Traitement du Signal

DS final 2018/2019 - 1h30

2 feuilles A4 autorisées. Calculatrice autorisée.
Les exercices doivent être résolus dans l'ordre indiqué.
Soin, clarté, propreté et orthographe seront appréciés par le correcteur.

1 Filtre moyenneur de l'algorithme de Karplus-Strong (30 mn)

L'algorithme de Karplus-Strong est une méthode de synthèse sonore permettant de générer simplement une note de guitare. Le schéma de principe de l'algorithme est présenté sur la figure 1.

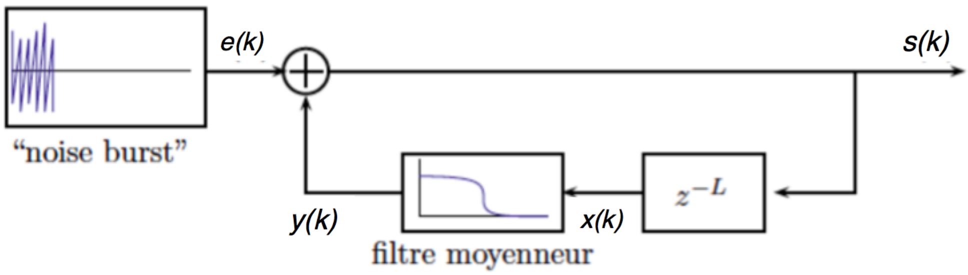

Figure 1: Schéma fonctionnel de l'algorithme de Karplus-Strong

On s'intéresse dans cet exercice au filtre moyenneur, dont la relation entrée/sortie est donnée par :

$$y(k) = \frac{1}{2}x(k) + \frac{1}{2}x(k-1)$$

1.1 Déterminer et tracer sa réponse impulsionnelle $h(k)$.

1.2 En déduire en justifiant le type de filtre : RIF ou RII.

1.3 Déterminer la fonction de transfert $H(z)$.

1.4 Déterminer les pôles et les zéros.

1.5 Le filtre est-il stable ? Justifier.

1.6 Déterminer analytiquement la réponse fréquentielle $H(f)$.

1.7 En déduire le module et la phase de la réponse fréquentielle.

1.8 Tracer l'allure de la réponse fréquentielle en amplitude et en phase pour $0 \leq f \leq \frac{f_e}{2}$.

1.9 En déduire le type de filtrage réalisé et préciser la valeur de la fréquence de coupure.

2 Analyse d'un signal aléatoire (30 mn)

On considère le filtre numérique défini par la relation de récurrence suivante :

$$y(k) = -0,5y(k-1) + x(k)$$

où $x(k)$ et $y(k)$ sont des signaux aléatoires stationnaires au second ordre et $y(k) = 0$, pour $k < 0$.

2.1 Déterminer la fonction de transfert $H(z)$.

2.2 Ce filtre est-il stable ? Justifier.

2.3 On suppose f_e=1. Déterminer analytiquement la réponse fréquentielle $H(f)$.

2.4 Montrer que le module de $H(f)$ au carré peut s'écrire :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} + \cos\big(2\pi f\big)}$$

2.5 On suppose dans un premier temps que le signal à l'entrée du filtre est un bruit blanc ($x(k) = e(k)$) de variance σ_e^2. Rappeler l'expression de sa fonction d'auto-corrélation $R_{ee}(\tau)$ puis tracer cette fonction.

2.6 En déduire la densité spectrale de puissance $\Phi_e(f)$ du signal aléatoire $e(k)$. Représenter $\Phi_e(f)$.

2.7 Déterminer la densité spectrale de puissance $\Phi_y(f)$ du signal aléatoire $y(k)$ obtenu en sortie du filtre lorsque $x(k) = e(k)$.

2.8 On suppose à présent que $x(k)$ est un signal aléatoire stationnaire au second ordre, centré et de fonction d'auto-corrélation :

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter $R_{xx}(\tau)$.

2.9 Déterminer la densité spectrale de puissance $\Phi_x(f)$ du signal aléatoire $x(k)$. Simplifier son expression.

2.10 Déterminer la densité spectrale de puissance $\Phi_y(f)$ du signal aléatoire $y(k)$ obtenu en sortie du filtre.

3 Echantillonnage et reconstruction d'un signal analogique (30 mn)

On s'intéresse à la reconstruction d'un signal analogique $x(t)$ à partir de la suite de ses échantillons $x(kT_e), k \in Z$ (T_e désigne la période d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T_e}$). Le signal analogique $x(t)$ a pour expression :

$$x(t) = B\mathrm{sinc}(Bt) = B\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}$$

avec $B > 0$. Le signal analogique reconstruit à partir des échantillons (qui peut différer du signal original $x(t)$), sera noté $x_r(t)$.
Par ailleurs le signal "échantillonné idéal" noté $x_e(t)$ est analogique et résulte de la multiplication du signal $x(t)$ par un peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ de période T_e :

$$x_e(t) = x(t) \times \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

3.1 Représenter graphiquement $x(t)$ et $x_e(t)$ l'un en dessous de l'autre pour une valeur suffisamment faible de T_e.
3.2 On rappelle que le spectre $X(f)$ du sinus cardinal $x(t)$ est une fenêtre rectangulaire de largeur $B/2$ centrée sur 0 :

$$X(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

On rappelle également que le spectre d'un peigne de Dirac de période T_e est un peigne de Dirac de "période" f_e pondéré par $\frac{1}{T_e}$:

$$\delta_{fe}(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e)$$

Tracer $X(f)$ et $\delta_{f_e}(f)$ l'un en dessous de l'autre.
3.3 Déterminer l'expression du spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné idéal $x_e(t)$ en fonction de $X(f)$ et $\delta_{fe}(f)$.
3.4 En déduire par un raisonnement graphique le tracé du spectre $X_e(f)$ du signal $x_e(t)$.
3.5 D'après ce spectre, quelle est la valeur maximale de f_e permettant théoriquement une reconstruction sans aucune perte d'information, du signal $x(t)$ à partir de ses échantillons ? Exprimer f_e en fonction de B. On adoptera dans la suite cette valeur pour f_e.
3.6 Proposer une méthode pour reconstruire $x(t)$ à partir de ses échantillons $x(kT_e), k \in Z$ sans aucune perte d'information ("reconstruction parfaite"). Une telle reconstruction est-elle réalisable ?
3.7 On propose de reconstruire le signal analogique en conservant/bloquant sa valeur entre deux périodes d'échantillonnage. Critiquer cette méthode de reconstruction et proposez-en une autre.

Quelques Définitions

Soient deux processus aléatoires stationnaires $\mathbf{x}(k)$ et $\mathbf{y}(k)$, on rappelle les définitions suivantes :

- **Moyenne** de $\mathbf{y}(k)$
$$m_{\mathbf{y}} = E\big(\mathbf{y}(k)\big)$$
- **Variance** de $\mathbf{y}(k)$
$$\sigma_{\mathbf{y}}^2 = E\big(\mathbf{y}(k) - E(\mathbf{y}(k)^2)\big)$$
- **Fonction d'inter-corrélation**
$$R_{\mathbf{yx}}(\tau) = E\big(\mathbf{y}(k)\mathbf{x}(k-\tau)\big)$$
- **Fonction d'auto-corrélation**
$$R_{\mathbf{yy}}(\tau) = E\big(\mathbf{y}(k)\mathbf{y}(k-\tau)\big)$$
- **Densité spectrale de puissance**. C'est la transformée de Fourier à temps discret de la fonction d'auto-corrélation :
$$\Phi_{\mathbf{y}}(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{yy}}(\tau) e^{-j2\pi f \tau T_e}$$
- **Corrélation**. Si la valeur de $\mathbf{y}(k)$ à l'instant k n'est pas corrélée à la valeur de $\mathbf{x}(k-\tau)$ (pour une valeur de τ fixée) alors
$$R_{\mathbf{yx}}(\tau) = 0$$
- **Dépendance**. Si $\mathbf{y}(k)$ et $\mathbf{x}(k)$ sont indépendants alors
$$R_{\mathbf{yx}}(\tau) = 0 \quad \forall \quad \tau$$
- **Bruit blanc**. Un bruit blanc $\mathbf{e}(k)$ est un processus aléatoire centré très spécial. Sa densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences. Sa fonction d'auto-corrélation est une impulsion discrète en 0 d'amplitude $\sigma_{\mathbf{e}}^2$. La valeur du processus à l'instant k est donc non-corrélée avec les valeurs du processus aux autres instants.
- **Filtrage d'un processus aléatoire**. Soit un processus aléatoire stationnaire $\mathbf{x}(k)$ de densité spectrale de puissance $\Phi_{\mathbf{x}}(f)$ mis à l'entrée d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(k)$ et de réponse fréquentielle $H(f)$, on montre que le processus aléatoire en sortie du filtre est également stationnaire et possède les propriétés suivantes :
  - Sa moyenne est :
  $$m_{\mathbf{y}} = H(0) m_{\mathbf{x}}$$
  - Sa densité spectrale de puissance est :
  $$\Phi_{\mathbf{y}}(f) = |H(f)|^2 \Phi_{\mathbf{x}}(f).$$