POLYTECH NANCY

TD Apprentissage de modèles n°1

H. Garnier

« Pose ta question, tu seras idiot une seconde. Ne la pose pas, tu seras idiot toute ta vie. » Albert Einstein.

Modèles à temps continu/modèles à temps discret de systèmes linéaires invariant dans le temps

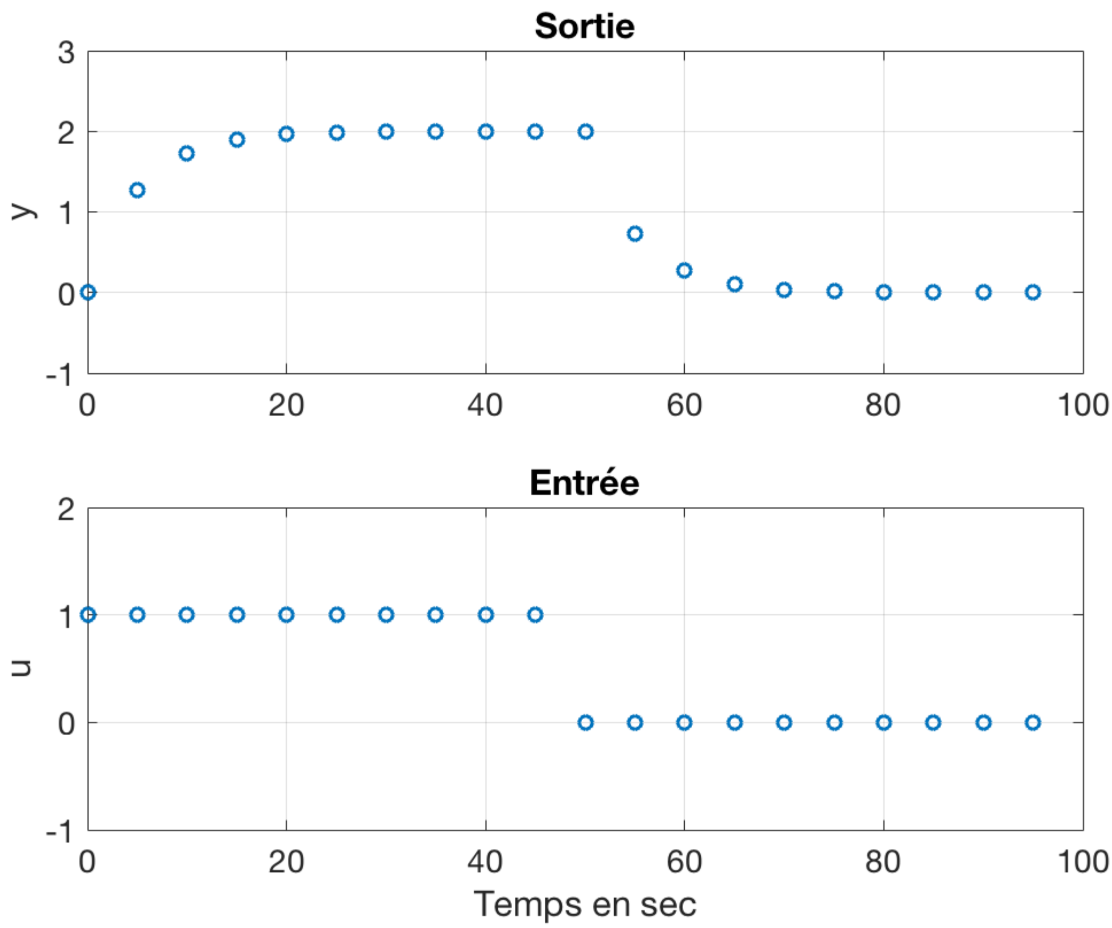

Figure 1.1: Echantillons des signaux d'entrée/sortie d'un système.

Sur la figure 1.1 sont représentés les échantillons déterministes des signaux d'entrée $u(t_k)$ et de sortie $y(t_k)$ d'un système linéaire à temps continu aux différents instants d'échantillonnage t_k représentés par des petits cercles.

Le but de cet exercice est de proposer la meilleure forme de modèle à temps continu et de modèle à temps discret d'après les échantillons enregistrés.

1.1. Modèle à temps continu du système à partir des données d'entrée/sortie échantillonnées

On cherche dans un premier temps à représenter le système linéaire sous la forme d'un **modèle à temps continu**.

1. D'après l'allure de la réponse de la figure 1.1, proposer en justifiant une forme de modèle à temps continu.
2. Déterminer, d'après la réponse, déterminer la période d'échantillonnage T_e et la valeur numérique des paramètres du modèle retenu.
3. En déduire la fonction de transfert de Laplace $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. On remarquera que les paramètres de $G(s)$ ne dépendent pas de la période d'échantillonnage T_e.
4. On rappelle que la réponse indicielle d'un modèle à temps continu du premier ordre de gain statique K et de constante de temps T s'écrit :

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})\Gamma(t) \tag{1}$$

   où $\Gamma(t)$ est l'échelon unitaire.
   Calculer la réponse indicielle de votre modèle aux instants $t_k = kT_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparez-les avec les valeurs enregistrées :
   `y=[0 1.2642 1.7293 1.9004 1.9634 1.9865 1.9950 1.9982]`

5. Affiner si besoin la valeur numérique des paramètres de votre modèle pour faire coïncider les réponses du système et du modèle à temps continu.

1.2. Modèle à temps discret d'un système à partir des données d'entrée/sortie échantillonnées

On cherche à présent à déterminer un **modèle à temps discret**.
On rappelle qu'il n'existe pas de méthode de discrétisation universelle de modèles à temps continu. Par exemple, la méthode de discrétisation dite du bloqueur d'ordre zéro n'est exacte que pour une entrée constante par morceaux. Pour toute autre entrée, le modèle à temps discret correspondant ne sera qu'une approximation du modèle à temps continu.

1. D'après la figure 1.1, formuler une hypothèse sur la variation du signal d'entrée entre 2 instants d'échantillonnage.
2. La fonction de transfert en z équivalente à un modèle du 1er ordre à temps continu lorsque l'entrée est constante entre deux instants d'échantillonnage s'écrit :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1}{z + a_1} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \tag{2}$$

   avec

$$a_1 = -e^{-\frac{T_e}{T}} \quad b_1 = K(1 + a_1) \tag{3}$$

   Notez la dépendance des coefficients de $G(z)$ vis à vis de la période d'échantillonnage T_e. Le même système échantillonné à une autre période d'échantillonnage aura donc la même forme mais des valeurs numériques différentes. Déterminer a_1 et b_1 lorsque $T_e = 5$s.
3. Déduire de $G(z)$ l'équation aux différences liant les échantillons des signaux d'entrée/sortie.
4. Calculer la réponse de votre modèle à temps discret aux instants $t_k = k \times T_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparez les échantillons avec les valeurs enregistrées.
5. Ecrire les trois lignes Matlab qui permettent de calculer/simuler la sortie du modèle à temps discret. Comparez votre implantation Matlab avec vos résultats précédents.
6. La fonction `filter` sous Matlab permet de calculer la réponse d'un système à temps discret (qui peut être vu comme un filtre numérique). Exploitez cette fonction pour calculer la réponse de votre modèle à temps discret aux instants $t_k = k \times T_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparez-les avec les valeurs enregistrées.
7. Une autre méthode de discrétisation consiste à approcher la dérivée des signaux par approximation numérique. Déterminer l'équation aux différences obtenue à partir de l'équation différentielle discrétisée en remplaçant la dérivée première du signal de sortie par :

$$\frac{dy(t)}{dt}|_{t=t_k} = \frac{1}{T_e}\big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big) \tag{4}$$

8. En déduire la fonction de transfert en z et comparez-la avec celle obtenue précédemment.
9. Calculer la réponse de votre nouveau modèle à temps discret aux instants $t_k = k \times T_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparer les échantillons avec les valeurs enregistrées.

« Pose ta question, tu seras idiot une seconde.
Ne la pose pas, tu seras idiot toute ta vie. » Albert Einstein.

Rappels sur la régression linéaire et l'estimation par moindres carrés

Exercice 3.1 - Estimation paramétrique d'un modèle de la position d'un chariot par moindres carrés
On souhaite modéliser la position d'un chariot qui se déplace le long d'un rail rectiligne.
On supposera que le chariot se déplace à accélération constante.

Table 1: Position du chariot au cours du temps

t_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y(t_k)$	0.2	0.21	0.23	0.26	0.28	0.32	0.35	0.40	0.44	0.49

1. Les valeurs numériques de $y(t_k)$ pour quelques valeurs du temps sont rassemblées dans le tableau 1. Tracer la position du chariot au cours du temps.
2. Le modèle décrivant la position du chariot en fonction du temps est choisi comme :
$$y(t_k) = \frac{1}{2}at_k^2 + vt_k + c \tag{5}$$
Donner la signification physique et les unités des trois paramètres a,v,c du modèle.
3. Ecrire le modèle sous forme de regression linéaire.
$$y(t_k) = \phi^T(t_k)\theta \tag{6}$$
où $\theta = [a \quad v \quad c]^T$
4. A partir des $N = 10$ données du tableau 1, formuler le problème d'estimation des 3 paramètres sous forme matricielle :
$$Y = \Phi\theta \tag{7}$$
5. Préciser le nom et les dimensions de chacune des matrices.
6. L'estimation par moindres carrés ordinaires est rappelée ci-dessous :
$$\hat{\theta} = \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T Y \tag{8}$$
Implanter sous Matlab cette estimation pour déterminer la valeurs numérique des trois paramètres.
7. Vérifier que vous obtenez les mêmes estimées à l'aide de la commande Matlab suivant (où `Phi` représente Φ) :
`thetaHat=Phi\Y`
On privilégiera cette implantation à l'avenir.
8. Donner le modèle de simulation de la position du chariot et calculer les positions simulées à partir du modèle estimé.
9. Calculer et tracer l'erreur de simulation (aussi appelée résidus) aux différents instants de mesure.

10. Calculer la moyenne et la variance des résidus.

Exercice 3.2 - Estimation paramétrique d'un modèle à temps discret d'un réacteur chimique par moindres carrés

TABLE 2: Données issues du réacteur chimique

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(t_k)$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$y(t_k)$	0	0.13	0.09	0.10	0.10	0.10	-0.17	-0.08	-0.11	-0.10	-0.10

1. Les mesures du flux d'entrée $u(t_k)$ et de la concentration du substrat de sortie $y(t_k)$ d'un réacteur chimique sont rassemblées dans le tableau 1.
2. Le modèle décrivant la réaction chimique est supposé pouvant s'écrire sous la forme suivante :
$$y(t_k) = b_0 u(t_k) + b_1 u(t_{k-1}) + b_2 u(t_{k-2}) + e(t_k) \tag{9}$$
où $e(t_k)$ est un bruit blanc de variance σ_e^2.
En utilisant l'opérateur retard q^{-1} ($q^{-1}u(t_k) = u(t_{k-1})$), écrire le modèle sous forme polynomiale puis rappeler le nom de cette forme de modèle.
3. Que représentent les paramètres à estimer b_0, b_1 et b_2.
4. Ecrire le modèle sous forme de regression linéaire :
$$y(t_k) = \phi^T(t_k)\theta + e(t_k) \tag{10}$$
où $\theta = [b_0 \quad b_1 \quad b_2]^T$
5. A partir des $N = 11$ données du tableau 2, formuler le problème d'estimation des 3 paramètres sous forme matricielle :
$$Y = \Phi\theta + E \tag{11}$$
6. Rappeler la solution des moindres carrés en fonction de Y et Φ qui permet d'estimer le vecteur des paramètres θ.
7. On donne :
$$\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2857 & -0.25 & 0.0357 \\ -0.25 & 0.50 & -0.25 \\ 0.0357 & -0.25 & 0.2857 \end{pmatrix} \qquad \Phi^T Y = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.95 \\ 0.61 \end{pmatrix} \tag{12}$$
Calculer les valeurs numériques des trois paramètres.
8. Donner le modèle de simulation de la concentration de substrat de sortie et calculer les concentrations simulées à partir du modèle estimé.
9. En déduire l'erreur de simulation aux différents instants de mesure.

Exercice 3.3 - Prévision de la population aux USA

Le fichier `pop_usa.mat` contient les valeurs de la population aux USA sur la période 1900-2010.

On choisit de représenter l'évolution de la population aux USA par un modèle polynomial d'ordre 3 de la forme :
$$p(t_k) = \theta_0 + \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + \theta_3 t_k^3 \tag{13}$$

1. Déterminer les paramètres de ce modèle polynomial d'ordre 3 permettant de représenter l'évolution de la population aux USA de 1900 à 2010.
2. Exploiter votre modèle pour fournir une estimation de la population aux USA en 2020 puis en 2050.

« Pose ta question, tu seras idiot une seconde.
Ne la pose pas, tu seras idiot toute ta vie. » Albert Einstein.

Estimation paramétrique de modèles à temps discret
-
Initiation à la boîte à outils Matlab *System Identification* (SID)

Le travail réalisé fera l'objet d'un compte-rendu par binôme qui sera noté. Il est demandé de suivre les consignes présentées ci-dessous pour rédiger votre compte-rendu.

Consignes pour la rédaction de votre compte-rendu de TD Matlab
Un compte-rendu est un document scientifique. Il doit donc respecter une certaine organisation.

Votre compte-rendu qui pourra être réalisé sous Live editor de Matlab devra être structuré de la manière suivante :
- une introduction générale précisant les objectifs du TP
- Pour chaque partie ou exercice :
  - une présentation brève des attendus
  - un rappel ou une présentation (si nécessaire) des résultats théoriques
  - une description des résultats de simulation sous la forme graphique ou numérique
  - une analyse critique des résultats en lien avec ceux théoriques attendus
  - une conclusion brève
- une conclusion générale qui précise ce qui a été compris et retenu lors du TD et les éventuelles difficultés rencontrées.
- une annexe rassemblant les programmes Matlab que vous avez développés.

Votre compte-rendu à rédiger obligatoirement en binôme est à envoyer par courriel à l'intervenant sous la forme d'un fichier unique au format pdf joint au message en respectant la date limite d'envoi qui aura été communiquée durant la séance de TD.

1 Etude en simulation

Estimation paramétrique d'un modèle à temps discret par ARX, IVMA et SRIV.

1.1 Génération de signaux d'entrée/sortie

Soient les systèmes décrits par :

$$\mathcal{S}1: \quad A(q^{-1})y(t_k) = q^{-nk}B(q^{-1})u(t_k) + e(t_k) \tag{1}$$

$$\mathcal{S}2: \quad y(t_k) = \frac{q^{-nk}B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t_k) + e(t_k) \tag{2}$$

où q^{-1} représente l'opérateur retard, u l'entrée du système, y la sortie mesurée, e un bruit blanc à temps discret, nk le nombre d'échantillons pour le retard et les polynômes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $F(q^{-1})$ sont définis par :

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1.0 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2} \\ B(q^{-1}) = 1.0 + 0.5q^{-1} \\ F(q^{-1}) = A(q^{-1}) \\ nk = 1 \end{cases}$$

1. Déduire des équations (1) et (2) le nom (ARX ou OE) des structures de modèle des systèmes $\mathcal{S}1$ et $\mathcal{S}2$.
2. Préciser la fonction de transfert du modèle du système et du bruit pour chaque structure.
3. Préciser l'équation aux différences dans le cas de chaque structure.
4. Donner le nombre de paramètres à estimer pour chaque polynôme et le gain statique de la fonction de transfert.

Vous allez dans un premier temps générer des signaux d'entrée/sortie à partir desquels vous allez tenter d'estimer les paramètres des systèmes $\mathcal{S}1$ et $\mathcal{S}2$. Pour cela, une fois sous Matlab, entrer, dans un live script Matlab, la séquence de commandes suivante :

```
N=500;
A=[1  -1.5  0.7];
F=[1  -1.5  0.7];
B=[0   1.0  0.5];
S1 = idpoly(A,B);
S2 = idpoly(1,B,1,1,F);
u=sign(randn(N,1));
ydet=sim(S1,u);
datadet=iddata(ydet,u);
e=0.4*randn(N,1);
yS1=sim(S1,[u e]);
yS2=sim(S2,[u e]);
dataS1=iddata(yS1,u);
dataS2= iddata(yS2,u);

figure(1)
idplot(dataS1),title('Données issues du système 1')
figure(2)
idplot(dataS2),title('Données issues du système 2')
figure(3)
plot([ydet yS1 yS2]),
legend('sortie non bruitée','sortie du modèle ARX','sortie du modèle OE')
```

Vous avez à présent à votre disposition trois jeux de données contenus dans les objets de données `datadet`, `dataS1` et `dataS2` pour effectuer l'estimation paramétrique.

1.2 Estimation paramétrique

1.2.1 Choix de la structure de modèle

On supposera les ordres des modèles ainsi que le nombre d'échantillons pour le retard $nk = 1$ parfaitement connus.

1.2.2 Estimation par moindres carrés simples

On s'intéresse dans un premier temps à l'identification du système par la méthode des moindres carrés simples. Le modèle recherché est du type ARX :

$$\mathcal{M}_{\text{ARX}} : A(q^{-1})y(t_k) = q^{-nk}B(q^{-1})u(t_k) + e(t_k) \tag{3}$$

1. Rappeler l'équation aux différences associée au modèle.
2. En déduire l'écriture du modèle sous forme de régression linéaire à l'instant $t = t_k$.
3. En supposant N mesures des signaux d'entrée/sortie, formuler le problème sous forme matricielle (voir transparents de cours). Donner la dimension de chaque matrice.
4. Rappeler la solution de l'estimateur des moindres carrés.
5. Implanter cette solution sous Matlab dans le cas des données déterministes `datadet` puis bruitées `dataS1` et `dataS2`. Commentaires. On rappelle que l'on réalise ici une estimation ponctuelle et que l'on ne peut parler de biais de l'estimateur mais plutôt d'erreur d'estimation. Vous pouvez exécuter plusieurs fois votre programme pour dégager la tendance au niveau du biais des estimées.
6. La boîte à outils Matlab *System Identification* contient différentes fonctions permettant de réaliser l'estimation des paramètres d'un modèle. Elles ont toutes la structure suivante :

   ```
   M=fonction(data,nn)
   ```

   avec :
   - `M` : le modèle estimé ;
   - `fonction` : le nom de la fonction SID : `arx, iv4, oe, pem, ...`
   - `data` : l'objet *données* contenant les signaux d'entrée/sortie construit à la partir de la fonction `iddata` : `data=iddata(y,u)` ;
   - `nn` : un vecteur ligne permettant de définir le nombre de paramètres des polynômes du modèle et la valeur du retard (supposé être un multiple entier de la période d'échantillonnage $\tau =$`nk`$\times T_e$) : `[na nb nk]` par exemple. Attention il s'agit du nombre de paramètres à estimer de chaque polynôme du modèle et non du degré de chaque polynôme.

   La commande suivante permet d'afficher les paramètres du modèle estimé :

   ```
   present(M);
   ```

   Si vous désirez obtenir plus d'informations sur l'utilisation d'une fonction, vous pouvez entrer la commande suivante à tout moment :

   ```
   help fonction
   ```

   La fonction SID `arx` permet d'estimer les paramètres d'un modèle ARX :

   $$\mathcal{M}_{\text{ARX}} : y(t_k) = \frac{q^{-nk}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t_k) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(t_k) \tag{4}$$

   par la méthode des moindres carrés simples. La commande est la suivante :

   ```
   Marx=arx(data,[na nb nk]);
   ```

   `na` et `nb` correspondent respectivement au nombre de paramètres à estimer des polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ et `nk` représente le nombre d'échantillons pour le retard. Les paramètres estimés peuvent être visualisés par la commande `present(Marx)`. L'écart-type estimé de chaque paramètre est affiché entre parenthèse.
7. Entrer les commandes suivantes pour estimer les paramètres dans le cas des trois jeux de données par la méthode des moindres carrés simples :

   ```
   Marxdet=arx(datadet,[2 2 1]);present(Marxdet);
   MarxS1= arx(dataS1,[2 2 1]);present(MarxS1);
   MarxS2= arx(dataS2,[2 2 1]);present(MarxS2);
   ```
8. Pour une réalisation du bruit, comparer les résultats de votre implantation avec ceux obtenus via la fonction de la boîte à outils SID.

1.2.3 Estimation par variable instrumentale à modèle auxiliaire

On s'intéresse à présent à l'identification d'un modèle ARX par la méthode de la variable instrumentale à modèle auxiliaire (IVMA) vue en cours.

1. En supposant N mesures des signaux d'entrée/sortie. Rappeler la solution de l'estimateur de variable instrumentale à modèle auxiliaire. Préciser la dimension de chaque matrice.
2. Implanter cette solution sous Matlab (voir transparents de cours). Commentaires.
   Il n'existe hélas, pas de fonction dans la boîte à outils SID qui implante directement cette méthode de variable instrumentale.

1.2.4 Estimation par variable instrumentale itérative

La fonction `sriv` disponible dans la boîte à outils CONTSID [1] permet d'estimer les paramètres d'un modèle du type OE :

$$\mathcal{M}_{\text{OE}} : y(t_k) = \frac{q^{-nk}B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t_k) + e(t_k) \tag{5}$$

par la méthode de variable instrumentale itérative. Les estimées délivrées sont alors optimales (sans biais et à minimum de variance) lorsque le bruit additif $e(t_k)$ sur la sortie est blanc (système vrai de type OE). La commande est la suivante :

```
Msriv=sriv(data,[nb nf nk]);
% Attention à la définition du nombre de paramètres à estimer
```

`nb` et `nf` correspondent respectivement au nombre de paramètres à estimer des polynômes $B(q^{-1})$ et $F(q^{-1})$ du modèle et `nk` représente le nombre d'échantillons pour le retard. Les paramètres estimés ainsi que leur écart-type peuvent être visualisés par la commande :

```
present(Msriv);
```

1. Entrer les commandes suivantes pour estimer les paramètres du modèle OE à l'aide de la fonction `sriv` :

   ```
   Msriv=sriv(data,[2  2  1]);present(Msriv);
   ```

2. Comparer avec les résultats obtenus avec les méthodes de moindres carrés simples et de variable instrumentale à modèle auxiliaire.

1.3 Analyse comparative des performances des estimateurs ARX, IVMA et SRIV par simulation de Monte Carlo

Ecrire un programme qui permet de comparer les performances des estimateurs ARX, IVMA et SRIV par simulation de Monte Carlo (voir transparents de cours) dans le cas des systèmes `S1` et `S2`.
Résumer vos conclusions dans un tableau synthétique permettant de résumer les propriétés statistiques (biais, variance) des 3 estimateurs étudiés dans le cas des systèmes `S1` et `S2`.

1. www.cran.univ-lorraine.fr/contsid/