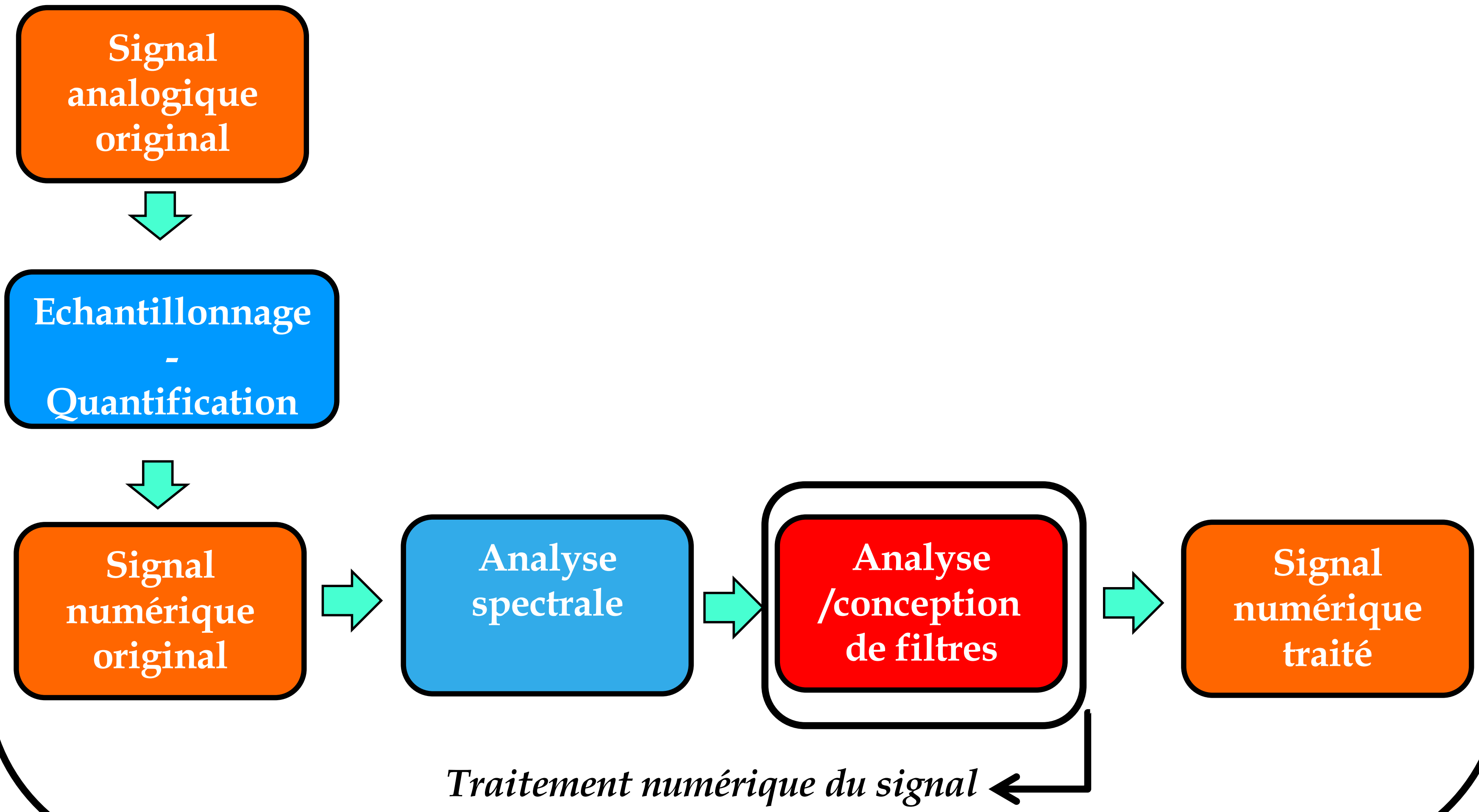
Analyse de filtres numériques

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

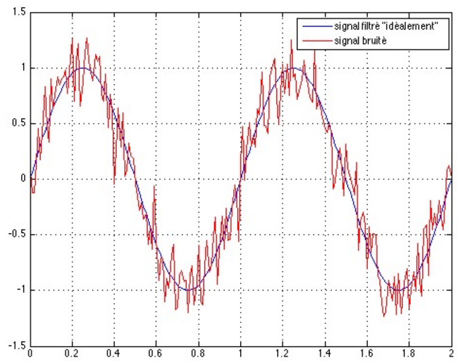
Etapes principales pour effectuer un traitement numérique sur un signal analogique



Filtrer mais pourquoi faire ?

- Les filtres jouent un rôle central en TNS. L'information utile est souvent dissimulée au sein d'un signal
  - Le filtrage permettra d'extraire cette information utile

- Un filtre est *souvent* un système linéaire dont
  - le rôle est de modifier le contenu spectral d'un signal sans y ajouter de nouvelles composantes
  - Il permet le renforcement ou l'atténuation d'une ou plusieurs bandes de fréquences



Analyse/conception de filtres

Première situation rencontrée

• On connaît le filtre et on souhaite déterminer ses caractéristiques : type de filtrage réalisé, valeurs de fréquence de coupure

➔ **Analyse de filtres**

Exemple : *déterminer le type de filtrage (passe-bas, passe-haut, … ?) réalisé par l'équation suivante :*

$$y(k)=\frac{1}{2}e(k)+\frac{1}{2}e(k-1)$$

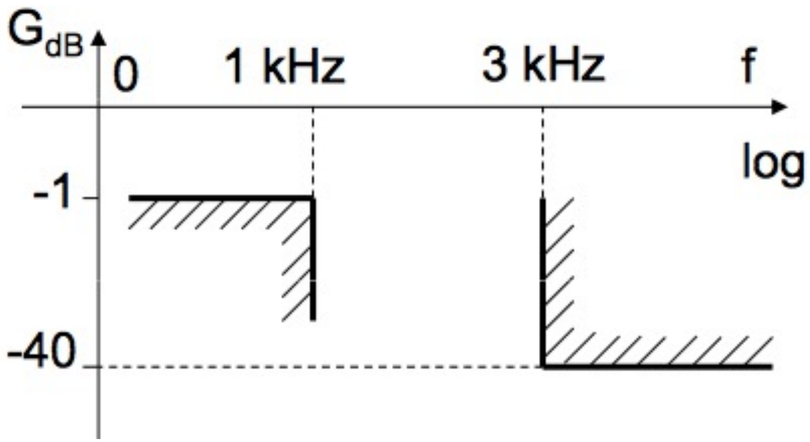
Analyse/conception de filtres

Deuxième situation rencontrée :

- On définit un cahier des charges (gabarit) précisant le type de filtrage à réaliser : valeurs des fréquences de coupure, etc et on souhaite déterminer le filtre : son ordre et son équation

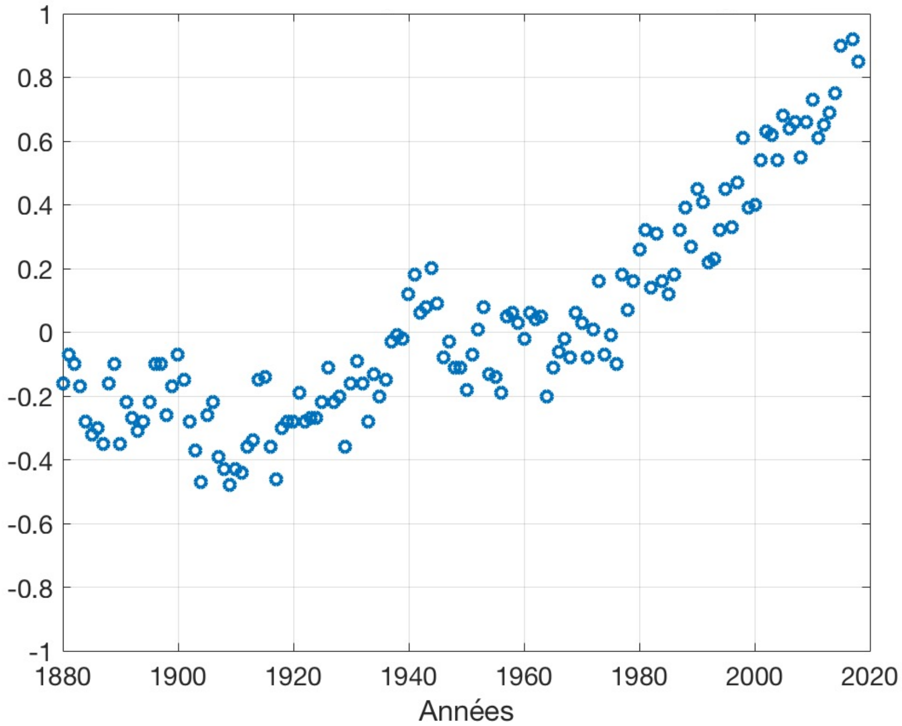
  ➔ **Conception de filtres**

- Exemple : *déterminer la fonction de transfert du filtre passe-bas qui satisfait au gabarit ci-dessous :*



Signal du jour

Anomalies de température : *écart entre la température mesurée en un lieu en degrés Celsius par rapport à la température moyenne normale calculée sur une période d'au moins 30 ans*



Comment faire mieux apparaître la tendance de l'évolution à moyen terme ?

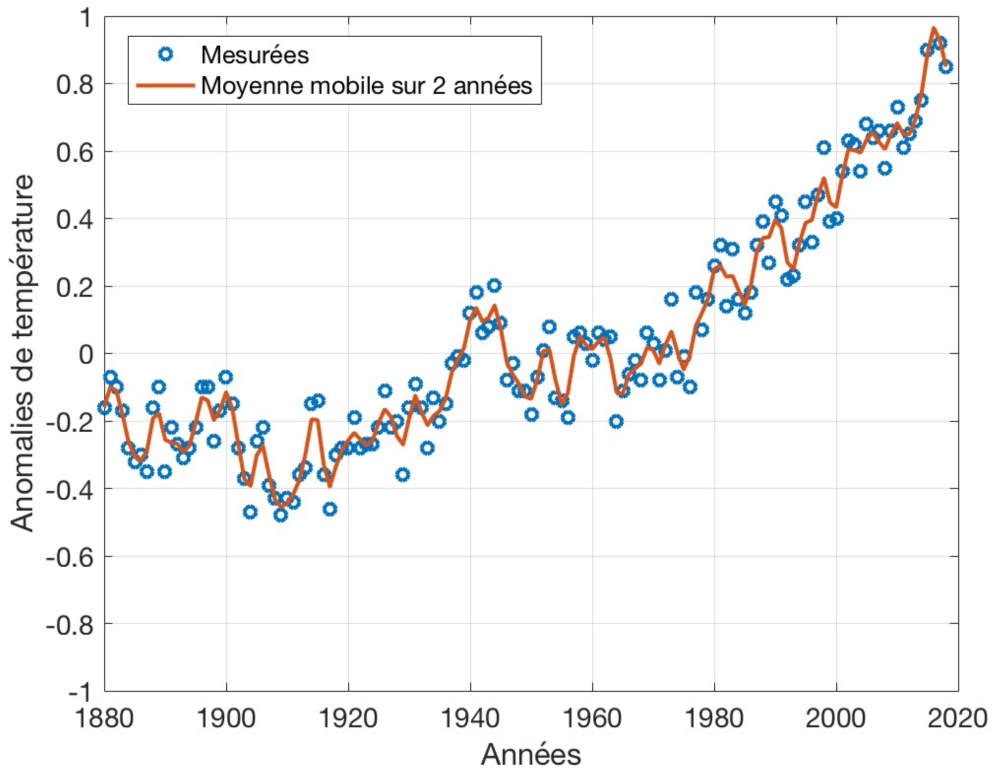
Source : GISTEMP Team, 2019: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP), version 4.
NASA Goddard Institute for Space Studies. Dataset accessed 2019-11-20 at https://data.giss.nasa.gov/gistemp/

Température moyenne normale calculée sur la période 1950-1981

Exemple d'application de filtrage : Lissage des anomalies de température

Premier lissage : calcul sur une fenêtre glissante de **2** échantillons de la valeur moyenne

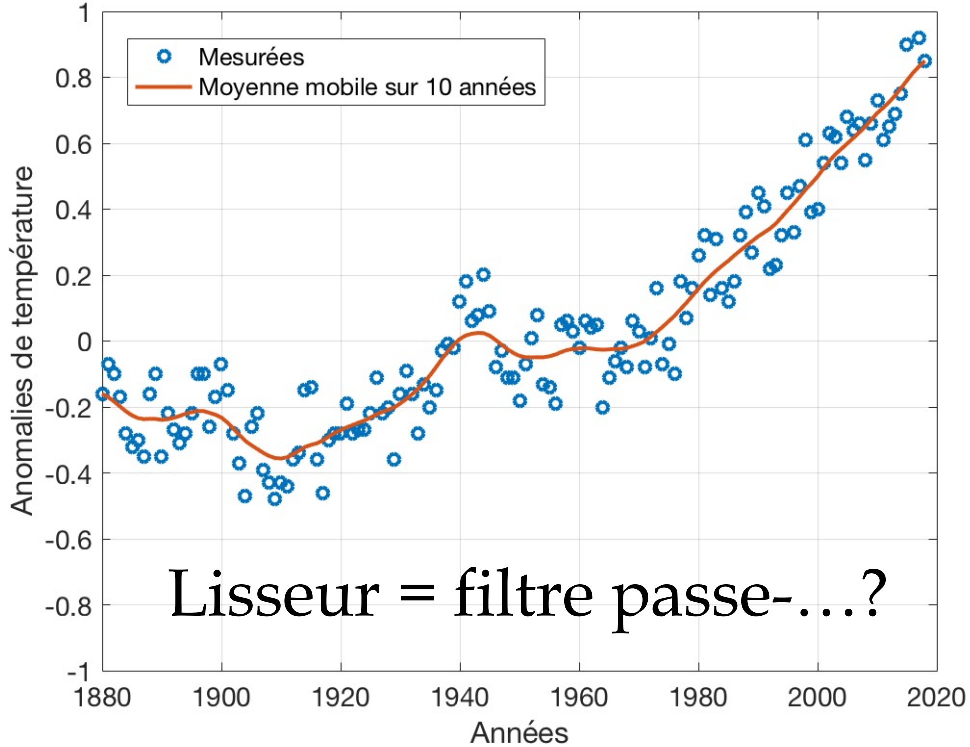
$$y(k) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1} e(k-m) = \frac{1}{2}\Big(e(k)+e(k-1)\Big)$$



Exemple d'application de filtrage : Lissage des anomalies de température

Deuxième lissage : calcul sur une fenêtre glissante de **10** échantillons de la valeur moyenne

$$y(k) = \frac{1}{10}\sum_{m=0}^{9} e(k-m)$$



Le réchauffement climatique semble s'accélérer clairement à partir de 1980

Forme récursive / non récursive d'un traitement numérique

$$e(k) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y(k)$$

Forme non récursive du calcul sur une fenêtre glissante de ***N*** échantillons de la moyenne d'un signal

$$y(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e(k-m)$$

$$y(k)=\mathcal{H}(e(k))$$

Forme récursive du calcul sur une fenêtre glissante de ***N*** échantillons de la valeur moyenne d'un signal

$$y(k) = \frac{1}{N}e(k) + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N-1} e(k-m) \quad + \frac{1}{N}e(k-N)}_{y(k-1)} - \frac{1}{N}e(k-N)$$

$$y(k-1) = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} e(k-m)$$

$$y(k) = y(k-1) + \frac{1}{N}e(k) - \frac{1}{N}e(k-N)$$

$$y(k)=\mathcal{H}(y(k\text{-}1),e(k),e(k\text{-}N))$$

Forme générale d'un traitement numérique

$$e(k) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y(k)$$

$$y(k)=\mathcal{H}(y(k-1), (y(k-2), \ldots, e(k), e(k-1), \ldots.)$$

$\mathcal{H}$ **:** est un ***filtre*** qui sera supposé dans la suite

- linéaire
- invariant dans le temps
- causal

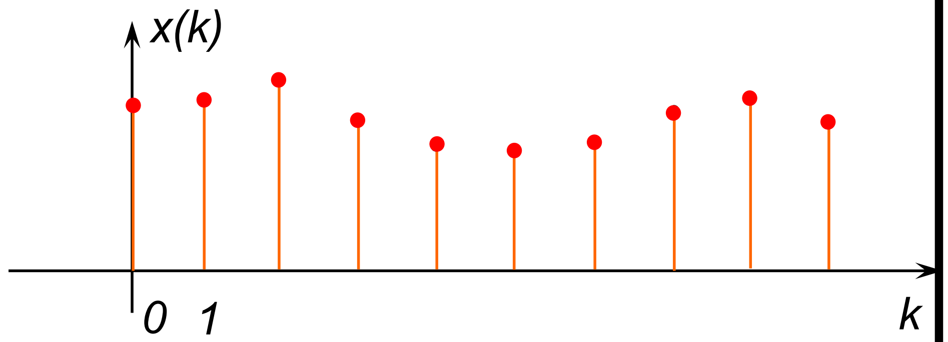
Outil d'analyse des caractéristiques d'un filtre numérique linéaire

- Un filtre numérique linéaire peut être décrit par :
  - une équation aux différences
  - un produit de convolution
  - sa fonction de transfert
  - sa réponse impulsionnelle
  - sa réponse fréquentielle
  - son diagramme des pôles et des zéros
- On le réalise par un ***programme informatique de calcul***
- ***L'outil mathématique*** exploité pour faciliter son analyse est la ***transformée en Z*** *(voir, si besoin, cours plus complet sur la transformée en Z dans la rubrique pré-requis du cours de TNS)*

Transformée en Z

- Soit un signal numérique *x(k)* causal. ***La transformée en Z*** est définie par :

$$Z\left(x(k)\right)=X\left(z\right)=\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k}$$



où

- z est la variable de la transformée en Z
- $z = r\,e^{j\theta} = \alpha + j\beta$

- On dit que *X(z)* est la transformée en Z du signal *x(k)*

Lien entre transformée de Fourier et transformée en Z

- La transformée en Z définie précédemment est en fait la transformée en Z monolatère

  Il existe en effet la transformée en Z bilatère définie par :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, z^{-k}$$

- Il existe une relation entre la transformée en Z bilatère et la transformée de Fourier d'un signal à temps discret :

$$X(f) = X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f T_e}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{-j2\pi f k T_e}$$

$$z = e^{j2\pi f T_e}$$

Lien entre transformée de Laplace et transformée en Z

Pour un signal échantillonné idéalement $x(kT_e)=x(k)$, la ***transformée de Laplace*** est donnée par :

$$X_e(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)e^{-ksT_e} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\left(e^{-sT_e}\right)^k$$

En posant $z=e^{sT_e}$

$$X(z) = Z\left(x_e(t)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k}$$

La ***transformée en Z*** peut donc ***être vue comme*** la ***transformée de Laplace*** appliquée à un signal échantillonné *(idéalement)* dans laquelle on a effectué le changement de variable :

$$z = e^{sT_e}$$

Propriétés de la transformée en Z
les plus importantes

- ***Linéarité***

$$Z\left(a\,x(k)+b\,y(k)\right)=a\,X(z)+bY(z)$$

- ***Retard temporel***

$$Z\left(x(k\text{-}i)\right)=z^{-i}X(z)+z^{-i+1}x(-1)+z^{-i+2}x(-2)+\cdots+x(-i)$$

$$Z\left(x(k\text{-}1)\right)=z^{-1}X(z)+x(\text{-}1)$$

$$Z\left(x(k\text{-}2)\right)=z^{-2}X(z)+z^{-1}x(\text{-}1)+x(\text{-}2)$$

- ***Produit de convolution***

$$Z\left(x(k)*y(k)\right)=X(z)\times Y(z)$$

Table de Transformées en z

$x(k)$	$X(z)$
$\delta(k)$	1
$u(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$ku(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$a^k u(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$\sin(\Omega_o k)u(k)$	$\dfrac{z\sin(\Omega_o)}{z^2-2\cos(\Omega_o)z+1}$
$\cos(\Omega_o k)u(k)$	$\dfrac{z\left(z-\cos(\Omega_o)\right)}{z^2-2\cos(\Omega_o)z+1}$

Equation aux différences

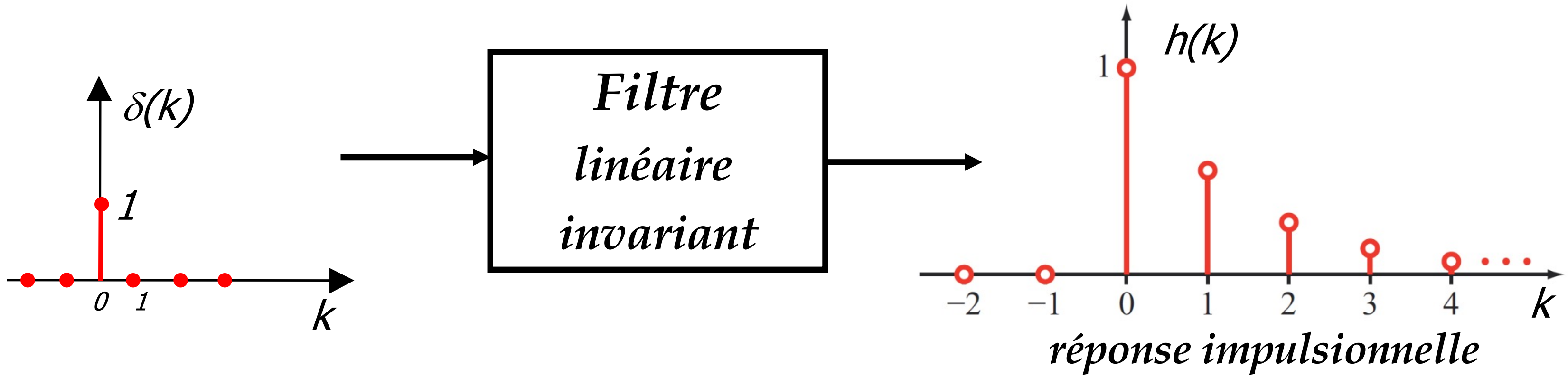
- Un filtre ***numérique*** linéaire invariant dans le temps possédant une entrée $e(k)$ et une sortie $y(k)$ peut être décrit par une ***équation aux différences*** *(ou équation de récurrence)* à coefficients constants :

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_N\, y(k-N) = b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \ldots + b_M\, e(k-M)$$

  – N est l'ordre du filtre

Réponse impulsionnelle

- Un filtre numérique peut être caractérisé par sa ***réponse impulsionnelle*** *h(k)*
- Elle correspond à la réponse obtenue lorsqu'on envoie en entrée une impulsion de Kronecker $\delta(k)$



- Si $h(k)=0$ pour $k<0$, le filtre est dit ***causal***

Produit de convolution

- La réponse impulsionnelle $h(k)$ permet de calculer la sortie du filtre $y(k)$ à toute entrée $e(k)$ via le ***produit de convolution discret***

$$y(k) = h(k) * e(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)\, e(k-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(k-m)\, e(m)$$

- Si le filtre est causal : $h(k)=0$ pour tout $k < 0$

$$y(k) = h(k) * e(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)\, e(k-m)$$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE POLYTECH NANCY

Fonction de transfert en Z

- Soit l'équation aux différences d'un filtre :

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_N y(k-N) = b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \ldots + b_M e(k-M)$$

En appliquant la transformée en Z et en utilisant la propriété :

$Z\left(x(k\text{-}i)\right) = z^{-i} X(z)$ **en supposant les conditions initiales (CI) nulles**

$$\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}\right) Y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}\right) E(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$ **en supposant les CI nulles**

- C'est aussi la transformée en Z de la réponse impulsionnelle

$$H(z) = Z(h(k))$$

$$y(k) = h(k) * e(k)$$

$$Y(z) = Z(h(k) * e(k)) = H(z) \times E(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)}$$

Université de Lorraine — Polytech Nancy

Fonction de transfert en Z
-
Exemple

$$s(n) - 0.8s(n-1) = 0.2e(n)$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = ?$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,2}{1-0,8z^{-1}} = \frac{0,2z}{z-0,8}$$

Lien entre fonction de transfert et équation aux différences

Soit la fonction de transfert d'un filtre numérique $H(z) = \dfrac{0,2z}{z-0,8}$

Déterminer l'équation aux différences du filtre

On exprime $H(z)$ en puissance négative de z $H(z) = \dfrac{0,2z}{z-0,8} \times \dfrac{z^{-1}}{z^{-1}} = \dfrac{0,2}{1-0,8z^{-1}}$

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{0,2}{1-0,8z^{-1}}$$ car par définition $H(z) = \dfrac{Y(z)}{E(z)}$

$$(1-0,8z^{-1})Y(z) = 0,2E(z)$$

$$Y(z) - 0,8z^{-1}Y(z) = 0,2E(z)$$

$$y(k) - 0,8y(k-1) = 0,2e(k)$$ car $Z^{-1}\left(z^{-i}\,Y(z)\right) = y(k-i)$ ici $i = 1$

Diagramme des pôles/zéros

- Soit une fonction de transfert

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=C\frac{\prod_{j=1}^{M}\left(z-z_j\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(z-p_i\right)}$$

- Définitions

Zéros $\mathbf{z_j}$ sont les racines du numérateur $B(z)=0$

Pôles $\mathbf{p_i}$ sont les racines du dénominateur $A(z)=0$

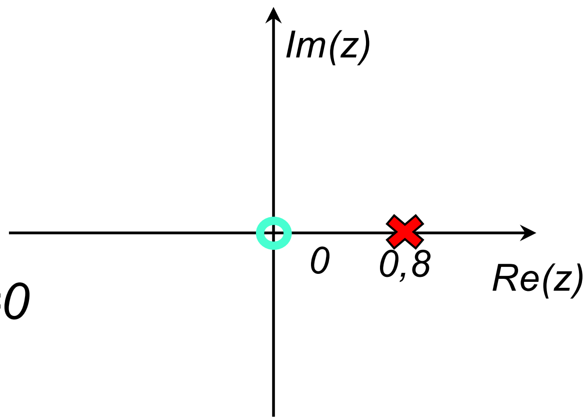


Diagramme des pôles/zéros

- Exemple

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{0,2}{1-0,8z^{-1}}=\frac{0,2z}{z-0,8}$$

Toujours écrire* H(z) *en puissance positive de z pour déterminer les pôles/zéros

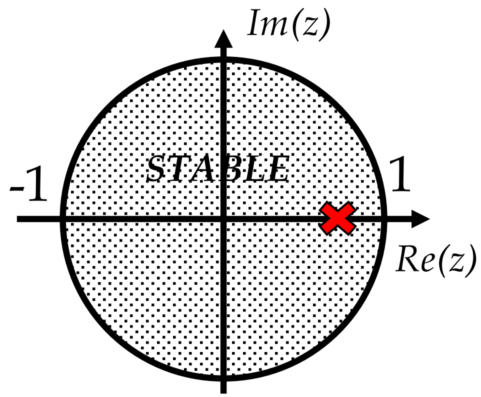
Stabilité d'un filtre numérique

- Si on connaît la fonction de transfert du filtre numérique

$$H(z) = C\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)}$$

Le filtre numérique est stable si tous ses pôles p_i ont un module inférieur à 1, c'est à dire s'ils sont ***situés à l'intérieur du cercle unité***

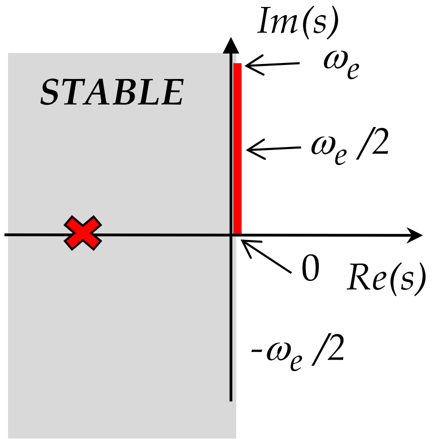
$$|p_i| < 1$$



Exemple $H(z) = \dfrac{0,2z}{z-0,8}$

Conditions de stabilité
filtres analogiques/filtres numériques

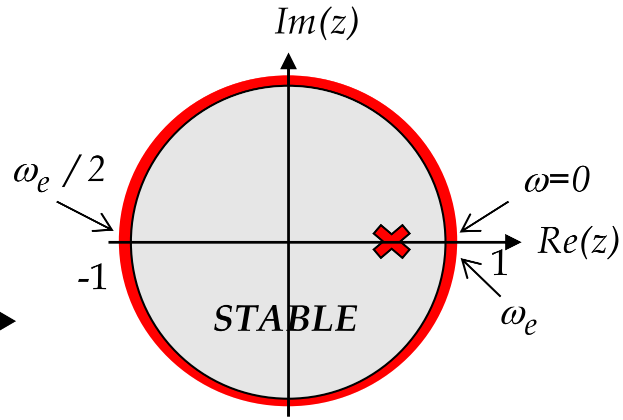
Filtres analogiques



$$Re(\text{tous les pôles}) < 0$$

$$\begin{cases} s = j\omega \\ z = e^{sT_e} \end{cases}$$

Filtres numériques



$$|\text{tous les pôles}| < 1$$

module

Réponse d'un filtre à un signal sinusoïdal

- On envoie un signal sinusoïdal de fréquence f_0

$$e(k) = E\sin\left(2\pi f_0 k\right)$$

dans un filtre linéaire de réponse fréquentielle

$$H(f) = \left|H(f)\right| e^{j\varphi(f)}$$

- La sortie en régime permanent s'écrit :

$$y(k) = E\left|H(f_0)\right|\sin\left(2\pi f_0 k + \varphi(f_0)\right)$$

C'est un signal sinusoïdal de *même fréquence* f_0 que l'entrée, MAIS avec une amplitude et une phase différentes (qui dépendent de $H(f_0)$) ***(propriété des filtres linéaires)***

Réponse fréquentielle d'un filtre

- C'est la TFtd de la réponse impulsionnelle *h(k)*

$$H(f) = TFtd(h(k))$$

$$y(k) = h(k) * e(k)$$

$$Y(f) = \mathcal{F}(h(k) * e(k)) = H(f) \times E(f)$$

- Si on connaît *H(z)*

$$\left.\begin{array}{l} z = e^{sT_e} \\ s = j\omega = j2\pi f \end{array}\right\} z = e^{j2\pi f T_e}$$

$$H(f) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi f T_e}}$$

- Permet d'en déduire la réponse fréquentielle en amplitude et en phase

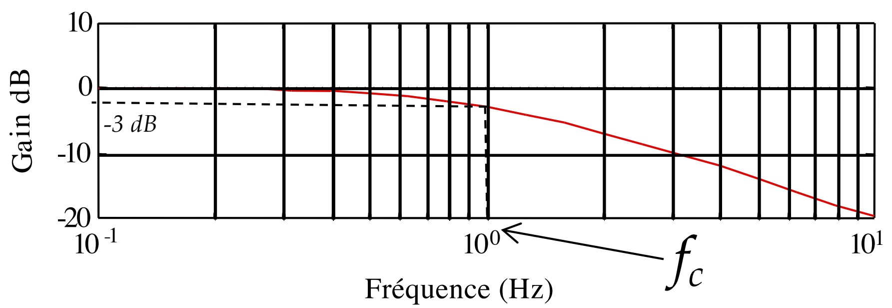
$$H(f) = |H(f)|e^{j\varphi(f)} \qquad |H(f)| = \left|\frac{Y(f)}{E(f)}\right| \qquad \varphi(f) = Arg(H(f))$$

- Caractéristiques
  - Réponses fréquentielles ***périodiques de « période » f_e***
  - ***L'analyse et le tracé se <u>limitent à la plage de fréquences</u> [0 ; f_e /2]***
  - ***Pas de pentes particulières au niveau du diagramme de Bode***

Fréquence de coupure *(rappel)*

- La fréquence de coupure est la fréquence à partir de laquelle le filtre commence à agir de façon significative sur le signal d'entrée
- C'est la fréquence pour laquelle le signal d'entrée subit une atténuation d'amplitude de 0,707 ou de -3 dB *(valeur pour laquelle l'oreille est capable de discerner une différence)*

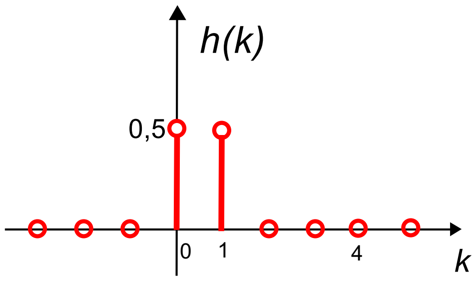
$$|H(f_c)| = \frac{|H(f)|}{\sqrt{2}} \qquad ou \qquad H_{dB}(f_c) = H_{dB}(f) - 3dB$$



Il existe 2 types de filtres numériques

- **Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (filtres RIF)**

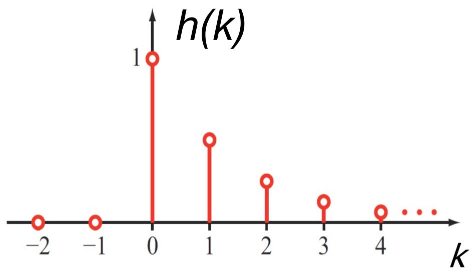
$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{M-i}}{z^M}$$



$$y(k)=b_0 e(k)+\ldots+b_M e(k-M)$$

- **Filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (filtres RII)**

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$$



$$y(k)=-a_1 y(k-1)+\ldots-a_N y(k-N)+b_0 e(k)+b_1 e(k-1)+\ldots+b_M e(k-M)$$

Filtres RIF ou filtres non récursifs
Caractéristiques principales

- ***Equation de récurrence*** *($y(k)$ ne dépend que de l'entrée)*

$$y(k)=\sum_{i=0}^{M} h_i e(k-i)=h_0 e(k)+\ldots+h_M e(k-M)$$

- ***Fonction de transfert***

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} h_i z^{-i}}{1}=\frac{\sum_{i=0}^{M} h_i z^{M-i}}{z^M}$$

  - M : **ordre** du filtre
  - Un filtre RIF d'ordre M possède $\boldsymbol{N=M+1}$ coefficients ($b_i=h_i$)

- ***Stabilité***
  - pôles : tous en $p_i=0$ => pôles à l'intérieur du cercle unité
    - filtres **RIF toujours stables**

Réponse fréquentielle d'un filtre RIF

- Fonction de transfert

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} h(k) z^{-k}$$

- Réponse fréquentielle

$$\begin{cases} s = j2\pi f \\ z = e^{sT_e} \end{cases} \qquad z = e^{j2\pi f T_e} = e^{j2\pi \frac{f}{f_e}} \qquad \boxed{H(f) = \sum_{k=0}^{M} h(k)\, e^{-j2\pi k \frac{f}{f_e}}}$$

- Tracé de *H(f)* et *Arg(H(f))*
  - Filtres RIF à ***phase linéaire*** *(dans la bande passante)*
  - Réponses ***périodiques de « période » f_e***
  - Zone utile d'analyse du filtrage : $[0; f_e / 2]$

Caractéristique de la réponse fréquentielle en phase d'un filtre RIF

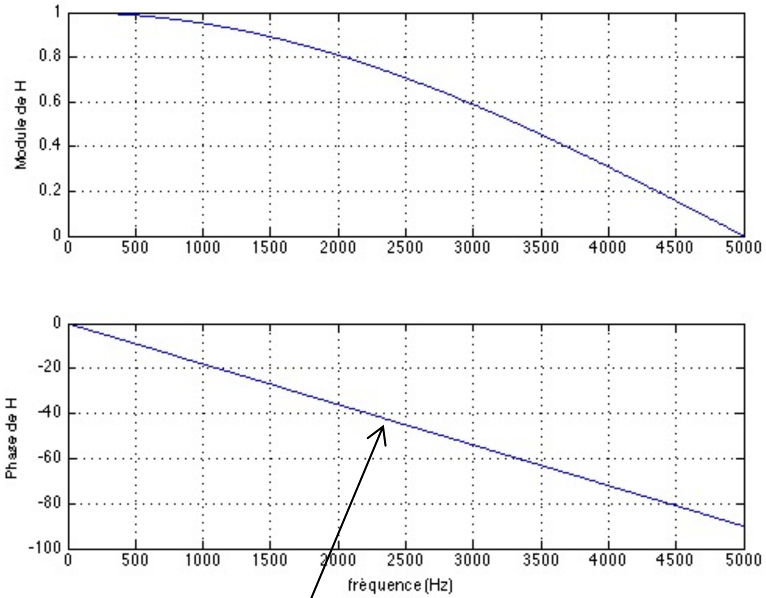
- La phase est linéaire *(on parle de filtres à phase linéaire)*

$$\varphi(f) = Arg\big(H(f)\big) = \left| \begin{array}{c} -\alpha f \\ -\alpha f + \beta \end{array} \right.$$

$$\tau_\varphi = \frac{\varphi(f)}{2\pi f} = cste$$

Les composantes fréquentielles de l'entrée sont toutes retardées de la même valeur

- Important dans de nombreuses applications
  - Transmission de données ou de vidéo



La phase est linéaire

Exemple
Analyse d'un filtre RIF d'ordre 1

Soit le filtre RIF d'ordre 1 décrit par :

$$y(k)=\frac{1}{2}e(k)+\frac{1}{2}e(k-1)$$

Déterminer :

a) la fonction de transfert en z

b) la réponse impulsionnelle

c) le diagramme des pôles et des zéros. Conclure sur la stabilité

d) la réponse fréquentielle en amplitude et en phase

e) En déduire le type du filtrage réalisé

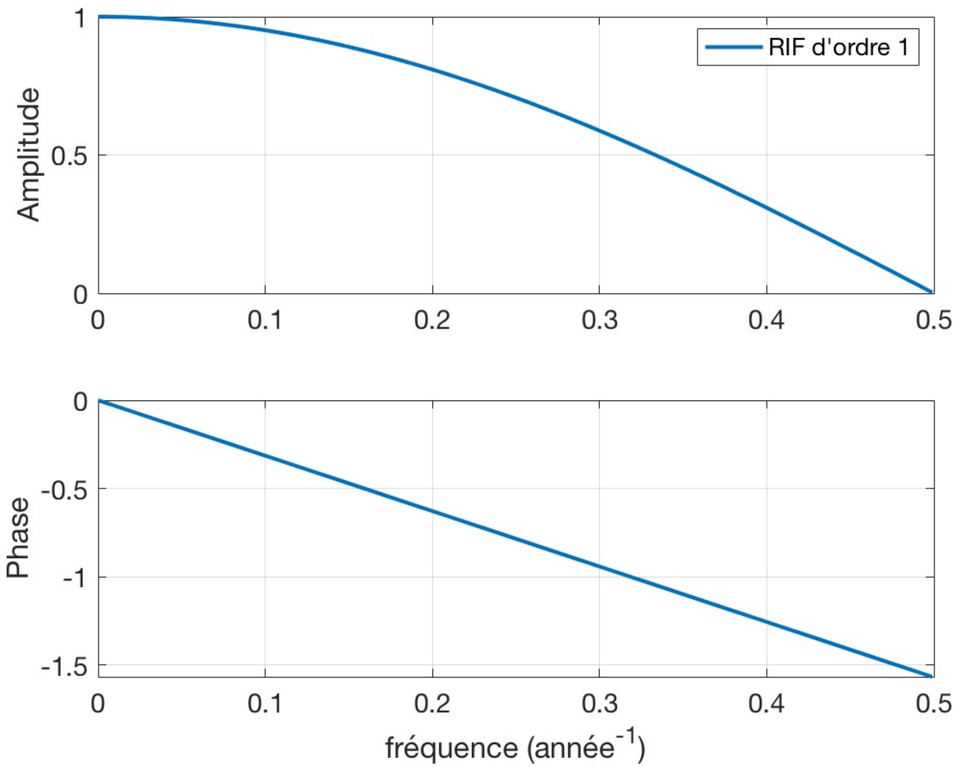
f) Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure

Réponse fréquentielle d'un filtre RIF passe-bas d'ordre 1

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1}$$

Sous Matlab :

```
B=[0.5 0.5];
A=[1 0];
fe=1; % Te=1 année
[H,f]=freqz(B,A,512,fe);
subplot(2,1,1)
plot(f,abs(H)),grid
subplot(2,1,2)
plot(f,angle(H)),grid
xlabel('fréquence (année^{-1})')
```



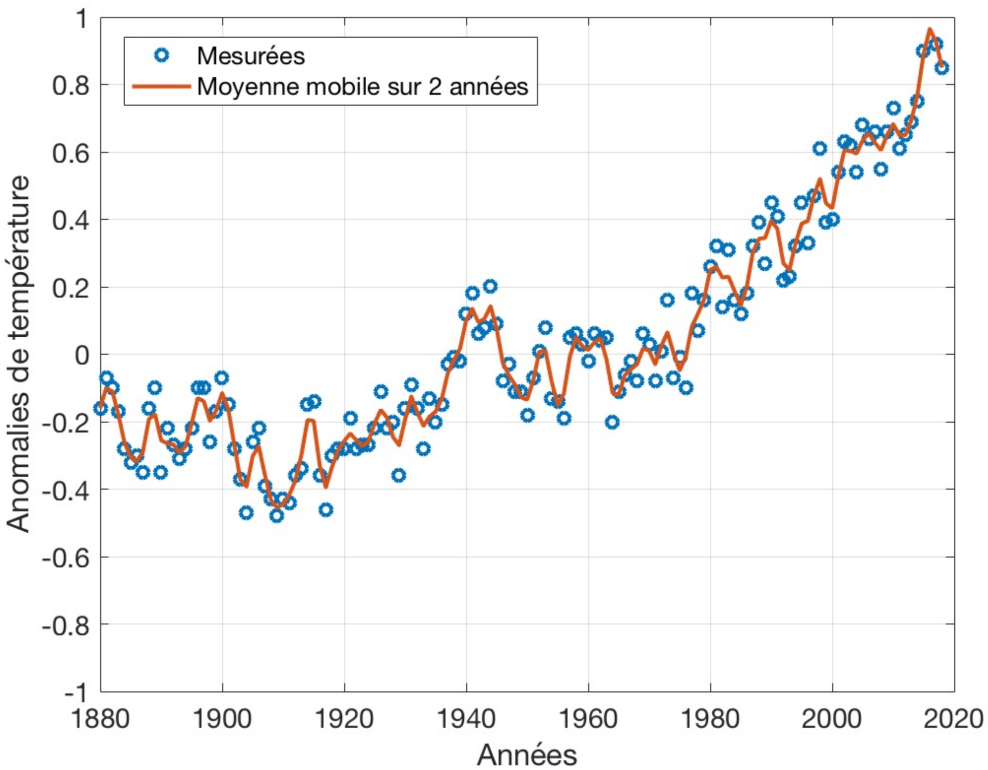
Voir aussi l'interface graphique ***filterDesigner***

Filtrage RIF d'ordre 1 des anomalies de température

Lissage : calcul sur une fenêtre glissante de 2 échantillons de la valeur moyenne

= filtrage RIF d'ordre 1

$$y(k) = \frac{1}{2}e(k) + \frac{1}{2}e(k-1)$$

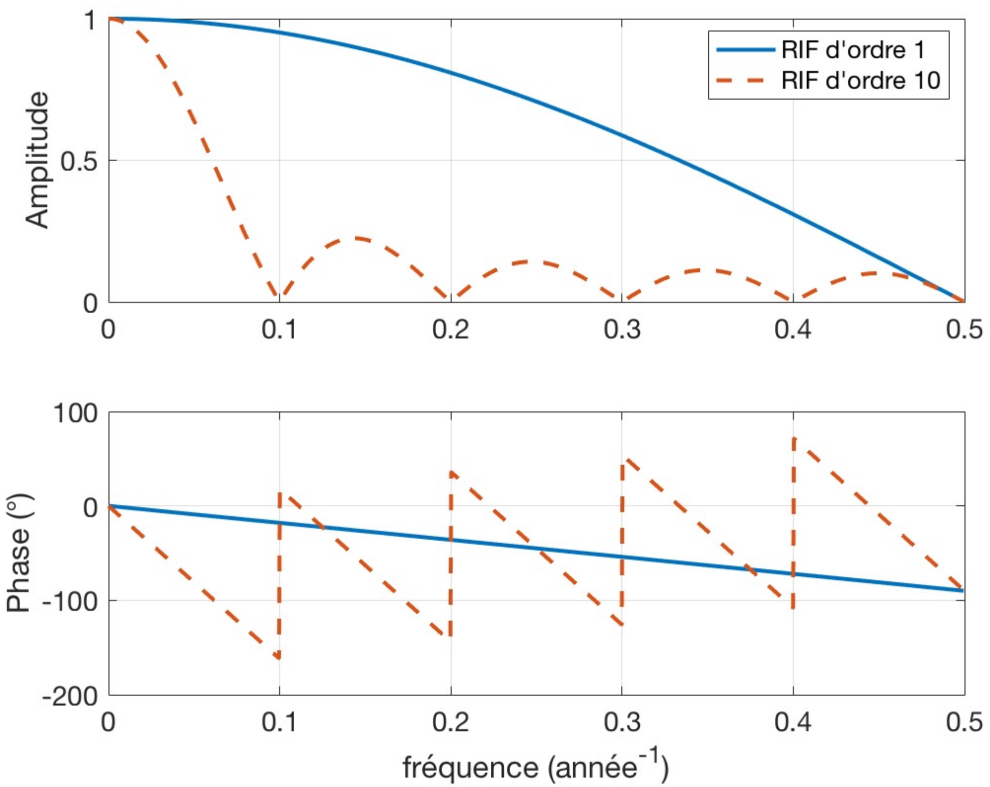


Réponse fréquentielle d'un filtre RIF passe-bas d'ordre 10

$$H(z) = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} z^{-k}$$

Sous Matlab :

```
N=10;
B=1/N*ones(1,N);
A=1;
fe=1; % Te=1 année
[H,f]=freqz(B,A,512,fe);
subplot(2,1,1)
plot(f,abs(H)),grid
subplot(2,1,2)
plot(f,angle(H)),grid
xlabel('fréquence (année^{-1})')
```



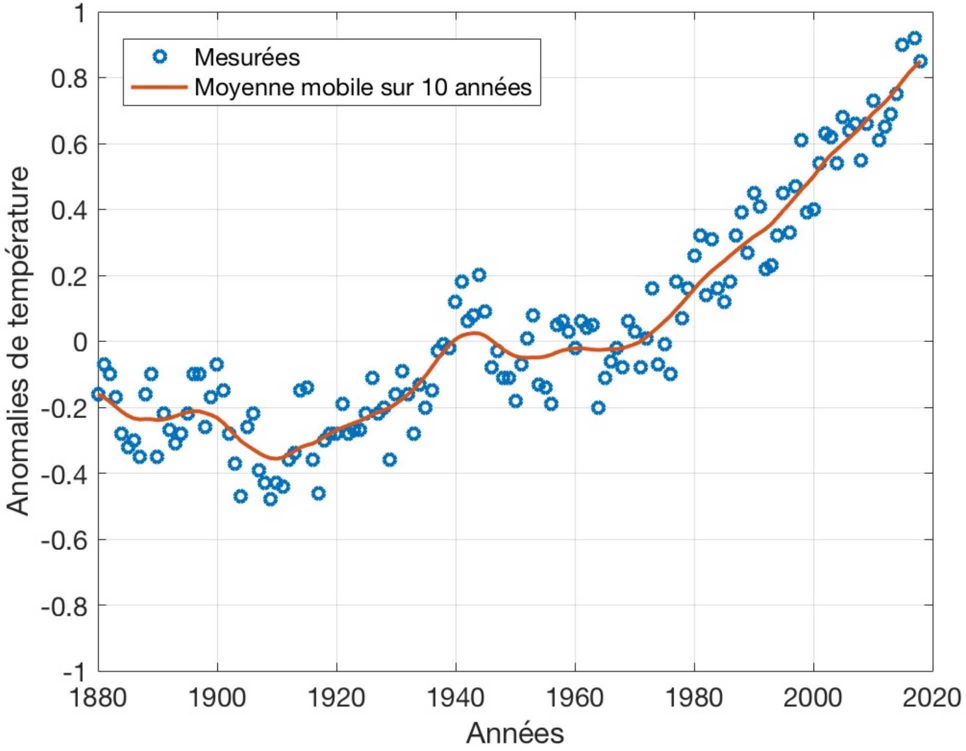
Voir aussi l'interface graphique ***filterDesigner***

Filtrage RIF d'ordre 10
des anomalies de température

Lissage : calcul sur une fenêtre glissante de **10** échantillons de la valeur moyenne

= filtrage RIF d'ordre 10

$$y(k) = \frac{1}{10} \sum_{m=0}^{9} e(k-m)$$



Filtres RII ou filtres récursifs
Caractéristiques principales

- ***Equation de récurrence*** *(y(k) dépend de l'entrée* ***et*** *des sorties passées)*

$$y(k)=\sum_{i=0}^{+\infty}h(k)e(k-i)=-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\,y(k-i)+\sum_{i=0}^{M}b_ie(k-i)$$

$$y(k)=-a_1y(k-1)+\ldots-a_Ny(k-N)+b_0e(k)+b_1e(k-1)+\ldots+b_Me(k-M)$$

- ***Fonction de transfert***

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_iz^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{N}a_jz^{-j}}=C\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_N)}$$

N : ordre du filtre

- ***Stabilité***

Présence de pôles => vérifier la stabilité $|p_i|<1$

Filtres RII du 1er et 2nd ordre

- Filtres purement récursifs du 1er ordre

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_0 e(k)$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z}{z + a_1}$$

Pôle : $p_1 = -a_1$

Stable si $|p_1| = |a_1| < 1$

- Filtres purement récursifs du 2nd ordre

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 e(k)$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{b_0 z^2}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Stable si $|p_1| < 1$ et $|p_2| < 1$

Réponse fréquentielle
Filtre RII du 1er ordre

- Fonction de transfert

$$H(z)=\frac{b_0}{1+a_1 z^{-1}}$$

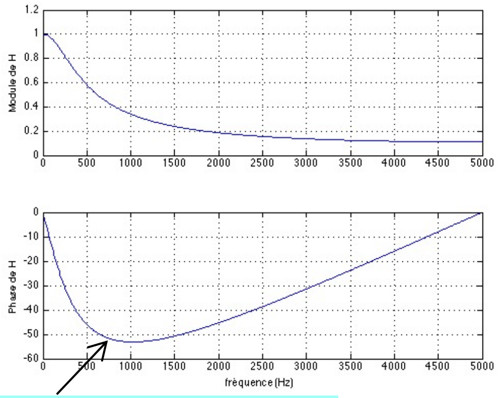
- Réponse fréquentielle $\quad z=e^{j2\pi\frac{f}{f_e}}$

$$H(f)=\frac{b_0}{1+a_1 e^{-j2\pi\frac{f}{f_e}}}=\frac{b_0}{1+a_1\cos\left(2\pi\frac{f}{f_e}\right)-ja_1\sin\left(2\pi\frac{f}{f_e}\right)}$$

- Tracé du module et de la phase en fonction de *f*

  - Zone utile d'analyse du filtrage : $[0, f_e/2]$
  - Pas de phase linéaire
  - Utilisation d'un logiciel (*Matlab par exemple*) pour tracer la réponse fréquentielle

$b_0=0.2 \quad a_1=-0.8$



La phase n'est pas linéaire

Exemple
Analyse d'un filtre RII d'ordre 1

Soit le filtre numérique décrit par l'équation de récurrence :

$$y(k) = \frac{4}{5} y(k-1) + \frac{1}{5} e(k)$$

Déterminer :

a) la fonction de transfert en z

b) la réponse impulsionnelle

c) le diagramme des pôles et des zéros. Conclure sur la stabilité

d) la réponse fréquentielle en amplitude et en phase

e) En déduire le type de filtrage réalisé

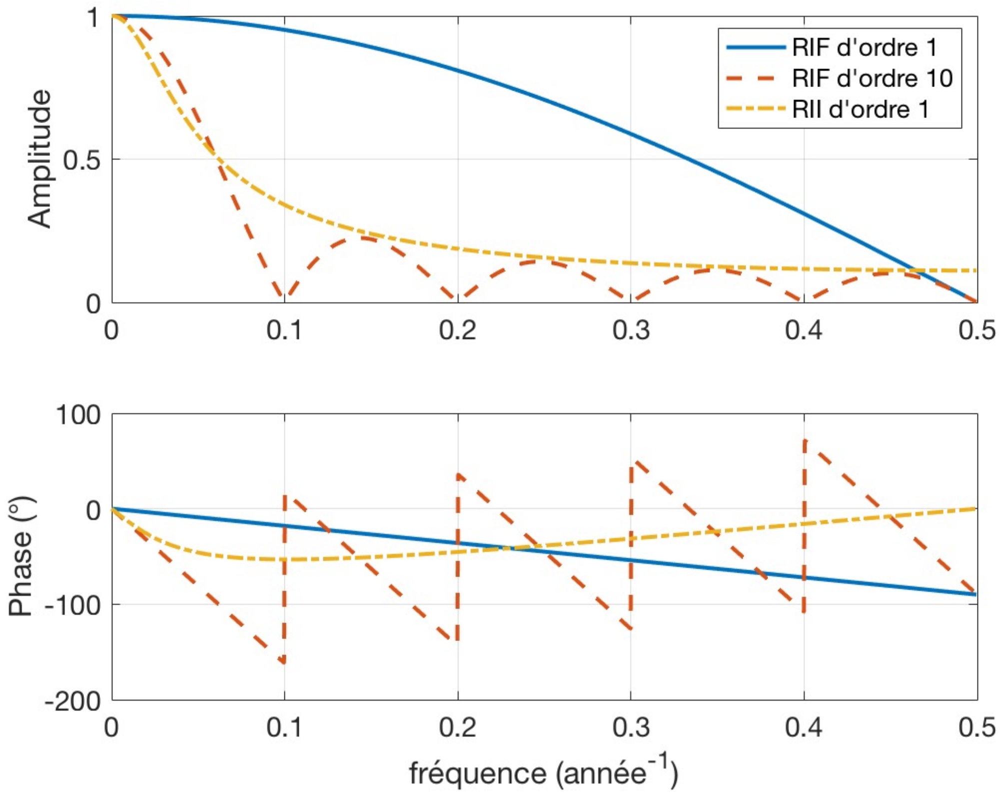
f) Préciser la (ou les) fréquence(s) de coupure

Réponse fréquentielle d'un filtre RII passe-bas d'ordre 1

$$H(z) = \frac{1/5}{1 - 4/5z^{-1}}$$

Sous Matlab :

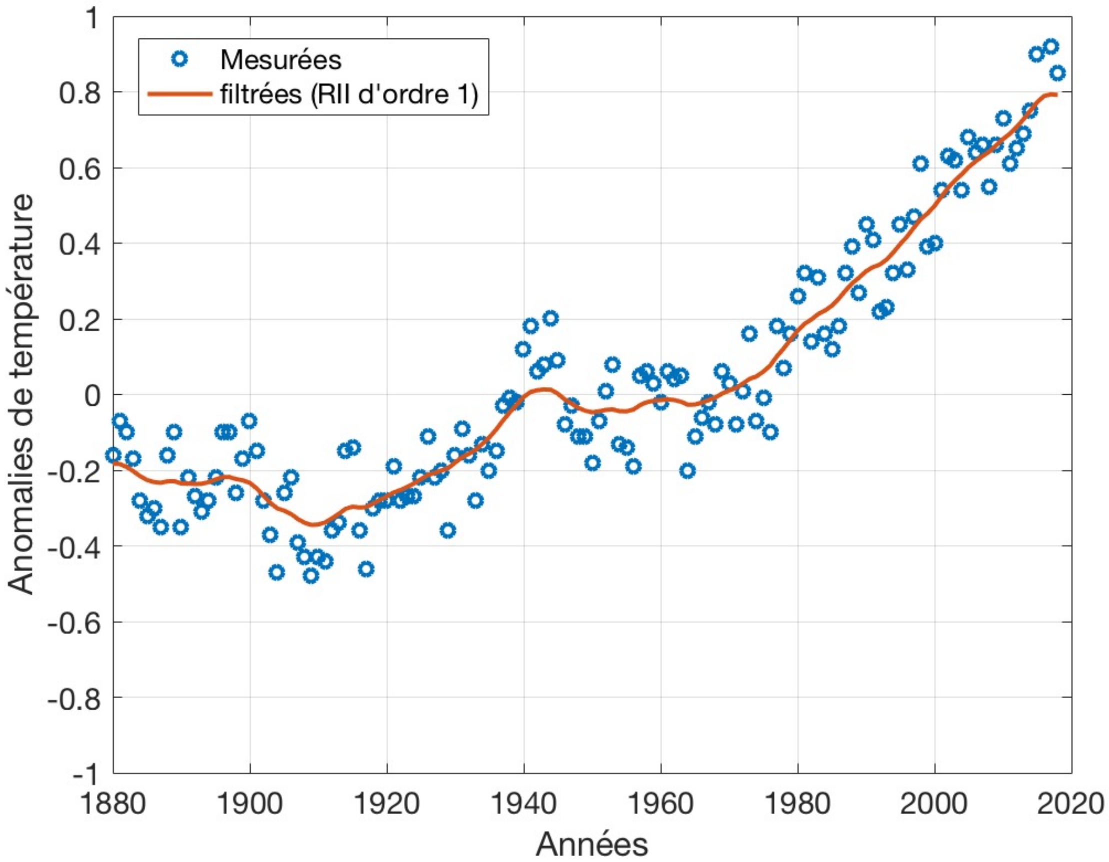
```
B=1/5;
A=[1 -4/5];
fe=1;
[H,f]=freqz(B,A,512,fe);
subplot(2,1,1)
plot(f,abs(H)),grid
subplot(2,1,2)
plot(f,angle(H)),grid
xlabel('Fréquence (année^{-1})')
```



Voir aussi l'interface graphique ***filterDesigner***

Filtrage RII d'ordre 1 des anomalies de température

$$y(k) = \frac{4}{5}\,y(k-1) + \frac{1}{5}\,e(k)$$



Analyse d'un filtre numérique
En résumé !

Produit de convolution

$$y(k) = h(k) * e(k)$$

Equation aux différences

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_0 e(k)$$

Z $\quad Z^{-1}$

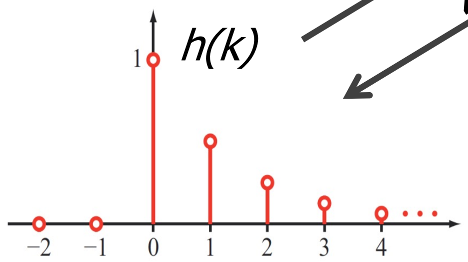
Fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)}$$

Z $\quad Z^{-1}$

Z $\quad Z^{-1}$

$z = e^{j2\pi f/fe}$



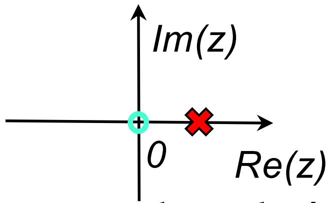
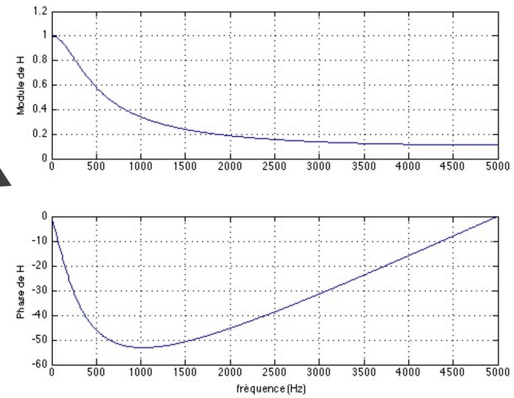


Diagramme des pôles/zéros



$$H(f) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi\frac{f}{f_e}}} = |H(f)|e^{j\varphi(f)}$$

Réponse impulsionnelle
h(k)

TFtd $\rightarrow$

$\leftarrow$ TFtd^{-1}

Réponse fréquentielle
H(f)