Signaux à temps continu

-

Rappels

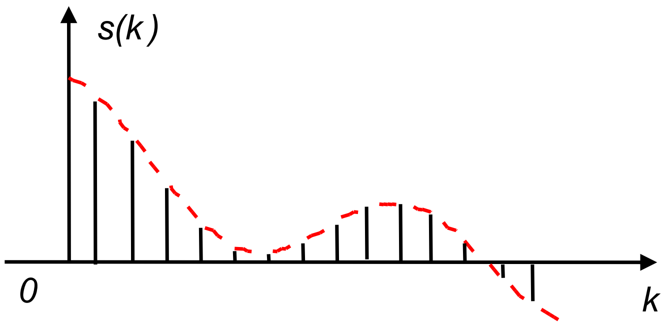
Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Version du 2 novembre 2020

Signaux à temps continu

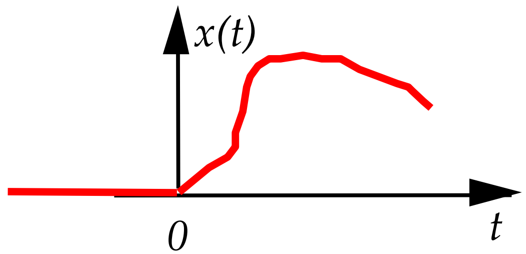
- Définition
  - Ils sont généralement décrits mathématiquement sous la forme d'une fonction *s(t)* où la variable *t* est associée au temps
  - La continuité porte sur le temps, ceci par opposition aux signaux à temps discret qui ne sont définis que pour un ensemble dénombrable de valeurs du temps



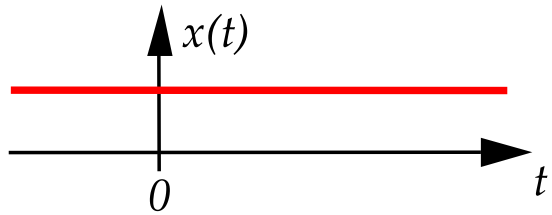
Causalité

- **Signal causal**
  - Un signal est ***causal*** s'il est nul pour tous les instants négatifs

$$x(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$$

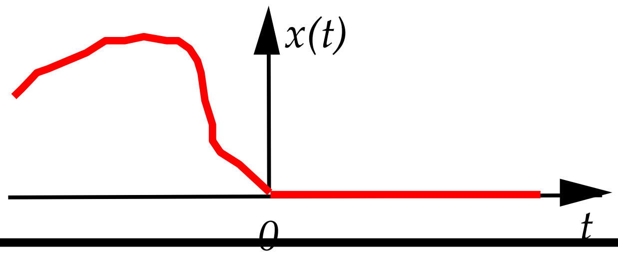


- **Signal non causal**
  - Un signal est non ***causal*** s'il n'est pas nul pour tous les instants négatifs.



- **Signal anti-causal**
  - Un signal est ***anti-causal*** s'il est nul pour tous les instants positifs

$$x(t) = 0 \quad \forall\, t > 0$$



Modélisation mathématique de signaux

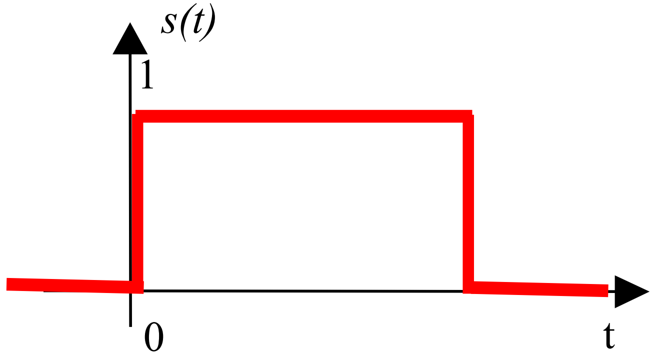
- Signal expérimental *(ou réel)*
  - Un signal expérimental est souvent un signal électrique délivré par un appareil. On mesure son évolution au cours du temps.

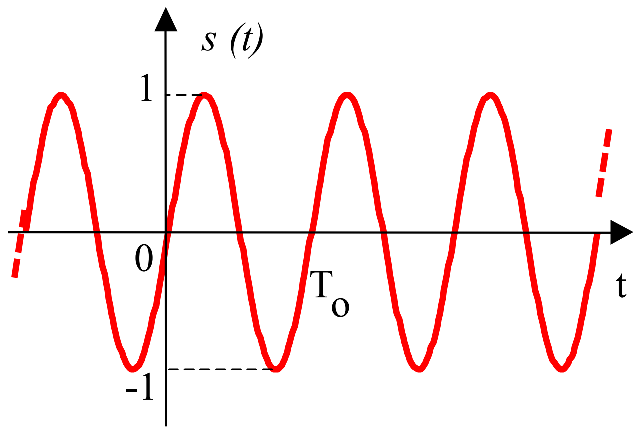
  - Il répond à un ensemble de contraintes. Il doit être :
    - à amplitude bornée
    - à support borné *(existence de durée finie)*
    - continu
    - causal
    - à énergie finie

Modélisation mathématique de signaux

- Signal théorique
  - Sur le plan théorique, un signal est représenté par ***<u>une fonction</u>*** à valeurs réelles ou complexes qui *permet de faciliter son étude*
  - Ainsi les modèles de signaux théoriques possèdent des caractéristiques différentes des signaux expérimentaux. Un signal théorique peut être :
    - à amplitude non bornée
    - à support non borné *(existence de durée infinie)*
    - discontinu
    - non causal *(amplitude non nulle pour les instants négatifs)*
    - à énergie infinie

Signal expérimental/théorique - Exemples





Signal expérimental

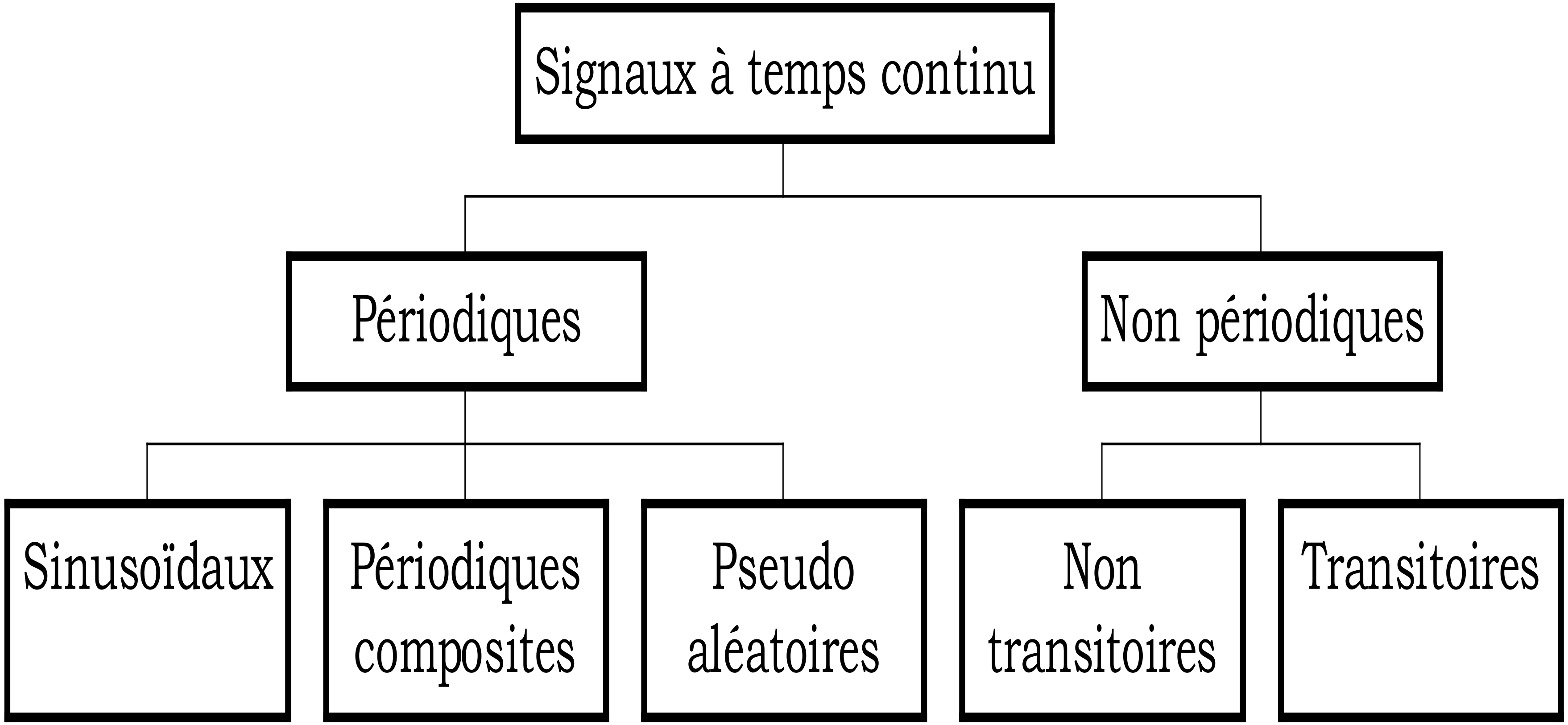
- à amplitude bornée
- continu
- à support borné *(existence de durée finie)*
- causal *(nul pour tous les instants négatifs)*
- à énergie finie

Signal théorique

- à support non borné *(existence de durée infinie)*
- non causal

Sous-classes de signaux à temps continu

Classification en fonction de leur caractère périodique



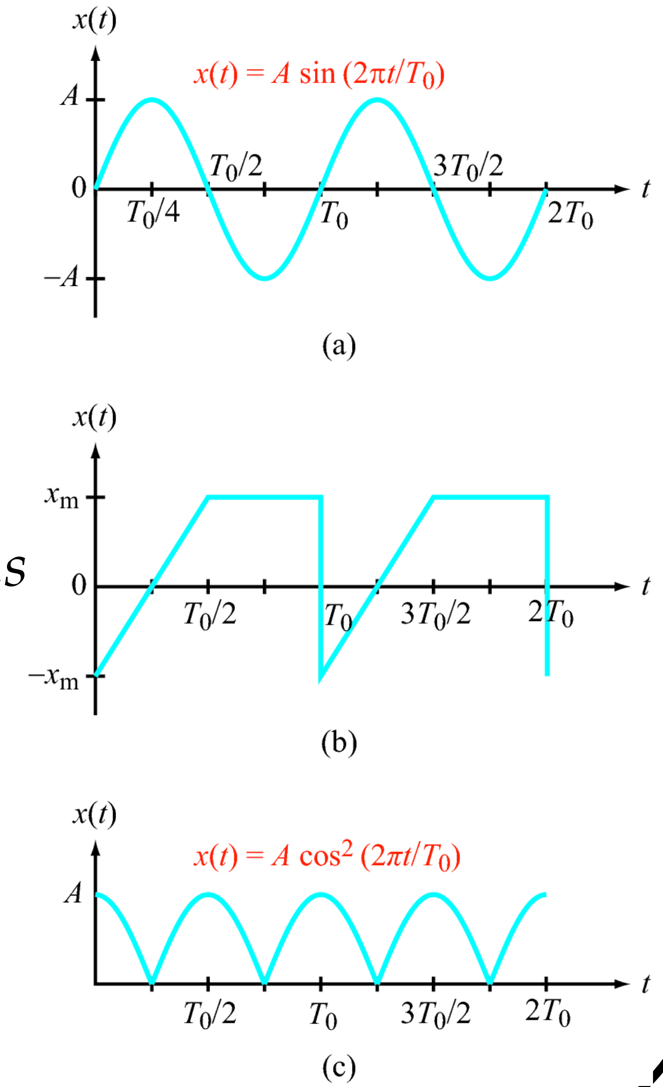
Signal périodique

$$x(t+kT_0) = x(t), \quad k \in Z$$

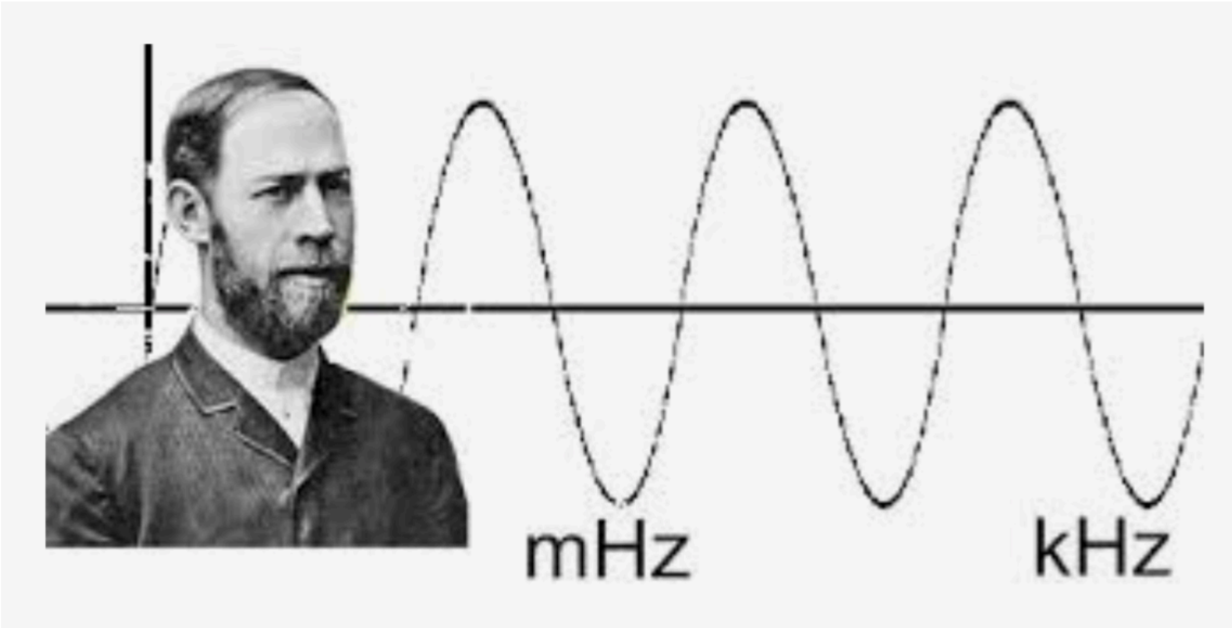
Graphiquement, un signal périodique x(t) est la répétition à l'infini d'un signal défini sur une période appelé motif m(t). x(t) peut s'écrire comme la somme infinie des versions avancées/retardées du motif m(t) :

$$x(t) = \ldots + m(t+T_0) + m(t) + m(t-T_0) + \ldots$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m(t-kT_0), \quad k \in Z$$



Heinrich Rudoff Hertz (1857-1894)



- Ingénieur et physicien allemand. Hertz mit en évidence en 1888 l'existence des ondes électromagnétiques imaginées par James Maxwell en 1873
- Il a découvert la photo électricité et a donné son nom aux ondes radio dites *ondes hertziennes* ainsi qu'à *l'unité de mesure des fréquences*

Signal périodique essentiel : signal sinusoïdal

- C'est le signal périodique par excellence. C'est une sinusoïde éternelle. Sa loi d'évolution s'exprime à l'aide de la fonction sinus ou cosinus :

$$s(t) = A\ sin\left(\omega_o t + \varphi_0\right) = A\ sin\left(\omega_o (t + \tau)\right)$$

A représente l'amplitude maximale du signal

$\varphi(t) = \omega_o t + \varphi_0$ représente la phase instantanée (phase à l'instant t)

ω_o est la pulsation en rad/s et vérifie : $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T_o} = 2\pi f_o$

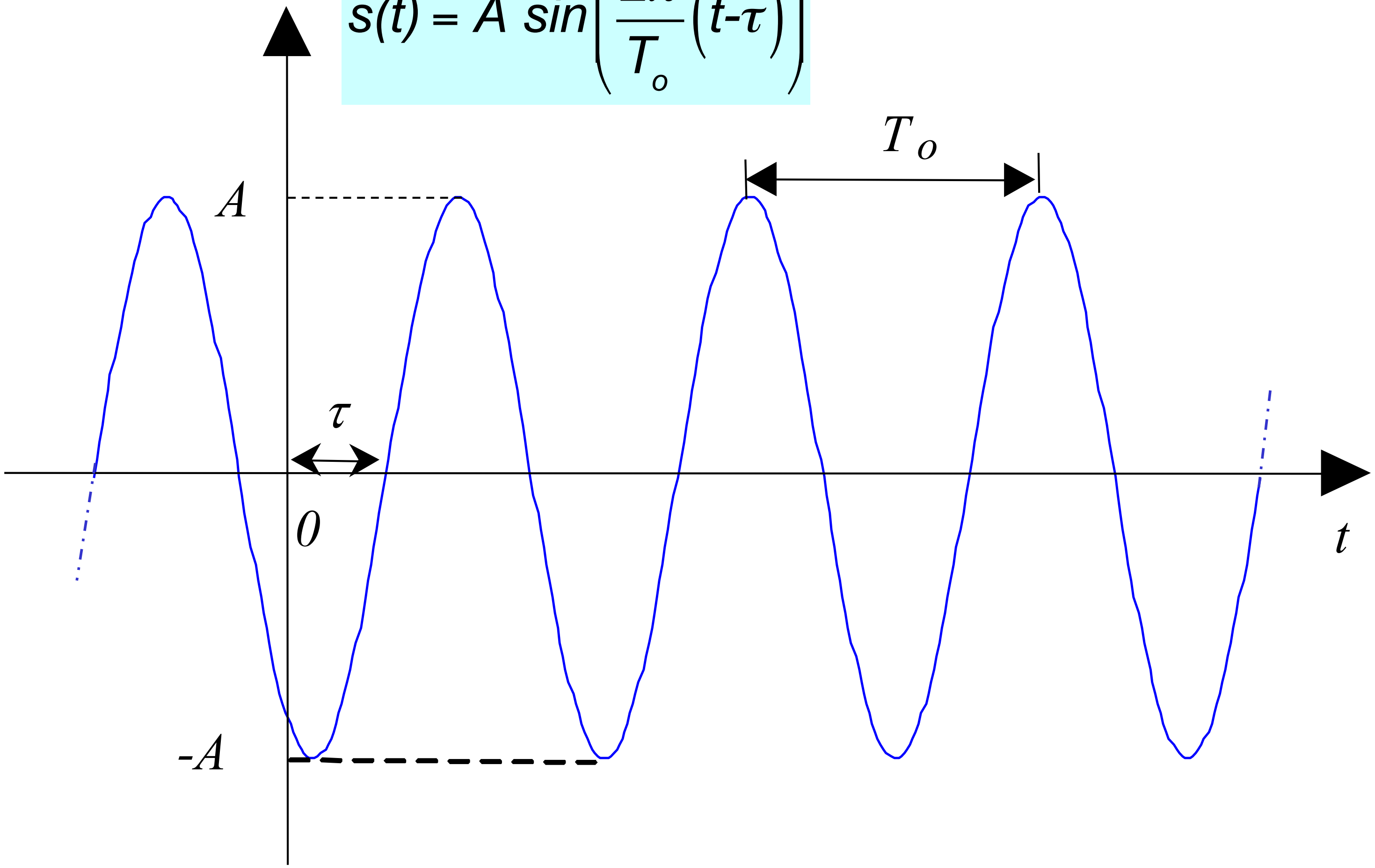
T_o est la période du signal en s et f_o la fréquence fondamentale en Hz

$\varphi_0 = \omega_o \tau$ la phase à l'origine (pour $t=0$) du signal en rad

τ : le décalage en s du signal sinusoïdal par rapport à l'origine des temps

Signal sinusoïdal

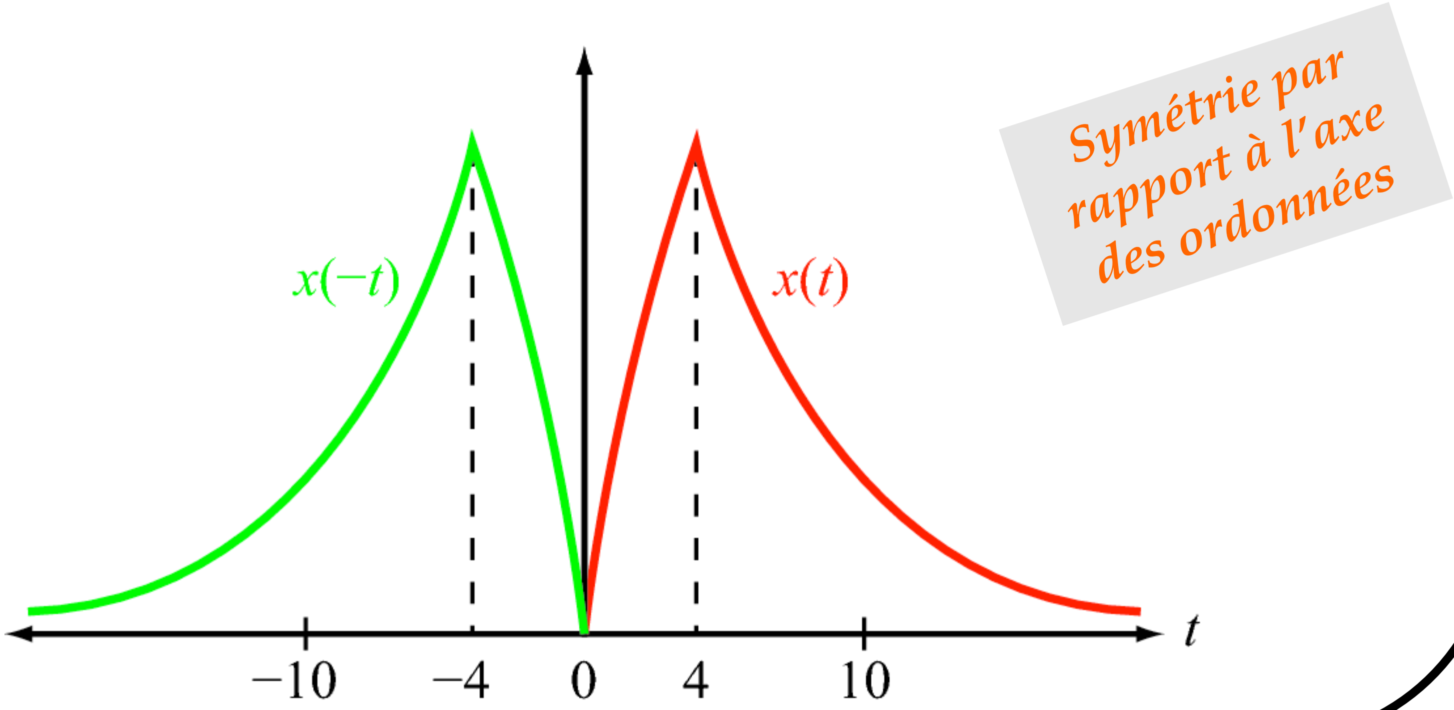
$$s(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T_o}(t-\tau)\right)$$



Inversion temporelle

$$s(t) = x(-t)$$

Graphiquement, *s(t)=x(-t)* correspond à la version symétrisée de *x(t)* par rapport à l'axe des ordonnées

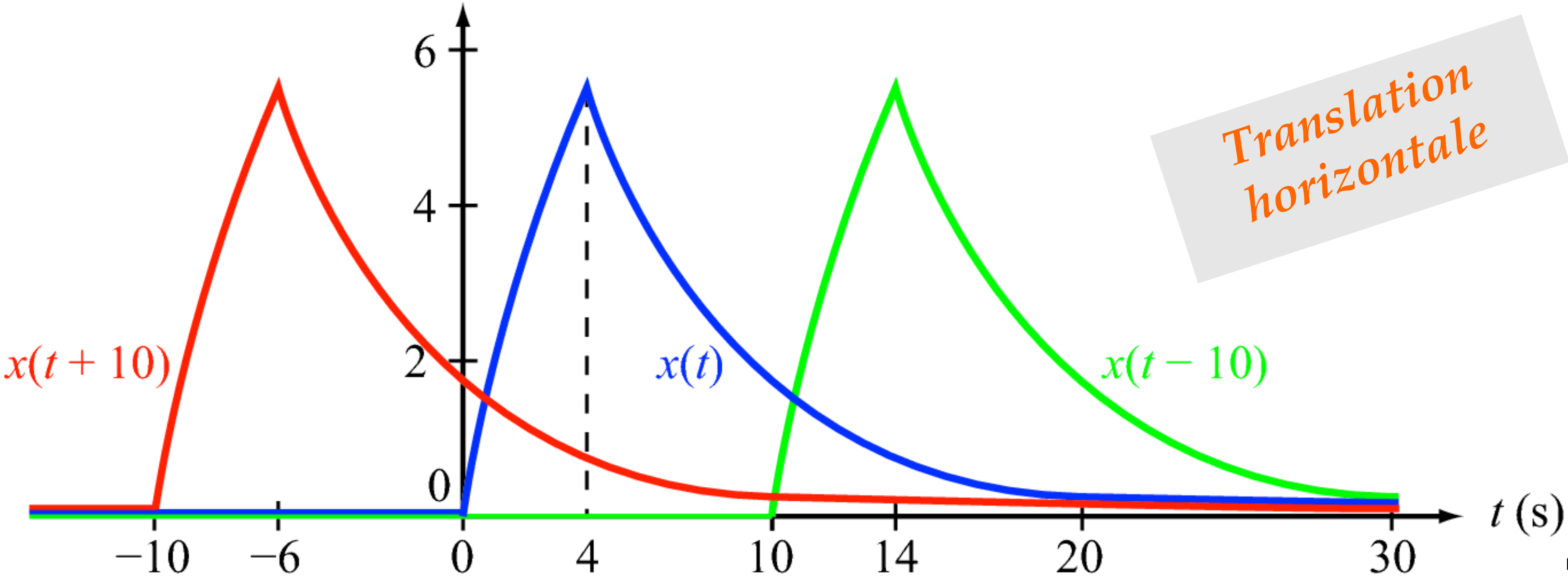


Décalage temporel *(avance/retard)*

$$y(t) = x(t + t_0)$$

- Si $t_0>0$, on opère une **avance** : translation horizontale de t_0 vers la **gauche**
- Si $t_0<0$, on opère un **retard** : translation horizontale de t_0 vers la **droite**

Graphiquement, le signal ***avancé*** $x(t+t_0)$ ou ***retardé*** $x(t-t_0)$ correspond à la version translatée horizontalement du signal original $x(t)$



Translation horizontale

Changement d'échelle (*compression/dilatation*)

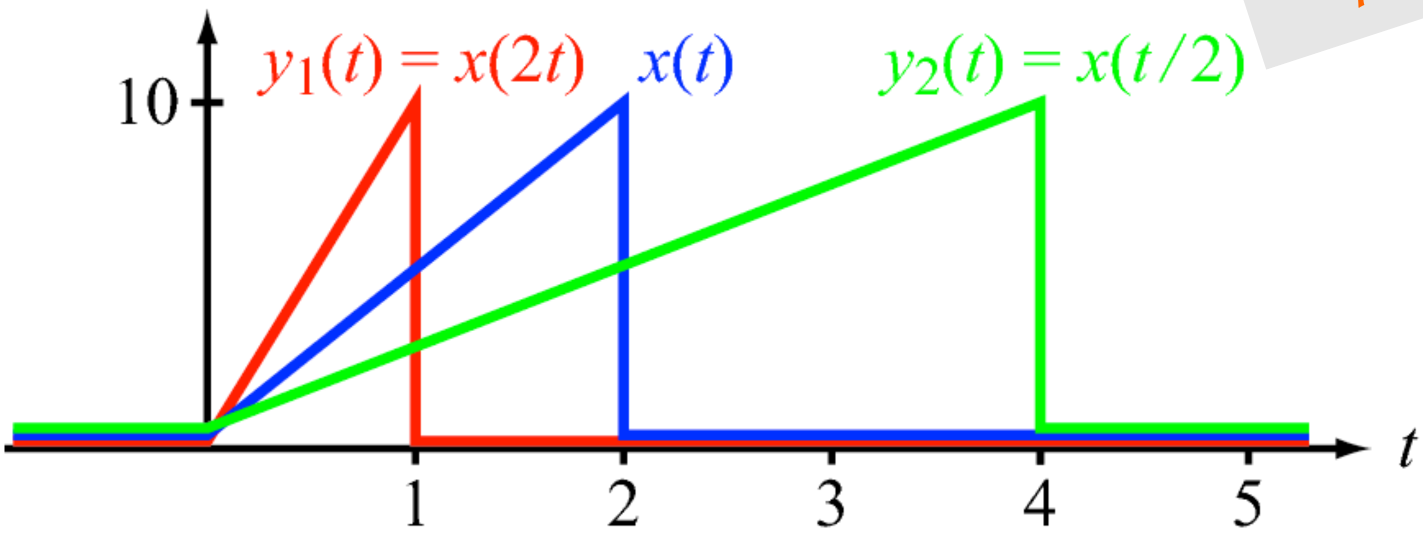
$$y(t) = x(at) \qquad a > 0$$

Graphiquement, $y(t)=x(at)$ (*avec a le facteur d'échelle*)

Si $0<a<1$, $y(t)$ est une version dilatée de $x(t)$

Si $a>1$, $y(t)$ est une version comprimée de $x(t)$

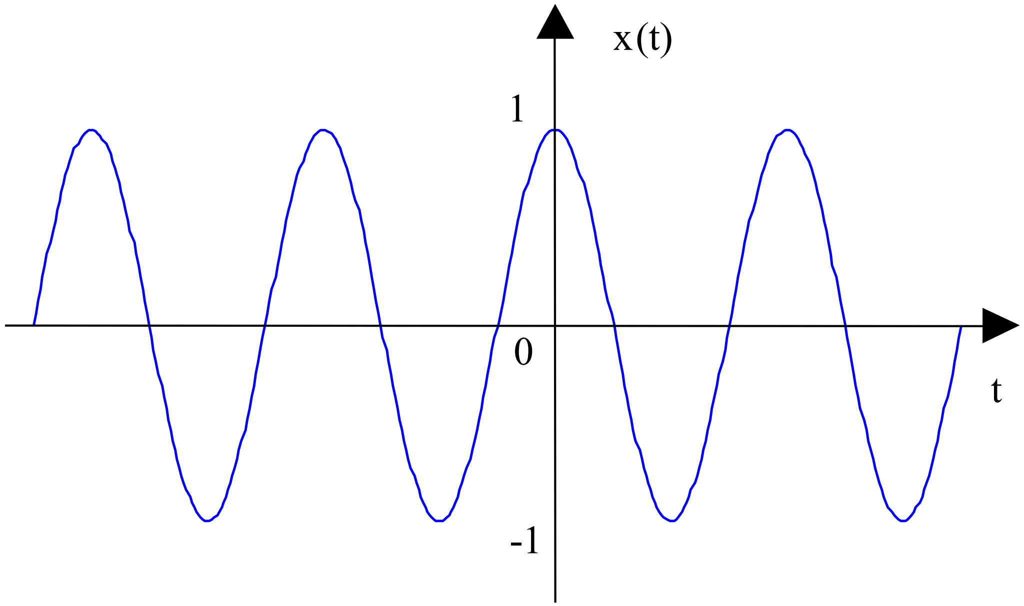
Dilatation/compression



Signal pair

$$x(-t) = x(t) \quad \forall\, t$$

Graphiquement, un signal pair présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées



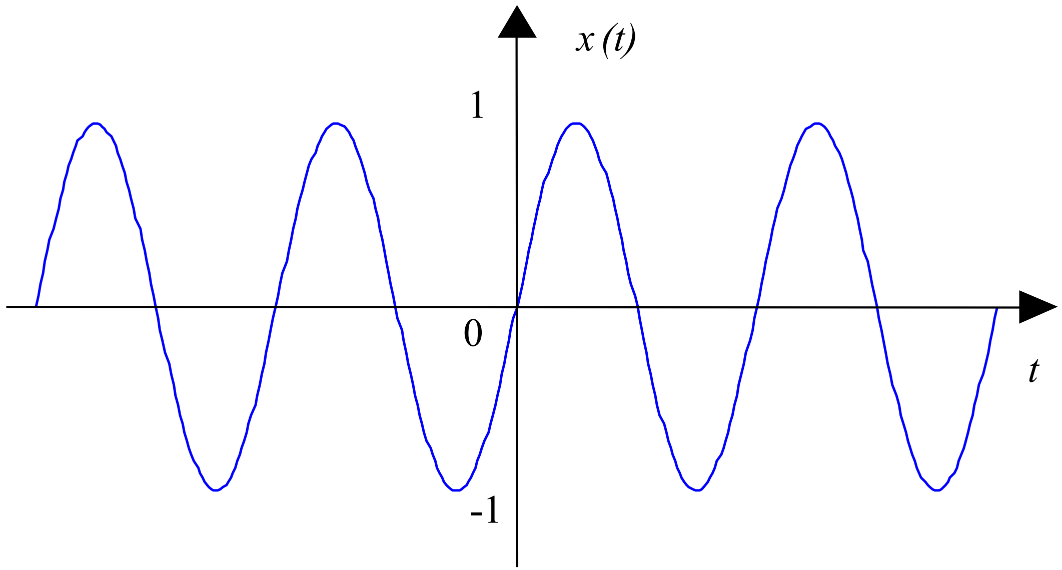
Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

Exemples : *cos(t), t^n (avec n pair), ItI* , etc

Signal impair

$$x(-t) = -x(t) \quad \forall\, t$$

Graphiquement, un signal impair présente une symétrie par rapport à l'origine



Symétrie par rapport à l'origine

Exemples : *sin(t), tan(t),* t^n *(avec n impair), 1/t* , etc

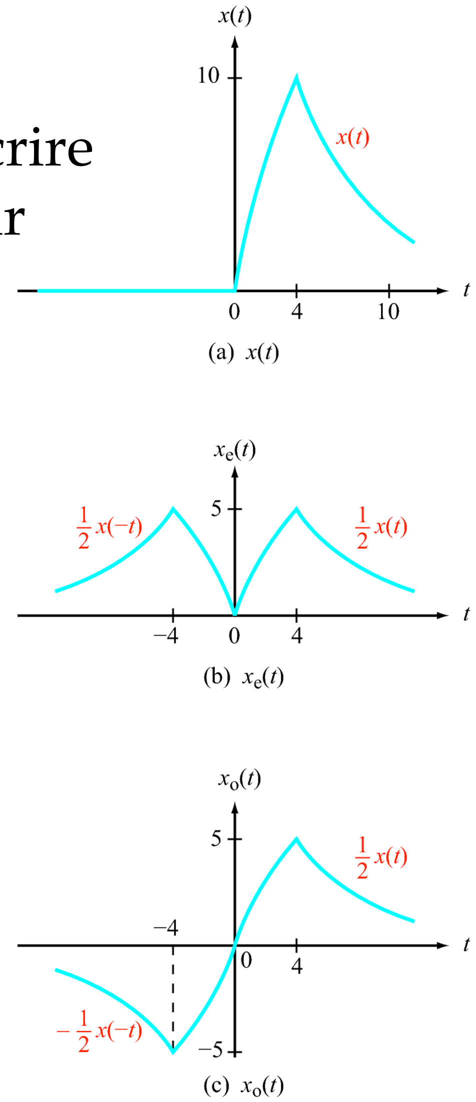
Synthèse paire/impaire

Tout signal $x(t)$ n'étant ni pair, ni impair peut s'écrire sous la forme d'une somme de 2 signaux, l'un pair $x_p(t)$, l'autre impair $x_i(t)$ tel que :

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

avec

$$\begin{cases} x_p(t) = \dfrac{1}{2}x(t) + \dfrac{1}{2}x(-t) \\ x_i(t) = \dfrac{1}{2}x(t) - \dfrac{1}{2}x(-t) \end{cases}$$



Valeurs caractéristiques des signaux à temps continu

- ***Valeur moyenne***
  - signal non périodique $$\bar{s} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt$$
  - signal périodique de période T_o $$\bar{s} = \frac{1}{T_o} \int_{0}^{T_o} s(t)\,dt$$

- ***Valeur efficace***

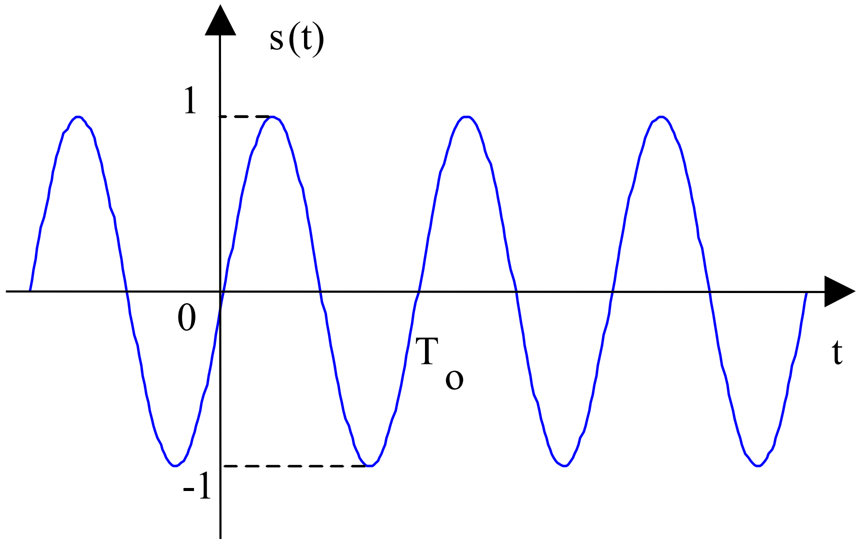
  Le carré de la valeur efficace ou valeur RMS (Root Mean Squares) d'un signal s(t) est défini par :
  - signal non périodique $$S_{eff}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t)\,dt$$
  - signal périodique de période T_o $$S_{eff}^2 = \frac{1}{T_o} \int_{0}^{T_o} s^2(t)\,dt$$

Exemple

- Soit un signal sinusoïdal de période T_o tel que :

$$s(t) = sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t\right)$$

Calculer la valeur moyenne et efficace de ce signal



$$\overline{s} = 0$$

$$S_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$

Puissance et énergie

- ***Moyenne*** (valeur moyenne) calculée sur $[t_1 ; t_2]$ d'un signal $s(t)$:

$$\bar{s}(T) = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} s(t)\,dt \qquad avec \quad T = t_2 - t_1$$

- ***Energie*** (valeur quadratique) calculée sur $[t_1 ; t_2]$ d'un signal $s(t)$:

$$E_s(T) = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2\,dt \qquad avec \quad T = t_2 - t_1$$

- ***Puissance moyenne*** (valeur quadratique moyenne) calculée sur $[t_1 ; t_2]$ d'un signal $s(t)$:

$$P_s(T) = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2\,dt \qquad avec \quad T = t_2 - t_1$$

Classification énergétique

- *Energie totale* : $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt$

- *Puissance moyenne totale* :

$P_s = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt$ s(t) non périodique

$P_s = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} |s(t)|^2 \, dt$ s(t) périodique

On distingue alors :

- **les signaux à énergie finie** ou à puissance moyenne nulle :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt < \infty$$

- **les signaux à puissance moyenne finie non nulle** (énergie infinie) :

$$0 < P_s = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 \, dt < \infty$$

- **les signaux à puissance moyenne infinie** (énergie infinie) :

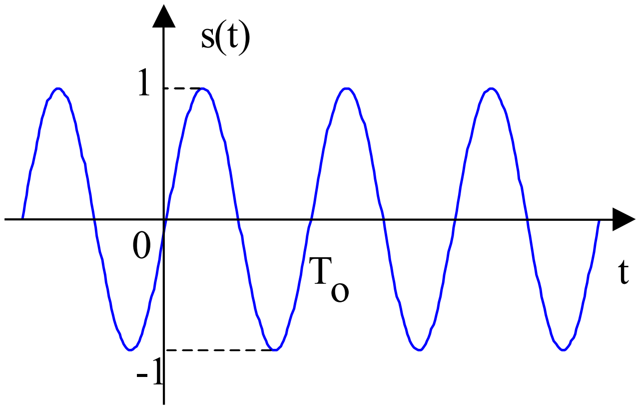
$$P_s = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 \, dt \to +\infty$$

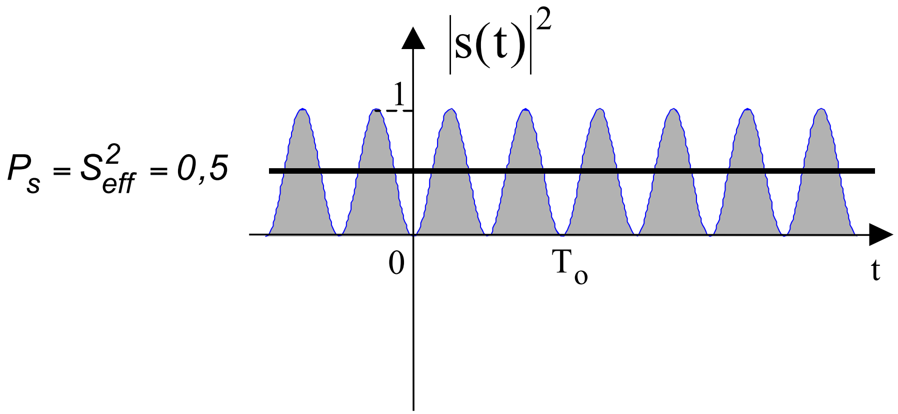
Energie et puissance moyenne : Exemple

Soit un signal sinusoïdal de période T_o tel que : $s(t) = sin\left(\frac{2\pi}{T_o} t\right)$

Calculer l'énergie et la puissance de ce signal

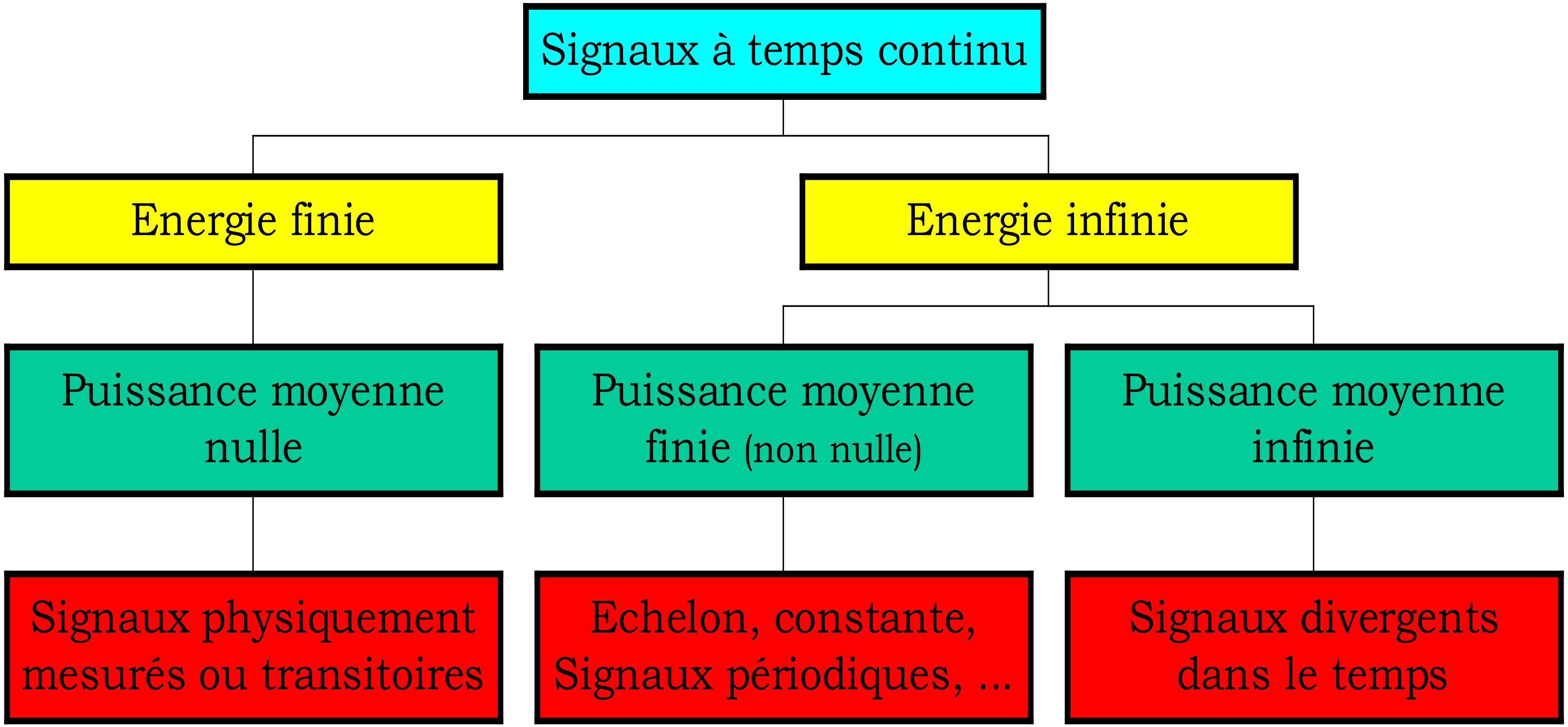
$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \qquad P_s = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} |s(t)|^2 dt = S_{eff}^2$$





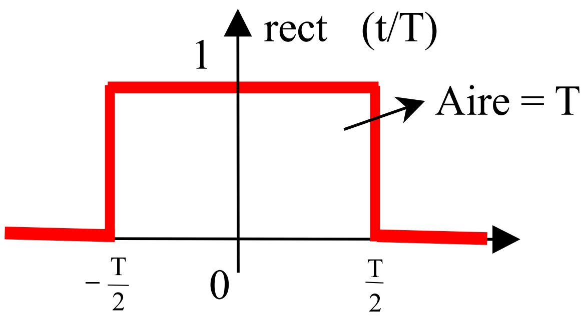
$$\bar{s} = 0 \quad S_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 \qquad E_s = \infty \qquad P_s = S_{eff}^2 = 0,5$$

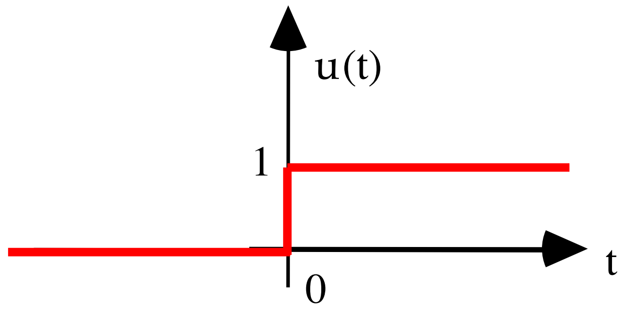
Classification énergétique des signaux à temps continu

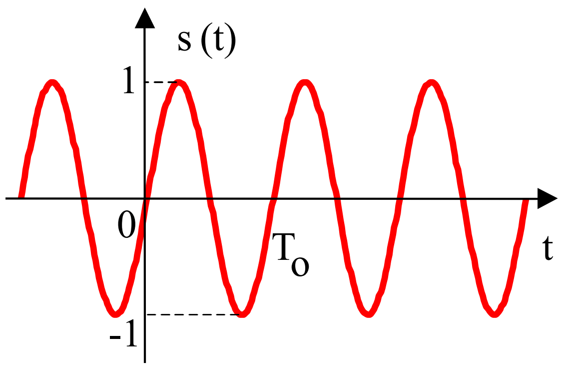


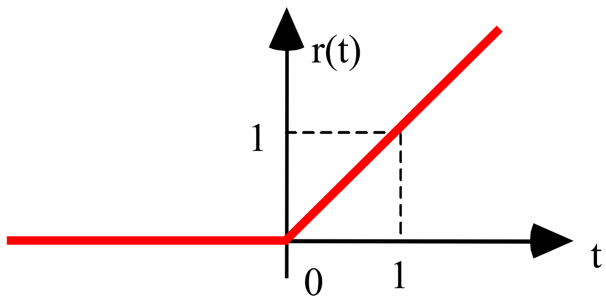
Classification énergétique des signaux
Exemples

Ces signaux sont-ils à énergie finie, à puissance moyenne finie, infinie ?





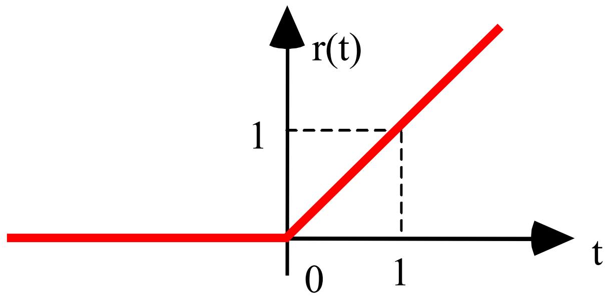




Signaux usuels

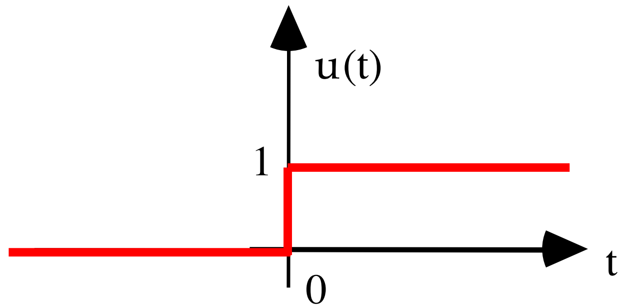
- **La rampe unitaire**

$$r(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t < 0 \\ t & pour \quad t \geq 0 \end{cases}$$



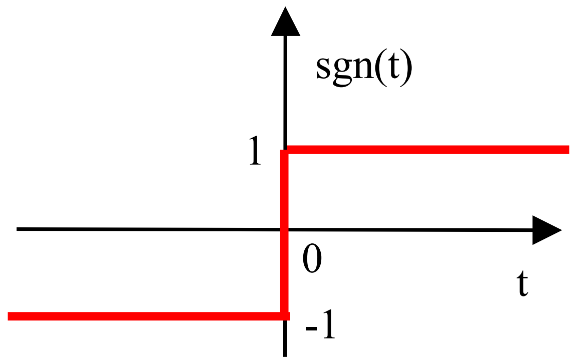
- **L'échelon unité**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t < 0 \\ 1 & pour \quad t \geq 0 \end{cases}$$



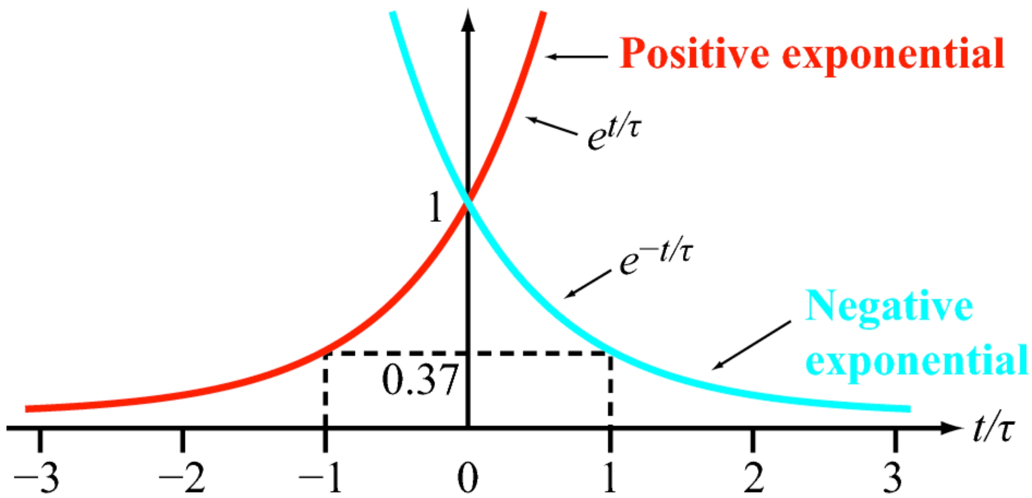
- **La fonction signe**

$$sgn(t) = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \forall & t > 0 \\ -1 & \forall & t < 0 \\ 0 & & t = 0 \end{array} \right.$$

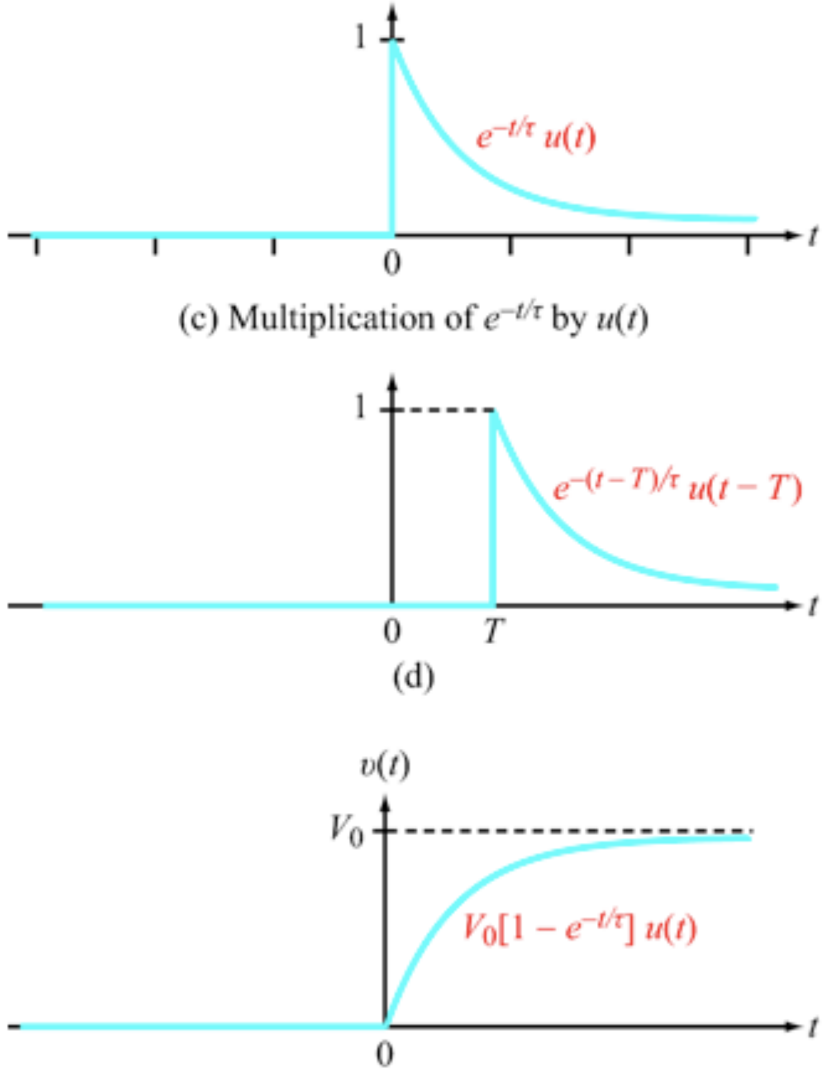


Signal exponentiel à valeurs réelles

$$s(t) = Ae^{t/\tau} \quad ou \quad s(t) = Ae^{-t/\tau}$$

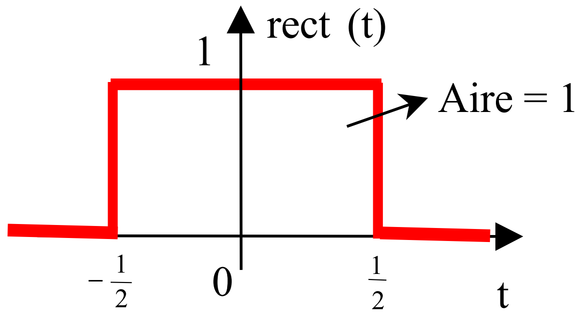


Réponses de forme exponentielle courantes en pratique



La fenêtre rectangulaire

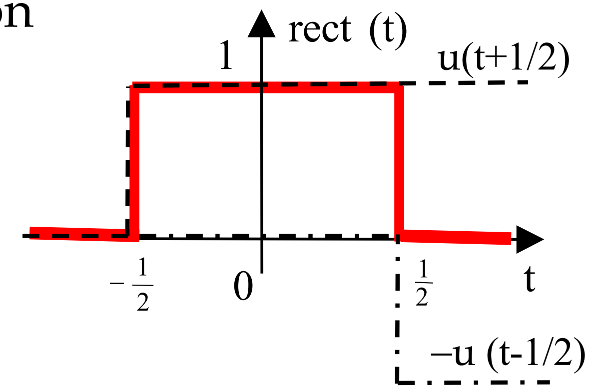
$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \forall \quad |t| \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \forall \quad |t| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



Signal très utilisé en traitement du signal, notamment au travers des notions de filtrage et de fenêtrage

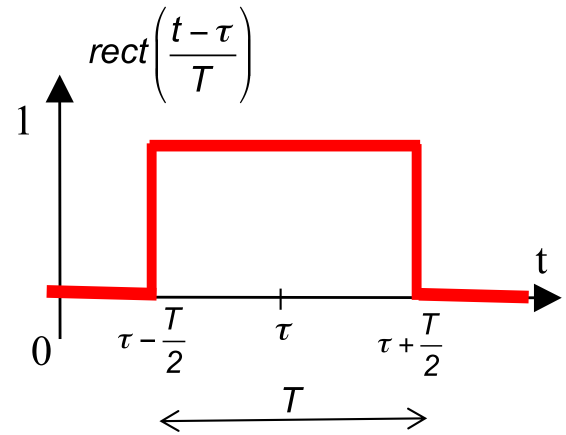
Reconstitution à l'aide de signaux échelon

$$rect(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$



La fenêtre rectangulaire – cas général

$$rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right)=\begin{cases} 0 & \forall \quad t<\tau-\frac{T}{2} \\ 1 & \forall \quad \tau-\frac{T}{2}\leq t\leq \tau+\frac{T}{2} \\ 0 & \forall \quad t>\tau+\frac{T}{2} \end{cases}$$



T : durée de la fenêtre rectangulaire

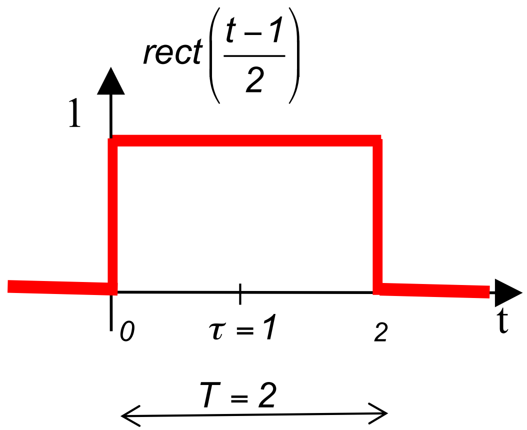
τ : localisation du centre de la fenêtre

Reconstitution à l'aide de signaux échelon

$$rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right)=u\left(t-\left(\tau-\frac{T}{2}\right)\right)-u\left(t-\left(\tau+\frac{T}{2}\right)\right)$$

Fenêtre rectangulaire – Exemple

$$rect\left(\frac{t-1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \forall \quad t < 0 \\ 1 \quad si & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \forall \quad t > 2 \end{cases}$$



T=2 : durée de la fenêtre rectangulaire

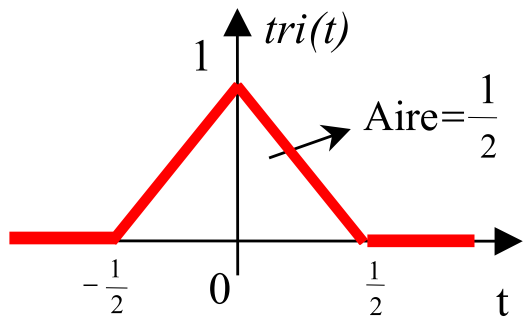
τ=1 : localisation du centre de la fenêtre

Reconstitution à l'aide de signaux échelon

$$rect\left(\frac{t-1}{2}\right) = u(t) - u(t-2)$$

La fenêtre triangulaire

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - 2|t| & \forall \quad |t| \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \forall \quad |t| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

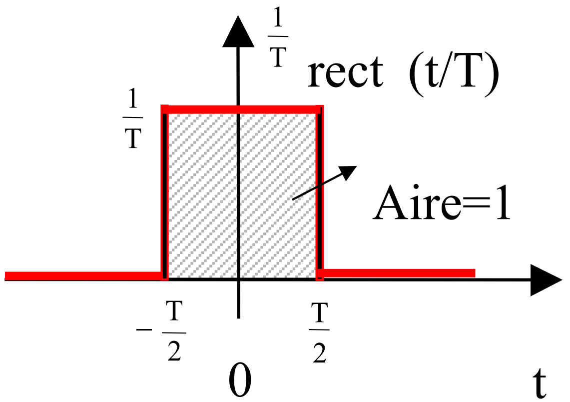


Reconstitution à l'aide de signaux de type rampe

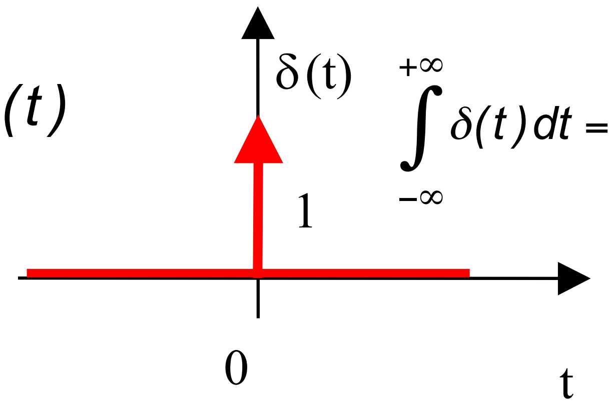
$$tri(t) = 2r\left(t + \frac{1}{2}\right) - 4r\left(t\right) + 2r\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Signal essentiel : l'impulsion de Dirac

- ***<u>Définition pratique</u>*** : considérons la limite de la fenêtre rectangulaire de largeur *T* ci-dessous lorsque *T* tend vers 0



$$\lim_{T \to 0} \frac{1}{T} rect\left(\frac{t}{T}\right) = \delta(t)$$

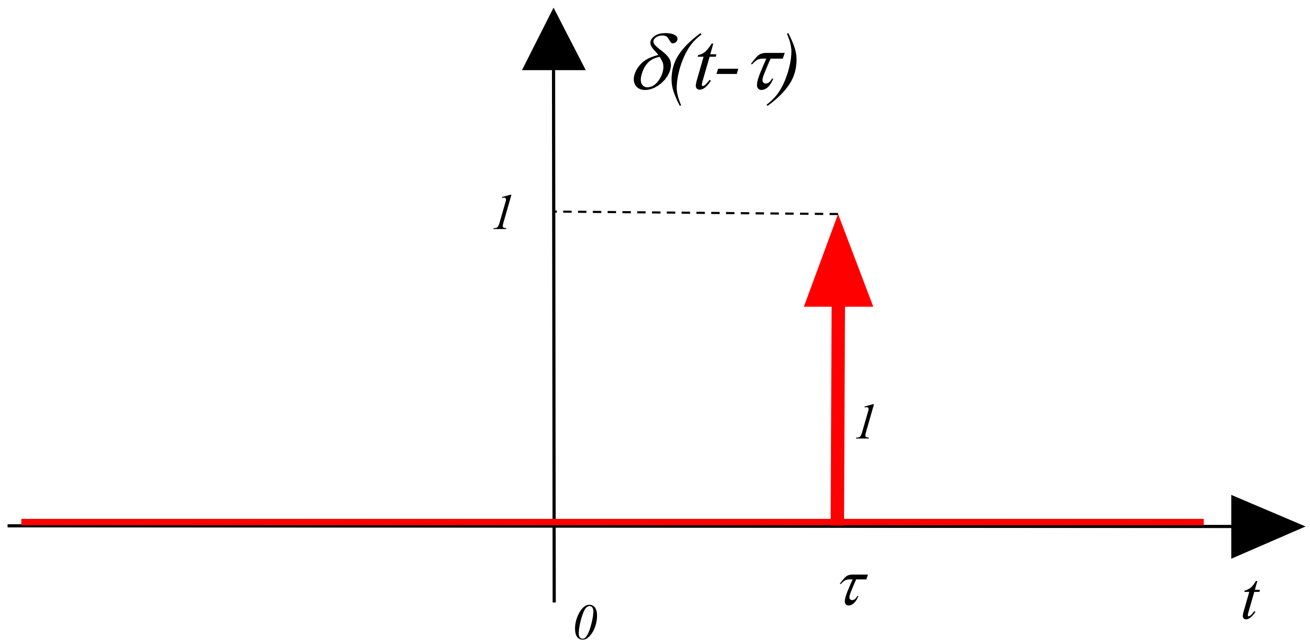


$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

δ(t) n'est pas une fonction. C'est un "être" à valeur infinie en un point et à valeur nulle partout ailleurs qui n'est pas représentable graphiquement.

Par convention, la représentation graphique d'une impulsion de Dirac est une flèche verticale placée en *t=0* de hauteur proportionnelle à la constante de pondération ici égale à 1.

L'impulsion de Dirac retardée



Signal essentiel : l'impulsion de Dirac

Mathématiquement, l'impulsion de Dirac n'est pas une ***fonction*** et se définit rigoureusement grâce à la théorie des ***distributions*** qui permet d'étendre le calcul intégral ordinaire aux impulsions en conservant les notations employées habituellement pour les fonctions

L'application aveugle du calcul différentiel ou intégral ordinaire à des impulsions de Dirac peut donc conduire à des résultats erronés

Il faut ici considérer la théorie générale des distributions (établie par ***Laurent Schwartz***) dont les **propriétés essentielles** sont rappelées

Propriétés de l'impulsion de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t-t_o)\,dt = s(t_o)$$

Cas particuliers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t)\,dt = s(0) \quad (si \;\; t_o = 0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \quad (si \;\; s(t) = 1 \;\; et \;\; t_o = 0)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = u(t)$$

$$s(t)\delta(t-t_o) = s(t_o)\delta(t-t_o)$$

Cas particulier

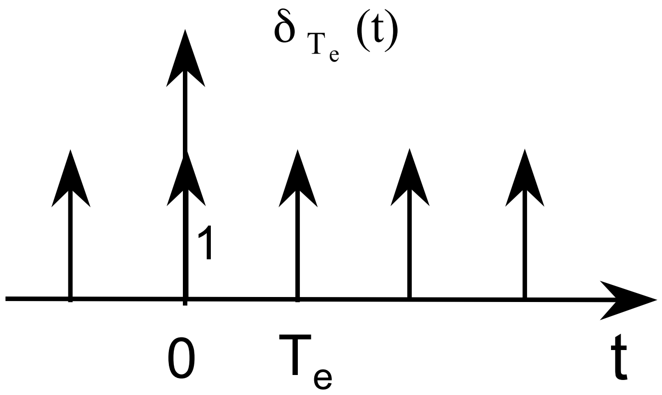
$$s(t)\delta(t) = s(0)\delta(t) \quad (si \; t_o = 0)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

Le peigne de Dirac

- Un peigne de Dirac est une suite d'impulsions de Dirac se répétant sur l'axe des temps avec une période T_e

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \quad k \in Z$$



Signal très utilisé notamment au travers des notions d'échantillonnage,…

Signal essentiel : le sinus cardinal

La fonction obtenue en effectuant le rapport d'une fonction sinusoïdale et de son argument joue un rôle très important en traitement du signal. Elle porte le nom de sinus cardinal et est définie par :

$$sinc(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

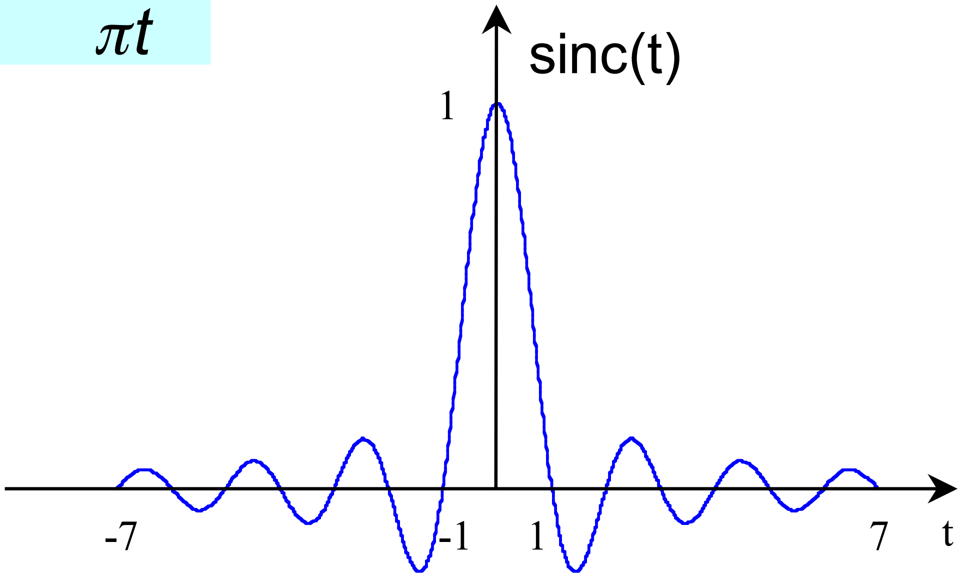
Propriétés :

$sinc(0) = 1$ (par définition)

Elle est paire

$sinc(t) = 0 \quad si \quad t = k \in Z^*$

$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)\,dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t)\,dt = 1$



Convolution

- **Définition**

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

Le produit de convolution est très utilisé en traitement du signal, notamment pour :

- ✓ le filtrage
- ✓ l'échantillonnage
- ✓ les différentes techniques de modulation

- ***Remarque*** : si $x(t)$ et $y(t)$ sont causals

$$x(t) * y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

Propriétés du produit de convolution

- Commutativité

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

- Associativité

$$x(t) * \big(y(t) * z(t)\big) = \big(x(t) * y(t)\big) * z(t) = x(t) * y(t) * z(t)$$

- Distributivité sur « + » et « - »

$$x(t) * \big(y(t) + z(t)\big) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

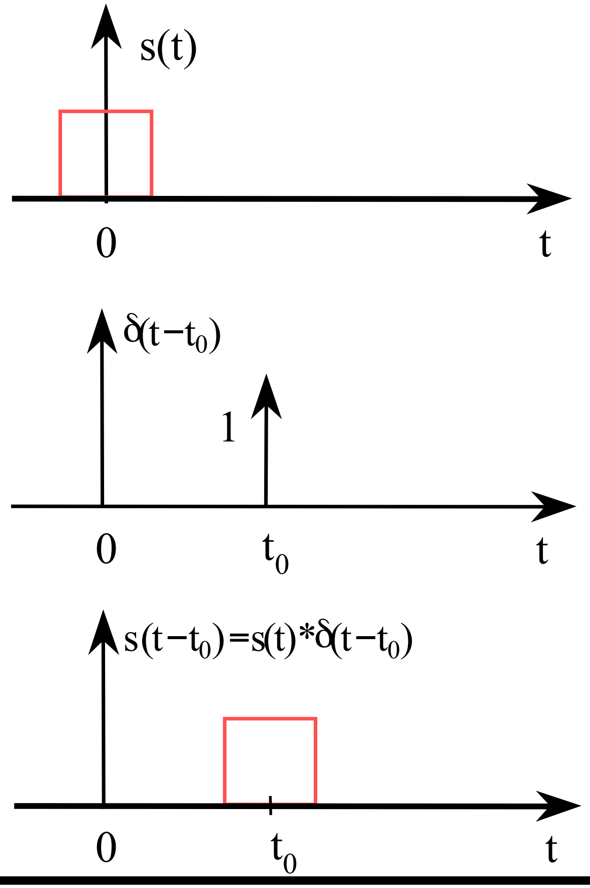
- Elément neutre : impulsion de Dirac

$$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$$

Convolution d'un signal par une impulsion de Dirac

- Convoluer un signal *s(t)* par une impulsion de Dirac positionnée en t_o revient à décaler le signal de t_o

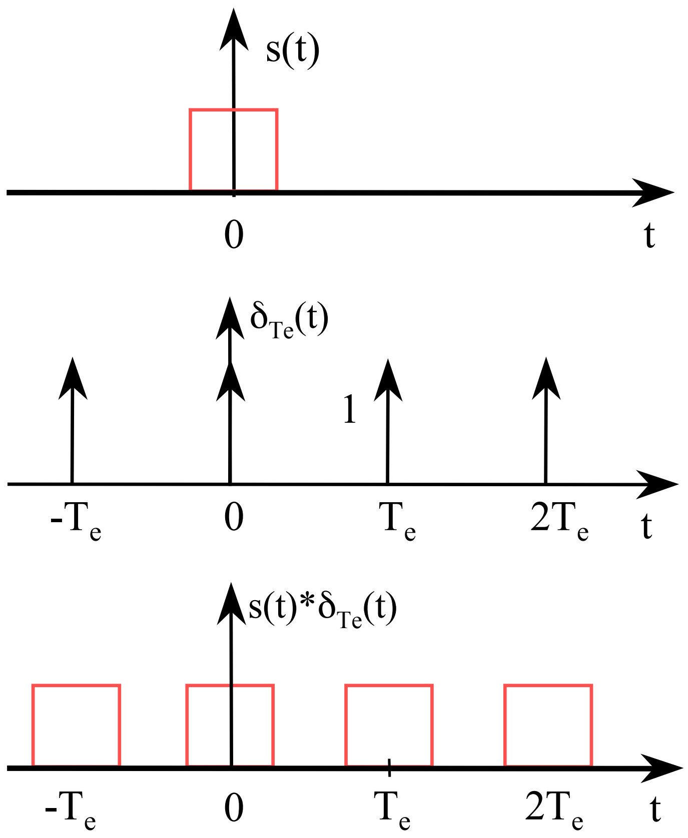
$$s(t) * \delta(t - t_o) = s(t - t_o)$$



Convolution d'un signal par un peigne de Dirac

- Convoluer un signal *s(t)* par un peigne de Dirac revient à périodiser le signal à la période T_e

$$s(t) * \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT_e)$$



Objectifs à l'issue des rappels sur les signaux à temps continu

- Connaître les signaux à temps continu usuels : échelon, sinus, fenêtre rectangulaire, sinus cardinal,…
- Connaître la classification énergétique
- Savoir opérer les transformations usuelles (inversion, retard, compression, …) sur des signaux
- Connaître l'opération de convolution et ses propriétés
- Connaître l'impulsion et le peigne de Dirac et leurs propriétés
- Savoir opérer la convolution graphique d'un signal par impulsion de Dirac