







## Signaux à temps discret

**Hugues GARNIER** 

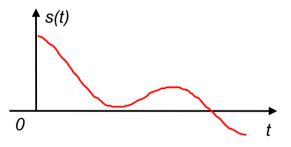
hugues.garnier@univ-lorraine.fr

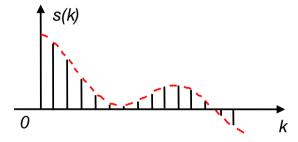




## Signaux à temps discret

- Un signal à temps discret sera noté s(k) avec  $k \in \mathbb{Z}$
- Il est défini uniquement pour des valeurs discrètes du temps
- Il peut résulter de l'échantillonnage d'un signal à temps continu : les valeurs représentent les échantillons du signal





- L'amplitude d'un signal à temps discret peut être quantifiée ou non
  - Dans le premier cas, on parle de signal numérique tandis que dans le second, on parle de signaux échantillonnés
  - Pas de distinction ici. Les effets de la quantification seront donc considérés comme négligeables





## Signal numérique

#### • Définition

- Un signal numérique (ou signal à temps discret) s(k) est une suite numérique, c'est à dire une liste ordonnée de nombres :

$$s(0)=1$$
,  $s(1)=2$ ,  $s(2)=4$ , . . .

- Mode de représentation
  - par une **expression analytique**

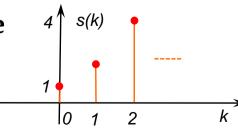
$$s(k) = 2^k, k \ge 1$$
 avec  $s(0) = 1$ 

- par une **relation de récurrence** 

$$s(k) = 2 \times s(k-1), k \ge 1 \text{ avec } s(0) = 1$$

3

- par une représentation graphique







# Caractéristiques des signaux à temps discret

#### Signaux périodiques

- Un signal périodique à temps discret est caractérisé par une loi de répétition cyclique régulière de période  $K_o$ :

$$s(k) = s(k + nK_o)$$
  $K_o \in Z$ ,  $n \in Z$ 

#### Valeur moyenne

- signal non périodique 
$$\overline{s} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} s(k)$$

signal périodique de période  $K_o$   $\overline{s} = \frac{1}{K_o} \sum_{k=0}^{K_o-1} s(k)$ 

$$\overline{s} = \frac{1}{K_o} \sum_{k=0}^{K_o - 1} s(k)$$





## Valeurs caractéristiques des signaux à temps discret

- Valeur efficace
  - signal non périodique

$$S_{\text{eff}}^2 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} s^2(k)$$

signal périodique de période K<sub>o</sub>

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{K_o} \sum_{k=0}^{K_o - 1} s^2(k)$$

5





### Puissance et énergie

• *Energie* (totale) d'un signal à temps discret :

$$E_{s} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| s(k) \right|^{2}$$

• *Puissance moyenne (totale)* d'un signal à temps discret :

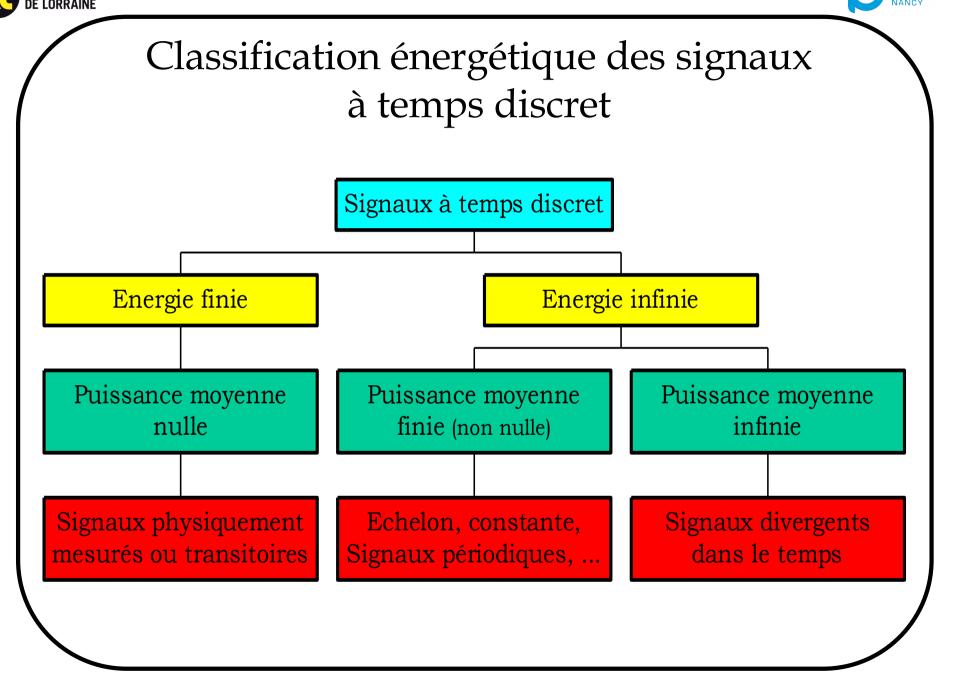
$$P_{s} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \left| s(k) \right|^{2}$$

$$P_s = \frac{1}{K_o} \sum_{k=0}^{K_o - 1} |s(k)|^2 = S_{eff}^2$$

Comme dans le cas des signaux à temps continu, on peut faire une classification des signaux à temps discret en fonction de leur caractère énergétique







TNS 7 H. Garnier

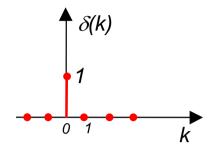




## Signaux à temps discret usuels

#### Impulsion de Kronecker

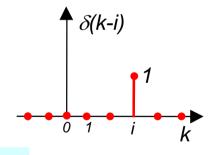
$$\delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & pour & k = 0 \\ 0 & pour & k \neq 0 \end{vmatrix}$$



Elle ne doit pas être confondue avec l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  qui est un signal à temps continu. Elle est bien plus facile à manipuler!

#### Impulsion de Kronecker retardée

$$\delta(k-i) = \begin{vmatrix} 1 & pour & k=i \\ 0 & pour & k \neq i \end{vmatrix}$$



Tout signal 
$$s(k)$$
 peut s'écrire :  $s(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s(i)\delta(k-i)$ 

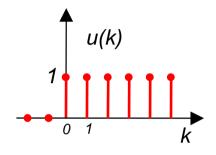




## Signaux à temps discret usuels

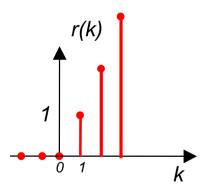
• Echelon unité

$$u(k) = \begin{cases} 1 & pour \ k \ge 0 \\ 0 & pour \ k < 0 \end{cases}$$



• Rampe unité

$$r(k) = \begin{cases} k & pour \ k \ge 0 \\ 0 & pour \ k < 0 \end{cases}$$



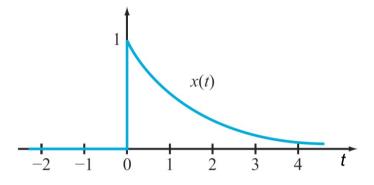




## Signaux à temps discret usuels

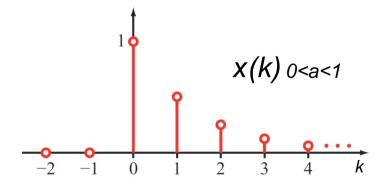
• Rappel: signal exponentiel à temps continu

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$



• Signal géométrique à temps discret (ou exponentiel de base a)

$$x(k) = a^k u(k)$$



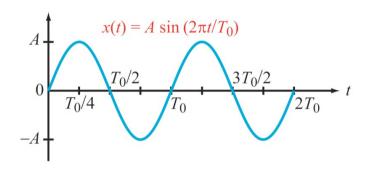




## Signal sinusoïdal à temps discret

• Rappel: signal sinusoïdal à temps continu

$$x(t) = A\sin(\omega_o t + \varphi_o)$$
  
période:  $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ ,  $\omega_o$  en rad/s



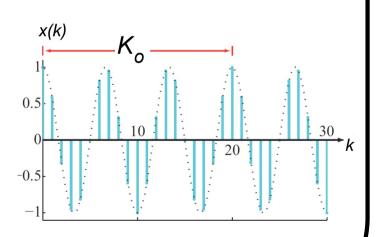
• Signal sinusoïdal à temps discret

$$x(k) = A\sin\left(\Omega_o k + \phi_o\right)$$

$$x(k) \text{ périodique de période } K_o = \frac{2\pi}{\Omega_o}, K_o \in Z$$

$$\sin\Omega_o = \frac{M}{N} 2\pi \text{ avec } M \text{ et } N \text{ entiers}, \quad \Omega_o \text{ en rad}$$

$$K_o \text{ plus petit entier > 0 tel que } \frac{M}{N} \text{ entier}$$



Un signal sinusoïdal à temps discret n'est pas toujours périodique!

11





# Signal sinusoïdal à temps discret Périodique ou non ?

• Les signaux sinusoïdaux suivants sont-ils périodiques ?

 $\Rightarrow K_0 = 3$ 

• Si oui, déterminer K<sub>o</sub>

$$X(k) = A\sin(\Omega_o k + \phi_o)$$

$$\Omega_o = \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3} 2\pi \text{ avec } M = 1 \text{ et } N = 3$$
  
 $K_o \text{ plus petit entier > 0 tel que } \frac{M}{N} = \frac{1}{3} \text{ entier}$ 

$$\Omega_o = \sqrt{2}\pi$$

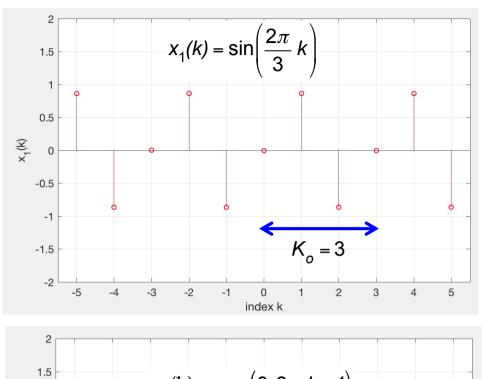
$$\sqrt{2} \neq \frac{M}{N} \Rightarrow x_2(k) : \text{non périodique}$$

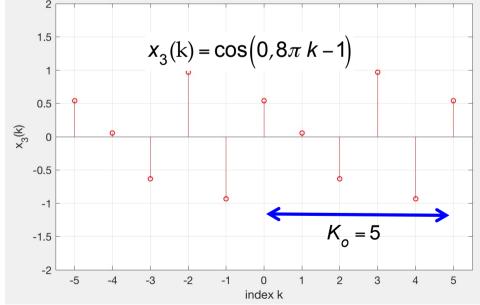
$$\square \quad x_3(k) = \cos(0.8\pi \, k - 1)$$

$$\Omega_o = 0.8\pi = 0.4 \times 2\pi = \frac{2}{5} \times 2\pi \text{ avec } M = 2 \text{ et } N = 5$$
 $K_o \text{ plus petit entier > 0 tel que } \frac{M}{N} = \frac{2}{5} \text{ entier}$ 
 $\Rightarrow K_o = 5$ 







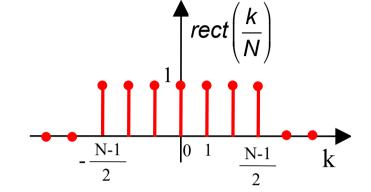






## Fenêtre rectangulaire discrète

$$rect\left(\frac{k}{N}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \forall & |k| \le \frac{N-1}{2} \\ 0 & \forall & |k| > \frac{N-1}{2} \end{vmatrix}$$



- Signal très utilisé en traitement du signal, notamment au travers des notions de filtrage, de fenêtrage,...
- Elle peut être définie à partir de l'échelon unité discret :

$$rect\left(\frac{k}{N}\right) = u\left(k + \frac{N-1}{2}\right) - u\left(k - \frac{N+1}{2}\right)$$

- Avec cette définition, la fenêtre rectangulaire possède obligatoirement un *nombre Nimpair* d'échantillons non nuls





## Produit de convolution à temps discret

#### Définition

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)y(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(i)x(k-i)$$

#### • Propriétés

- Commutativité  $x(k)^* y(k) = y(k)^* x(k)$ 

- Distributivité x(k)\*(y(k)+z(k)) = x(k)\*y(k)+x(k)\*z(k)

- Associativité x(k)\*(y(k)\*z(k)) = (x(k)\*y(k))\*z(k) = x(k)\*y(k)\*z(k)

- Elément neutre  $x(k) * \delta(k) = \delta(k) * x(k) = x(k)$ 





## Objectifs à l'issue du cours sur les signaux à temps discret

• Connaître les signaux à temps discrets usuels : impulsion unité, échelon, fenêtre rectangulaire, ...

• Savoir déterminer si un signal sinusoïdal à temps discret est périodique ou non

• Connaître la classification énergétique des signaux à temps discret

• Connaître l'opération de convolution discrète et ses propriétés