Transformée de Fourier à temps discret

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

POLYTECH NANCY

Sommaire

I. Quelques rappels *ou vérification des pré-requis*

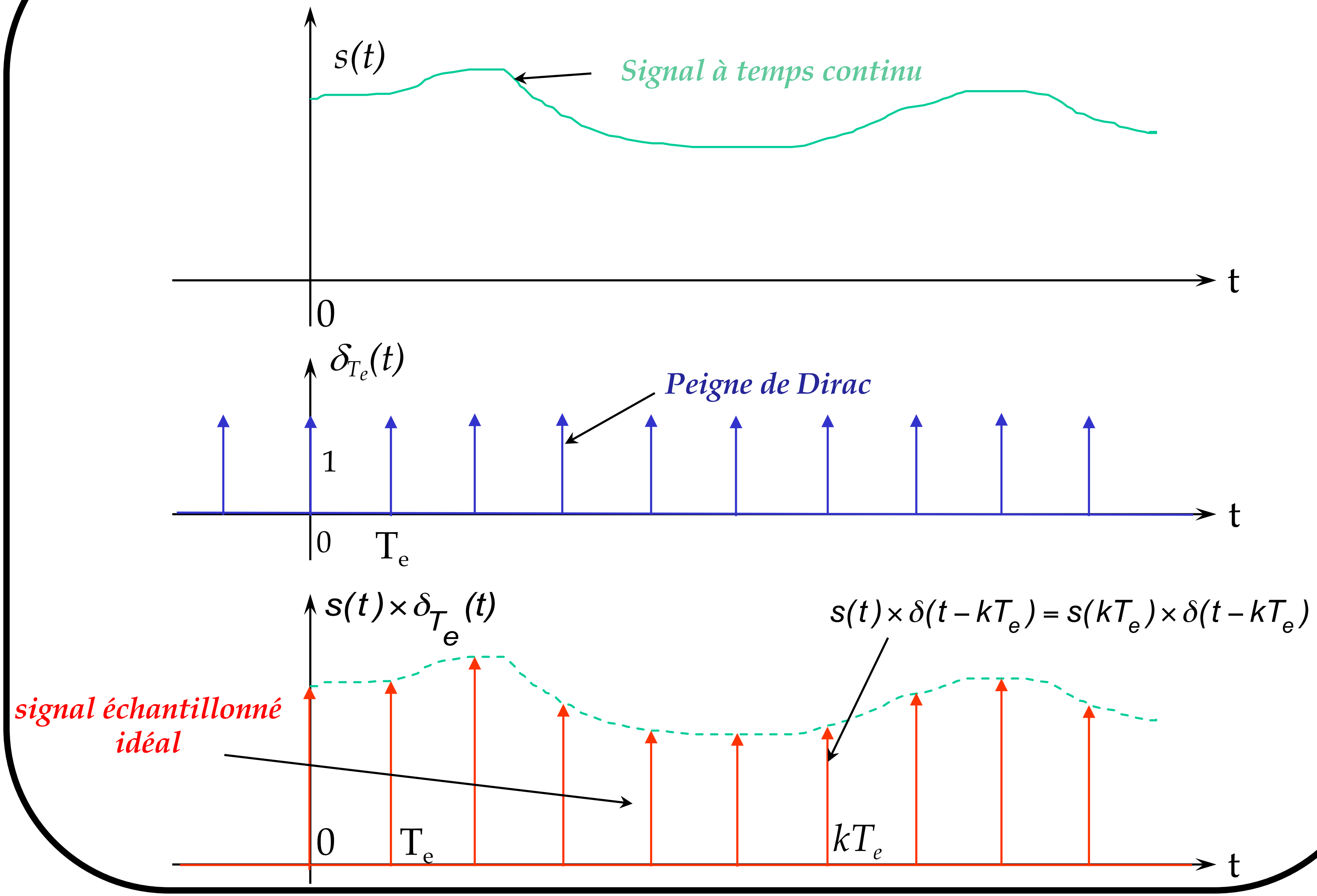
II. Outils d'analyse spectrale de signaux numériques

- La Transformée de Fourier à temps discret (TFtd)
- La Transformée de Fourier discrète (TFD) et sa version rapide (FFT)
- Analyse de Fourier en pratique

III. Introduction au filtrage numérique

- Analyse et conception de filtres RIF/RII

Rappel : *échantillonnage idéal* dans le domaine temporel



Rappel : modélisation mathématique théorique de l'échantillonnage idéal

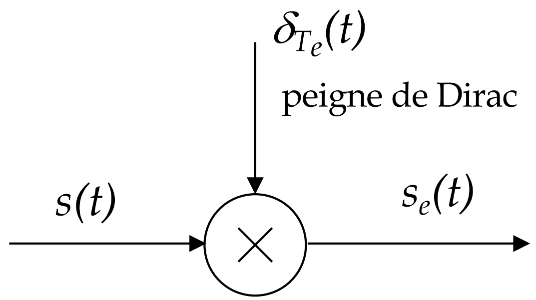
- L'opération d'***échantillonnage idéal*** d'un signal analogique revient à multiplier ce dernier par un peigne de Dirac

$$s_e(t) = s(t) \times \delta_{T_e}(t)$$

$$s_e(t) = s(t) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t - kT_e)$$

$$\boxed{s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\,\delta(t - kT_e)}$$



Propriété de l'impulsion de Dirac

$$s(t)\,\delta(t - t_o) = s(t_o)\,\delta(t - t_o)$$

Le signal ***échantillonné idéalement*** $s_e(t)$ est un ***signal à temps continu***

On peut donc calculer sa TFtc

Une transformée peut en cacher une autre

- La TFtc de ce signal échantillonné idéalement s'écrit :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_e(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \qquad s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\,\delta(t-kT_e)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\,\delta(t-kT_e) \right) e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(s(kT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_e)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \right)$$

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\, e^{-j2\pi fkT_e}$$

Propriété de l'impulsion de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_o)\, s(t)\, dt = s(t_o)$$

avec ici $\begin{cases} s(t) = e^{-j2\pi ft} \\ t_o = kT_e \end{cases}$

Définitions

- ***Transformée de Fourier à temps discret (TFtd)***

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\, e^{-j2\pi fkT_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)\, e^{-j2\pi fkT_e}$$

$S(f)$ est appelé ***TFtd*** de $s(kT_e)$ ou encore ***spectre*** de $s(kT_e)$

La variable f est continue et représente la fréquence en Hz

- ***Transformée de Fourier inverse à temps discret***

$$s(k) = \mathrm{F}^{-1}\big(S(f)\big) = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} S(f)\, e^{j2\pi fkT_e}\, df$$

Formule de Poisson

- Spectre d'un signal échantillonné idéalement

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\, e^{-j2\pi kT_e f}$$

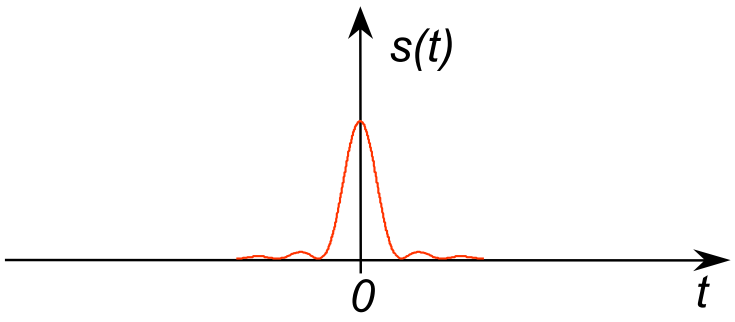
- Le spectre d'un signal échantillonné idéalement est ***continu*** et ***périodique de période*** $f_e = \dfrac{1}{T_e}$ *(voir rappels sur échantillonnage)*

$$S(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kf_e)$$

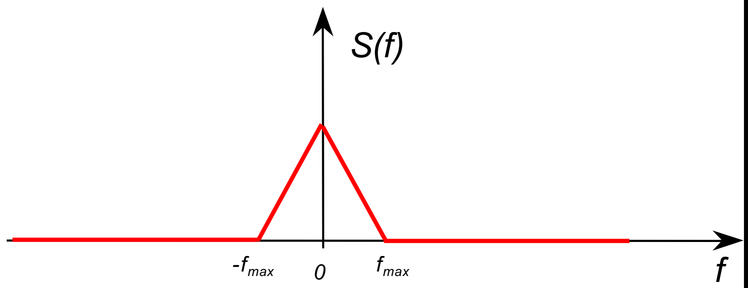
- **Formule de Poisson** : ***Echantillonnage*** ➡ ***Périodisation du spectre***

$$\boxed{S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\, e^{-j2\pi kT_e f} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kf_e)}$$

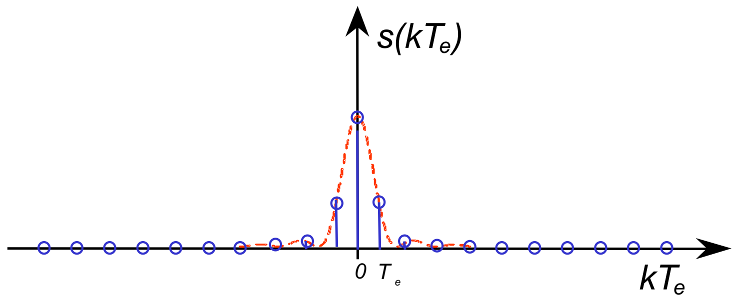
Illustration de la *formule de Poisson*



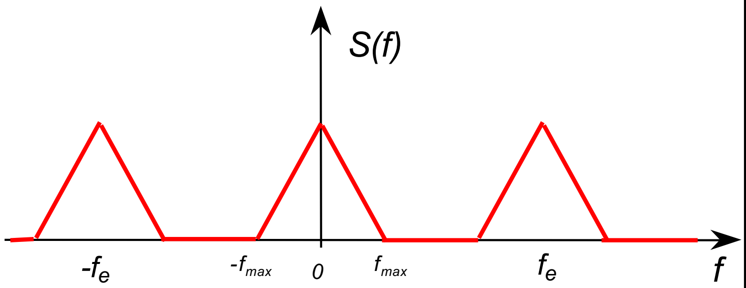
TFtc



Formule de Poisson : ***Echantillonnage*** ➡ ***Périodisation du spectre***



TFtd



$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\, e^{-j2\pi k T_e f} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kf_e)$$

Spectres d'amplitude et de phase

A partir de la relation : $e^{-j2\pi fkT_e} = cos(2\pi fkT_e) - j\,sin(2\pi fkT_e)$

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\,cos(2\pi fkT_e) + j\sum_{k=-\infty}^{+\infty} -s(kT_e)\,sin(2\pi fkT_e)$$
$$= Re\big(S(f)\big) + j\,Im\big(S(f)\big)$$

S(f) est, en général, une **fonction à valeurs complexes.** La TFtd d'un signal peut s'écrire sous une forme exponentielle :

$$S(f) = \left|S(f)\right| e^{j\varphi(f)}$$

Spectre d'amplitude $\quad \left|S(f)\right| = \sqrt{Re\big(S(f)\big)^2 + Im\big(S(f)\big)^2}$

Spectre de phase $\quad \varphi(f) = Arg\big(S(f)\big) = Arc\tan\left(\frac{Im\big(S(f)\big)}{Re\big(S(f)\big)}\right)$

Propriétés des spectres d'amplitude et de phase

- $|S(f)|$ et $\varphi(f)$ sont des fonctions de la variable continue f
  - on parle de spectres continus

- $|S(f)|$ et $\varphi(f)$ sont **périodiques** de période f_e.
  L'intervalle d'observation des spectres est réduit à $\left[\frac{-f_e}{2};\frac{f_e}{2}\right]$

- Si $s(t)$ est à valeurs réelles
  - $|S(f)|$ est pair
  - $\varphi(f)$ est impair

Cette propriété réduit encore l'intervalle d'observation des spectres à la bande de fréquence $\left[0;\frac{f_e}{2}\right]$ qui est appelée **zone utile** d'analyse des spectres

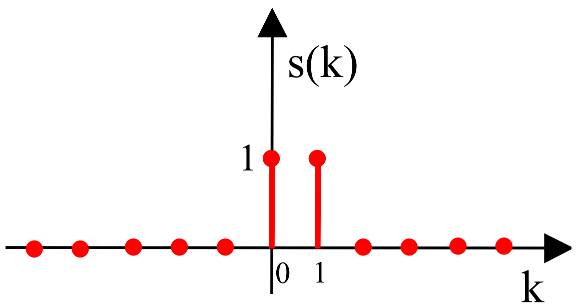
Propriétés de la TFtd

- La ***transformée de Fourier à temps discret*** jouit des mêmes propriétés générales que la ***transformée de Fourier à temps continu***
- ***Linéarité*** $\mathrm{F}\big(ax(k)+by(k)\big)=aX(f)+bY(f)$
- ***Th. du retard*** $\mathrm{F}\big(x(k-k_0)\big)=e^{-j2\pi k_0 T_e f}X(f) \qquad \forall\, k_o \in Z$
- ***Th. de modulation*** $\mathrm{F}\left(x(k)e^{j2\pi f_0 k T_e}\right)=X(f-f_0)$
- ***Facteur d'échelle*** $\mathrm{F}\big(x(ak)\big)=\dfrac{1}{|a|}X\left(\dfrac{f}{a}\right)$
- ***Convolution*** $\mathrm{F}\big(x(k)*y(k)\big)=X(f)\times Y(f)$
- ***Multiplication*** $\mathrm{F}\big(x(k)\times y(k)\big)=X(f)*Y(f)$
- ***Périodicité*** $X(f)=X(f+nf_e) \qquad \forall\, n\in Z$

Exemple

- Soit un signal *s(k)* défini par :

$$s(k) = \delta(k) + \delta(k-1)$$



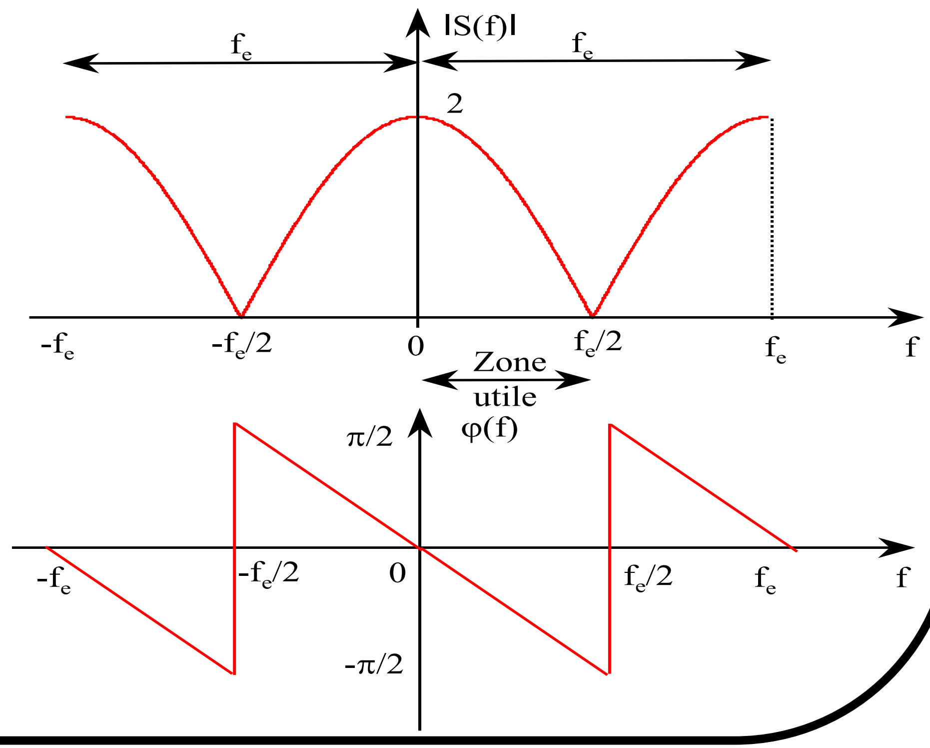
$$S(f) = 1 + e^{-j2\pi\frac{f}{f_e}}$$

$$S(f) = 2\cos\left(\pi\frac{f}{f_e}\right)e^{-j\pi\frac{f}{f_e}}$$

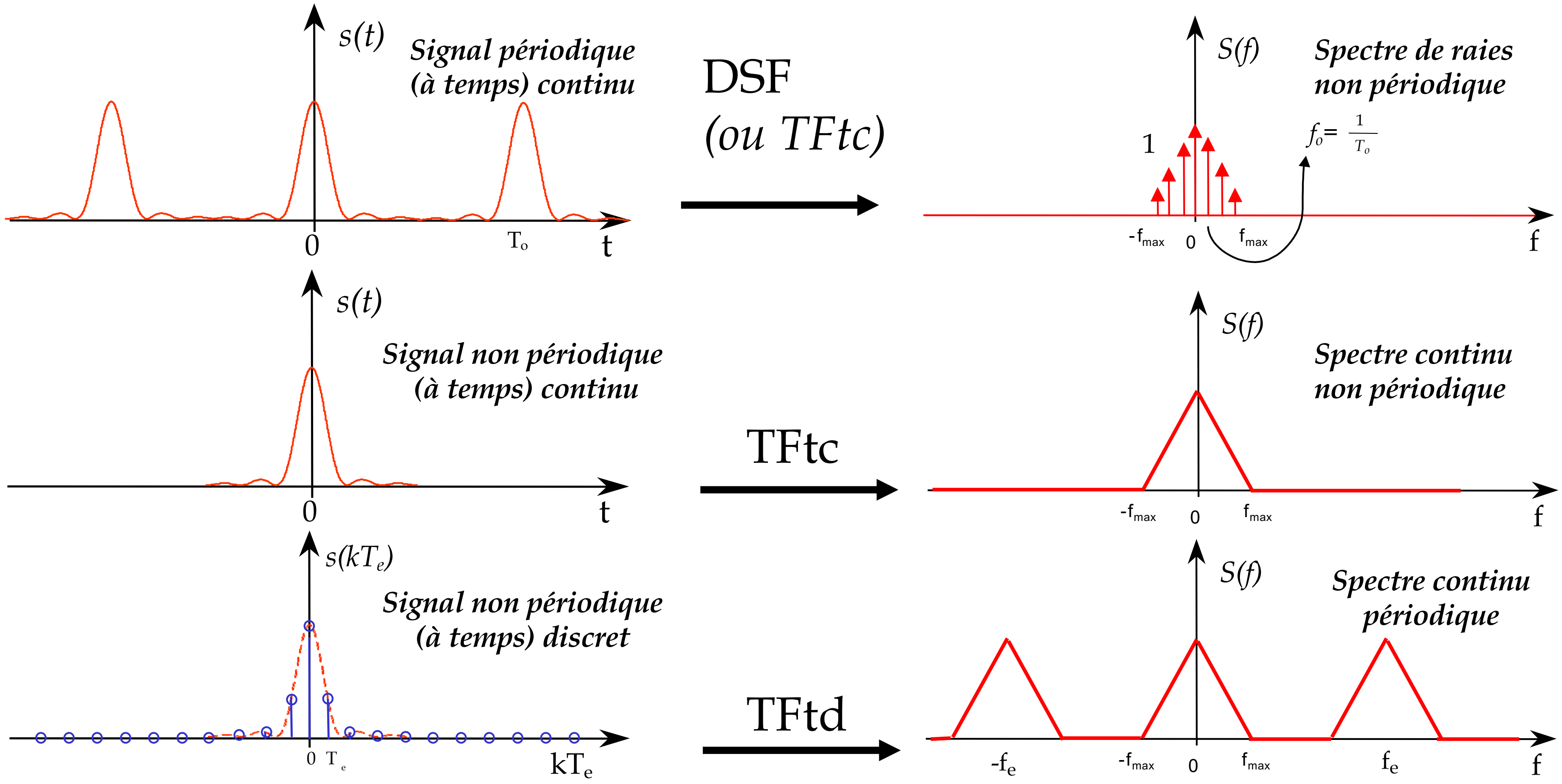
s(k) est un signal à temps discret
Ses spectres d'amplitude et de phase sont donc périodiques de « période » f_e
Etude sur une période, par exemple, sur $[0\,;f_e]$
puis tracé, par exemple, sur $[-f_e\,;f_e]$

$$|S(f)| = 2\left|\cos\left(\pi\frac{f}{f_e}\right)\right|$$

$$\varphi(f) = \begin{cases} -\pi\dfrac{f}{f_e} & si\ 0 \le f < \dfrac{f_e}{2} \\ \pi\left(1-\dfrac{f}{f_e}\right) & si\ \dfrac{f_e}{2} \le f \le f_e \end{cases}$$



Analyse de Fourier – Bilan



Dualité temps/fréquence

Domaine temporel		**Domaine fréquentiel**
CONTINU	$\longleftrightarrow$	**NON PERIODIQUE**
ECHANTILLONNE	$\longleftrightarrow$	**PERIODIQUE**

Signal (à temps) *continu*	**Spectre *non périodique***
Signal *périodique* ($T_0=1/f_0$)	**Spectre *échantillonné* $f_0=1/T_0$ *(de raies)***
Signal *non périodique*	**Spectre *continu***
Signal *échantillonné* $T_e=1/f_e$ *(de raies)*	**Spectre *périodique* $f_e=1/T_e$**