Analyse de Fourier en pratique

Hugues GARNIER

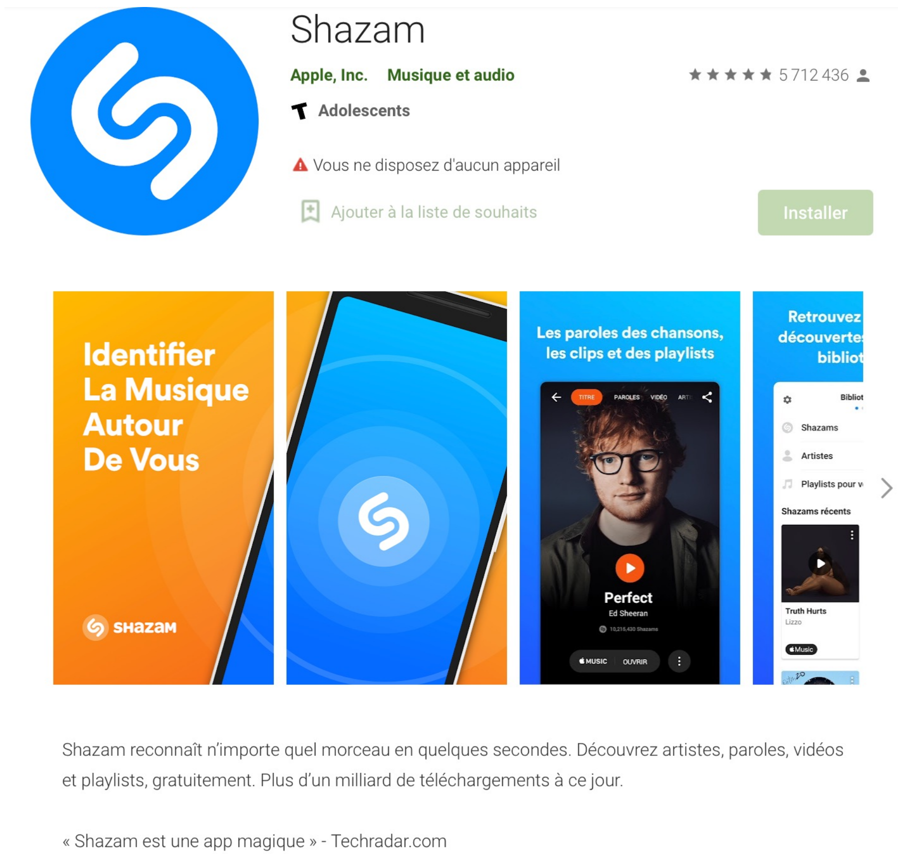
hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Le morceau de musique du jour

Testez-vous !

15 s maximum pour trouver le titre et le groupe de ce morceau de musique

L'application du jour

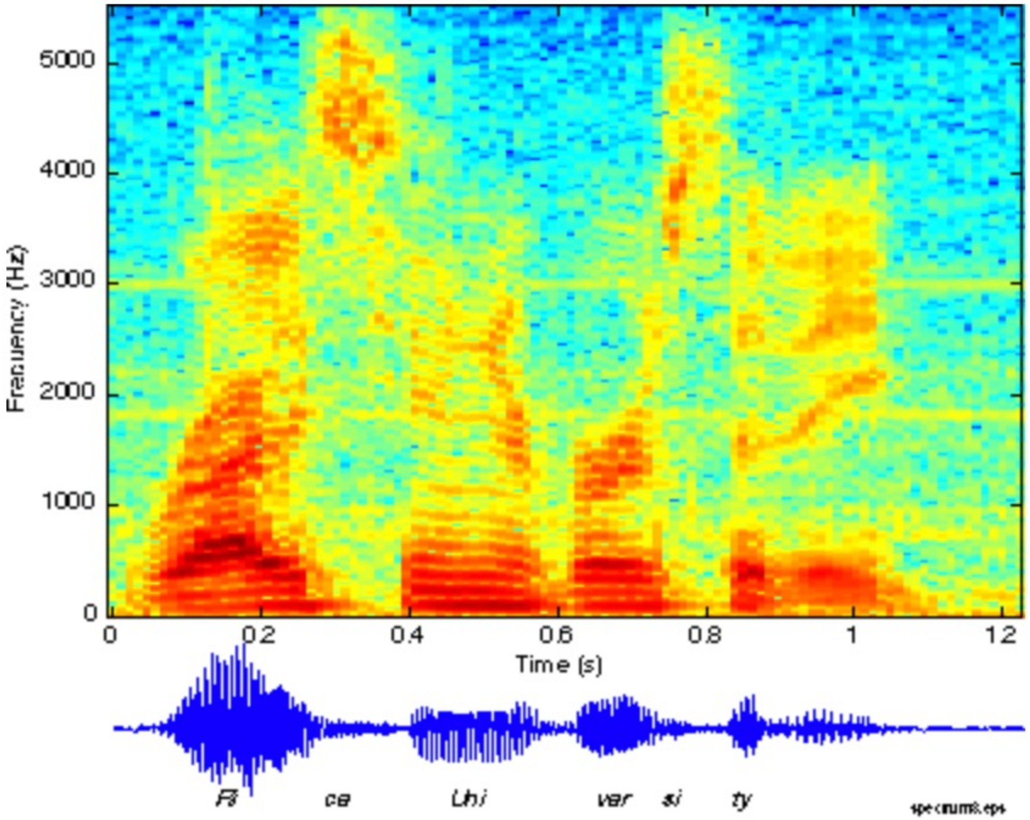


Le succès planétaire de l'application mobile ***Shazam*** a montré que la reconnaissance musicale par une machine était possible

Quel rapport avec Fourier ?
Comment ça marche ?

Le spectro…gramme du jour

Celui d'un morceau de musique



Le spectrogramme permet de visualiser la variation au cours du temps des principales composantes fréquentielles de l'enregistrement musical

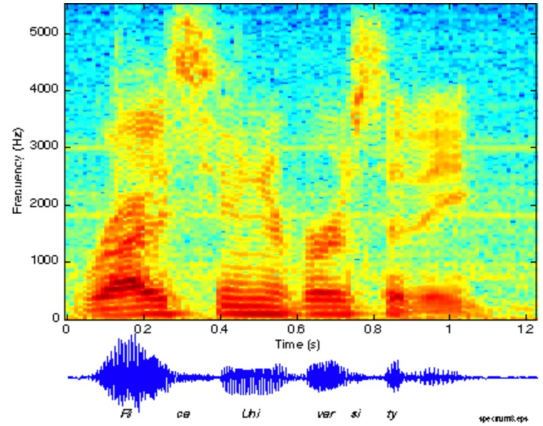
Shazam utilise le spectrogramme calculé par FFT pour identifier le morceau de musique

Merci Fourier !

Spectrogramme d'un morceau de musique

La transformée de Fourier est un formidable outil d'analyse des signaux musicaux !
Elle permet d'obtenir une représentation temps-fréquence d'un enregistrement musical, appelée spectrogramme.
Il est généré par FFT calculée sur des segments successifs du signal

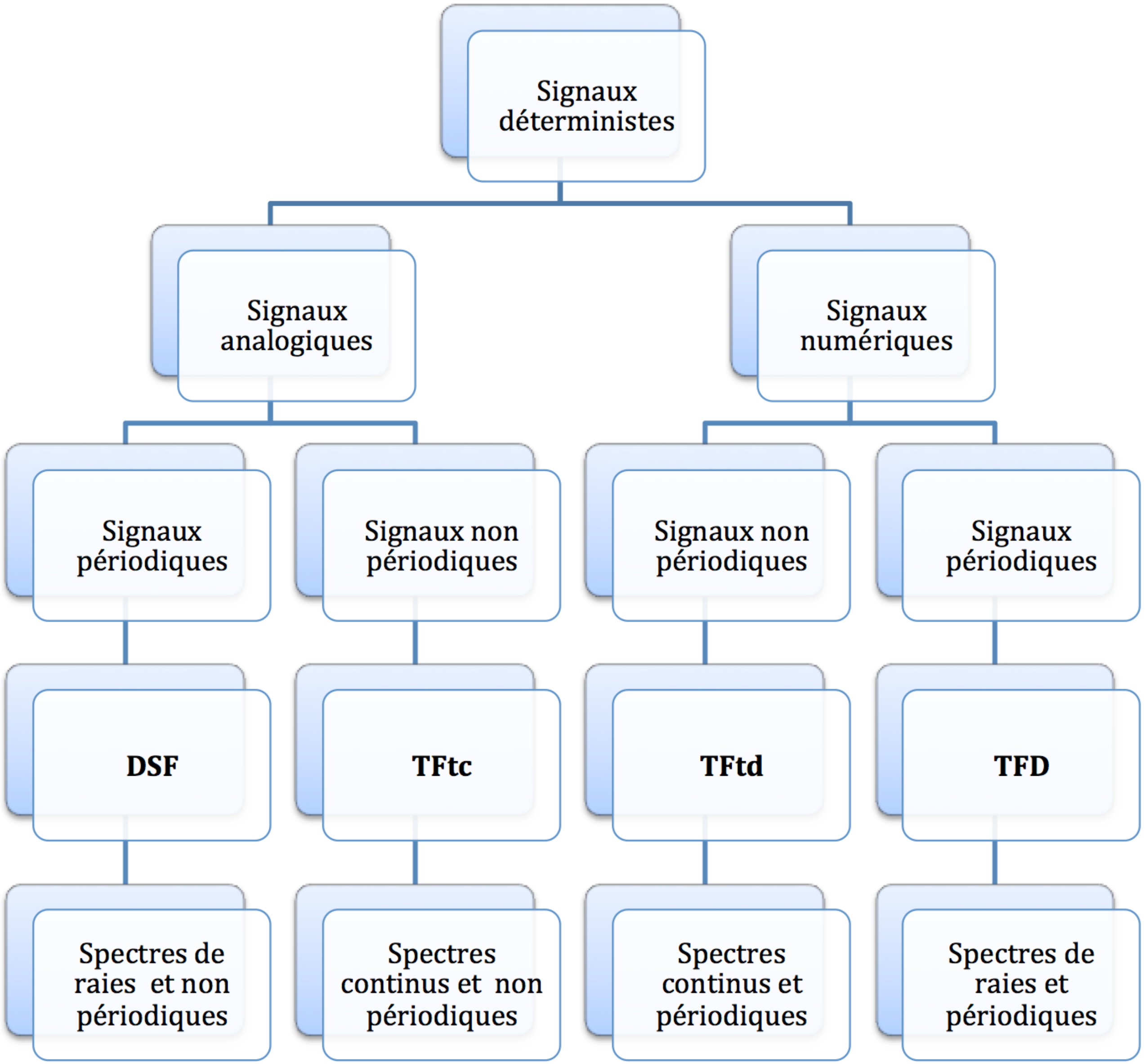
- ***Voir chapitre suivant « Fourier en pratique »***



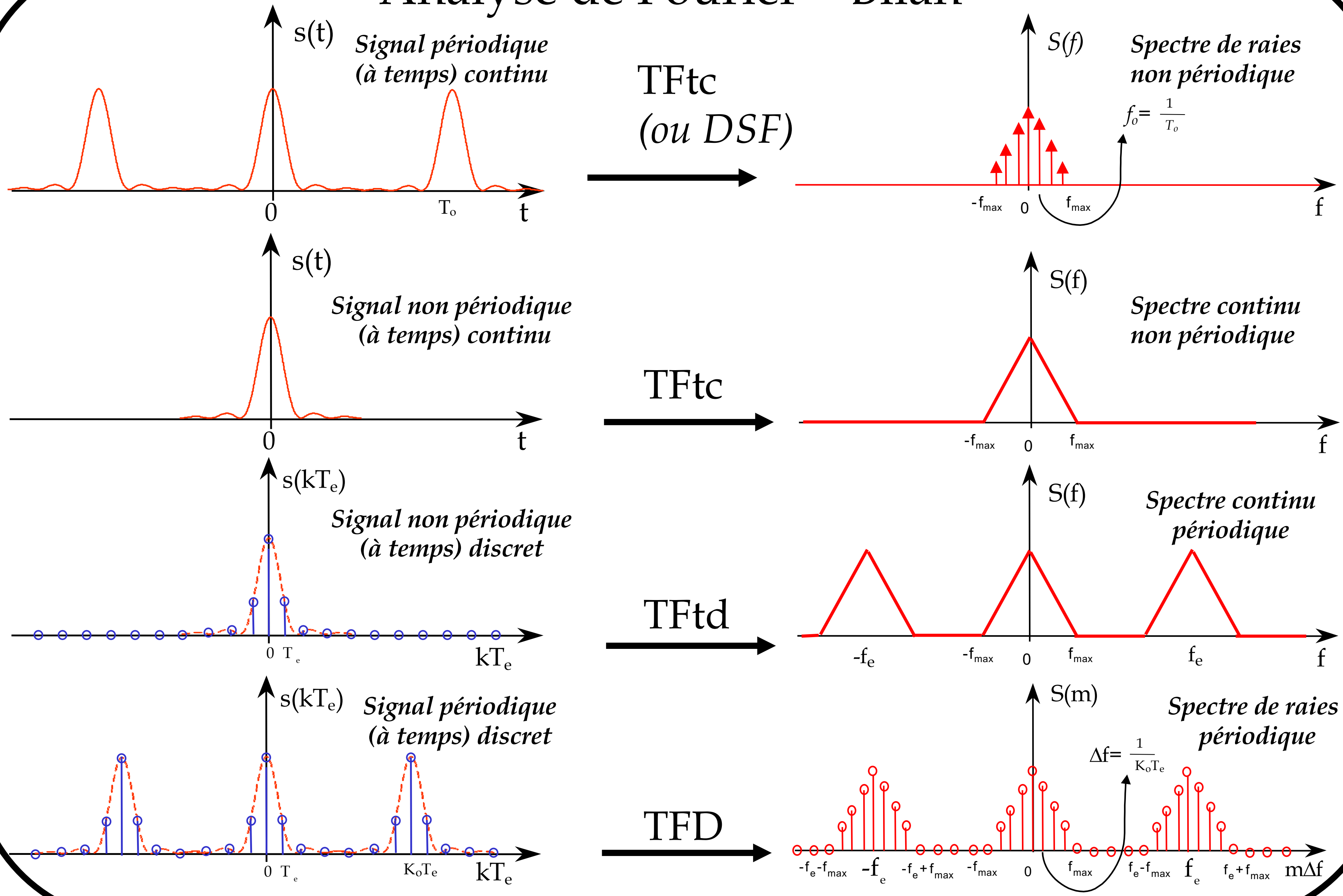
Le spectrogramme constitue une représentation caractéristique d'un enregistrement musical.
Il est alors possible d'extraire à partir de cette représentation une « signature » du morceau de musique
Il suffit ensuite de comparer la signature du morceau inconnu à l'ensemble des signatures préalablement calculées et stockées dans une base de données

- https://interstices.info/de-fourier-a-la-reconnaissance-musicale/

Analyse de Fourier de signaux déterministes



Analyse de Fourier – Bilan

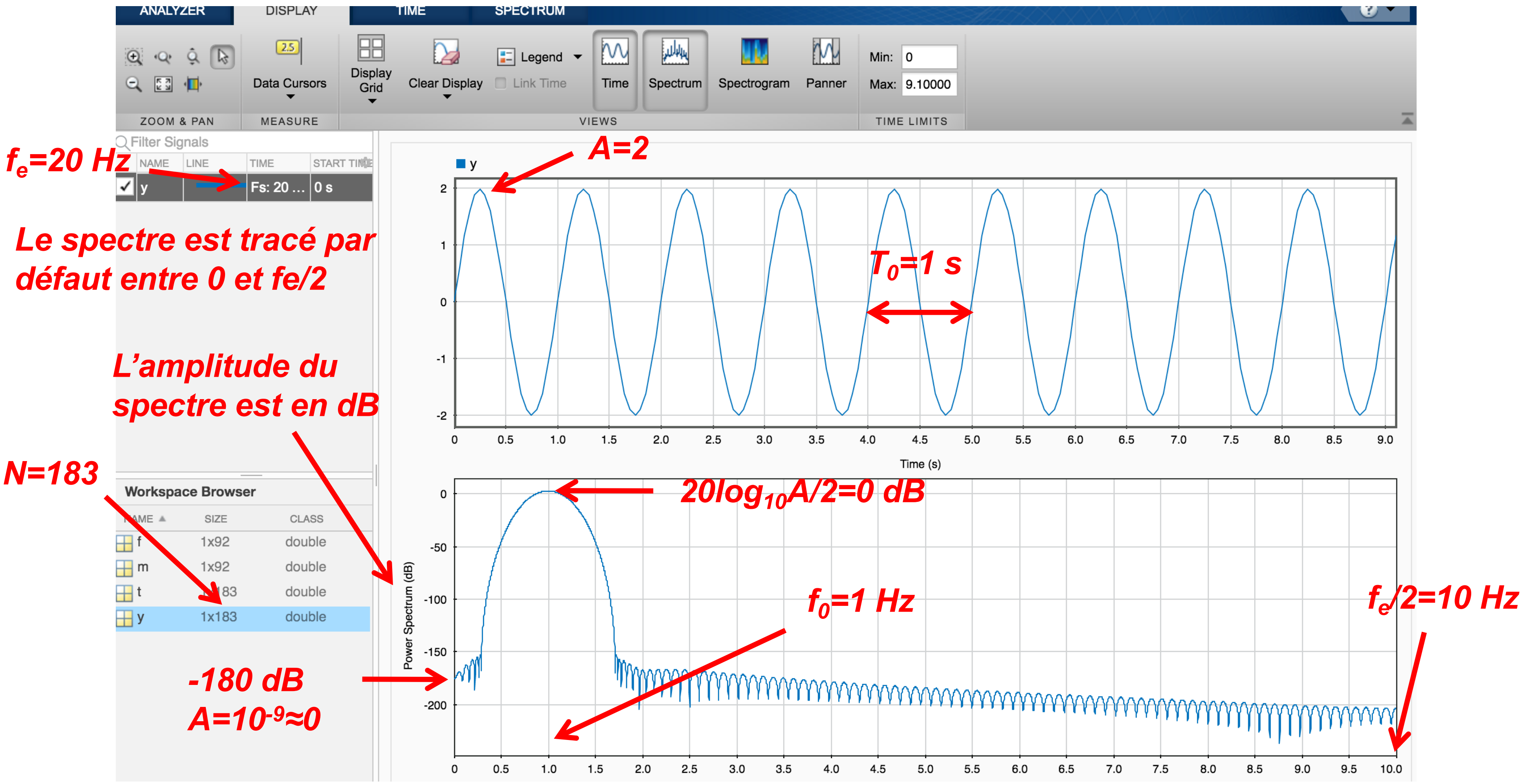


Analyse de Fourier en pratique

- Les différentes versions de transformées de Fourier ne ***sont que*** ***des outils théoriques***
- Ils ne peuvent être utilisés que si les signaux étudiés ont une représentation formelle
- Dans les études en traitement numérique du signal, on voudrait déterminer *M (M≥N, souvent M=N)* composantes du spectre à partir de *N* échantillons du signal échantillonné
- La TFD et en particulier sa version rapide (FFT) répond à ces contraintes et sera utilisée pour déterminer une ***version approchée*** du spectre d'un signal à temps continu quelconque

➢ Il est important de connaître les approximations introduites pour faire une interprétation correcte des spectres affichés !

Spectre d'un signal sinusoïdal sous Matlab avec l'application *SignalAnalyzer*

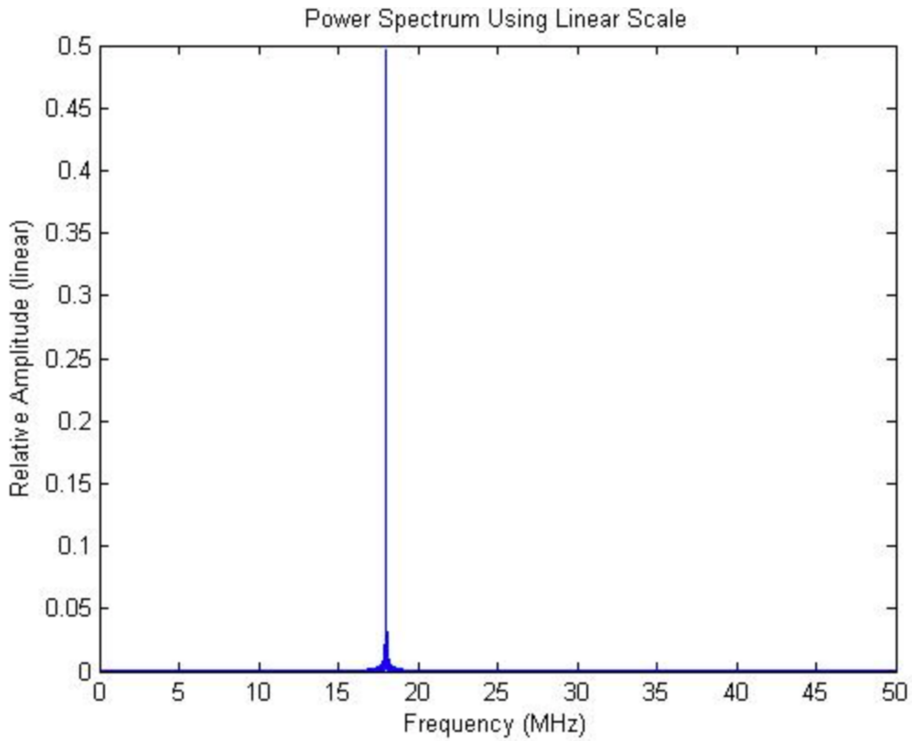


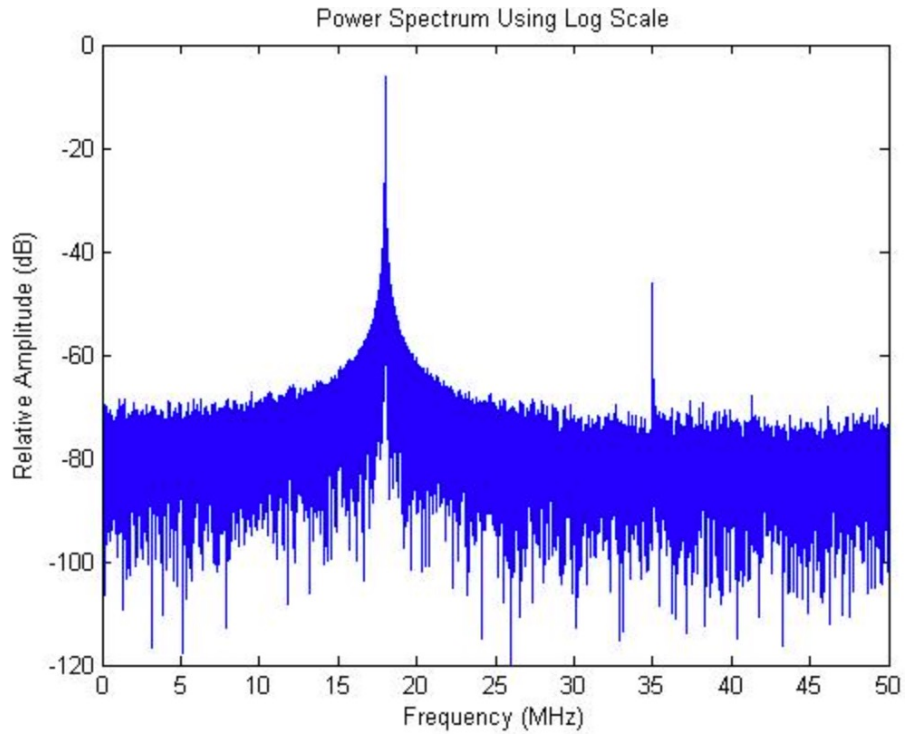
Les signaux sont échantillonnés. Les spectres sont calculés par FFT : calcul de S(m) pour des valeurs échantillonnées de fréquence

Par défaut, Matlab relie les points par une droite, d'où le *caractère continu* des signaux et des spectres

Pourquoi un spectre affiché en dB ? $P(\mathrm{dB}) = 20\log_{10}\left(\dfrac{|A|}{|A_{ref}|}\right)$

- Cela permet de mieux distinguer des différences d'amplitude (A)
  - Exemple : spectre d'un signal contenant deux sinus contaminés par du bruit

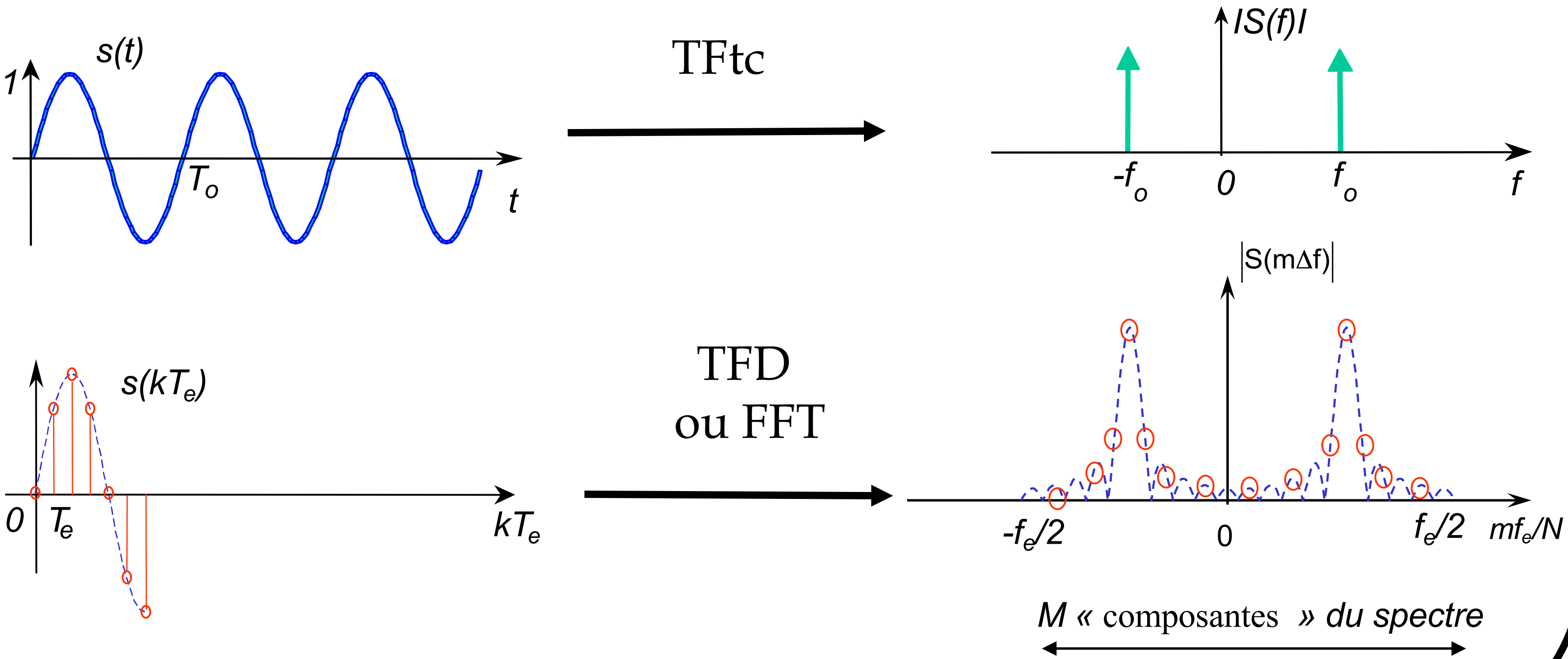




http://www.bitweenie.com/listings/the-decibel/

Approximation par TFD du spectre d'un signal à temps continu

Le calcul numérique du spectre d'un signal à temps continu par TFD conduit à quelques ***approximations*** qu'il est important de connaître



Etapes pour le calcul pratique du spectre d'un signal à temps continu par TFD

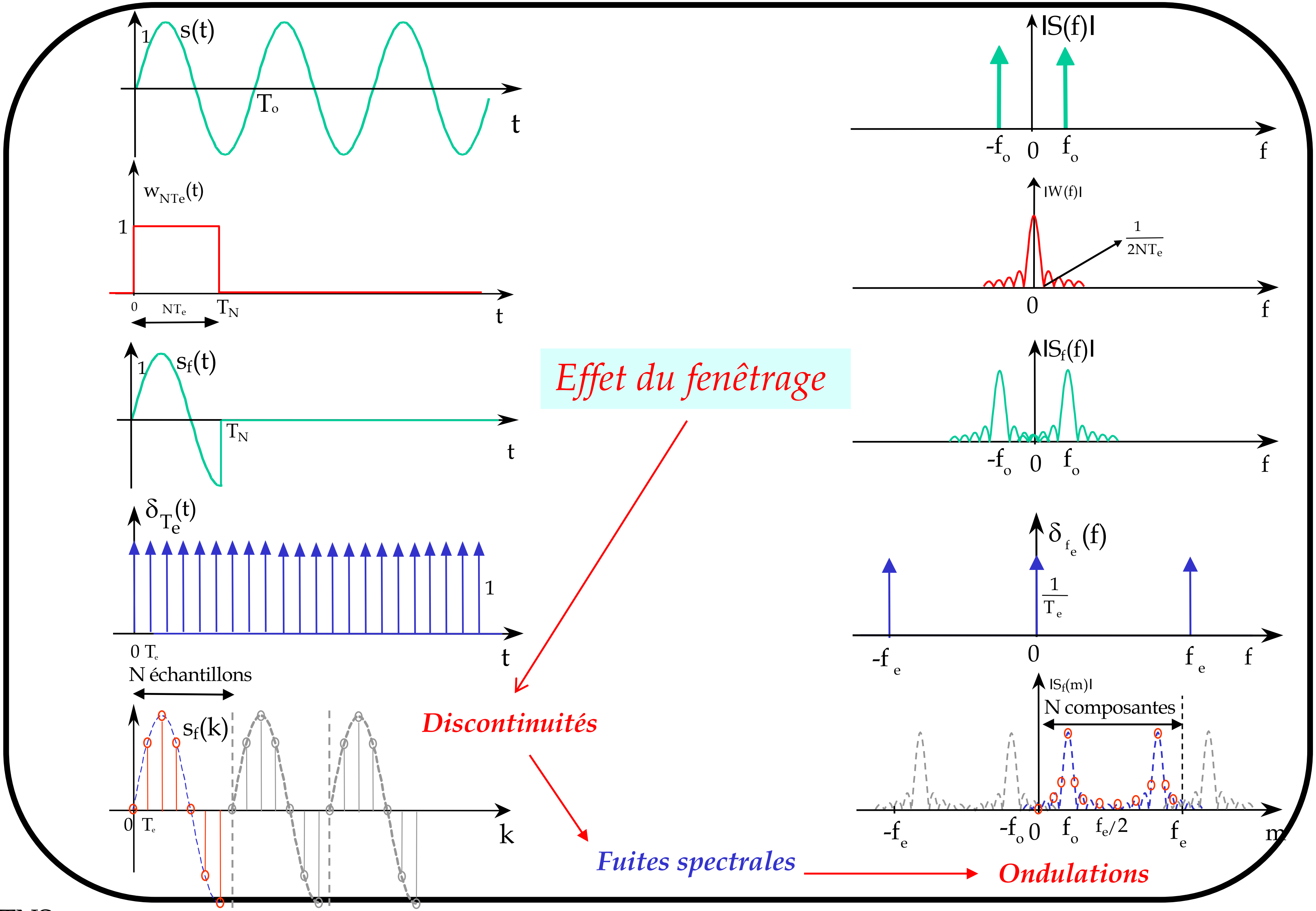
1. Observer le signal sur un intervalle $T_N=NT_e$ où N représente le nombre d'échantillons du signal qui vont servir à calculer M ($M \leq N$) composantes fréquentielles du spectre du signal à temps continu. Le choix de la durée d'observation T_N du signal est lié à **un premier choix** à effectuer qui porte sur le nombre d'échantillons ***N*** du signal temporel.
2. Echantillonner le signal à temps continu afin d'obtenir un signal à temps discret. Ceci implique de faire **un deuxième choix** délicat de la valeur de la fréquence d'échantillonnage $\boldsymbol{f_e}$ qui doit vérifier le théorème de Shannon.
3. Les ***N*** composantes fréquentielles du spectre peuvent ensuite être calculées à l'aide de la TFD ou FFT (dans le cas où $\boldsymbol{K_o=N}$)

$$S(m\Delta f) = S\left(m\frac{f_e}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, e^{-j2\pi\frac{km}{N}} \qquad m = 0,1,\cdots,N$$

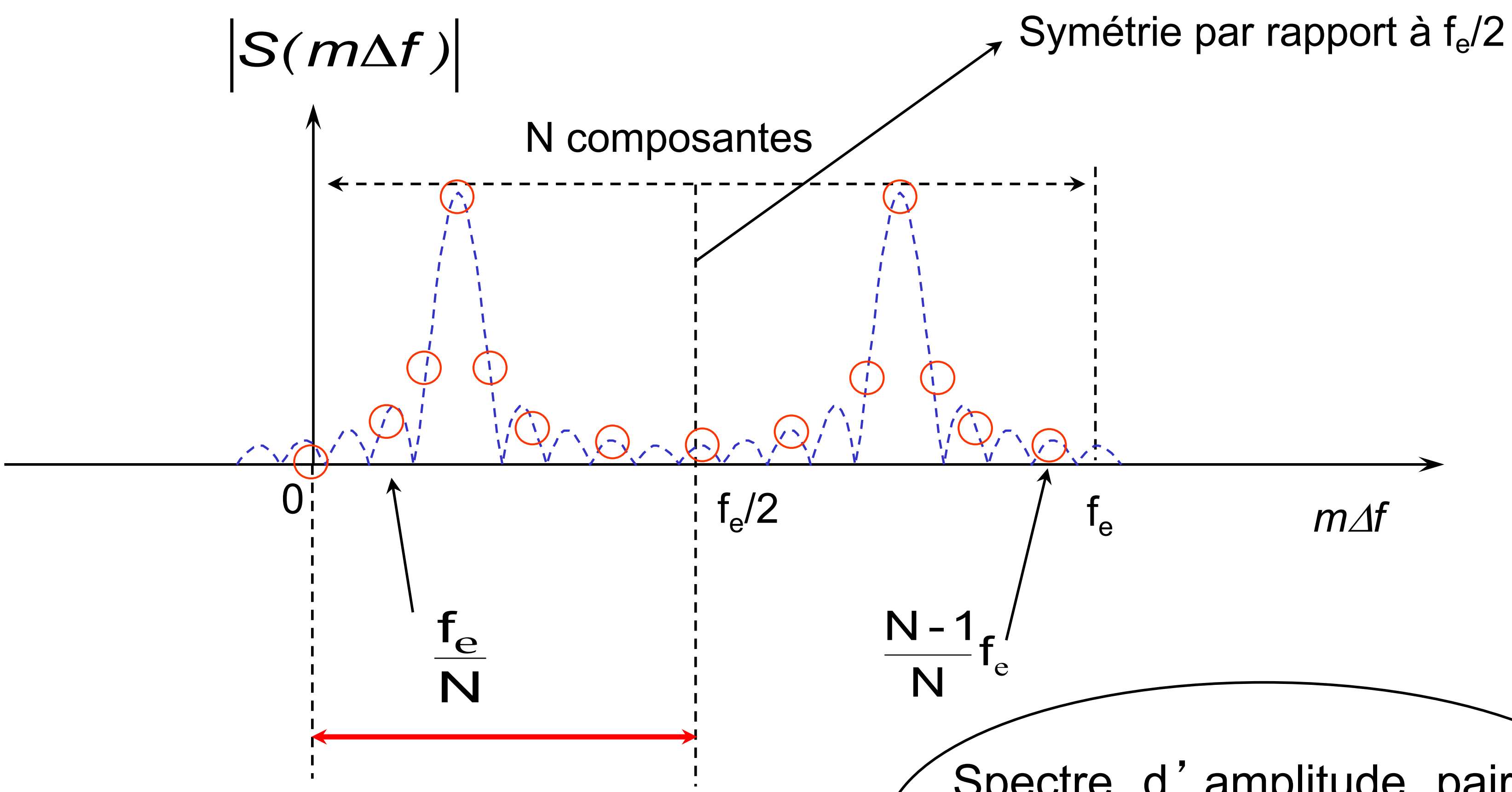
La TFD d'ordre N va permettre de déterminer N composantes de $S(f)$ régulièrement espacées de f_e/N dans l'intervalle $[0\,;\,f_e[$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

POLYTECH NANCY



Partie utile pour analyser un spectre obtenu par TFD



Partie utile

[0 ; $f_e/2$]

Spectre d'amplitude pair et périodique de période f_e donc symétrique par rapport à $f_e/2$

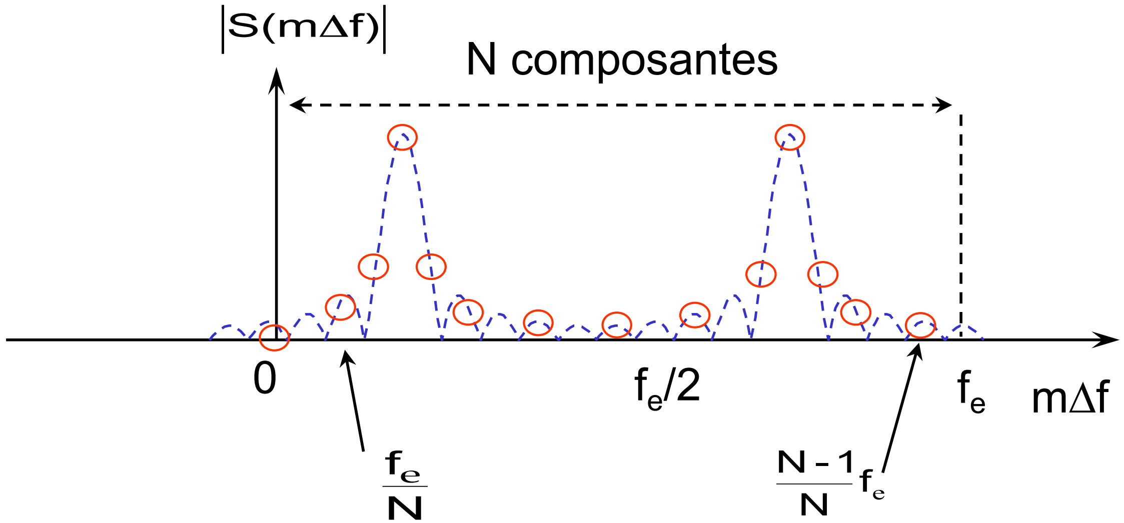
Calcul de TFD sous Matlab

Il existe une fonction qui réalise le calcul de TFD de manière efficace : ***fft***

Soit un signal x contenant *N échantillons* acquis à la fréquence fe

```
>>X=fft(x); % % Calcul de la TFD d'ordre N sinon X=fft(x,M) pour f dans [0; fe [
>>f=(0:N-1)*fe/N;
>>plot(f,abs(X))
```

On obtient le tracé des *N* composantes spectrales de *S(f)* régulièrement espacées de f_e/N dans l'intervalle $[0 ; f_e[$



Calcul de TFD sous Matlab

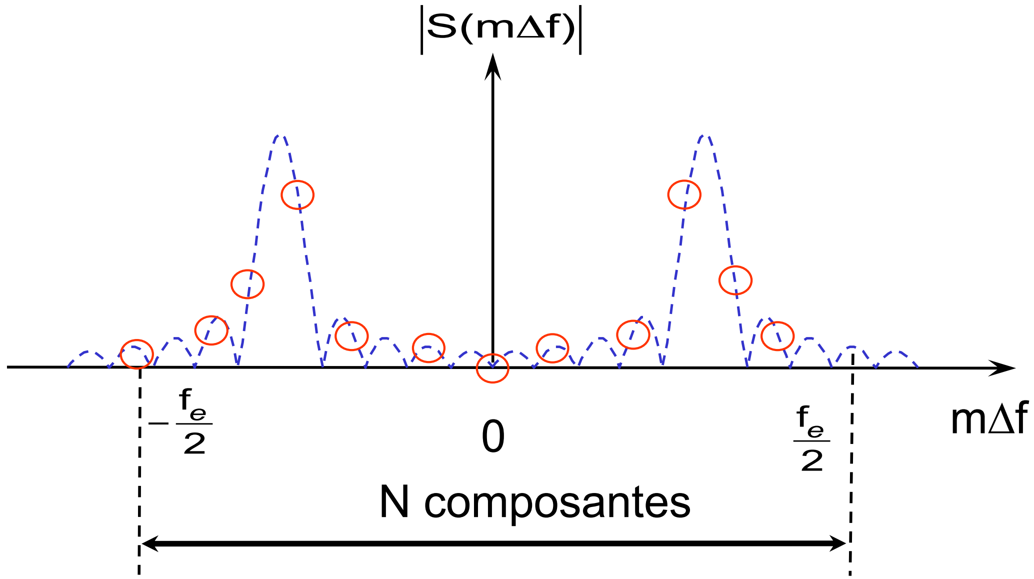
La TFD est symétrique, $X(N\text{-}n)=X(n)$. On peut tracer les N composantes dans l'intervalle $[-f_e/2\,;f_e/2[$ à l'aide de la fonction fftshift

>>X=fftshift(fft(x)); % *Calcul de la TFD pour f dans* $[-f_e/2\,;f_e/2[$

>>f=(-N/2:N/2-1)*fe/N;

>>plot(f,abs(X))

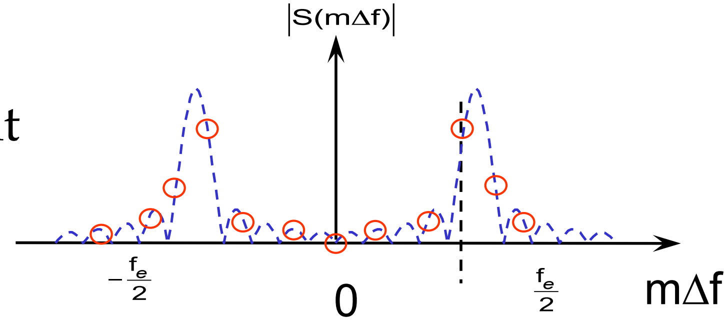
On obtient le tracé des N composantes spectrales de $S(f)$ régulièrement espacées de f_e/N dans l'intervalle$[-f_e/2\,;f_e/2[$



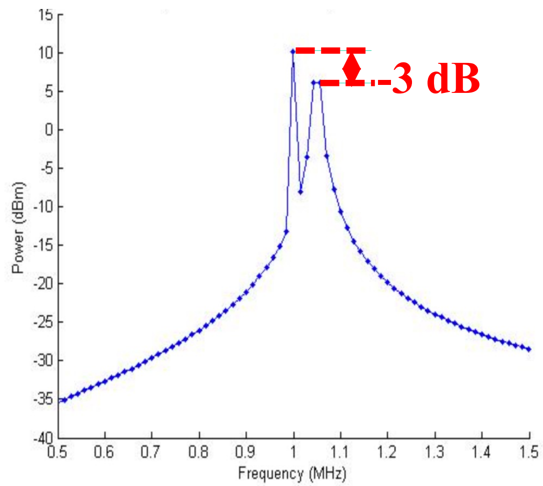
Précision en fréquence et résolution en fréquence

Il ne faut pas confondre précision et résolution en fréquence

- ***Précision en fréquence***
  - Capacité à mesurer le plus précisément la fréquence d'une seule sinusoïde

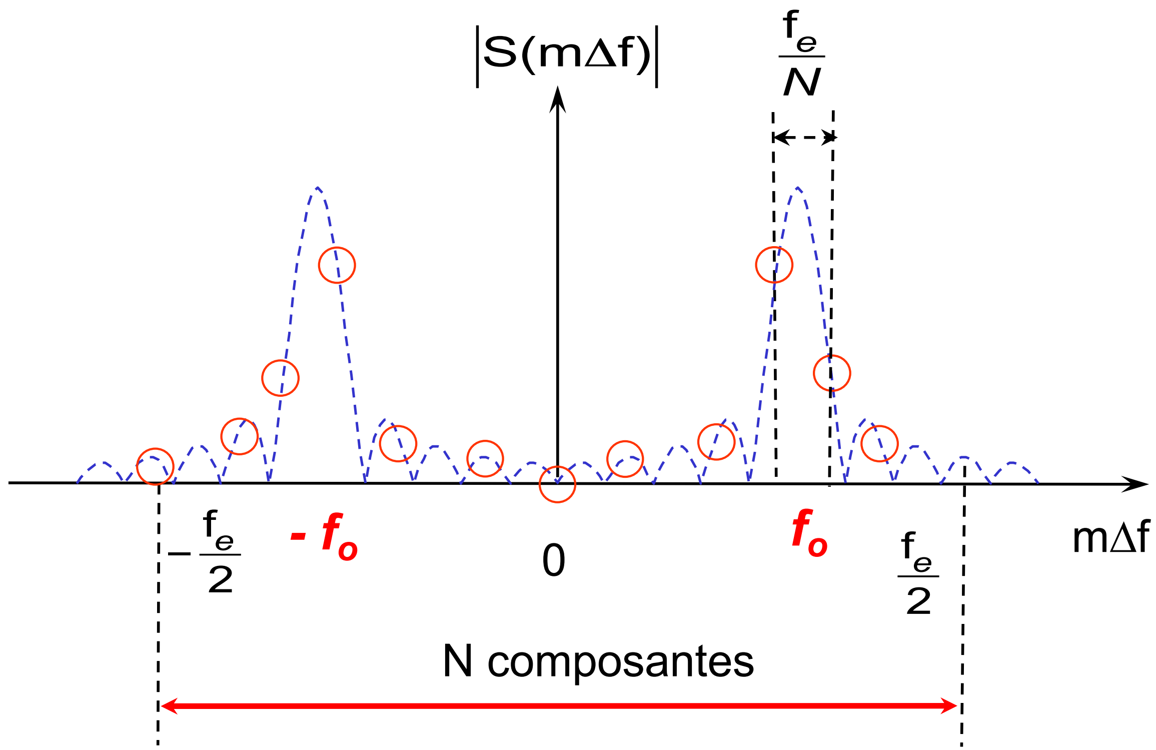


- ***Résolution en fréquence***
  - Capacité à mesurer deux fréquences distinctes contenues dans un signal

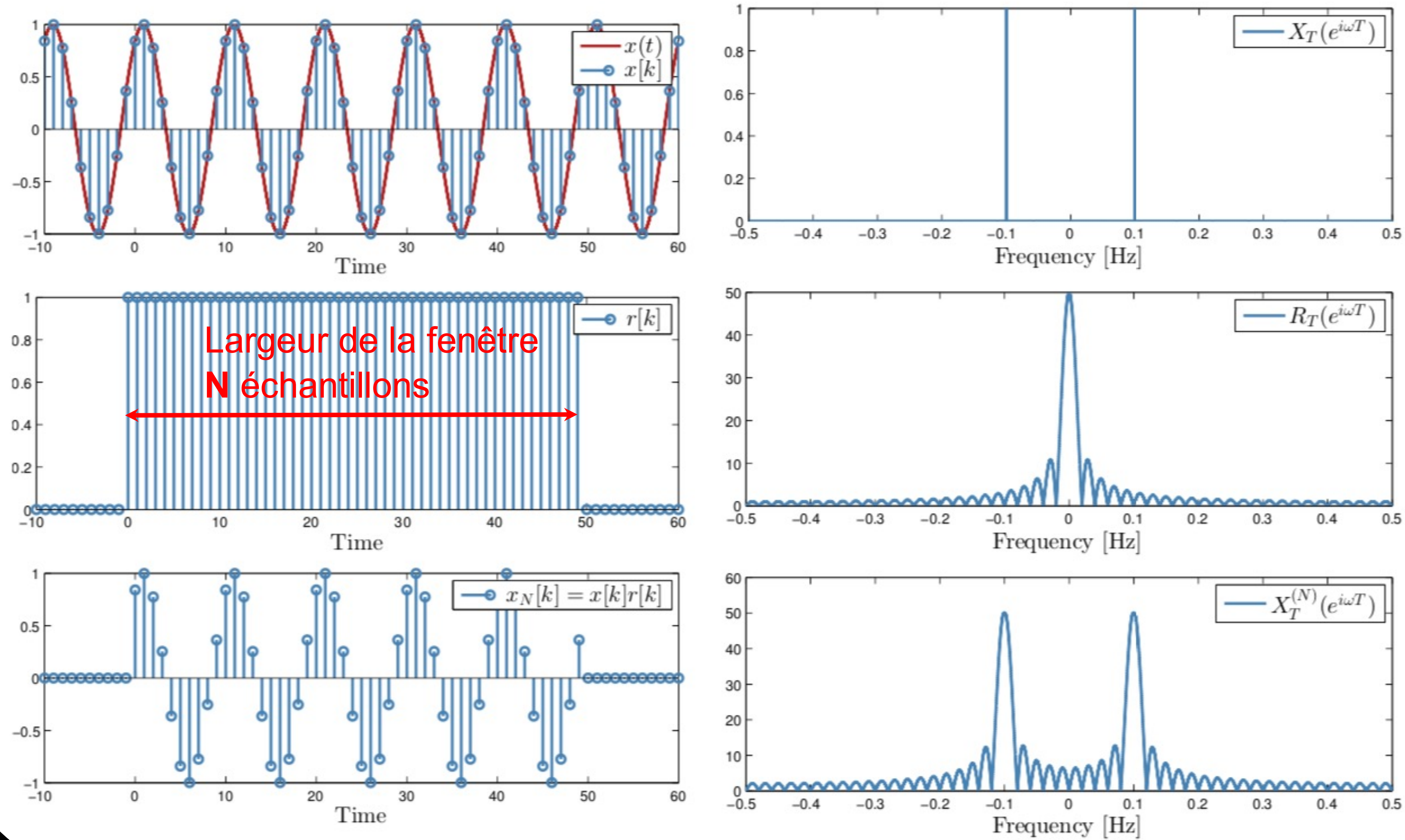


Précision en fréquence

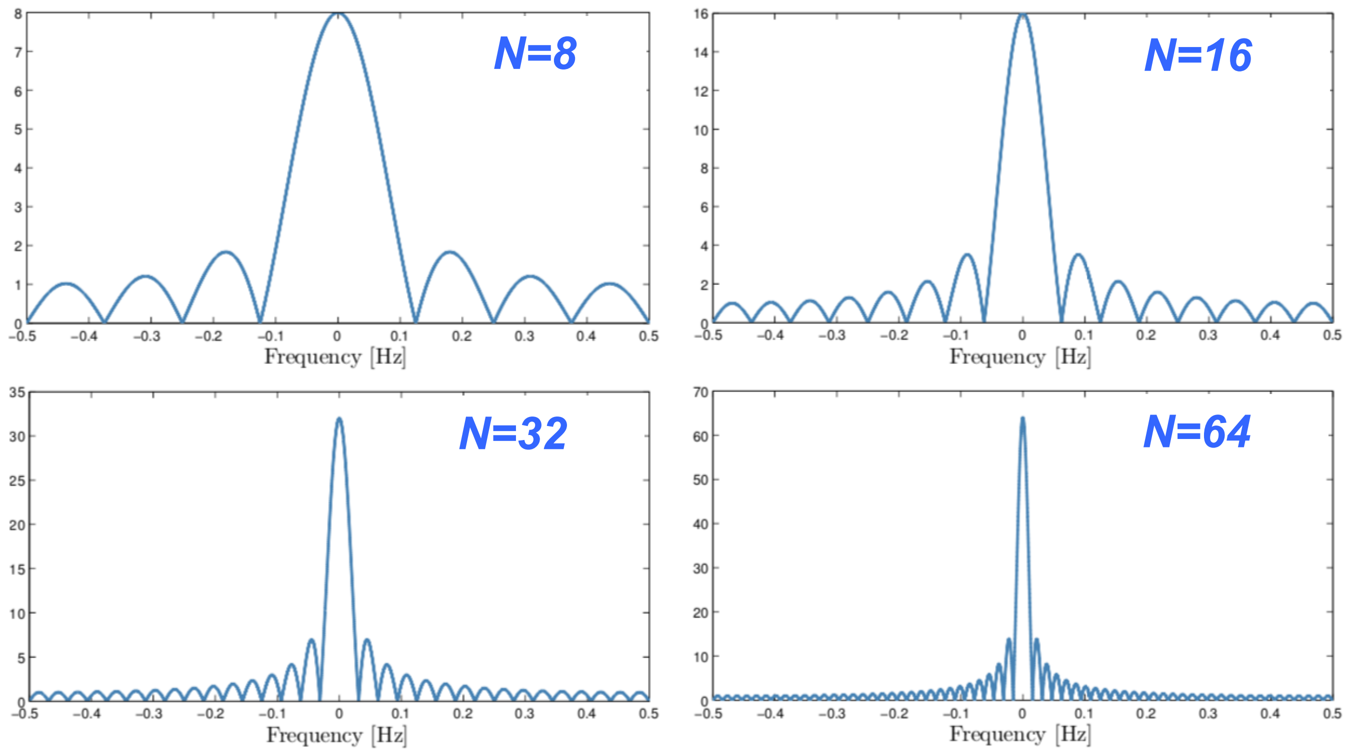
- **Capacité à mesurer la fréquence f_o d'une seule sinusoïde**
  - Si *M* désigne le nombre de points de calcul de le TFD, la précision en fréquence est égale à *1/M*
  - Pour un signal échantillonné à *fe* (en Hz), la précision en fréquence est égale *fe/M*
  - *Lorsque M=N (N: nombre d'échantillons du signal), la précision est fe/N*



Spectre d'un signal sinusoïdal obtenu par FFT avec une fenêtre rectangulaire



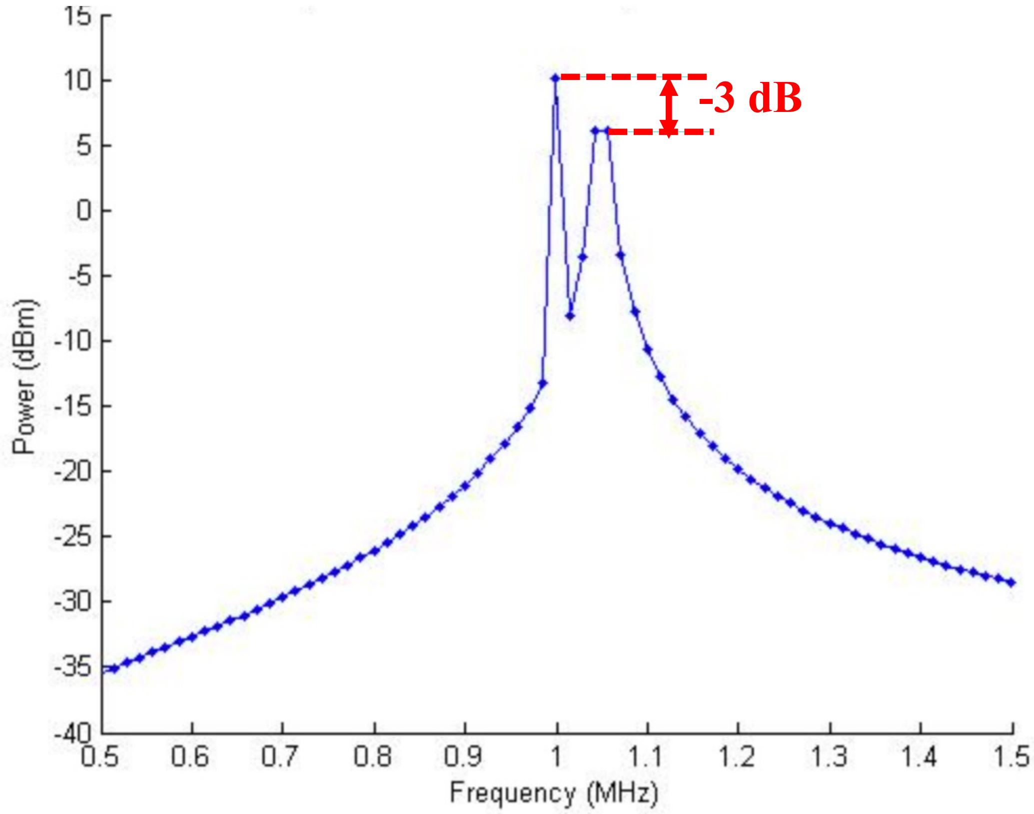
Effet de la largeur de la fenêtre (rectangulaire) d'observation
N = nombre d'échantillons temporel



- Augmenter N pour le calcul de la FFT permet d'améliorer la précision en fréquence : ***capacité à mesurer la fréquence de la sinusoïde***
- Si N fixé, ajouter des zéros au signal (technique du ***zero-padding***) permet d'améliorer la précision en fréquence

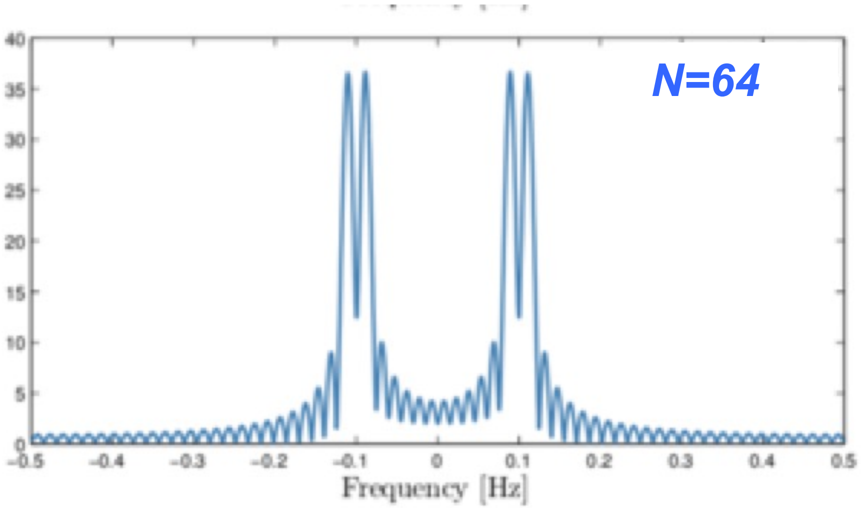
Résolution en fréquence

- Il est commode de définir la résolution par l'écart minimum en fréquence qu'il faut mettre entre 2 sinusoïdes d'amplitudes différentes pour observer sur le spectre de la somme un creux de - 3 dB entre les 2 maxima



Résolution en fréquence

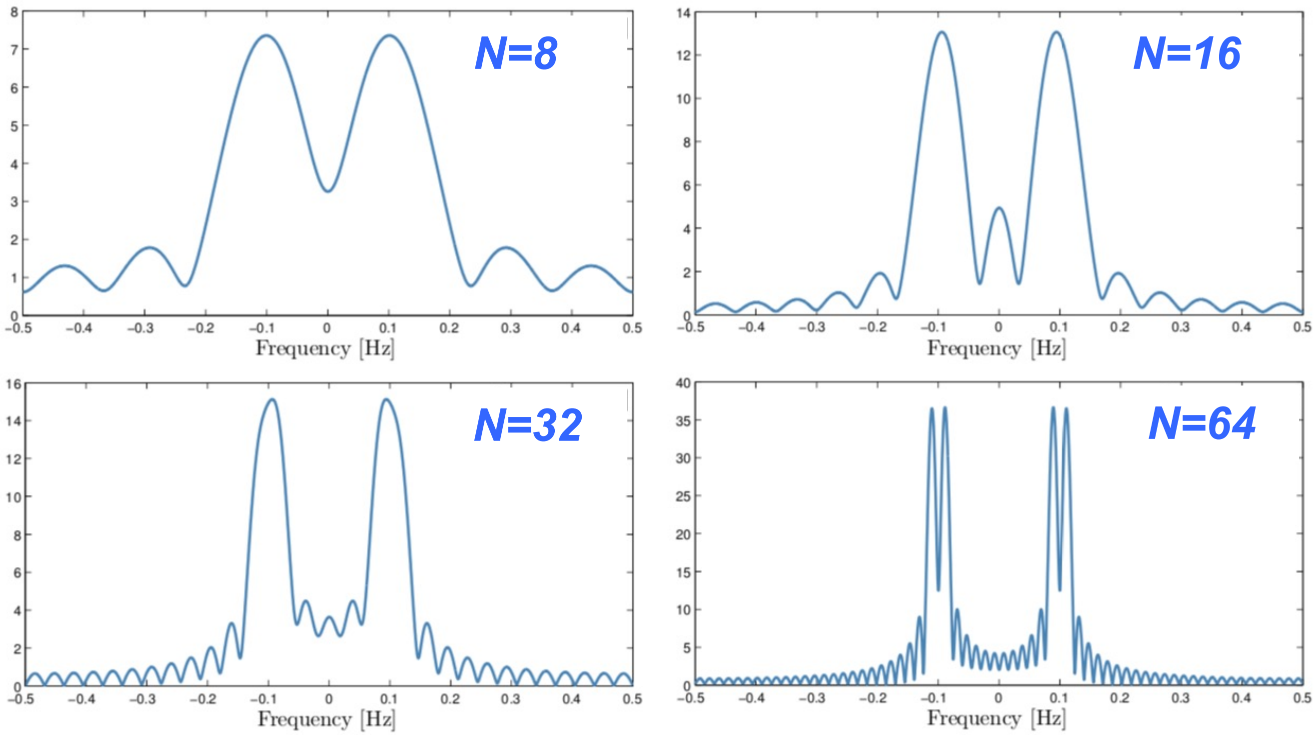
- ***Capacité à distinguer deux fréquences voisines dans un signal***
  - Si *N* désigne le nombre de points de calcul de la TFD, la résolution en fréquence est égale à *1/N*
  - Pour un signal échantillonné à *fe* (en Hz), la résolution devient *R=fe/N=NTe*
  - La résolution est de l'ordre de grandeur de l'inverse du temps d'analyse total du signal *R=NTe*



- Il est commode de définir la résolution par l'écart minimum en fréquence qu'il faut mettre entre 2 sinusoïdes d'amplitudes différentes pour observer sur le spectre de la somme un creux de - 3 dB entre les 2 maxima

Résolution en fréquence
Spectre de la somme de 2 sinus – Fenêtre rectangulaire

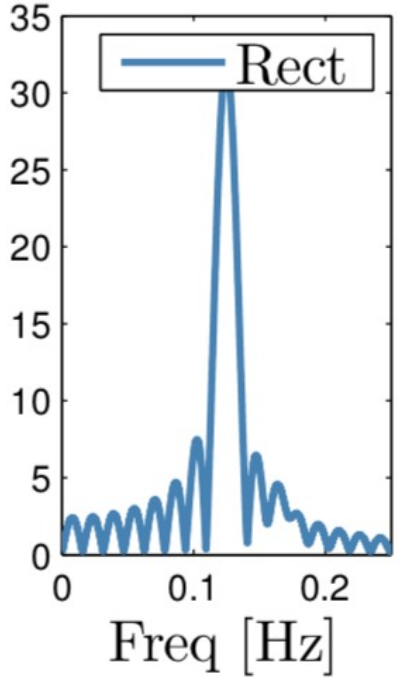
$$x(k) = \sin\left(2\pi 0{,}9\,k\right) + \sin(2\pi 0{,}11k)$$



- Lorsque $N < 64$, il est impossible de distinguer les 2 fréquences
- Augmenter N pour le calcul de la FFT permet d'améliorer la résolution en fréquence (capacité à distinguer deux fréquences voisines dans un signal)
- Si N fixé, utiliser une autre fenêtre permet d'améliorer la résolution en fréquence

Analyse spectrale dans le cas de 2 sinusoïdes proches d'amplitude différente - Fenêtre rectangulaire

$$x(k) = \sin\left(2\pi 0{,}125\, k\right) + 0{,}11 \sin(2\pi 0{,}165\, k) \quad N = 64, \quad T_e = 1$$



- Impossible de distinguer le 2^e^ pic de plus faible énergie/amplitude dans le cas de la fenêtre rectangulaire

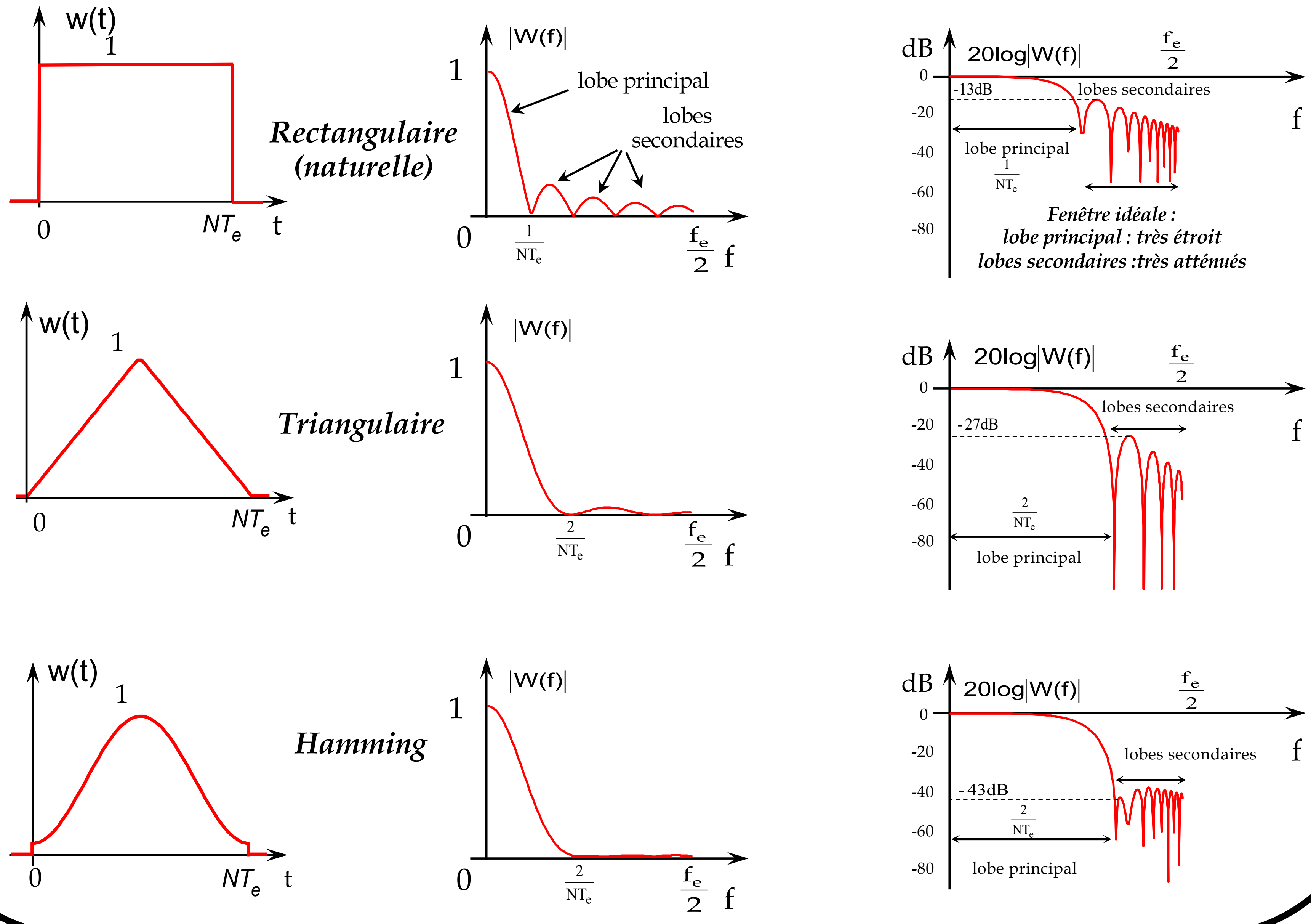
Solution : utilisation d'autres fenêtres

- Solution théorique idéale afin de ne pas avoir de fuites spectrales : fenêtrer le signal par une fenêtre dont le spectre serait $\delta(f)$

  ➔ malheureusement impossible à obtenir en pratique

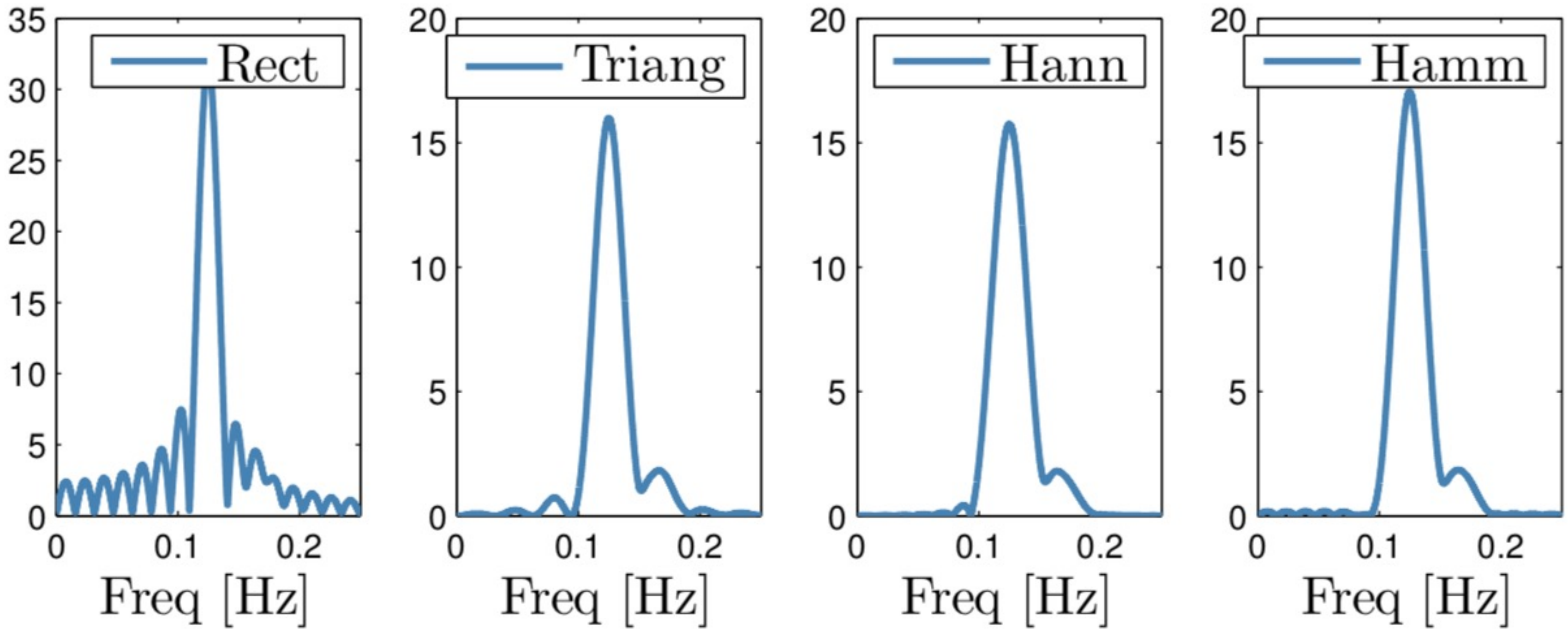
- Plusieurs fenêtres ont été proposées afin de réduire l'effet des fuites spectrales :
  - fenêtre ***triangulaire, Hamming, Hanning, Blackman,***…
- Afin de comparer l'effet des différentes fenêtres, on définit un certain nombre de caractéristiques :
  - la largeur du lobe principal (central) du spectre de la fenêtre qui doit être la plus faible possible
  - L'atténuation du premier lobe secondaire du spectre qui doit être la plus importante possible

Caractéristiques des principales fenêtres



Effet du type de fenêtre pour observer 2 raies proches

$$x(k)=\sin\left(2\pi 0{,}125\,k\right)+0{,}11\sin(2\pi 0{,}165\,k) \quad N=64, \quad T_e=1$$



- Le 2e pic de plus faible énergie/amplitude devient visible dans le cas des fenêtres triangulaire, de Hanning et de Hamming

Analyse spectrale en pratique - Conclusion

- ***TFD/FFT*** : outil adapté à l'implantation sur calculateur numérique
  - ⇨ utilisé pour déterminer une version ***approchée*** du spectre d'un signal

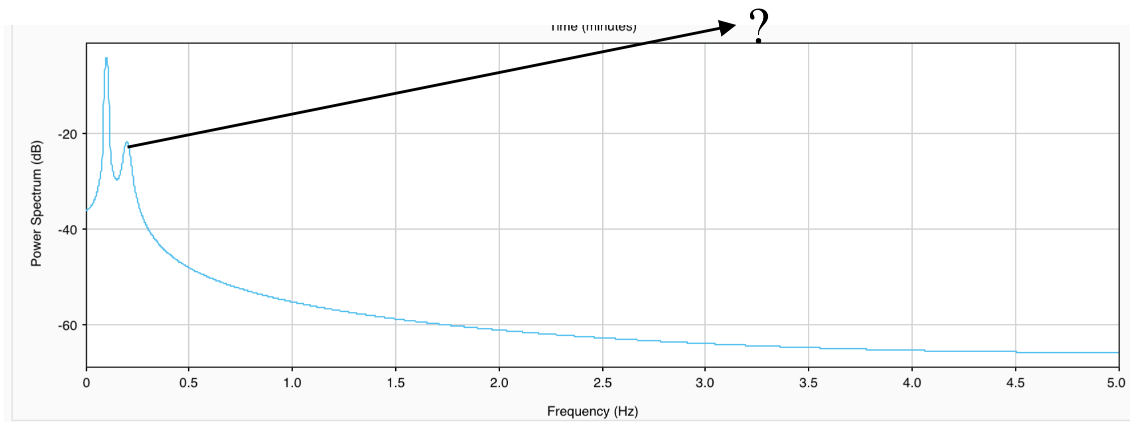
⇨ L'approximation se traduit par des **fuites spectrales** (=ondulations au niveau du spectre) dues au fenêtrage par la fenêtre rectangulaire (=discontinuité au niveau du signal temporel périodisé)

- Pour améliorer la qualité du spectre estimé :
  - Augmenter la durée d'observation N :
    - améliore la précision et la résolution en fréquence
  - Si N est fixé
    - Meilleure précision avec la méthode du zéro-padding
    - Meilleure résolution avec une autre type de fenêtre (Hanning, ...)
    - Appliquer le fenêtrage avant le zéro-padding

Analyse temps-fréquence
La transformée de Fourier à court terme

- Il est courant en pratique qu'un signal évolue au cours du temps. Son spectre devrait donc évoluer en conséquence

D'après le spectre, on peut *(à peu près)* déterminer les fréquences des sinus, mais pas leur localisation temporelle



Analyse temps-fréquence
La transformée de Fourier discrète à court terme

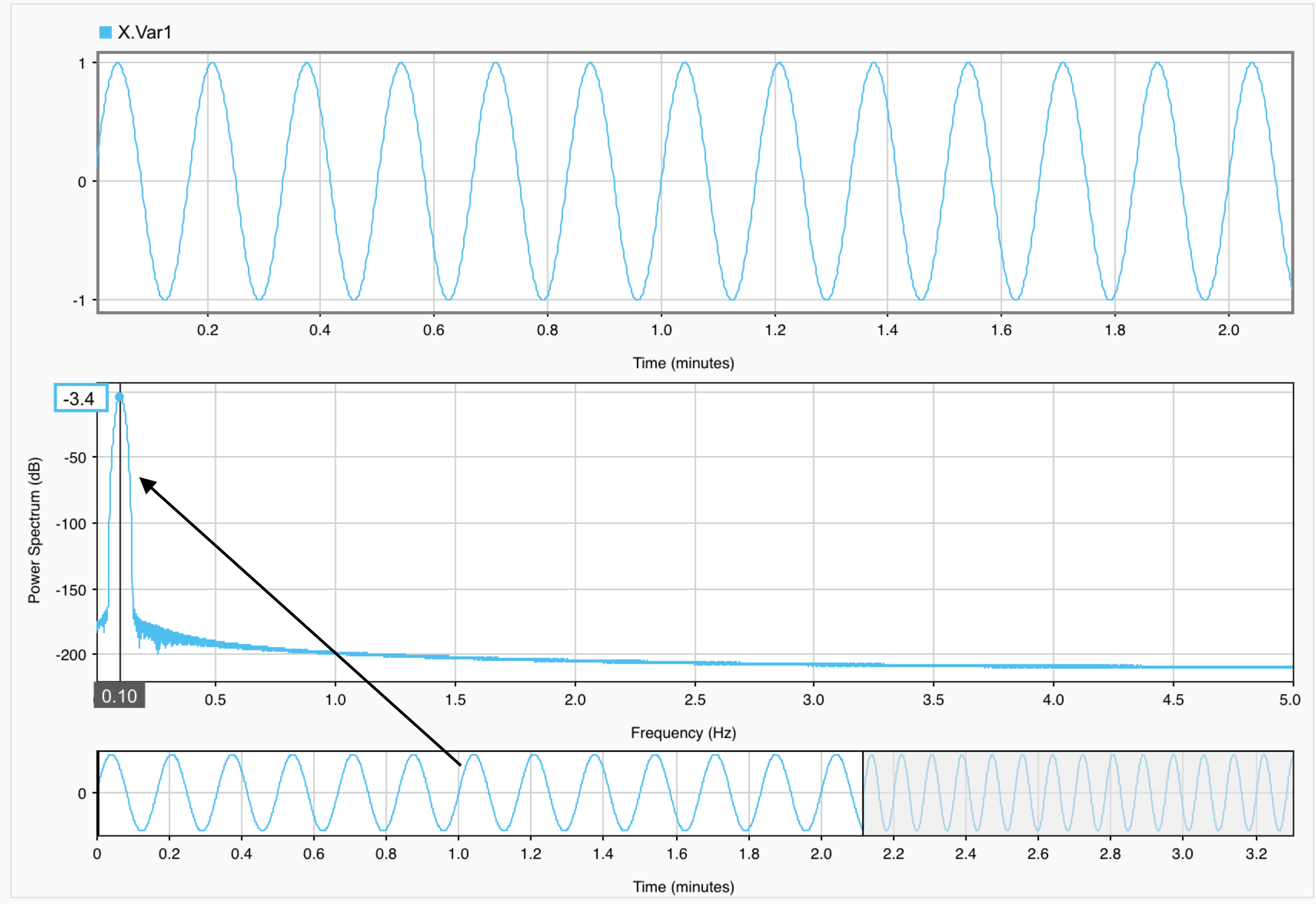
- La TFDCT - *en anglais Short-Time Discrete Fourier Transform (STDFT)* - ou encore transformée de Fourier à fenêtre glissante est une version modifiée de la transformée de Fourier pour déterminer le spectre à partir d'un segment local d'un signal
- Définition

$$X(m,\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\omega(k-m)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$

  - *ω(k-m)* est une fenêtre retardée de *m,* de forme rectangulaire ou autres
  - Lorsque la fenêtre est une fonction gaussienne, la transformée de Fourier à court terme est appelée **transformée de Gabor**

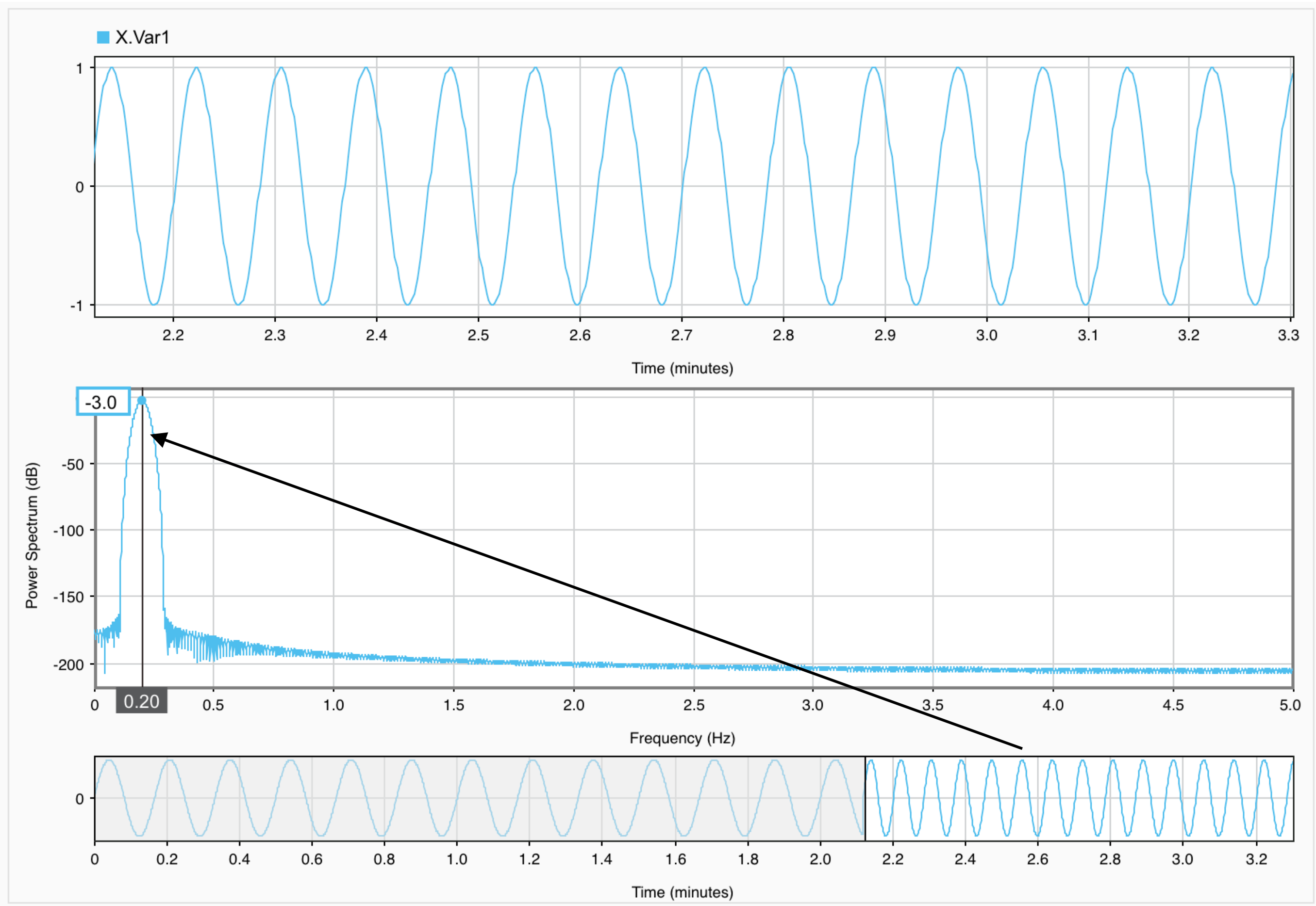
La transformée de Fourier discrète à court terme

- Fenêtrage rectangulaire sur la première partie du signal



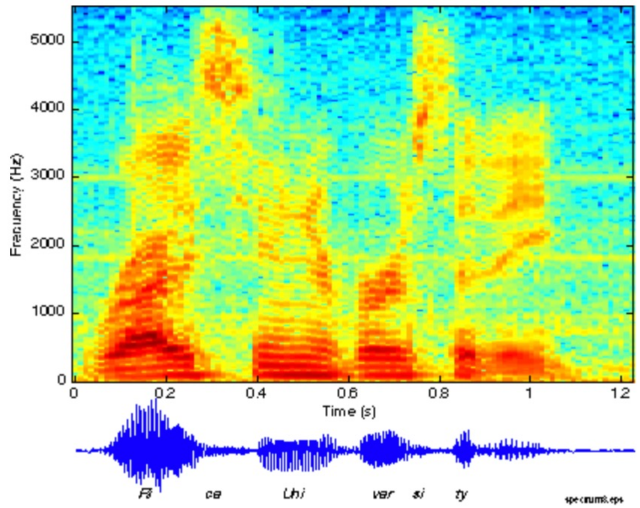
La transformée de Fourier discrète à court terme

- Fenêtrage rectangulaire sur la deuxième partie du signal



Représentation temps-fréquence : le spectrogramme

- Le spectrogramme représente sur une image = tracé en 2 dimensions de 3 variables :
  - le temps
  - la fréquence
  - la puissance



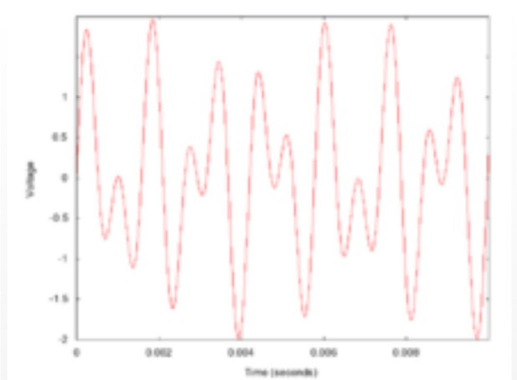
- Un spectrogramme représente en ordonnée les fréquences et en abscisse le temps
- La puissance est codée par des couleurs selon une échelle conventionnelle
  - la couleur jaune ou rouge symbolise une forte puissance alors que la couleur bleue représente une faible intensité
- Le spectrogramme permet ainsi de visualiser la variation au cours du temps des principales composantes fréquentielles du signal

Le signal DTFM
Dual Tone Frequency Modulation

DTFM est un système de codage utilisé en téléphonie pour coder l’appui des touches numériques sous la forme de signaux sonores dans la bande audio

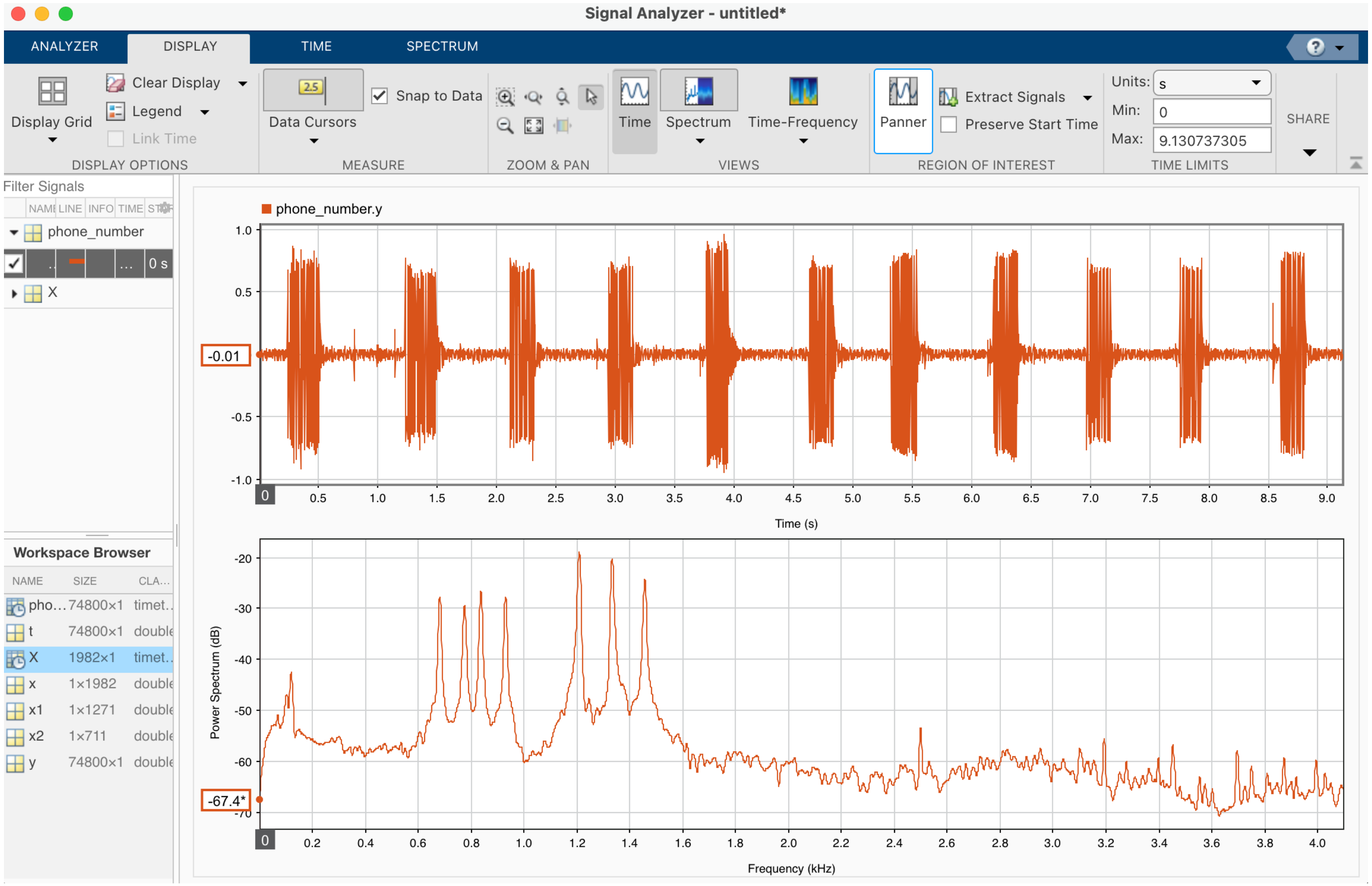
DTMF keypad frequencies

	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz	1633 Hz
697 Hz	1	2	3	A
770 Hz	4	5	6	B
852 Hz	7	8	9	C
941 Hz	*	0	#	D

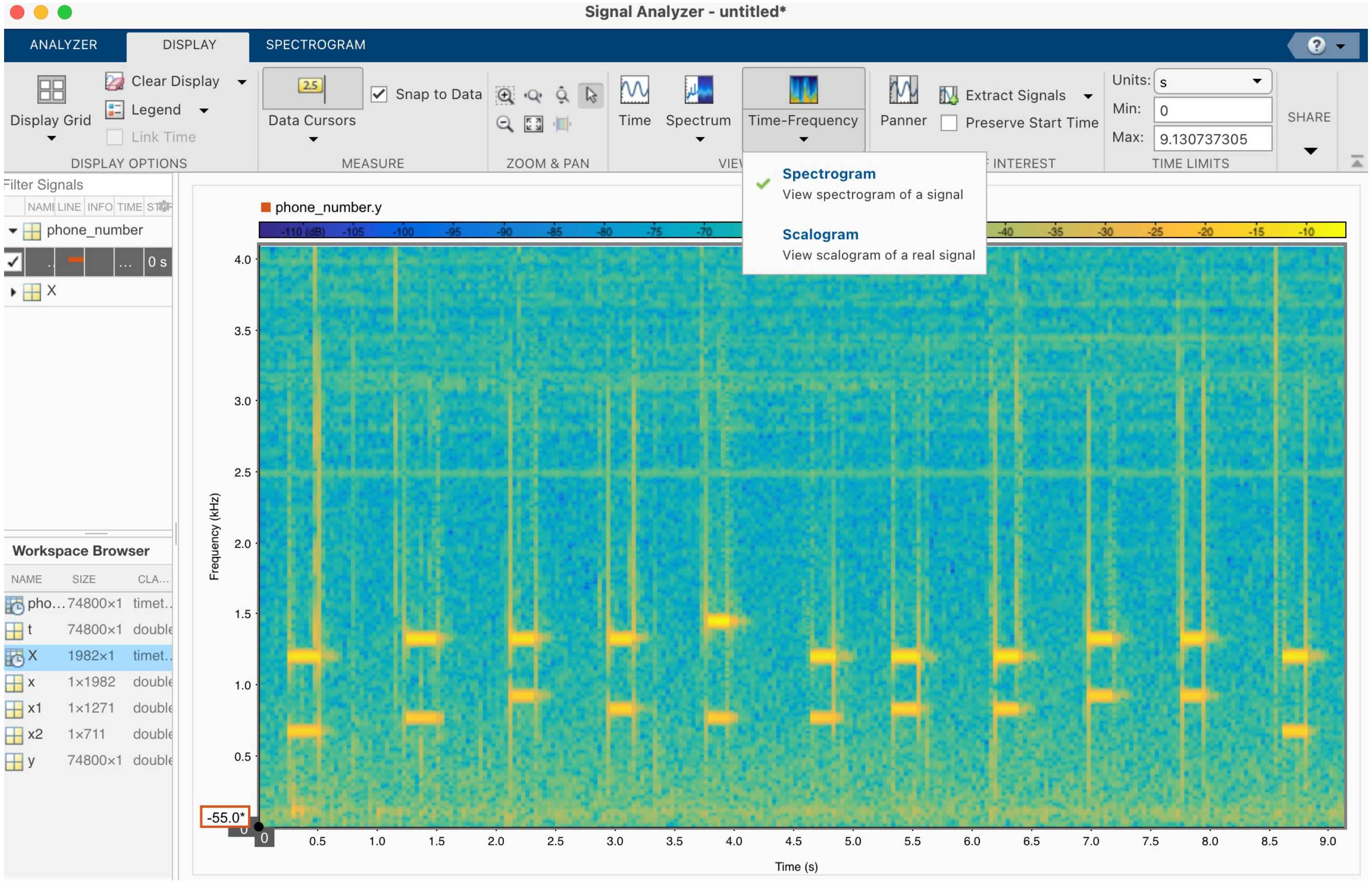


La tonalité « 1 », composé des fréquences 1209 Hz et 697 Hz.

Le signal DTFM - Exemple



Le spectrogramme du signal DTFM



L'exemple ci-dessus montre bien l'évolution de la fréquence et de la puissance au cours du temps. Plus la couleur est jaune plus la puissance est importante

Représentation temps-fréquence : le spectrogramme

- Grâce à une visualisation rapide du contenu fréquentiel, le spectrogramme permet de discerner des informations importantes pour l'analyse d'un signal

- Le spectrogramme est utilisé :
  - en sismologie pour pointer les différents trains d'ondes sismiques
  - en audio, on l'appelle sonogramme, pour faire de la reconnaissance vocale
    - Exploiter, par exemple, dans l'application Shazam
      - permet d'identifier le titre et l'auteur d'un morceau inconnu à partir d'un enregistrement d'une quinzaine de secondes
      - ➢ https://questions2physique.wordpress.com/2011/02/05/application-shazam/
      - ➢ https://interstices.info/de-fourier-a-la-reconnaissance-musicale/

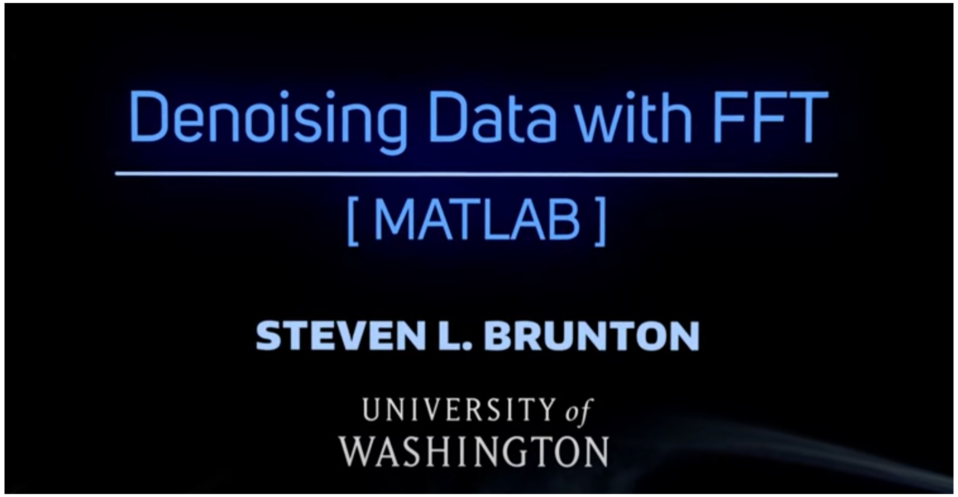
    - Exploiter également pour identifier des espèces (oiseaux, …) à partir de simples enregistrements de leur chant/cri

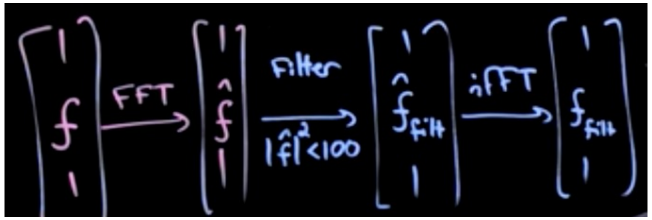
Applications de l’analyse spectrale

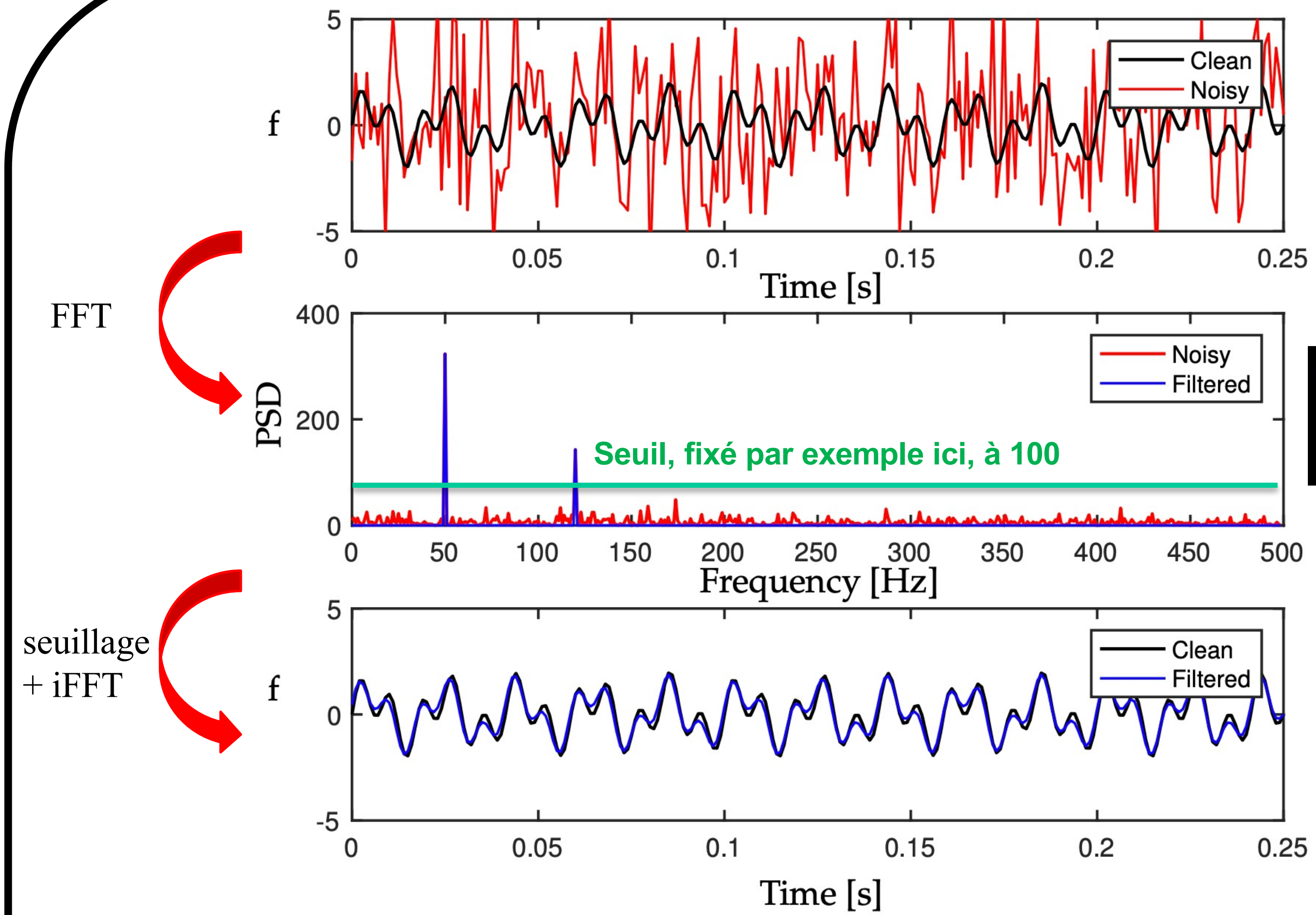
- L’analyse spectrale de Fourier est un outil puissant qui est utile dans de nombreux domaines d’applications
- Grâce à la transformée de Fourier et en particulier sa version rapide FFT, de nombreuses évolutions technologiques ont pu voir le jour
- Cet outil mathématique, essentiel pour le traitement d'images, a rendu possible :
  - la compression d'images fixes avec le format JPEG
  - La compression de vidéos avec le format MPEG

Applications de l'analyse spectrale
FFT pour le filtrage par seuillage de signaux bruités

- Voir la vidéo de Steve Brunton
  - www.youtube.com/watch?v=c249W6uc7ho&list=PLMrJAkhIeNNT_Xh3Oy0Y4LTj0Oxo8GqsC&index=19







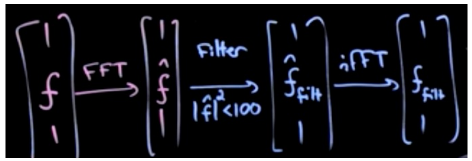


Figure 2.9: De-noising with FFT. (top) Noise is added to a simple signal given by a sum of two sine waves. (middle) In the Fourier domain, dominant peaks may be selected and the noise filtered. (bottom) The de-noised signal is obtained by inverse Fourier transforming the two dominant peaks.

Applications de l'analyse spectrale
FFT pour la compression d'images

- Voir la vidéo de Steve Brunton
  - www.youtube.com/watch?v=KGiV_2i713I&list=PLMrJAkhIeNNT_Xh3Oy0Y4LTj0Oxo8GqsC&index=34