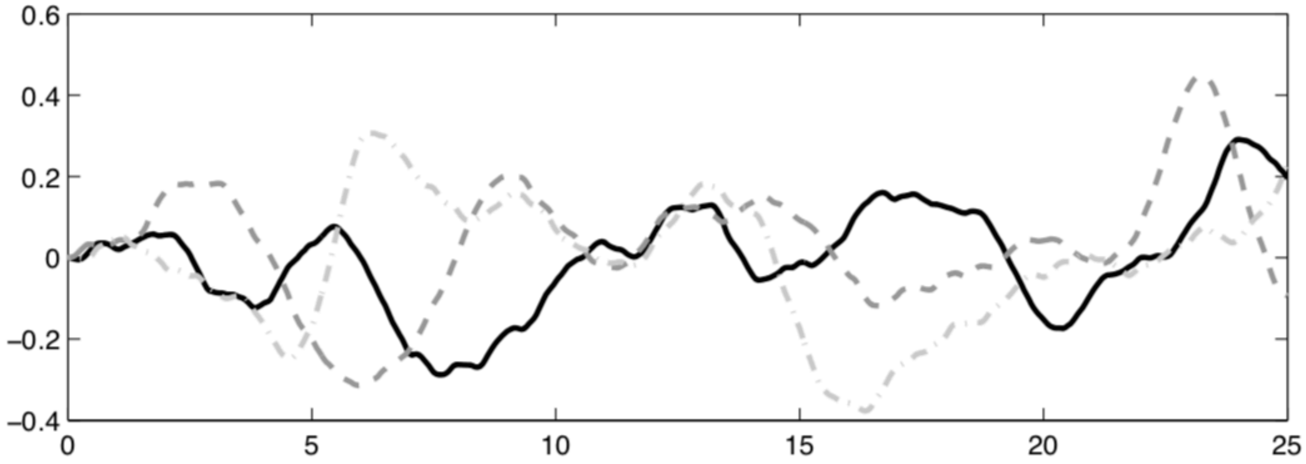




$$s(k) = A\,\mathrm{sinc}\left(f_0 k\right)$$

Signaux aléatoires

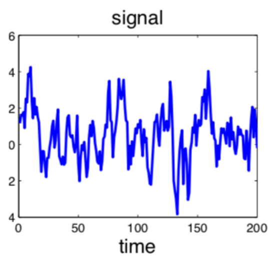
Signaux ayant un caractère non reproductible dont l'évolution au cours du temps semble être imprévisible même si les phénomènes sont observés dans des situations identiques

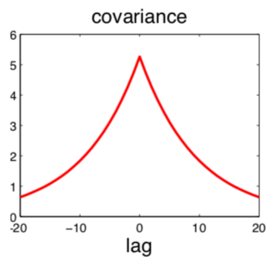


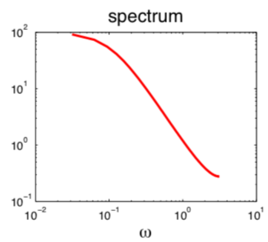
Certaines caractéristiques semblent être conservées d'un signal à l'autre comme la moyenne, la variance, la vitesse de variation

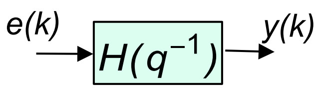
Classification des ***signaux aléatoires*** selon le caractère paramétrique ou non de son modèle

- Signaux aléatoires stationnaires
  - Modèles non paramétriques
    - Evolution temporelle
    - Fonction d'autocorrélation
    - Densité spectrale de puissance
  - Modèles paramétriques
    - Modèles AR, MA, ARMA





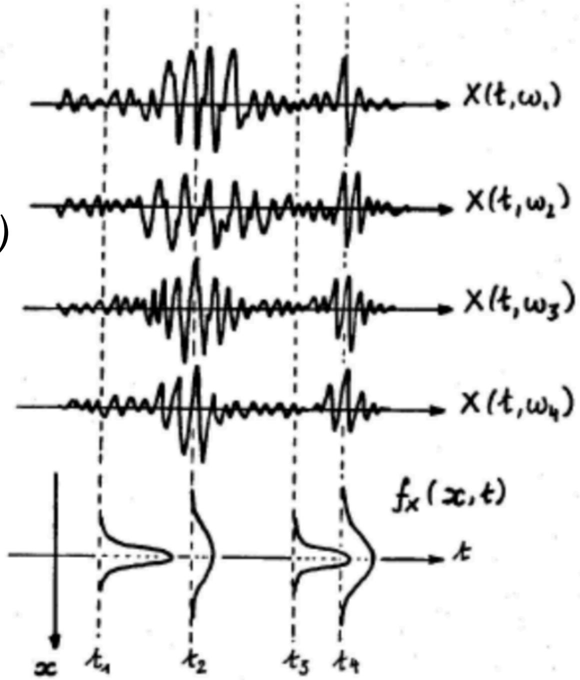




$$y(k) = H(q^{-1})e(k)$$

Comment modéliser un signal aléatoire ?

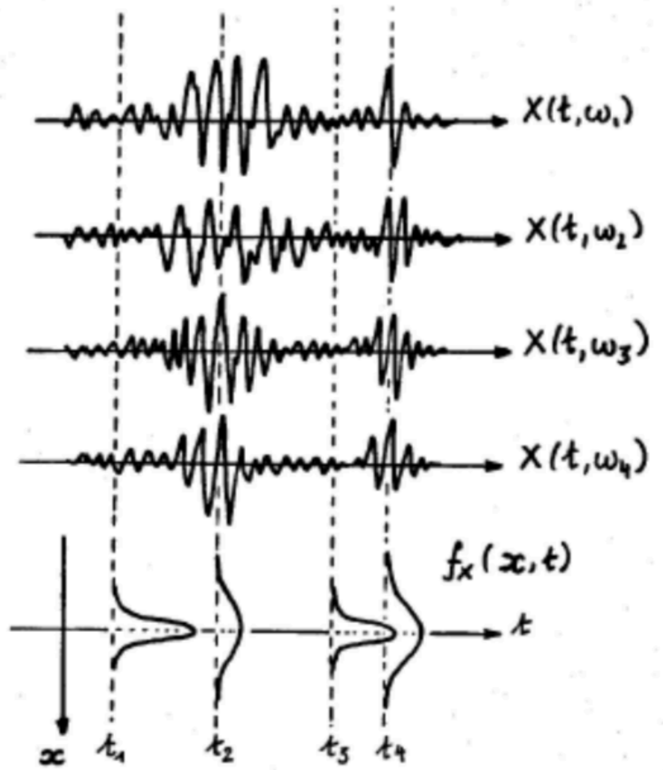
- Mathématiquement, un ***signal aléatoire*** est considéré comme la ***réalisation d'un processus aléatoire***
- Un **processus aléatoire** comprend ***une infinité de réalisations***
  - à un instant donné t_i
    - processus = ***variable aléatoire***
  - pour un évènement donné ω_i
    - processus = ***signal aléatoire*** (=*réalisation)*



- ***C'est une idéalisation mathématique abstraite mais très pratique pour faire l'analyse d'un signal aléatoire***

Caractérisation statistique d'un processus aléatoire

- ***Signal aléatoire*** : ***réalisation d'un processus aléatoire*** et la valeur prise à un instant donné est une variable aléatoire



→ ***Signal aléatoire = réalisation***

↓ ***Variable aléatoire***

Exemple de processus aléatoire

- ***Consommation énergétique à midi des villes en France***

Signal aléatoire
= réalisation

Consommation énergétique moyenne mensuelle pour Nancy

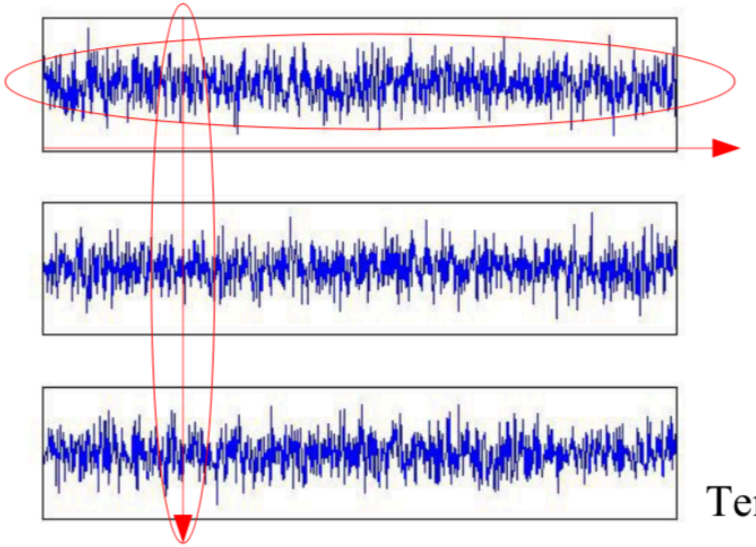
Moyenne temporelle

Nancy

Paris

Nantes

...



Temps

J ...

Moyenne statistique

Consommation énergétique moyenne pour le 10 février en France **= variable aléatoire**

Caractérisation de variables aléatoires - Rappels

- Densité de probabilité
  - Exemple : densité de probabilité gaussienne

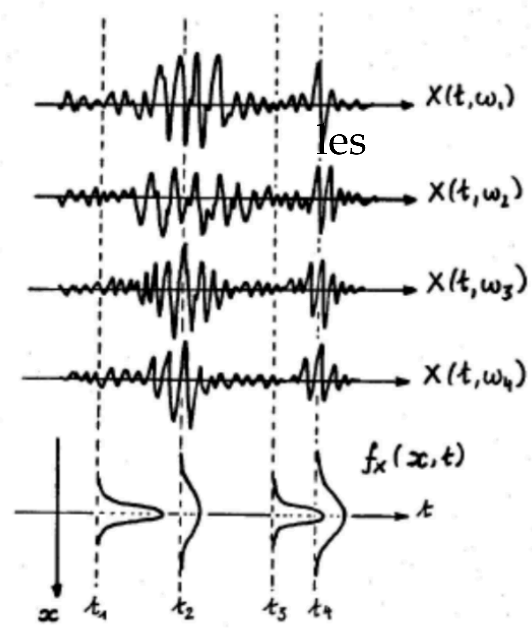
- Statistiques d'ordre 1
  - Moment d'ordre 1 ou moyenne
  - Moment d'ordre 2 ou moyenne quadratique
  - Moment centré d'ordre 2 ou variance (écart-type)

- Statistiques d'ordre 2
  - Fonction d'autocorrélation ou d'autocovariance

Voir vidéo de Franck Corbin sur les processus aléatoires
www.youtube.com/watch?v=H_LmWLfVQWc

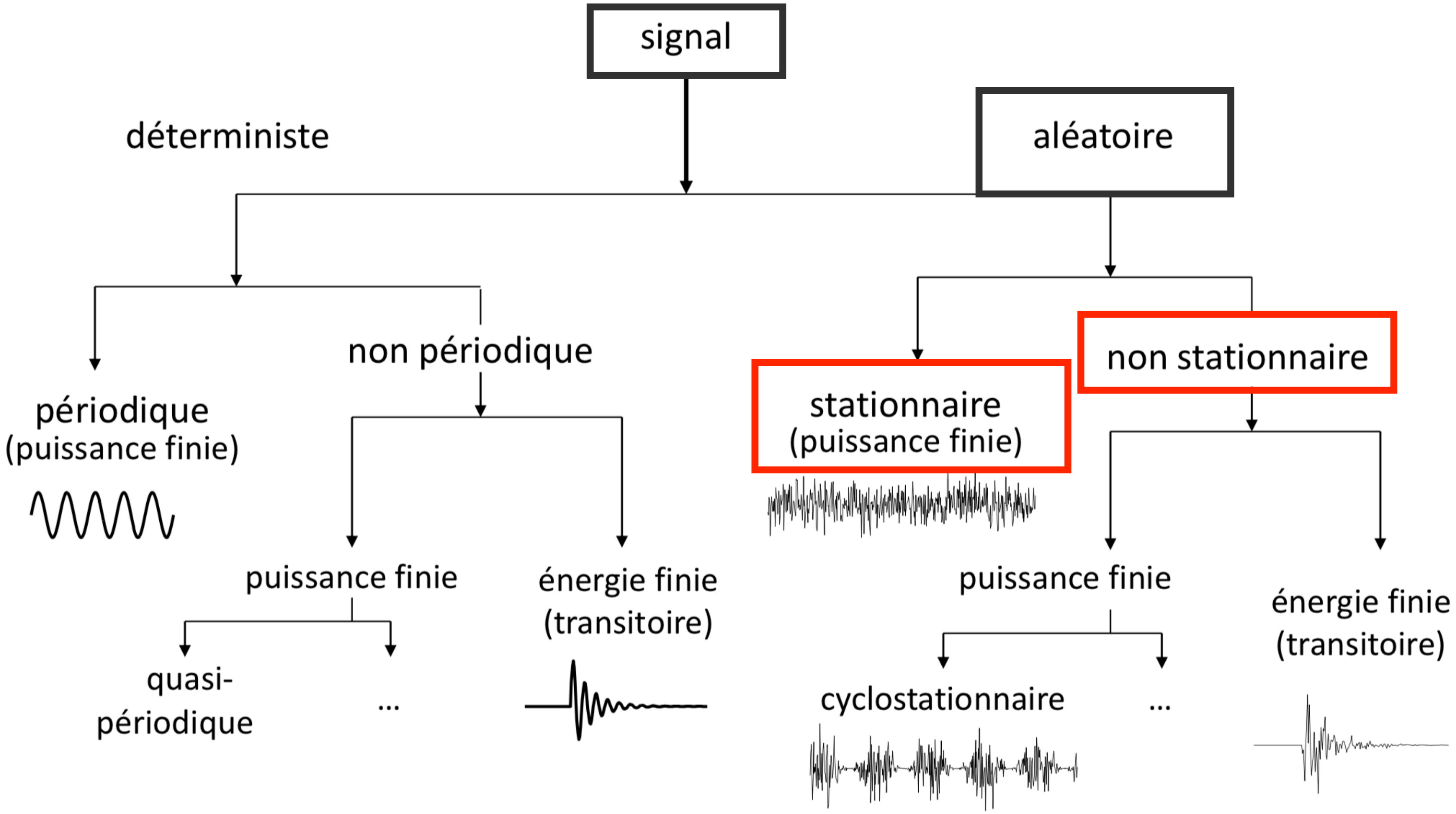
Caractérisation statistique d'un processus aléatoire : densités de probabilité conjointes d'ordre n

- Théorème : ***un processus aléatoire est entièrement décrit par ses densités de probabilité conjointes d'ordre n***
  - Ces densités représentent la façon dont les valeurs se distribuent aux *n* instants $t_1, t_2, \dots t_n$
  - ***Elles ne sont pas faciles à obtenir en pratique !***



- On se contente souvent d'une caractérisation partielle à partir de ses statistiques d'ordre 1 et 2
  - Moyenne, variance
  - Fonction d'auto-corrélation

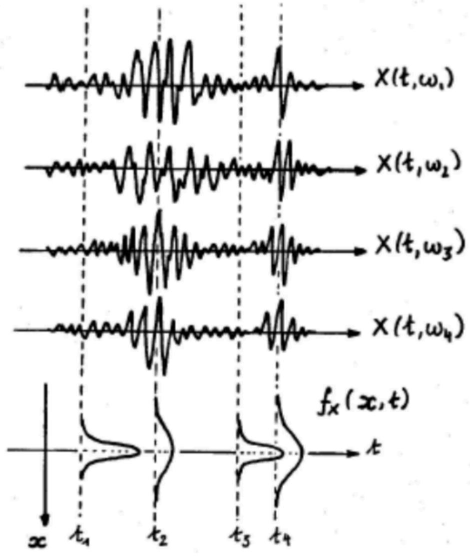
Classification des signaux selon leur caractère déterministe ou aléatoire



D'après J. Antoni – Université de Lyon

Stationnarité

- Pour un processus aléatoire quelconque, les caractéristiques statistiques : densité de probabilité et moments d'ordre n, ***dépendent des instants t_i*** auxquels elles sont calculées
- Certains processus présentent des caractéristiques ***invariantes*** au cours du temps



- On dit qu'ils sont stationnaires. ***Ils ont un comportement statistiquement constant au cours du temps***

- La stationnarité est d'une ***importance théorique et pratique considérable*** :
  - génère de nombreuses propriétés et simplifie l'analyse
  - fait partie des hypothèses d'application de nombreuses méthodes de traitement du signal

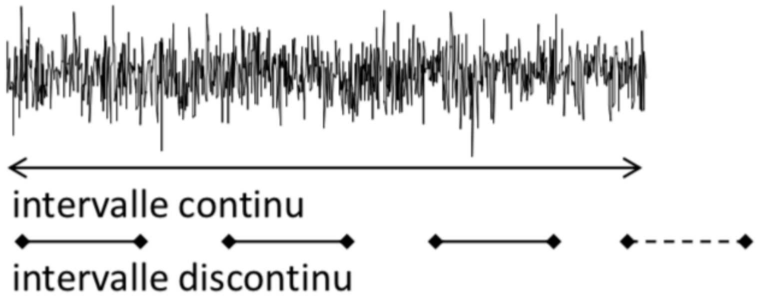
Stationnarité

- ***Stationnarité au sens strict***
  - Les densités de probabilités conjointes ne dépendent pas de l'instant t_i
  - Toutes ses propriétés statistiques sont donc invariantes dans le temps

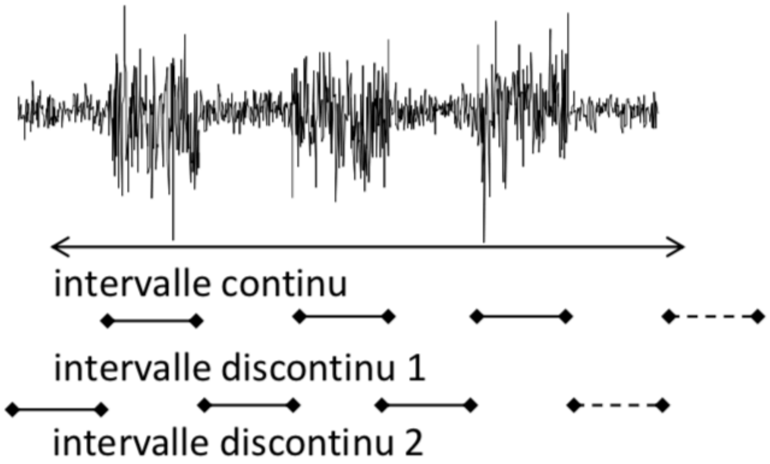
- ***Stationnarité au sens large (ou au second ordre)***
  - Un processus aléatoire est stationnaire au sens large si ses statistiques d'ordre 1 et 2
    - Moyenne, variance
    - Fonction d'auto-corrélation

    sont ***invariantes dans le temps***

Signaux stationnaires - Exemples



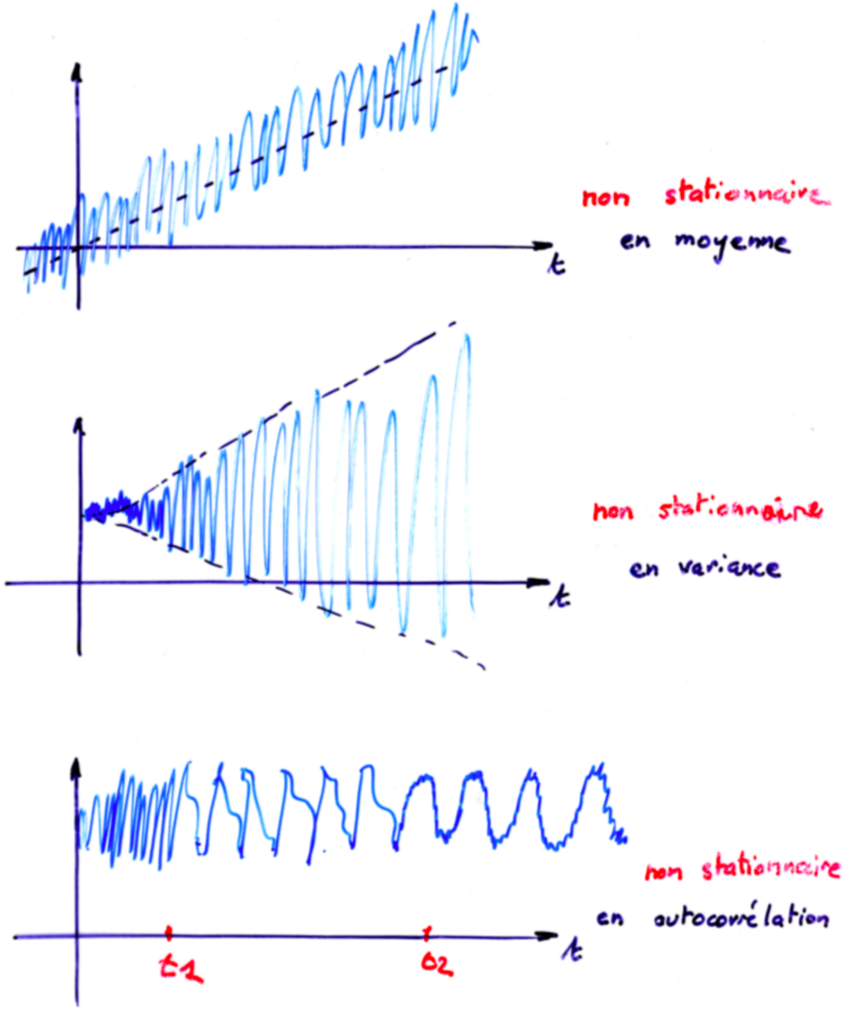
dans les deux cas, la moyenne temporelle sur un intervalle dont la mesure tend vers l'infini donne le même résultat



la puissance calculée sur les 3 intervalles est dans chaque cas différente $\Rightarrow$ signal non-stationnaire à l'ordre 2

D'après J. Antoni – Université de Lyon

Signaux non-stationnaires - Exemples



D'après F. Heitz – Université de Strasbourg

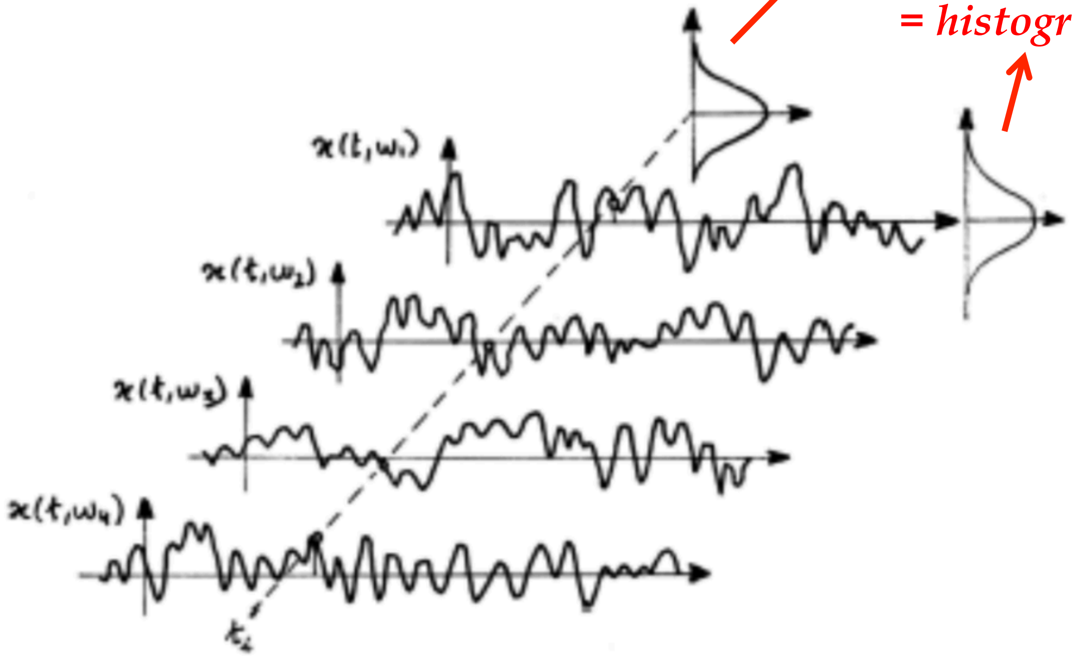
Ergodicité

- ***Ergodicité au sens strict***
  - Un processus aléatoire est ergodique au sens strict si tous ses moments statistiques sont égaux aux moments temporels
- ***Ergodicité au sens large (au second ordre)***
  - Un processus aléatoire est ergodique au sens large si ses moments statistiques d'ordre 1 et 2 sont égaux aux moments temporels d'ordre 1 et 2
  - Densité de probabilité = histogramme

Processus *stationnaires* ***ergodiques***

- Ergodicité => densité de probabilité = histogramme

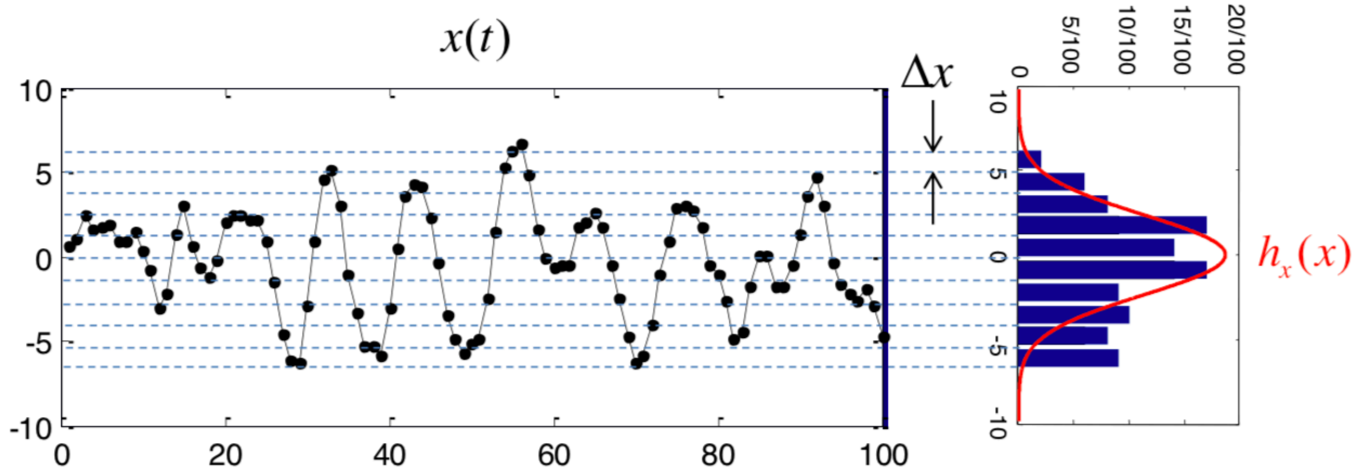
densité de probabilité
= histogramme



D'après J. Antoni – Université de Lyon

Processus *stationnaires* ***ergodiques***

- Ergocité => densité de probabilité = histogramme $h_x(x;\Delta x)$



$$h_x(x;\Delta x) = \frac{\text{nombre de fois que } x(t) \text{ est dans l'intervalle } [x; x+\Delta x]}{\text{nombre total}}$$

$$h_x(x) = \lim_{\Delta x \to 0} h_x(x;\Delta x)$$

D'après J. Antoni – Université de Lyon

Ergodicité

- Résultat d'une **importance pratique fondamentale**
  - *On peut calculer les propriétés statistiques d'après l'observation temporelle <u>d'une seule réalisation</u> du processus aléatoire stationnaire*

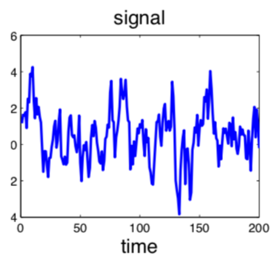
$$m = \mathrm{E}\left\{x(k)\right\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x(k)$$

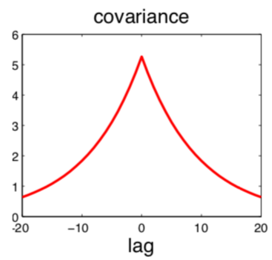
$$\sigma_x^2 = \mathrm{E}\left\{\left(x(k) - \mathrm{E}\left\{x(k)\right\}\right)^2\right\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \left(x(k) - \mathrm{E}\left\{x(k)\right\}\right)^2$$

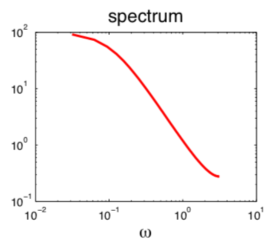
$$R_x(\tau) = \mathrm{E}\left\{x(k)x(k-\tau)\right\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x(k)x(k-\tau)$$

Caractérisation d'un signal aléatoire stationnaire

- Signaux aléatoires stationnaires
  - Modèles non paramétriques
    - Evolution temporelle
    - Fonction d'autocorrélation
    - Densité spectrale de puissance
  - Modèles paramétriques

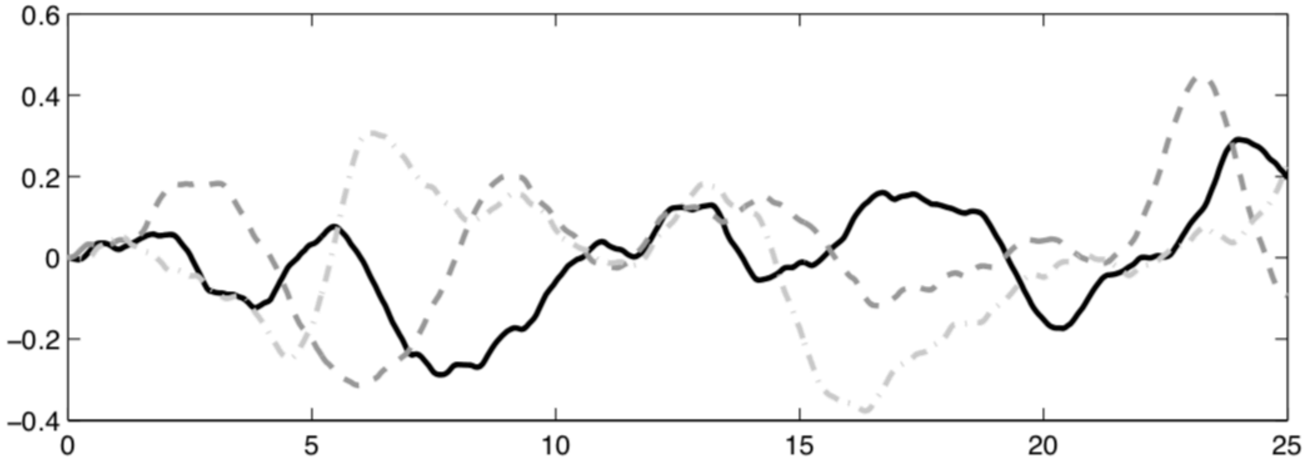






Caractérisation non paramétrique d'un signal aléatoire stationnaire

Les réalisations d'un processus aléatoire peuvent sembler différentes



Certaines caractéristiques, comme sa moyenne, sa variance, ou sa fonction d'auto-corrélation, semblent être conservées d'une réalisation à l'autre

Caractérisation temporelle d'un signal aléatoire

- Moyenne - ***Mesure de position***

$$\bar{x} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x(k)$$

- Puissance - ***Mesure d'intensité***
  - Par convention, un signal aléatoire *x(k)* est considéré comme un signal à énergie infinie mais à puissance moyenne finie

$$P_x = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x^2(k)$$

- Variance - ***Mesure de dispersion***

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \left(x(k) - \bar{x}\right)^2$$

Estimateur de la moyenne et de la variance à partir de N données

$$m = E\left\{x(k)\right\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x(k)$$

$$\sigma_x^2 = E\left\{\left(x(k) - E\left\{x(k)\right\}\right)^2\right\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \left(x(k) - m\right)^2$$

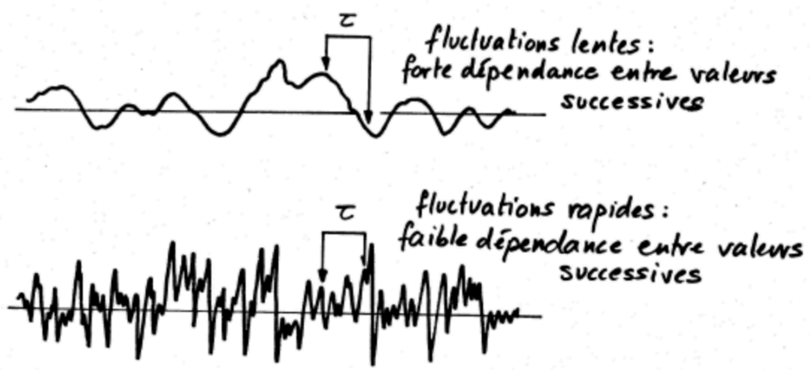
- Estimateur de la moyenne $\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(k)$
- Estimateur biaisé de la variance $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(x(k) - \hat{m}\right)^2$
- Estimateur non biaisé de la variance $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} \left(x(k) - \hat{m}\right)^2$

Caractérisation temporelle d'un signal aléatoire

- Fonction d'autocorrélation - ***Mesure de la vitesse de variations des évolutions temporelles***

$$R_x(\tau) = \mathrm{E}\{x(k)x(k+\tau)\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x(k)x(k+\tau) \qquad \tau \in Z$$

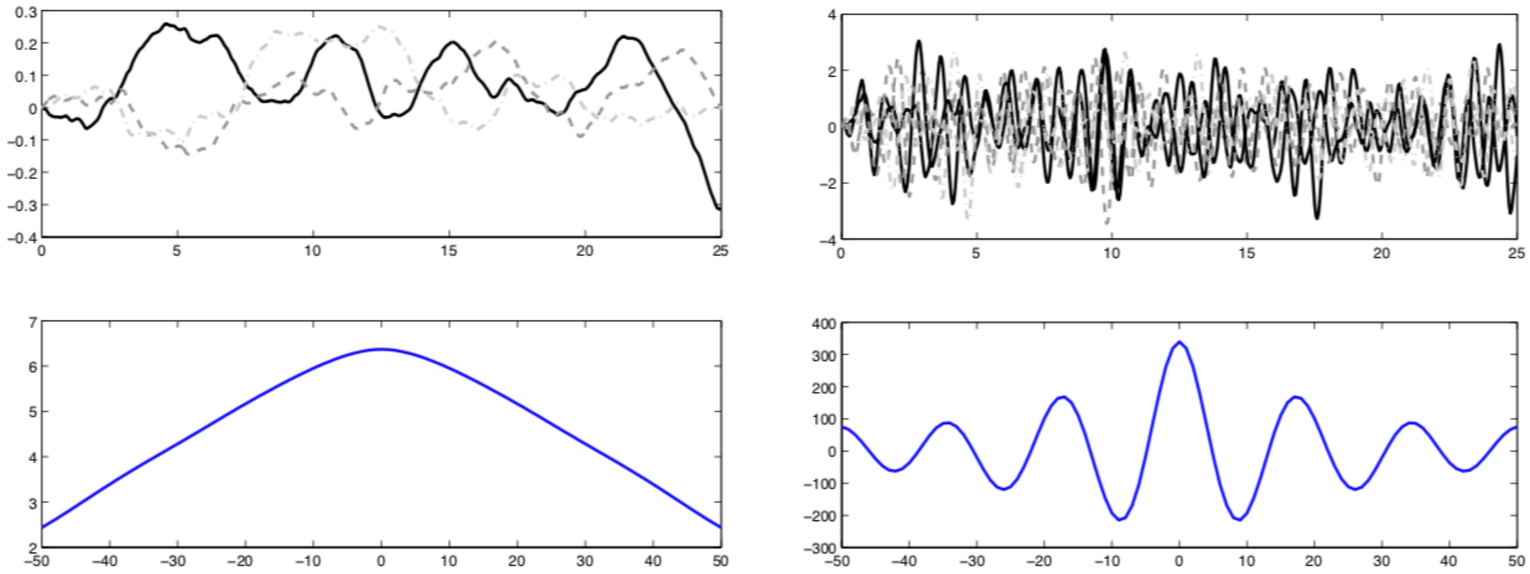
  - on compare le signal avec lui-même mais décalé de τ
  - elle permet également de voir en quoi le signal à un instant donné est influencé par ce qui s'est passé à un instant précédent



Propriétés de la fonction d'auto-corrélation

Un signal très auto-corrélé a des variations lentes et une apparence «lisse »

Un signal peu auto-corrélé a des variations très rapides et une apparence « chaotique »



Propriétés de la fonction d'autocorrélation

- $R_x(\tau)$ est une fonction paire $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.
  - Il suffit donc de calculer $R_x(\tau)$ pour $\tau > 0$ puis de faire la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

- $R_x(0)$ est le maximum de $R_x(\tau)$

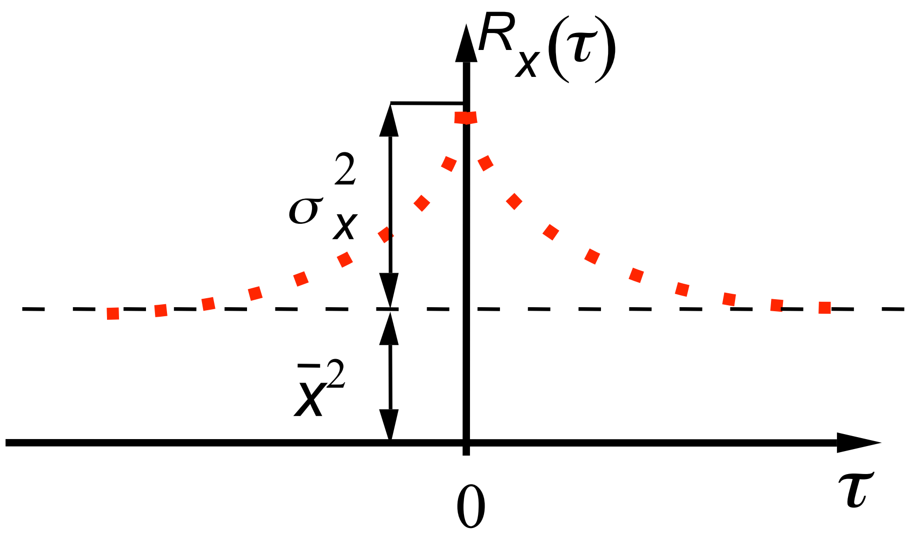
- $$R_x(0) = \bar{x}^2 + \sigma_x^2$$

  $$\lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = \bar{x}^2$$

- si x est centré

  $$\lim_{\tau \to \pm\infty} R_x(\tau) = 0$$

  $$R_x(0) = \sigma_x^2$$



UNIVERSITÉ DE LORRAINE POLYTECH NANCY

Estimateur de la fonction d'auto-corrélation

$$R_x(\tau) = \mathrm{E}\left\{x(k)x(k+\tau)\right\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x(k)x(k+\tau)$$

- Estimateur biaisé

$$\begin{cases} \hat{R}_x^b(\tau) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-\tau-1} x(k)x(k+\tau) & \tau = 0,1,\dots,N-1 \\ \hat{R}_x^b(\tau) = \hat{R}_x(-\tau) & \tau = -N+1,\dots,-1 \end{cases}$$

- Estimateur non biaisé

$$\begin{cases} \hat{R}_x^{nb}(\tau) = \dfrac{1}{N-\tau} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-\tau-1} x(k)x(k+\tau) & \tau = 0,1,\dots,N-1 \\ \hat{R}_x^{nb}(\tau) = \hat{R}_x(-\tau) & \tau = -N+1,\dots,-1 \end{cases}$$

- Exemple :
  - Soit $x = [0\ 1\ 1\ 1\ 0]$. Calculer $\hat{R}_x^b(\tau)$ $\hat{R}_x^{nb}(\tau)$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE POLYTECH NANCY

Estimateur de la fonction d'auto-corrélation - Exemple

x = [0 1 1 1 0]   N=5

$$\begin{cases} \hat{R}_x^b(\tau) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4-\tau} x(k)x(k+\tau) & \tau = 0,1,2,3,4 \\ \hat{R}_x^b(\tau) = \hat{R}_x(-\tau) & \tau = -4,-3,-2,-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{R}_x^{nb}(\tau) = \frac{1}{5-\tau}\sum_{k=0}^{4-\tau} x(k)x(k+\tau) & \tau = 0,1,2,3,4 \\ \hat{R}_x^{nb}(\tau) = \hat{R}_x(-\tau) & \tau = -4,-3,-2,-1 \end{cases}$$

$$\tau = 0, \quad \hat{R}_x^b(0) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} x^2(k) = \frac{3}{5}$$

$$\tau = 1, \quad \hat{R}_x^b(1) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{3} x(k)x(k+1) = \frac{2}{5}$$

$$\tau = 2, \quad \hat{R}_x^b(2) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{2} x(k)x(k+2) = \frac{1}{5}$$

$$\tau = 3, \quad \hat{R}_x^b(3) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{1} x(k)x(k+3) = 0$$

$$\tau = 4, \quad \hat{R}_x^b(4) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{0} x(k)x(k+4) = 0$$

$$\tau = 0, \quad \hat{R}_x^{nb}(0) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} x^2(k) = \frac{3}{5}$$

$$\tau = 1, \quad \hat{R}_x^{nb}(1) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} x(k)x(k+1) = \frac{1}{2}$$

$$\tau = 2, \quad \hat{R}_x^{nb}(2) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} x(k)x(k+2) = \frac{1}{3}$$

$$\tau = 3, \quad \hat{R}_x^{nb}(3) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} x(k)x(k+3) = 0$$

$$\tau = 4, \quad \hat{R}_x^{nb}(4) = \frac{1}{1}\sum_{k=0}^{0} x(k)x(k+4) = 0$$

Sous Matlab : x=[0 1 1 1 0];

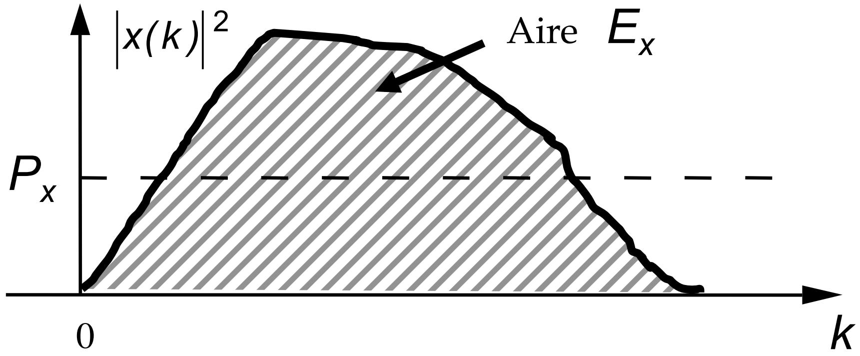
[Rx_b,tau]=xcorr(x,'biased')

[Rx_nb,tau]=xcorr(x,'unbiased')

Energie et puissance - Rappels

- ***Energie*** (totale)

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2$$



- ***Puissance moyenne (totale)***

$$P_x = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |x(k)|^2$$

La fonction $|x(k)|^2$ correspond à une ***répartition*** de l'énergie du signal au cours du temps = ***densité temporelle d'énergie***

La puissance moyenne représente une ***répartition* moyenne** de l'énergie au cours du temps = ***densité temporelle de puissance***

Spectre de puissance d'un signal aléatoire

- Un signal aléatoire stationnaire est généralement d'énergie infinie
  - On ne peut pas calculer sa transformée de Fourier *(pb de convergence de la série)*

- ***Théorème d'EINSTEIN-WIENER–KHINTCHINE***
  - La ***densité spectrale de puissance (DSP)*** d'un signal aléatoire stationnaire ergodique est ***la transformée de Fourier (à temps discret) de sa fonction d'autocorrélation***

$$\Phi_x(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}$$

$$R_x(\tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_x(f)\, e^{j2\pi\tau f}\, df$$

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_x(f)\, df$$

On parle de DSP ou de spectre de puissance *(PSD ou power spectrum)*

Propriétés des spectres de puissance

$$\Phi_x(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}$$

- Le spectre de puissance est à valeurs réelles *(et non à valeurs complexes comme lorsqu'on calcule le spectre d'un signal déterministe par TFtd)*

- La spectre d'un signal aléatoire échantillonné à la période $T_e=1/f_e$ est périodique de période f_e

$$\Phi_x(f+nf_e) = \Phi_x(f), \quad n \in Z$$

- Le spectre de puissance est positive ou nulle

$$\Phi_x(f) \geq 0 \quad \forall f$$

- Le spectre de puissance d'un signal à valeurs réelles est paire

$$\Phi_x(-f) = \Phi_x(f)$$

Théorème de Parseval

- Parseval a montré que la puissance moyenne du signal peut se calculer soit en intégrant la distribution **temporelle** de puissance, soit en intégrant sa distribution **fréquentielle** de puissance :

$$\Phi_x(f) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{NT_e} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \lim_{N\to+\infty} E\left\{ \frac{1}{NT_e} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi f k T_e} \right|^2 \right\}$$

- Estimation à partir de N données

$$\hat{\hat{\Phi}}_x(f) = \frac{1}{NT_e} \left| \hat{X}_N(f) \right|^2 \qquad \hat{X}_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi f k T_e}$$

Estimation du spectre de puissance
Méthodes basées sur un modèle non paramétrique

- On estime le spectre de puissance à partir d'un nombre fini de données N

  - Méthode du ***périodogramme***

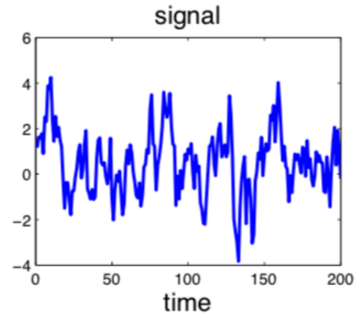
$$\hat{\hat{\Phi}}_x(f) = \frac{1}{NT_e}\left|\hat{X}_N(f)\right|^2 \qquad \hat{X}_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi fkT_e}$$

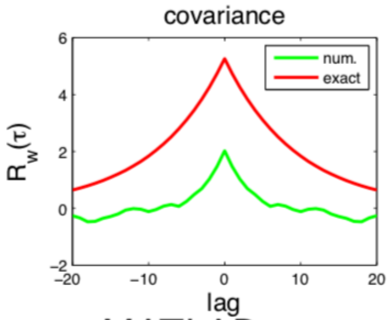
  - Méthode du ***corrélogramme***

$$\hat{\Phi}_x(f) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{R}_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau T_e} \qquad \begin{cases} \hat{R}_x(\tau) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-\tau-1} x(k)x(k+\tau) & \tau = 0,1,\ldots,N-1 \\ \hat{R}_x(\tau) = \hat{R}_x(-k) & \tau = -N+1,\ldots,-1 \end{cases}$$

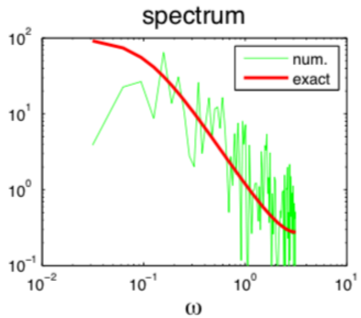
Périodogramme - Exemple

N=200



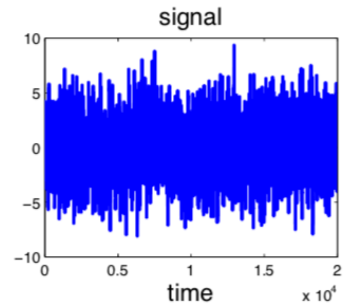


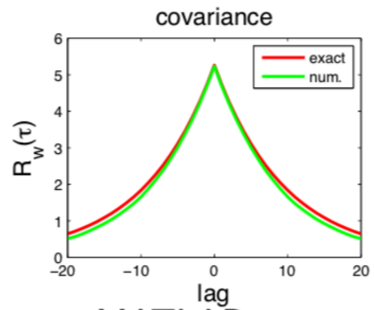
MATLAB: `xcov`



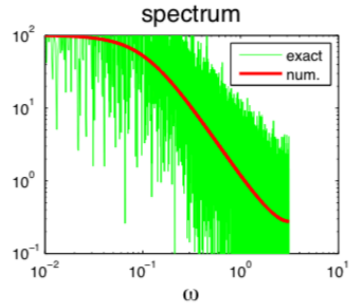
MATLAB: `periodogram`

N=20000





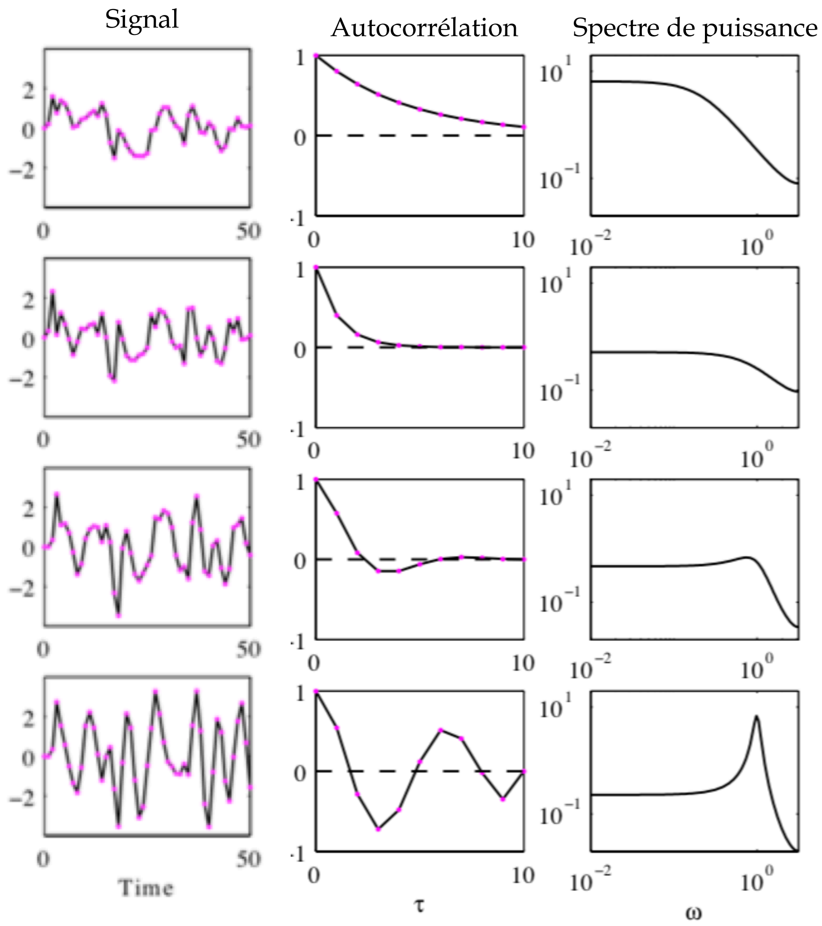
MATLAB: `xcov`



MATLAB: `periodogram`

- On montre que le périodogramme est non biaisé mais que la variance ne diminue pas lorsque *N* augmente
- Les méthodes du corrélogramme peuvent fournir de meilleures estimées mais elles sont sensibles aux choix de paramètres utilisateur
  - Voir pwelsh sous Matlab par exemple

Modèles non paramétriques de signaux aléatoires
Exemples

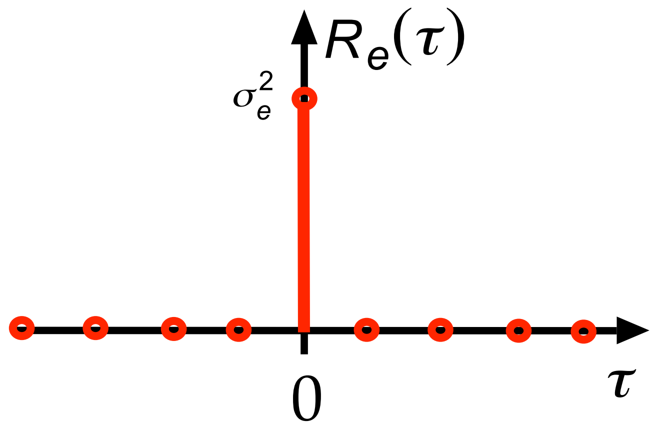


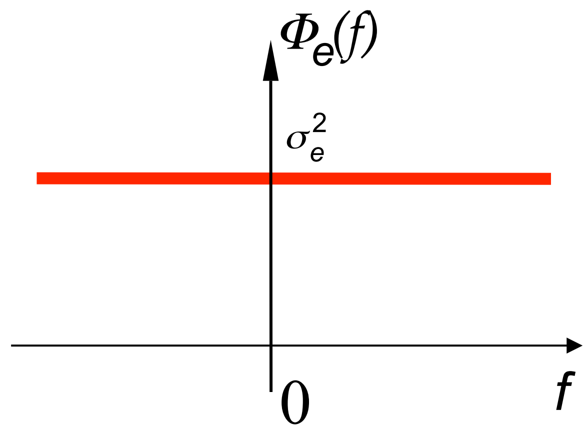
Quelques processus aléatoires fondamentaux

- Certains processus aléatoires jouent un rôle privilégié dans la représentation des signaux physiques et permettent de modéliser un grand nombre de phénomènes en pratique :
  - le bruit blanc
  - le processus blanc gaussien
  - la marche aléatoire
  - les processus AR, MA, ARMA
  - ….

Le bruit blanc

- ***Un signal aléatoire $e(k)$, de moyenne nulle, dont la densité spectrale de puissance $\Phi_e(f)$ est constante pour toute valeur de fréquence est appelé <u>bruit blanc</u> (analogie avec la lumière blanche)***
- Son spectre de puissance est constant *: la puissance est répartie de façon uniforme sur l'ensemble des fréquences*
- Sa densité de probabilité peut être quelconque : uniforme, gaussienne, …
- Il est caractérisé par une ***décorrélation complète*** entre variables à des instants différents. Sa fonction d'autocorrélation est donc une impulsion de Kronecker





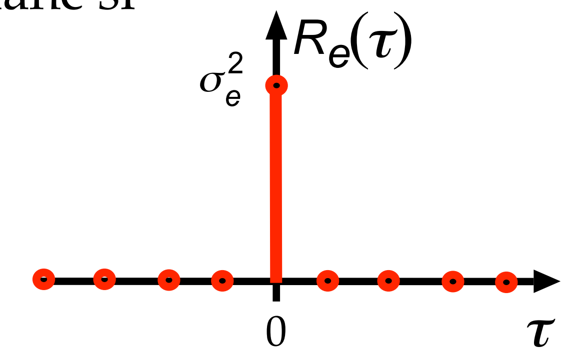
Le bruit blanc

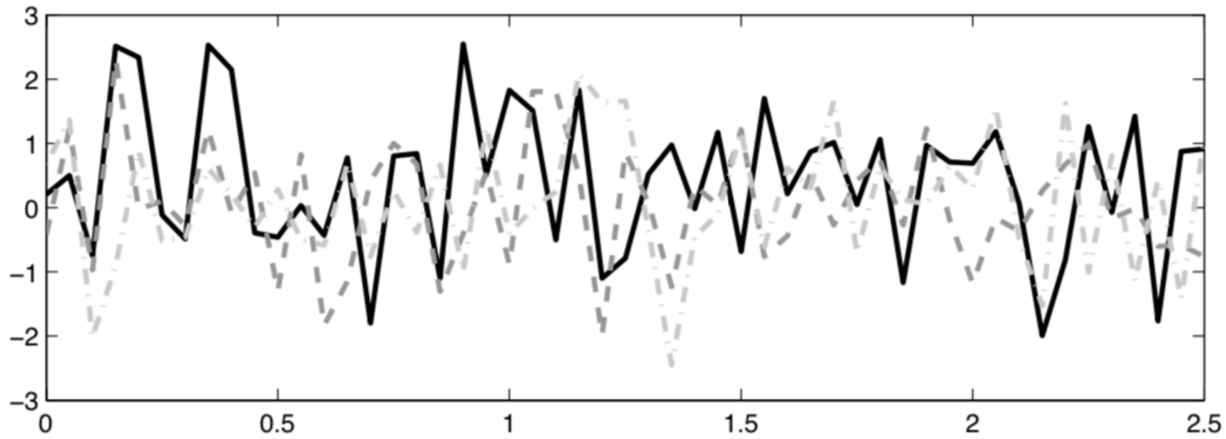
- Un processus aléatoire $e(k)$ est un bruit blanc si

$$m_e = 0$$

et si

$$R_e(\tau) = \begin{cases} \sigma_e^2 & \text{si} \quad \tau = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$





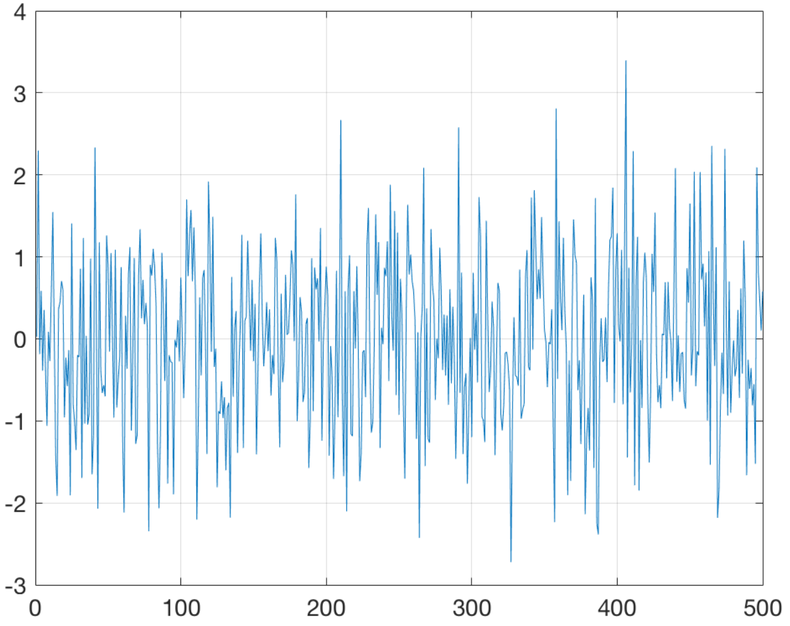
- Un bruit blanc est imprévisible !

Le bruit blanc gaussien

- C'est un bruit blanc qui suit une loi de probabilité gaussienne

- Sous Matlab

```
>> e=randn(500,1);
>> plot(e)
```



Densité de probabilité gaussienne *(ou normale)*
Rappels

- Représente un modèle convenable pour de nombreux signaux aléatoires

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

m : moyenne

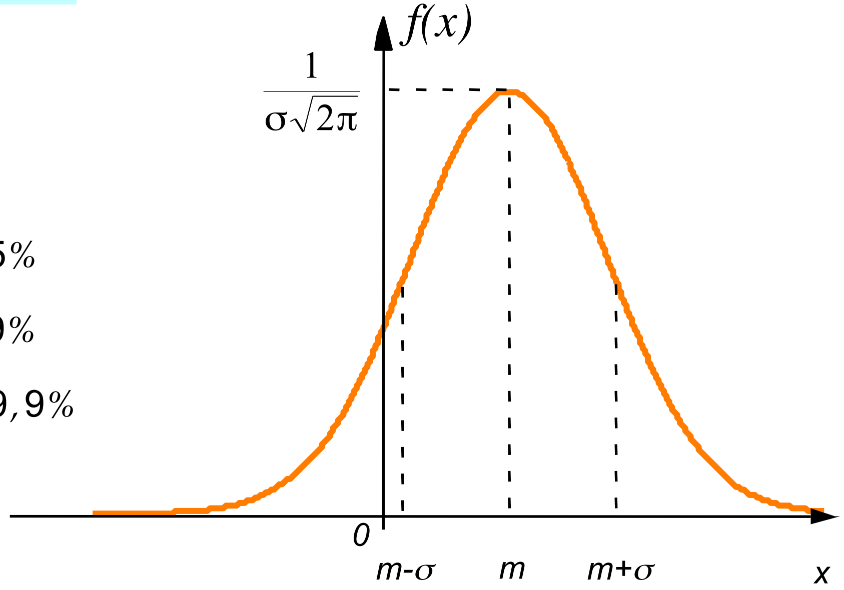
σ : écart-type

$$P(m-\sigma \le x \le m+\sigma) = 67\%$$

$$P(m-2\sigma \le x \le m+2\sigma) = 95\%$$

$$P(m-3\sigma \le x \le m+3\sigma) = 99\%$$

$$P(m-4\sigma \le x \le m+4\sigma) = 99{,}9\%$$



Densité de probabilité gaussienne *(ou normale)*

Rappels

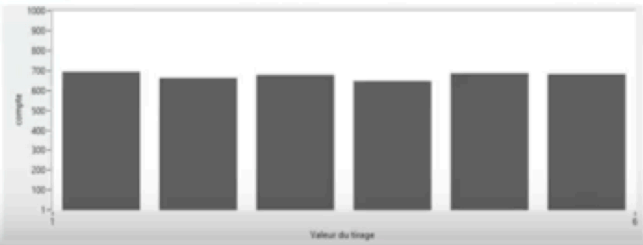
- ***Propriétés importantes***
  - Deux signaux aléatoires gaussiens $x(k_1)$ et $x(k_2)$ pour $k_1 \neq k_2$ sont ***non-corrélés*** *(propriété d'un bruit blanc)* et donc ***indépendants*** *(propriété des densité de probabilité gaussienne)*
  - *La densité de probabilité gaussienne est la seule loi pour laquelle il y a* ***équivalence entre non-corrélation et indépendance***
  - Les lois gaussiennes préservent leur caractère gaussien dans toute opération linéaire : convolution, filtrage, dérivation, intégration

Théorème de la limite centrale

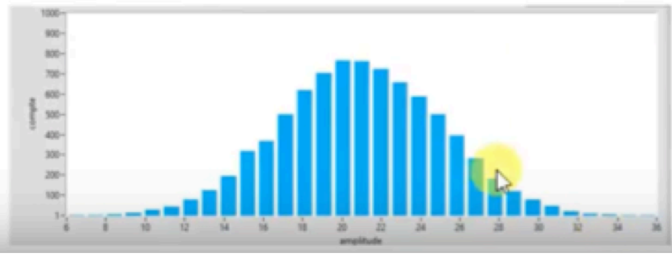
- ***La densité de probabilité de la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi tend vers la loi gaussienne quand n tend vers l'infini*** (d'où le nom de loi gaussienne ou loi normale)

Illustration :

Tirage de 1 dé (exécuté 4000 fois)



Somme du tirage de 6 dés (exécuté 8000 fois)



Signal non stationnaire particulier
La marche aléatoire *(random walk)*

- La marche aléatoire est la somme cumulative d'un bruit blanc discret $e(k)$

$$x(k) = x(k-1) + e(k)$$

$$\text{Si} \quad x(0) = 0, \quad x(k) = \sum_{i=1}^{k} e(k)$$

- Une marche aléatoire modélise :
  - le cheminement des pas d'un ivrogne qui essaie de rentrer chez lui
  - le niveau des stocks dans une entreprise
  - les gains et les pertes d'un joueur au casino, etc.

- C'est un signal non stationnaire !
  - sa variance dépend du temps

Marche aléatoire - *Exemple*

Sous Matlab

```
>> v=cumsum(randn(500,1);
>> plot(v)
```