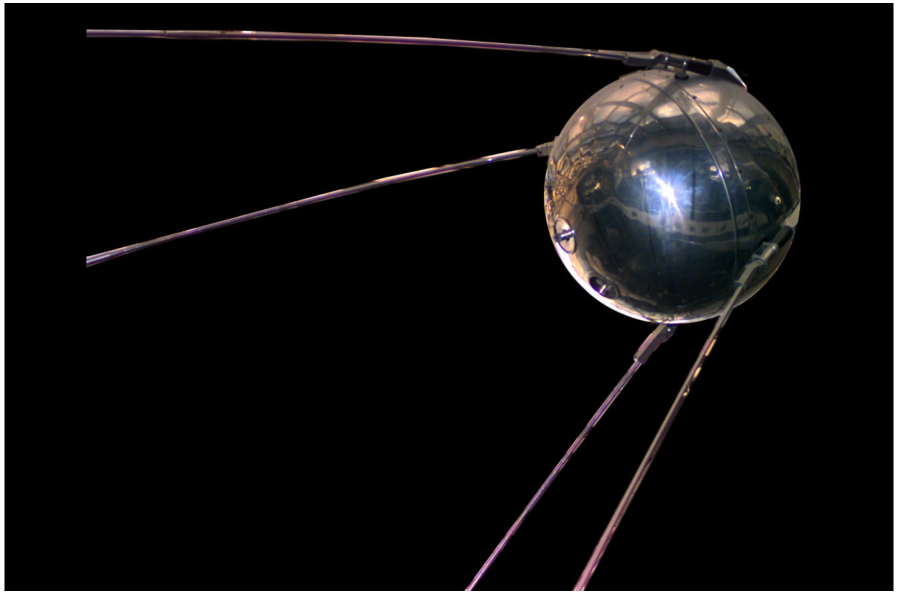
Rappels sur la théorie de l'échantillonnage

De l'analogique au numérique

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Image du jour



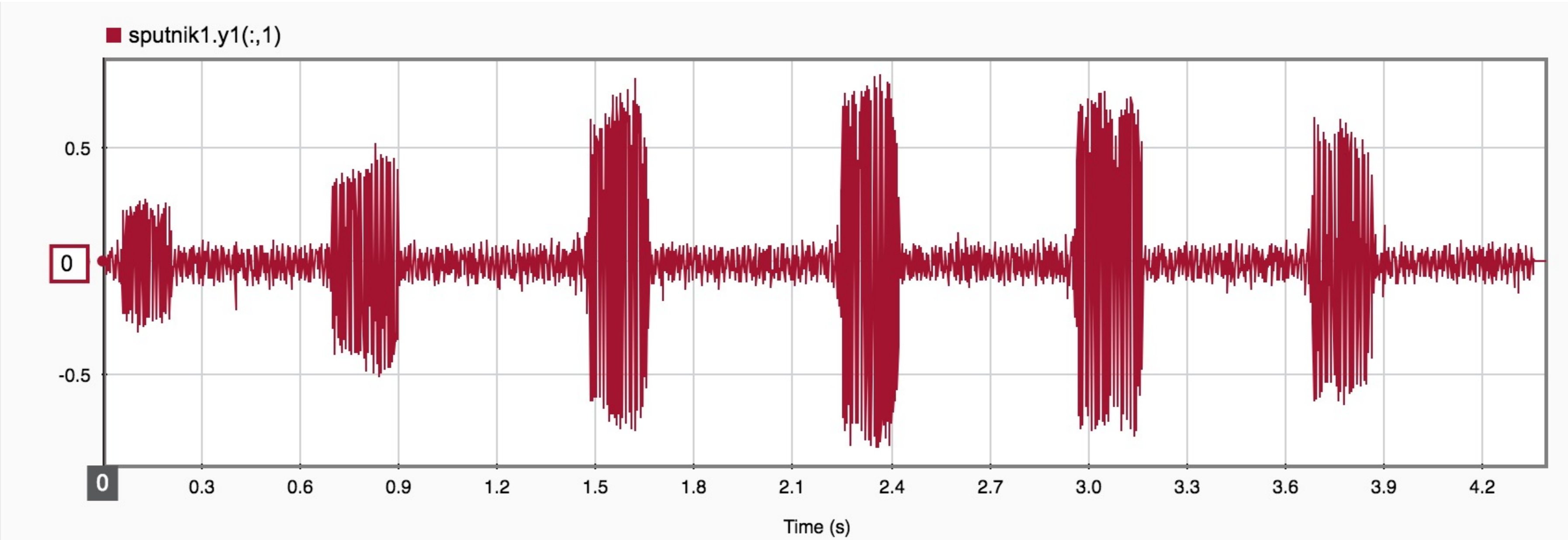
- Le 4 octobre 1957, Spoutnik-1, premier satellite artificiel *(forme sphérique de 83 cm de diamètre équipé de 4 antennes)* est mis en orbite autour de la Terre par les Russes
- 1958 : la NASA est créée

Signal du jour : « Bip-bip » émis par Spoutnik

Premier signal extra-terrestre créé par l'homme

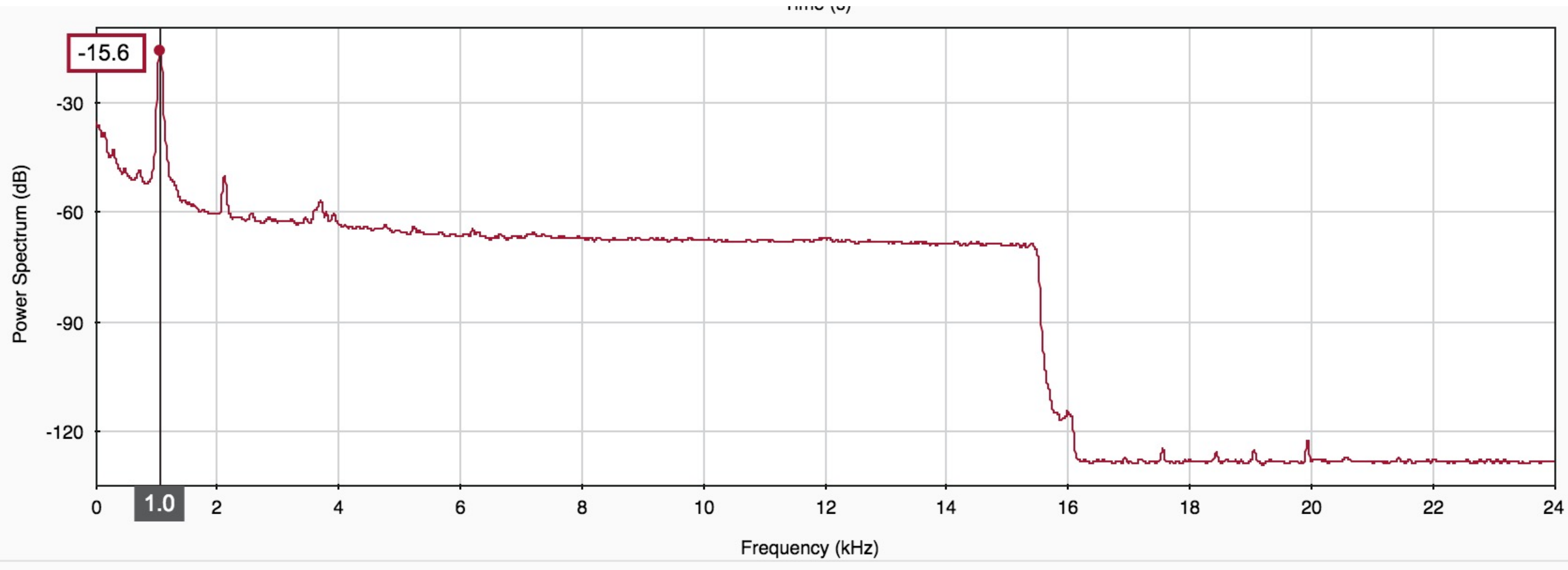
S'il est invisible depuis la terre, Spoutnik-1 se fait par contre entendre !

Ses « bip-bip » stridents, diffusés par deux émetteurs dans les 20 et 40 MHz, ont pu être captés par les radio-amateurs du monde entier

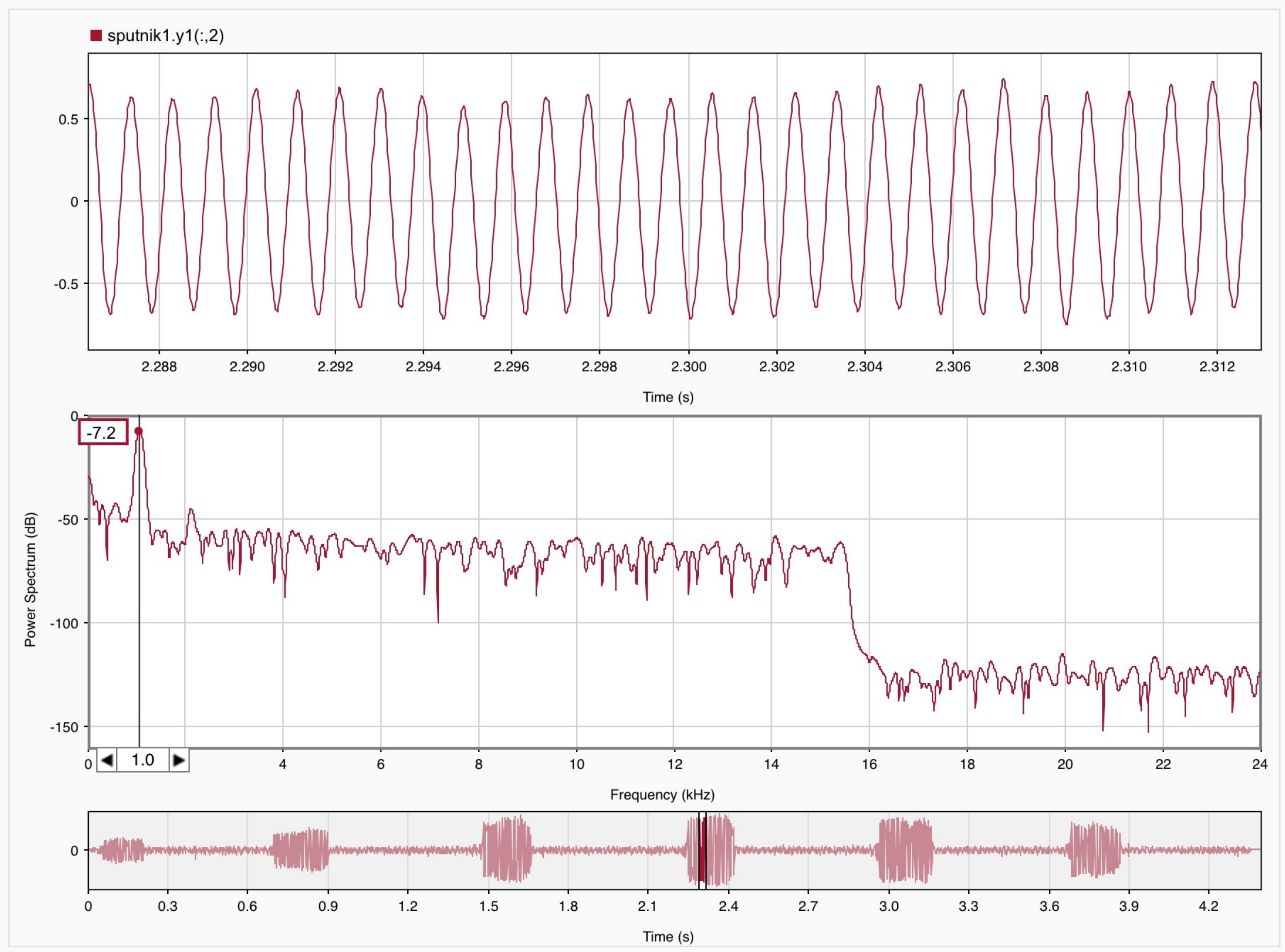


Source : https://soundcloud.com/nasa/sputnik-beep

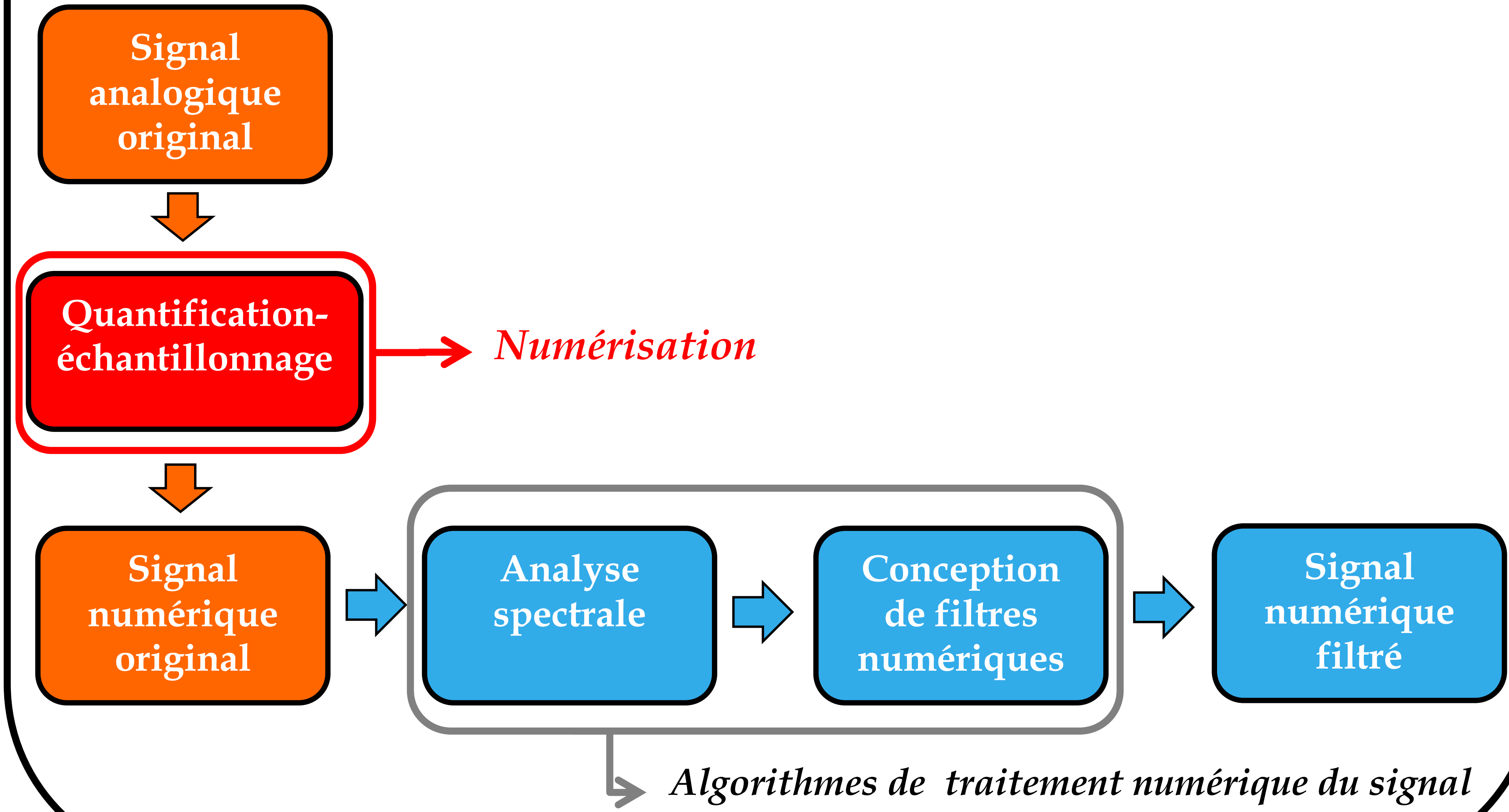
Spectre du signal envoyé par Sputnik



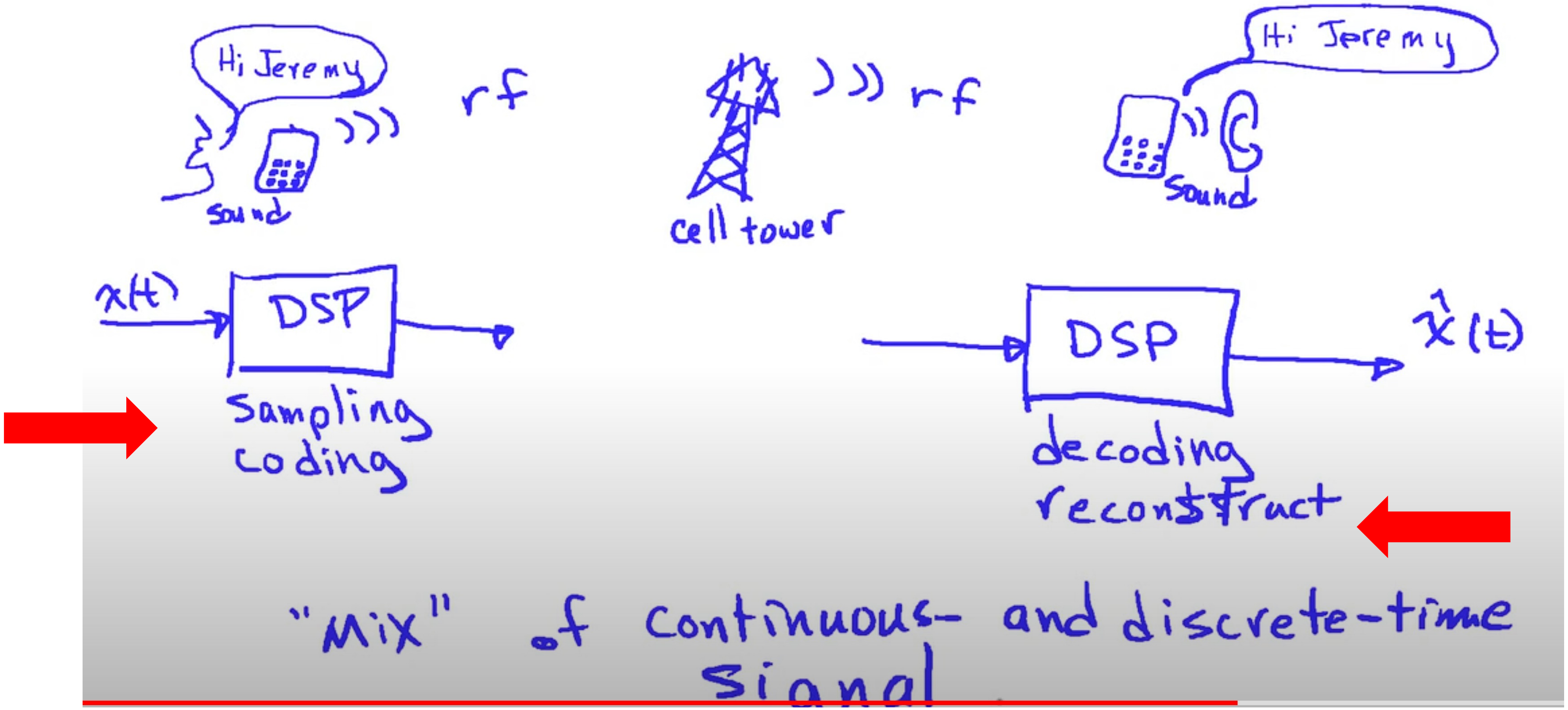
Spectre du « bip » envoyé par Sputnik



Etapes principales pour effectuer un traitement numérique sur un signal analogique

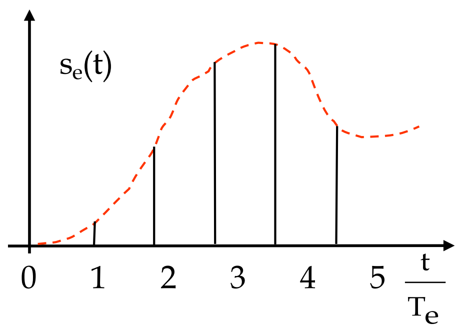


Numérisation des signaux dans votre vie quotidienne … sans le savoir

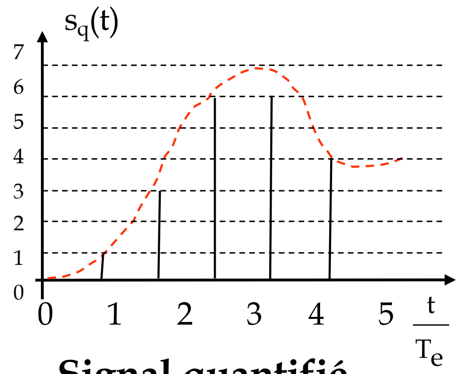


Conversion d'un signal analogique en signal numérique

- La conversion est caractérisée par deux discrétisations
  - la 1ère concerne le ***temps*** et porte le nom d'***échantillonnage*** : cela consiste à prendre des échantillons du signal analogique à des instants régulièrement espacés
  - La 2e concerne ***l'amplitude*** et porte le nom de ***quantification*** : cela consiste à coder l'amplitude du signal sur un nombre fini d'éléments binaires : CAN

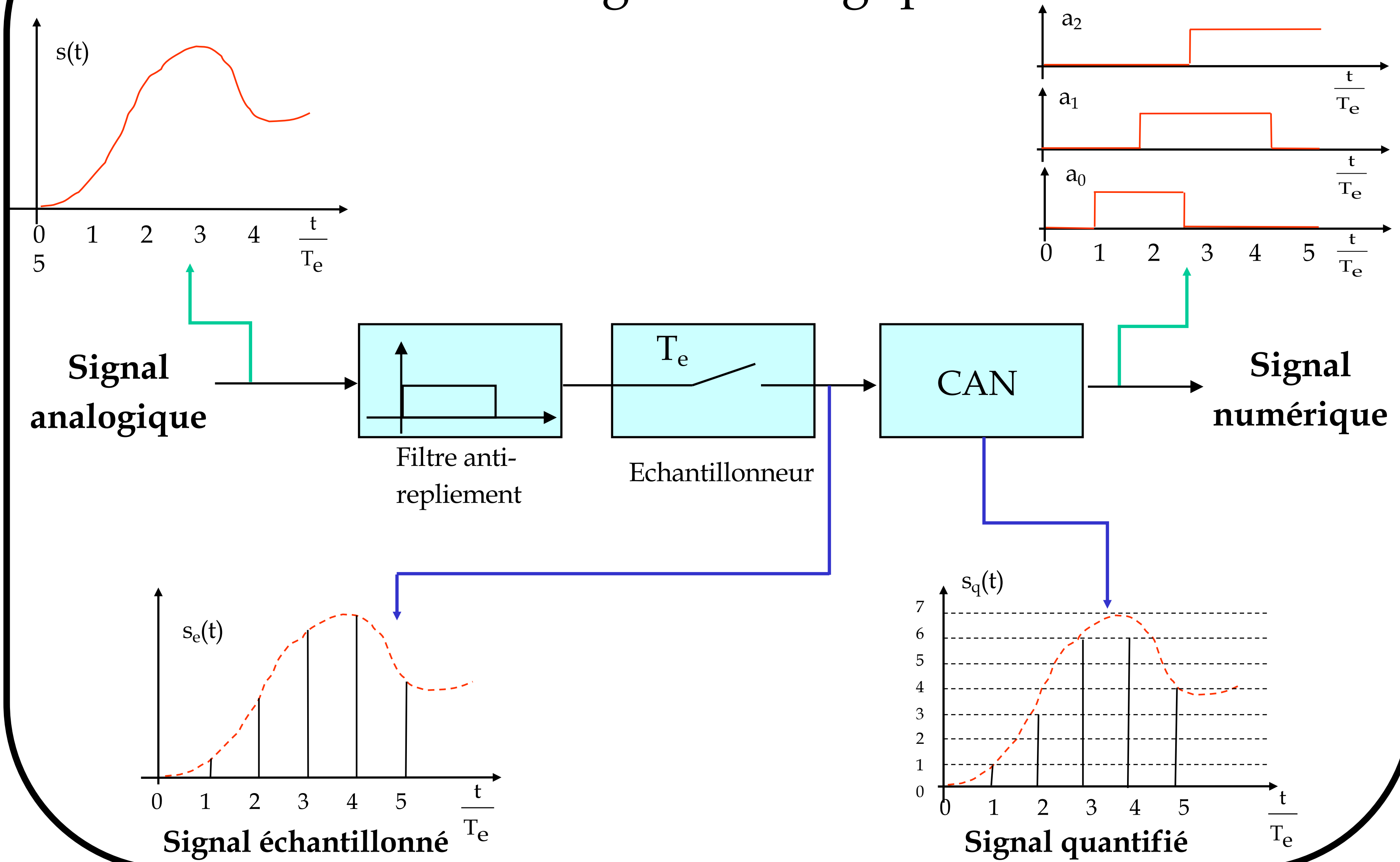


Signal échantillonné



Signal quantifié

Synoptique d'une chaîne de numérisation d'un signal analogique



Choix à effectuer lors de la numérisation d'un signal analogique

- **Précision de numérisation via le choix du pas de quantification**
  - Ce problème peut être assez facilement traité en augmentant le nombre de bits du CAN

Résolution	Niveau de qualité	Valeurs d'amplitude	Plage dynamique
8 bits	Téléphonie	256	48 dB
16 bits	CD audio	65 536	96 dB
24 bits	DVD audio	16 777 216	144 dB
32 bits	Optimale	4 294 967 296	192 dB

  - Plus le nombre de bits est élevé, plus le nombre de valeurs possibles est important, plus la plage dynamique est grande et meilleure est la précision de numérisation

Choix à effectuer lors de la numérisation d'un signal analogique

- **Précision de discrétisation via le choix de la fréquence d'échantillonnage**
  - f_e doit être suffisamment élevée si l'on ne veut pas perdre trop d'informations sur le signal
  - Cependant plus f_e est élevée (T_e faible), plus le temps disponible pour effectuer les traitements numériques sera court et plus le nombre d'échantillons à traiter sera important
  - le signal analogique devra pouvoir être reconstitué (interpolé) à partir des échantillons *(il existe une infinité de signaux qui passent par ces échantillons)*

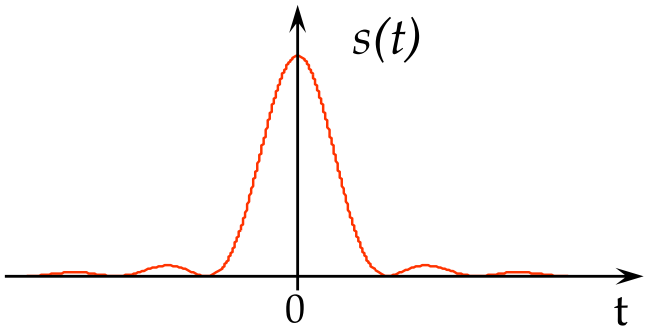
Comment choisir la fréquence d'échantillonnage f_e ?

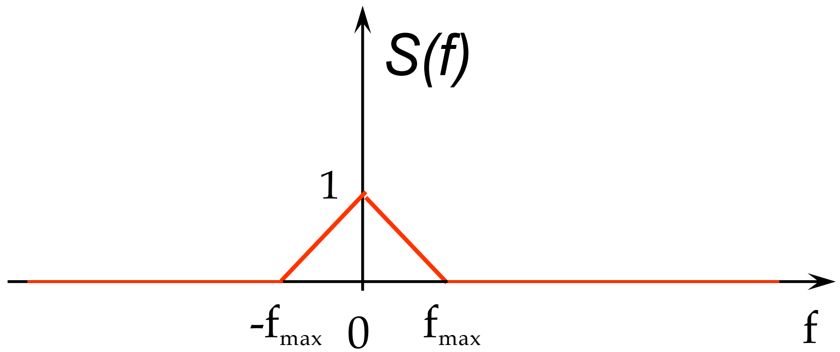
Hypothèse : le signal *s(t)* est à bande limitée

- Soit *s(t)* un signal à temps continu et *S(f)* son spectre

  S(f) est supposé à support borné :

$$S(f)=0 \text{ pour } |f|>f_{max}$$





Théorème d'échantillonnage (*Shannon 1949*)

Un signal à bande limitée dans l'intervalle de fréquence [$-f_{max}$; $+f_{max}$]

peut être reconstruit (interpolé) exactement à partir de ses échantillons

si $f_e \geq 2\, f_{max}$

La fréquence limite $f_e/2$ est appelée ***fréquence de Nyquist***

Claude Shannon

- Ingénieur et mathématicien américain, né en 1916
- Père de la *théorie de l'information*, c.a.d de la ***théorie mathématique de la communication de l'information***
- Inventeur du bit
- Fut le 1er à comprendre que le monde pouvait se décrire avec des 0 et des 1

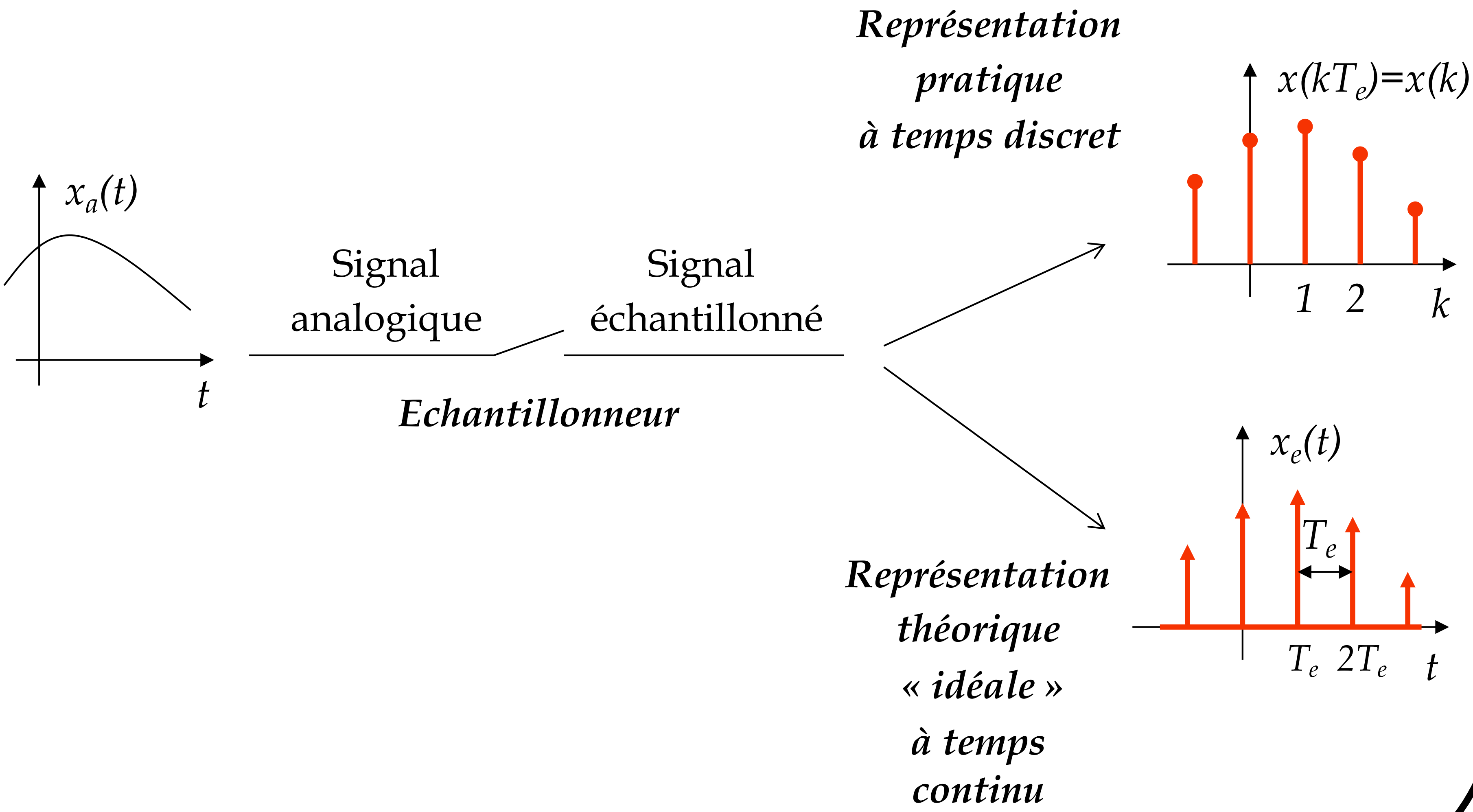
L'HÉRITAGE DE SHANNON

Envoyer un mail, compresser un fichier - un texte, une image, un son -, passer une IRM : nous vivons au quotidien les apports concrets de la Théorie de Shannon. Des technologies qui n'existaient pas il y a deux ou trois générations sont devenues centrales pour nos systèmes de communication et de traitement de l'information.

- Visiter le site : centenaire-shannon.cnrs.fr

scroll

Echantillonnage - Notations



Modélisation mathématique de l'échantillonnage idéal

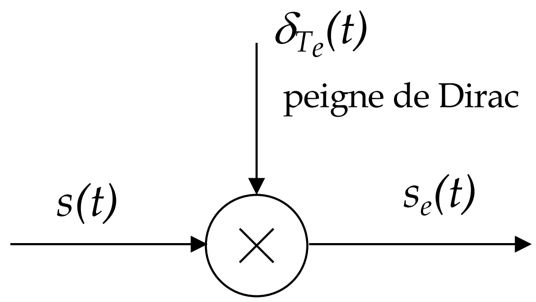
- L'opération d'***échantillonnage idéal*** d'un signal analogique revient à multiplier ce dernier par un peigne de Dirac

$$s_e(t) = s(t) \times \delta_{T_e}(t)$$

$$s_e(t) = s(t) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t - kT_e)$$

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e)\,\delta(t - kT_e)$$



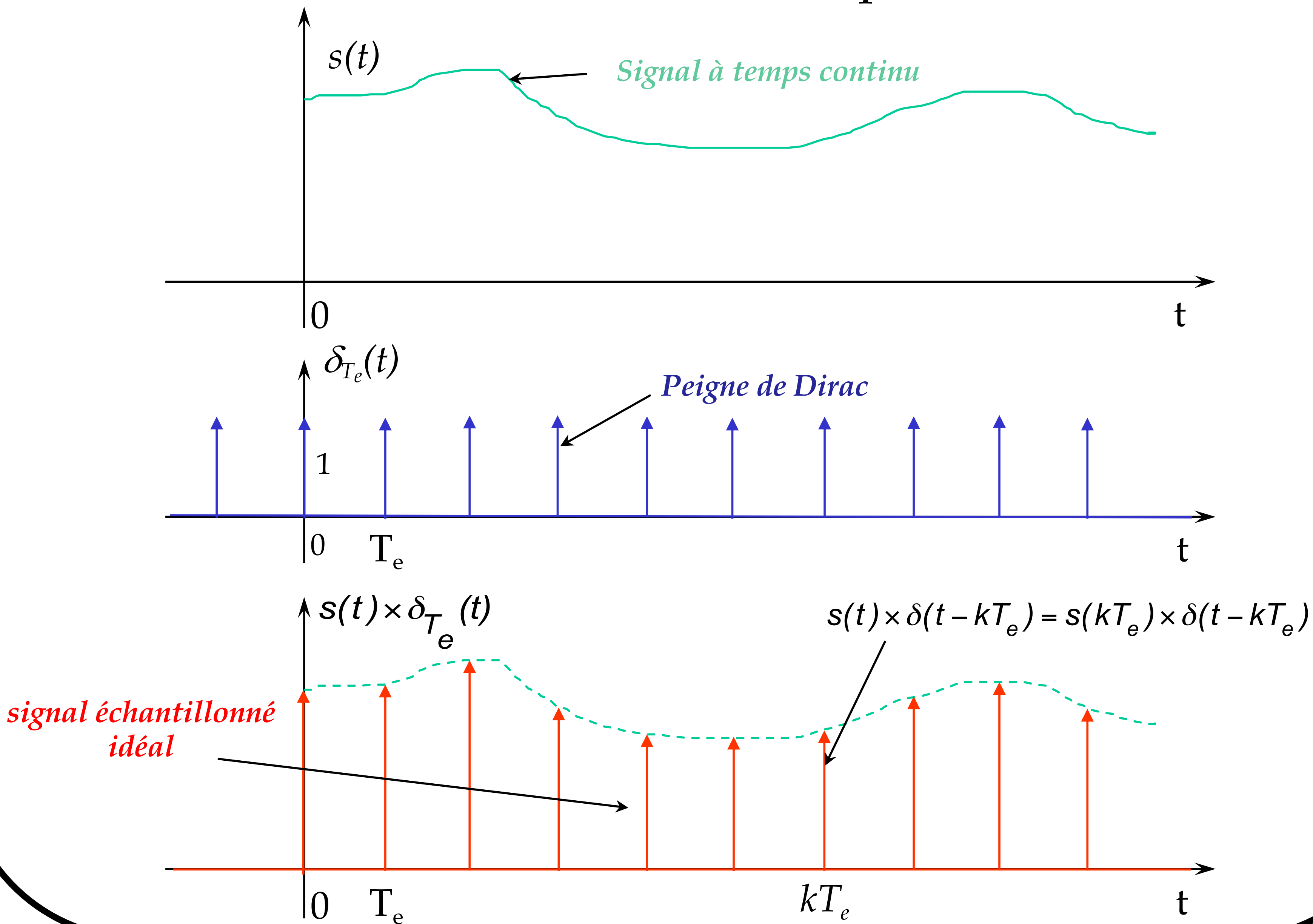
Propriété de l'impulsion de Dirac

$$s(t)\,\delta(t - t_o) = s(t_o)\,\delta(t - t_o)$$

Le signal ***échantillonné idéal*** $s_e(t)$ est un ***signal à temps continu***

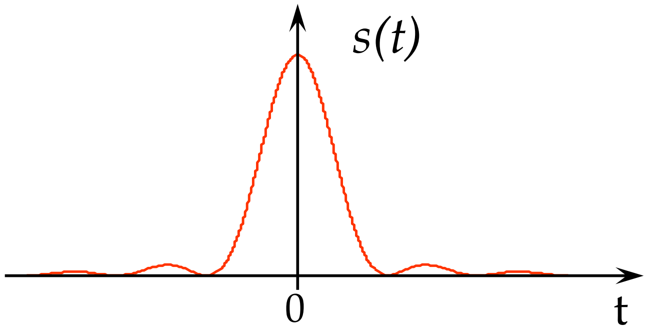
- Il consiste en un train d'impulsions de Dirac équidistantes pondérée à chaque instant $t=kT_e$ par l'amplitude de $s(kT_e)$ à cet instant

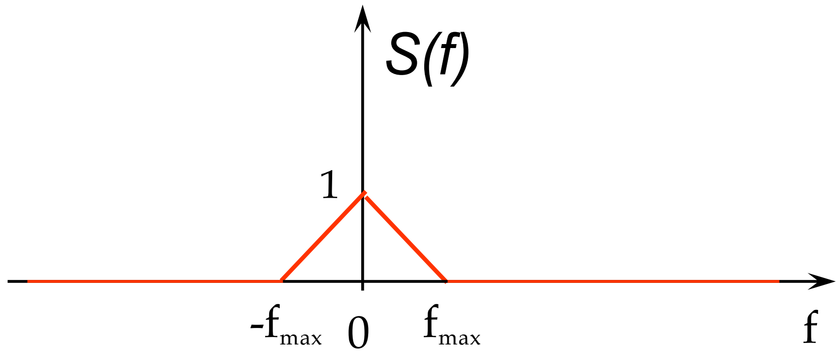
Illustration graphique de *l'échantillonnage idéal* dans le domaine temporel



Effet de l'échantillonnage idéal dans le domaine fréquentiel

- Soit $s(t)$ un signal à temps continu et $S(f)$ son spectre
  - $S(f)$ est supposé à support borné : $S(f)=0$ pour $|f|>f_{max}$





- Le signal échantillonné idéalement s'écrit :

$$s_e(t) = s(t) \times \delta_{T_e}(t)$$

- D'après les propriétés de la transformée de Fourier :

$$\mathrm{F}\left(s_e(t)\right) = \mathrm{F}\left(s(t) \times \delta_{T_e}(t)\right) = S(f) * \mathrm{F}\left(\delta_{T_e}(t)\right)$$

Produit de convolution

Effet de l'échantillonnage idéal dans le domaine fréquentiel

$$S_e(f) = \mathcal{F}\left(s(t) \times \delta_{T_e}(t)\right) = S(f) * \mathcal{F}\left(\delta_{T_e}(t)\right)$$

$$\frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-kf_e)$$

$$S_e(f) = S(f) * \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-kf_e)$$

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f-kf_e)$$

$$S(f) * \delta(f-kf_e) = S(f-kf_e)$$

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f-kf_e) = \cdots + \frac{1}{T_e}S(f+f_e) + \frac{1}{T_e}S(f) + \frac{1}{T_e}S(f-f_e) + \cdots$$

Le spectre d'un signal échantillonné est ***périodique***

Il correspond au spectre du signal à temps continu périodisé à la période « fréquentielle » $f_e = \frac{1}{T_e}$ *et pondéré par* $\frac{1}{T_e}$

Rappel – Illustration graphique de la convolution d'un signal par une impulsion de Dirac

- Convoluer un signal $s(t)$ par une impulsion de Dirac retardée de t_o revient *à décaler le signal de t_o*

$$s(t) * \delta(t - t_o) = s(t - t_o)$$

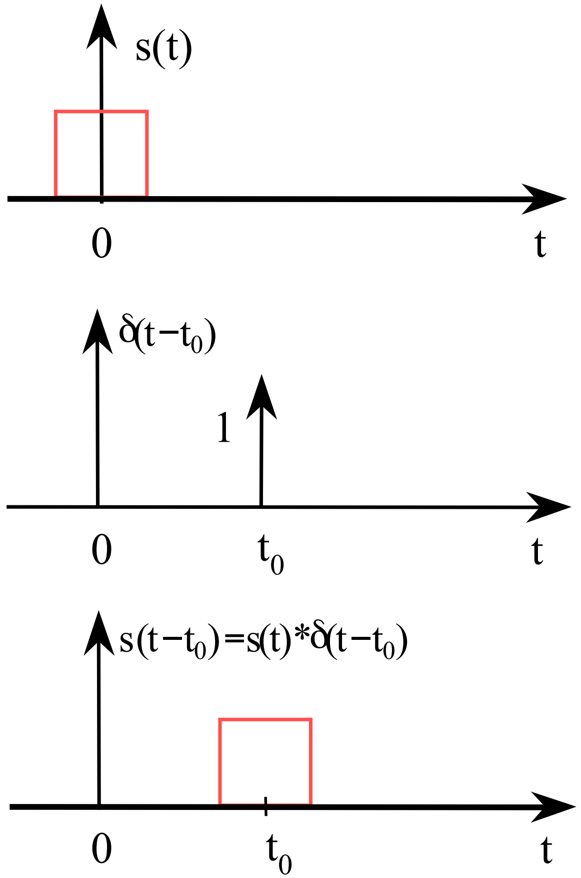
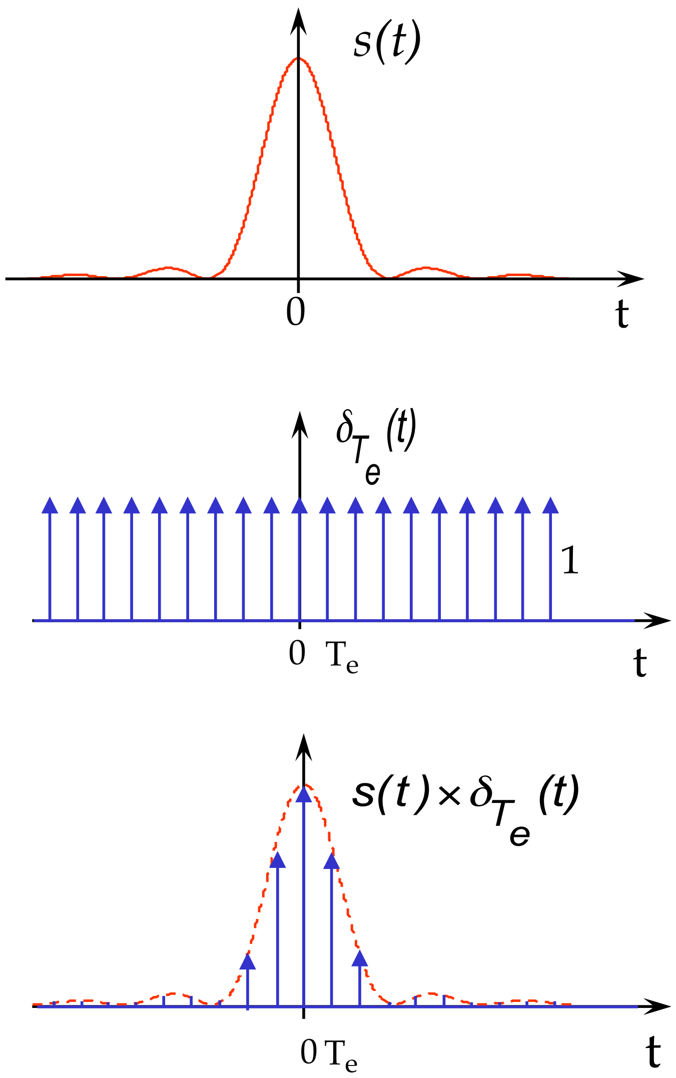


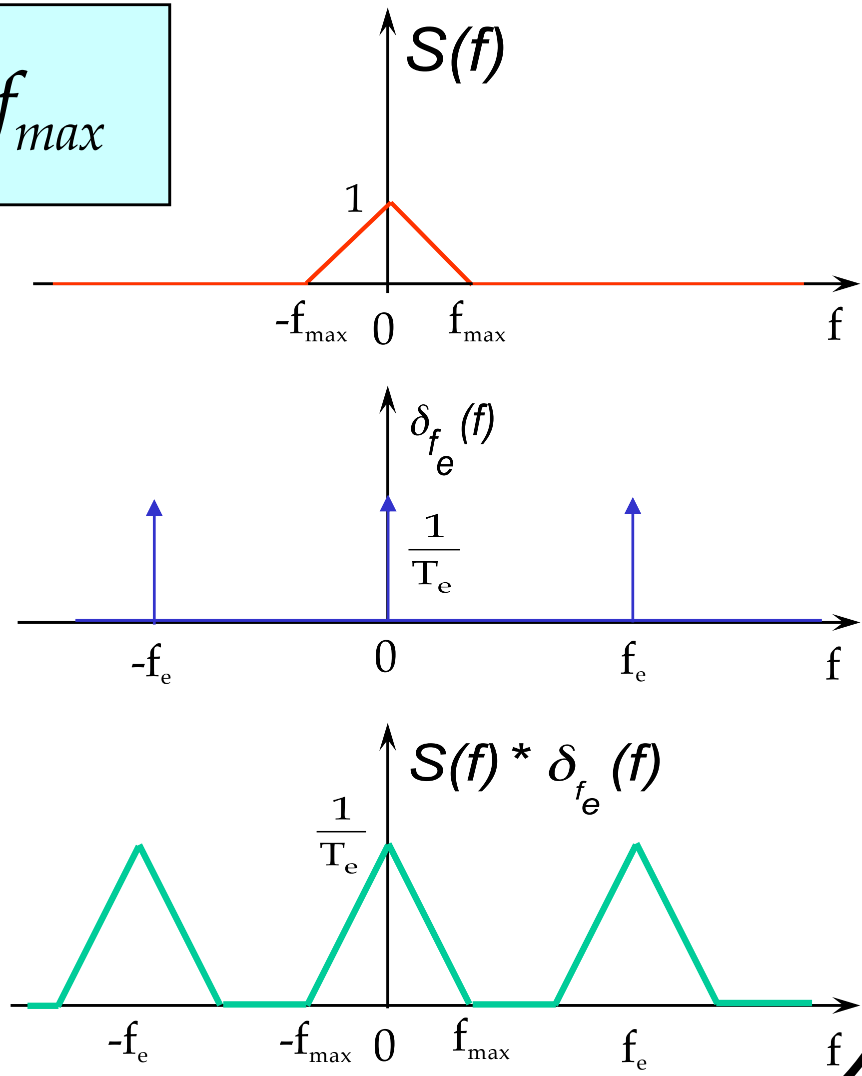
Illustration graphique de l'échantillonnage idéal dans le domaine fréquentiel

Domaine temporel



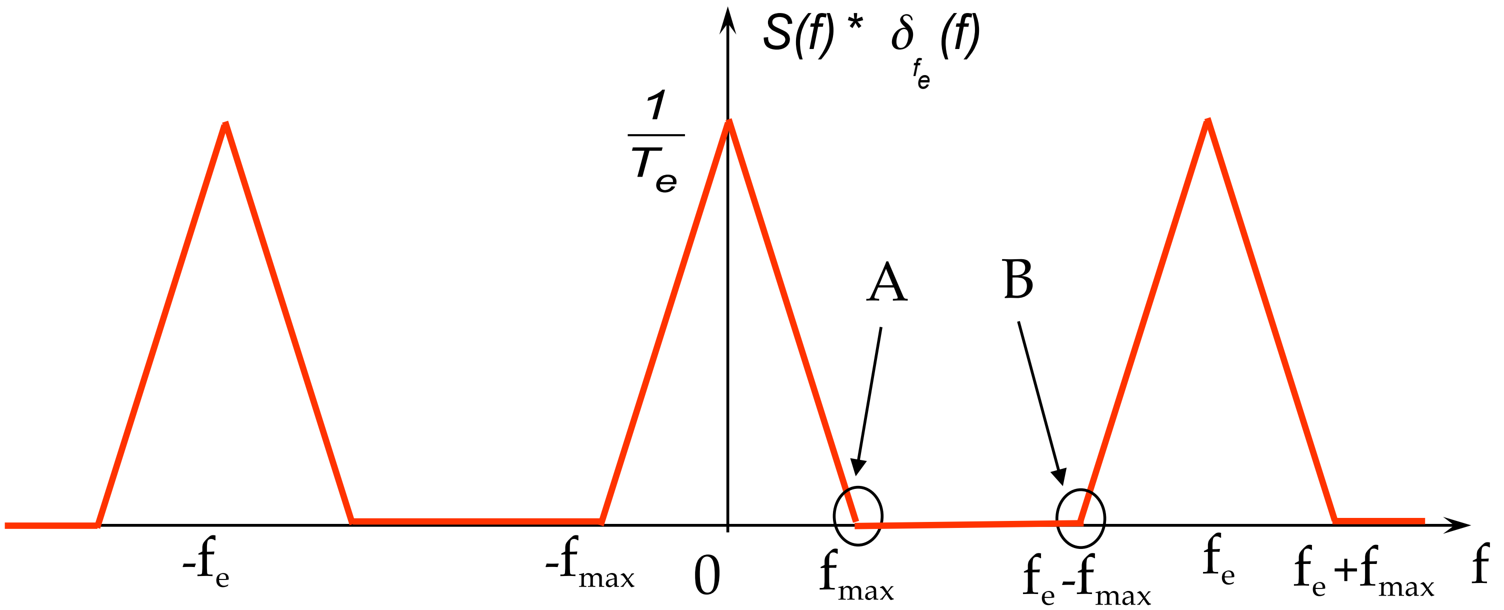
$$\boxed{f_e \geq 2 f_{max}}$$

Domaine fréquentiel



Condition de non-repliement spectral

$$\boxed{f_e \geq 2\, f_{max}}$$

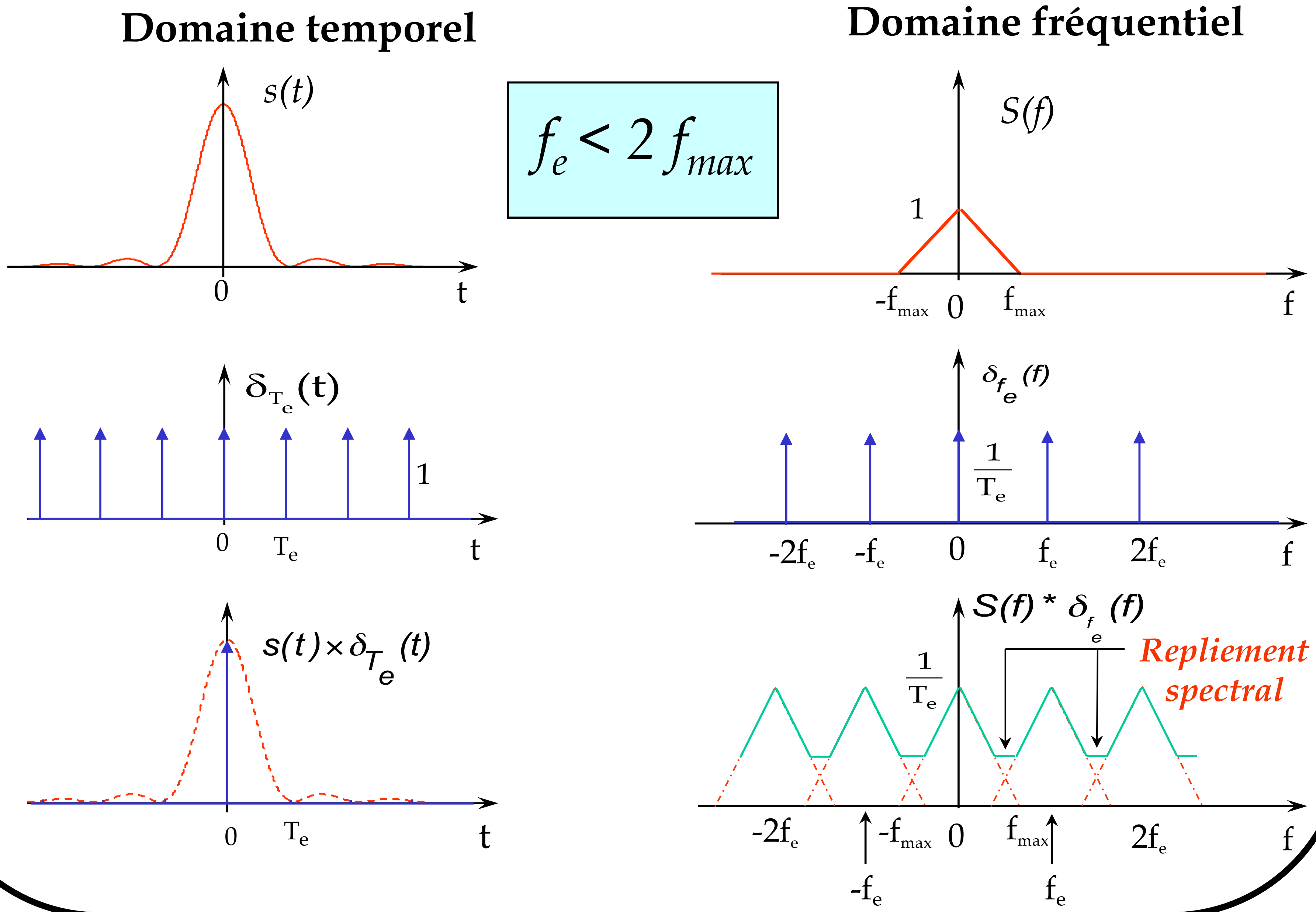


Pour éviter le repliement spectral, il faut B > A:

$$f_e - f_{max} \geq f_{max}$$

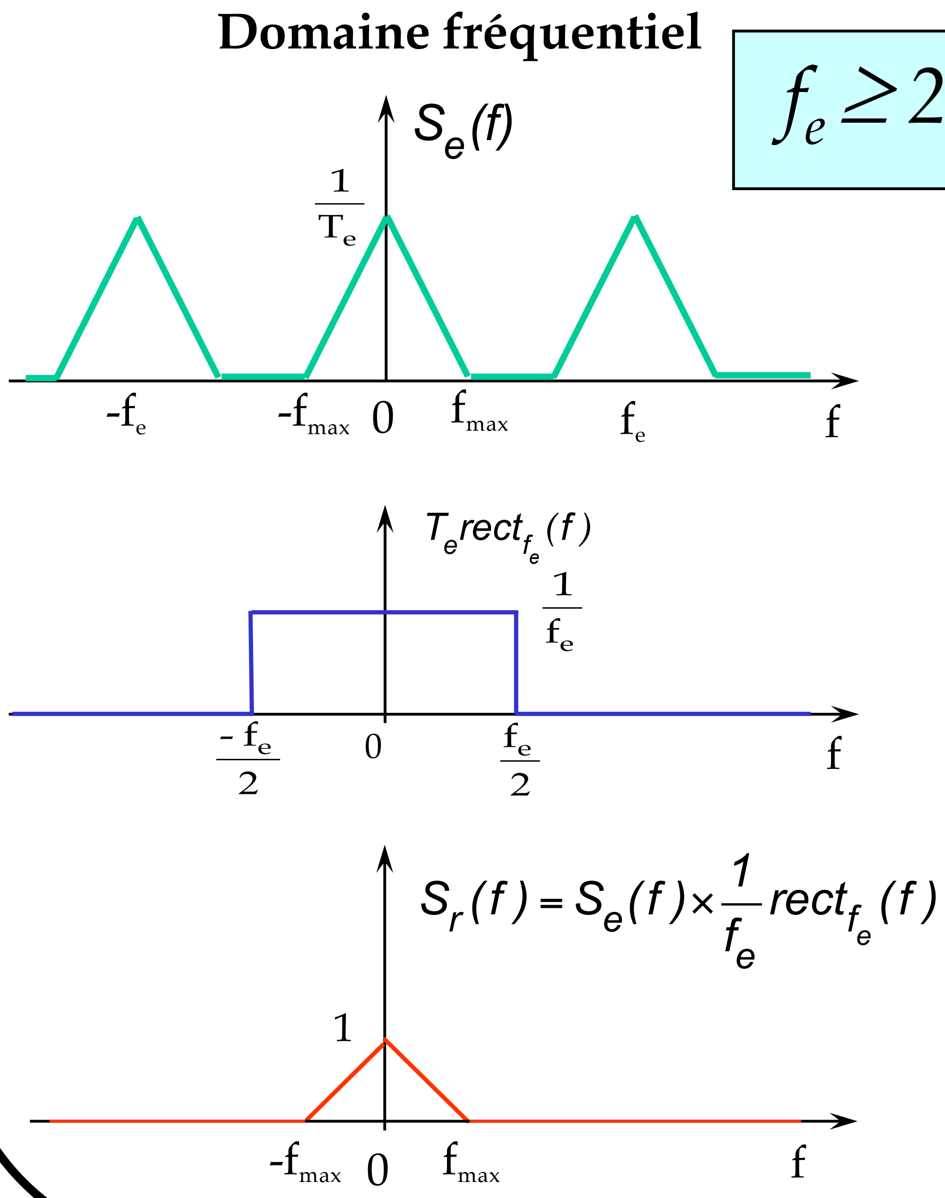
$$d'où\ f_e \geq 2\, f_{max}$$

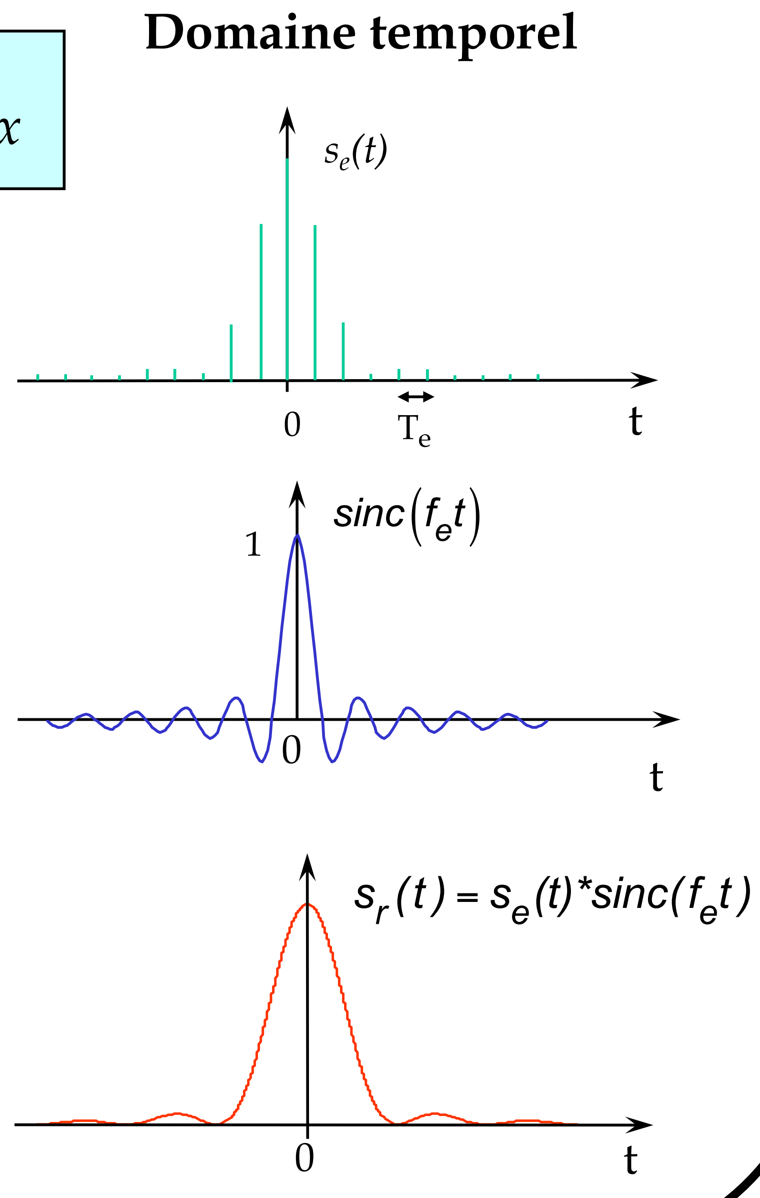
Illustration du repliement spectral



Restitution idéale du signal analogique

$$f_e \geq 2\, f_{max}$$





Théorème d'échantillonnage

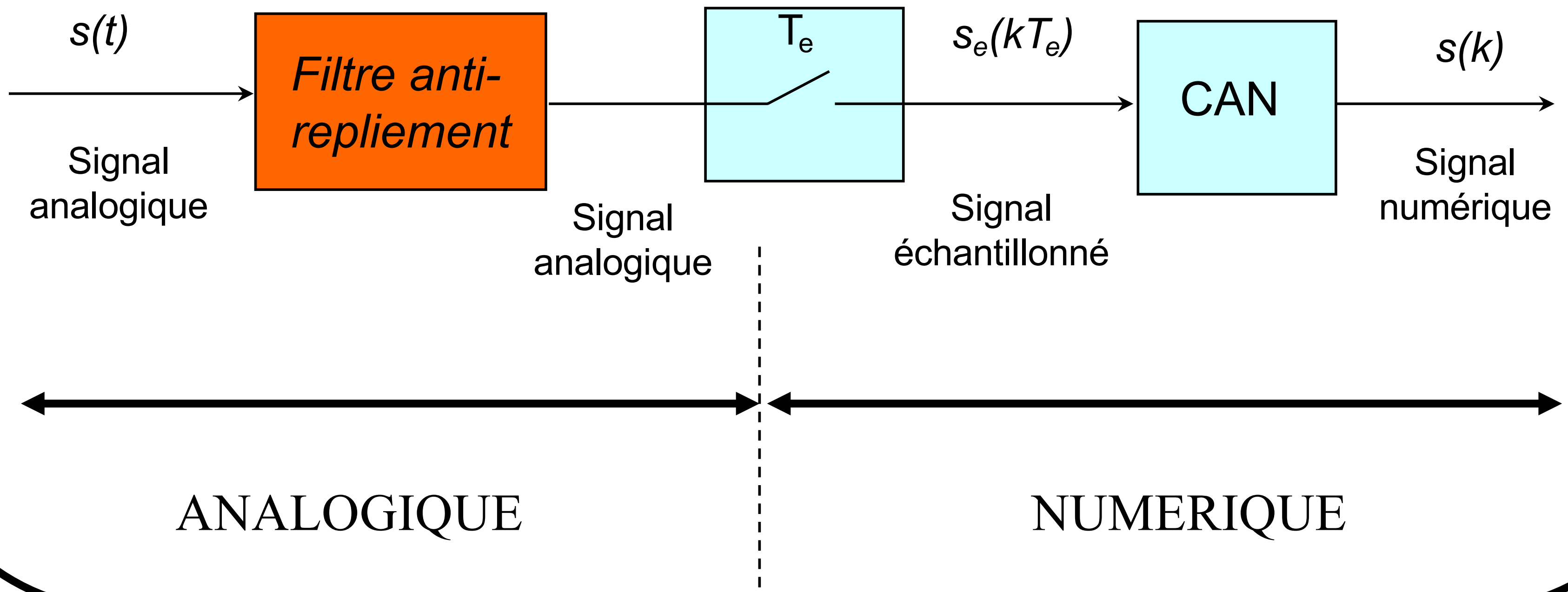
- Formule d'interpolation idéale (ou reconstruction idéale du signal d'après ses échantillons) $s_r(t) = s_e(t) * sinc(f_e t)$
  - correspond à une convolution avec un sinus cardinal qui n'est pas causal
  - le filtre théorique n'est pas réalisable (ce n'est qu'une relation théorique)
  - en pratique, l'interpolateur idéal est approché par des bloqueurs
    - Bloqueur d'ordre 0, bloqueur d'ordre 1, etc

- Lorsque $f_e < 2 f_{max}$
  - la reconstruction exacte n'est plus possible
  - il y a ***repliement de spectre***
  - les fréquences > $f_e / 2$ sont ramenées dans la bande $[-f_e/2 \,;\, f_e/2]$

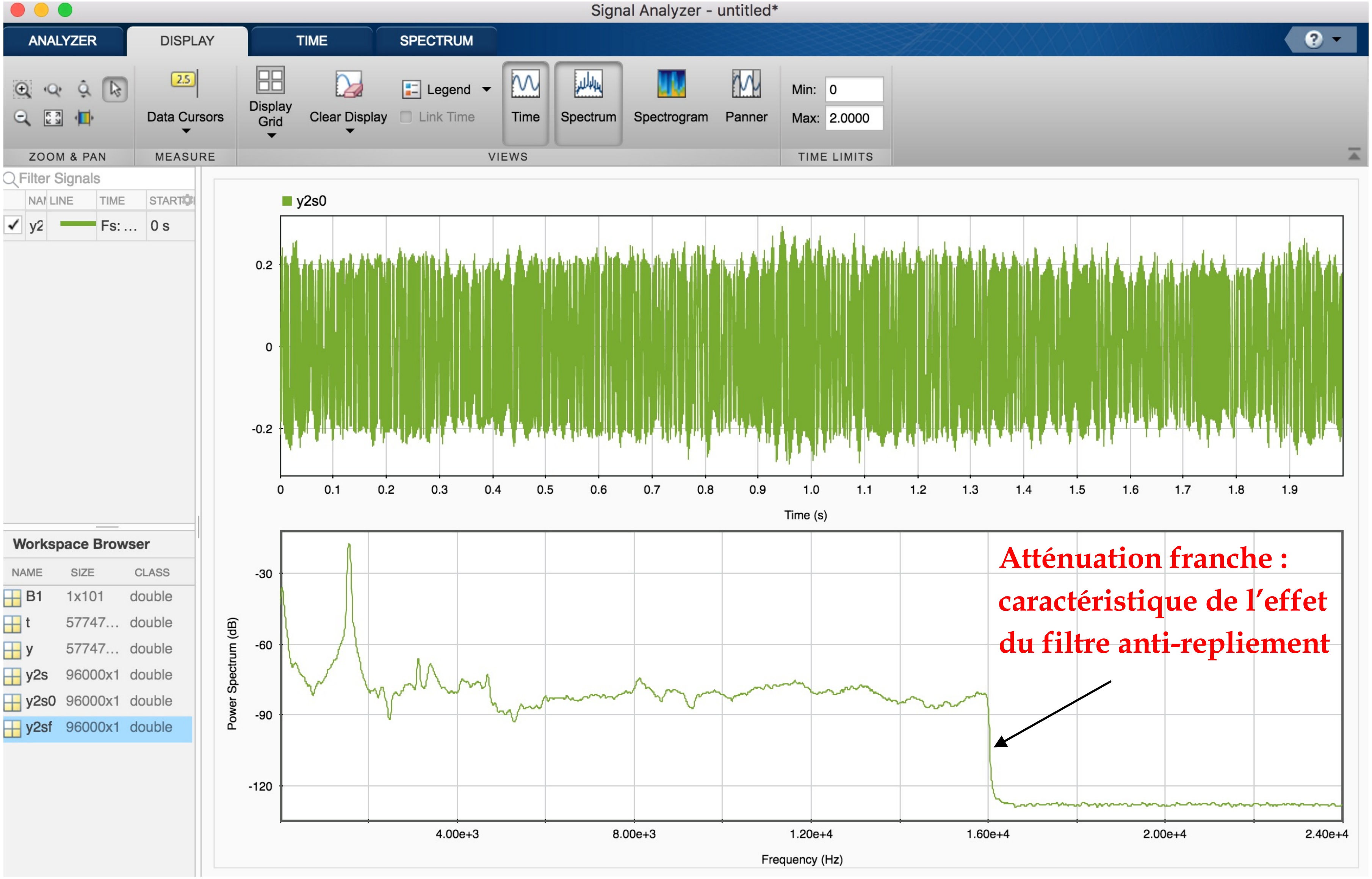
Chaîne pratique de numérisation d'un signal analogique

- En pratique :
  - indispensable de faire précéder l'opération d'échantillonnage par un filtre passe-bas appelé ***filtre anti-repliement*** de fréquence de coupure f_c un peu inférieure à la fréquence de Nyquist $f_e/2$

- La chaîne pratique de numérisation d'un signal analogique est donc constituée des éléments suivants :



Exemple – Enregistrement d'un signal sur mon iPhone



Effets spectaculaires du repliement spectral

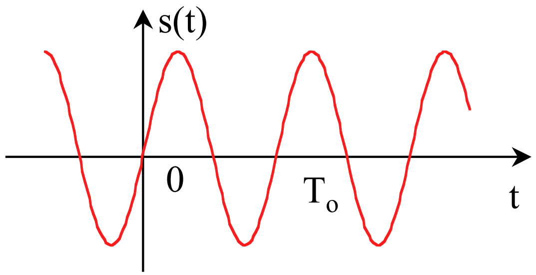
- Hélicoptère en lévitation
  - www.youtube.com/watch?v=yr3ngmRuGUc
- Pales d'un avion qui tournent à l'envers
  - www.youtube.com/watch?v=ByTsISFXUoY
- Roue d'un vélo qui tourne à l'envers
  - www.youtube.com/watch?v=bI8lrqBBAXQ

Quelques valeurs usuelles de fréquences d'échantillonnage

Domaine d'applications	Largeur de bande	Fréquence f_e d'échantillonnage
Biomédical	< 500 Hz	1 kHz
Parole en téléphonie	< 4 kHz	8 kHz
Musique	< 20 kHz	44.1 kHz
Ultrason	< 100 kHz	250 kHz
Radar	< 100 Mhz	200 Mhz

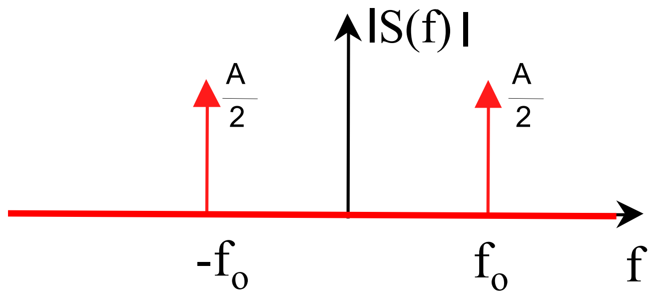
A retenir - Caractéristiques des spectres

Domaine temporel

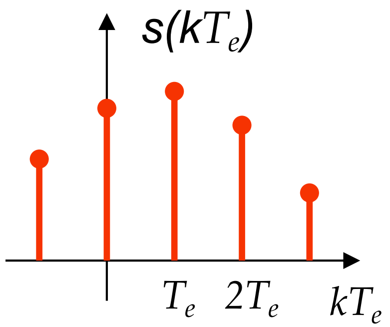


signal ***périodique***
continu

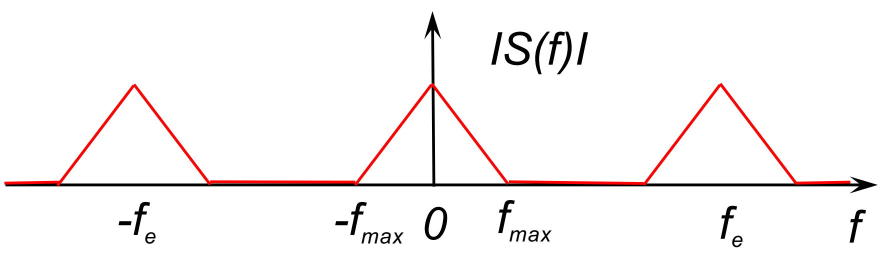
Domaine fréquentiel



spectre ***échantillonné***
non périodique



signal ***échantillonné***
non périodique



spectre ***périodique***
continu

Objectifs à l'issue du cours sur l'échantillonnage

- Connaître la chaîne de traitement numérique d'un signal
- Connaître les caractéristiques du spectre d'un signal échantillonné par rapport à celui du signal original à temps continu
- Connaître la modélisation mathématique de l'échantillonnage idéal
- Connaître le théorème d'échantillonnage de Shannon
- Comprendre le phénomène de repliement de spectres et savoir comment l'éviter
- Etre capable d'appliquer le théorème d'échantillonnage afin de choisir la fréquence d'échantillonnage d'un signal