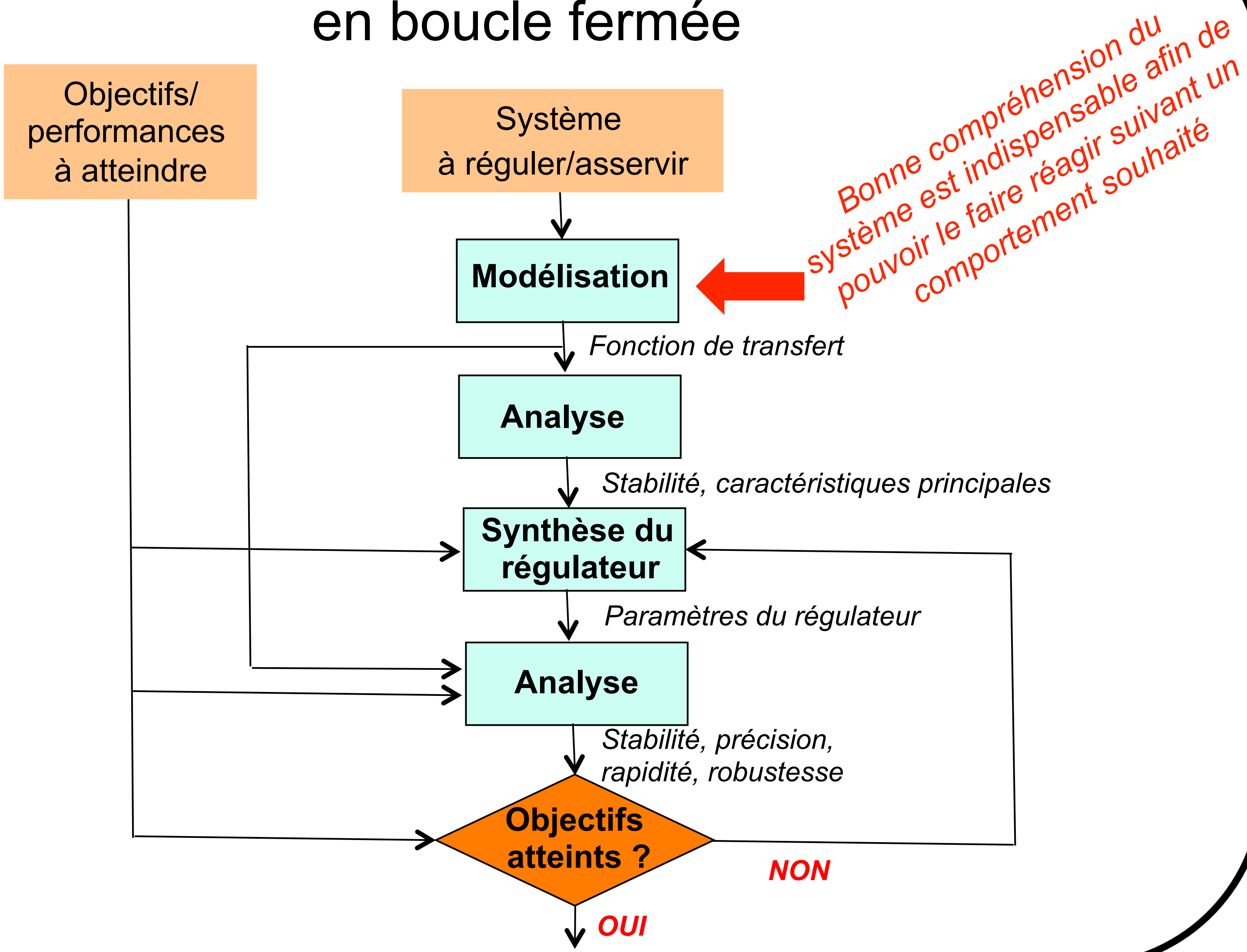
Modélisation & Commande des Systèmes I

Quelque rappels du cours d'Automatique continue (3A)

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Etapes de conception d'une commande en boucle fermée

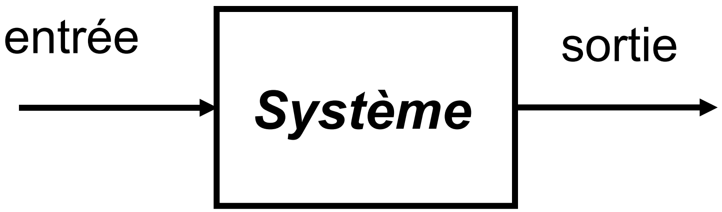


Définition - ***Système***

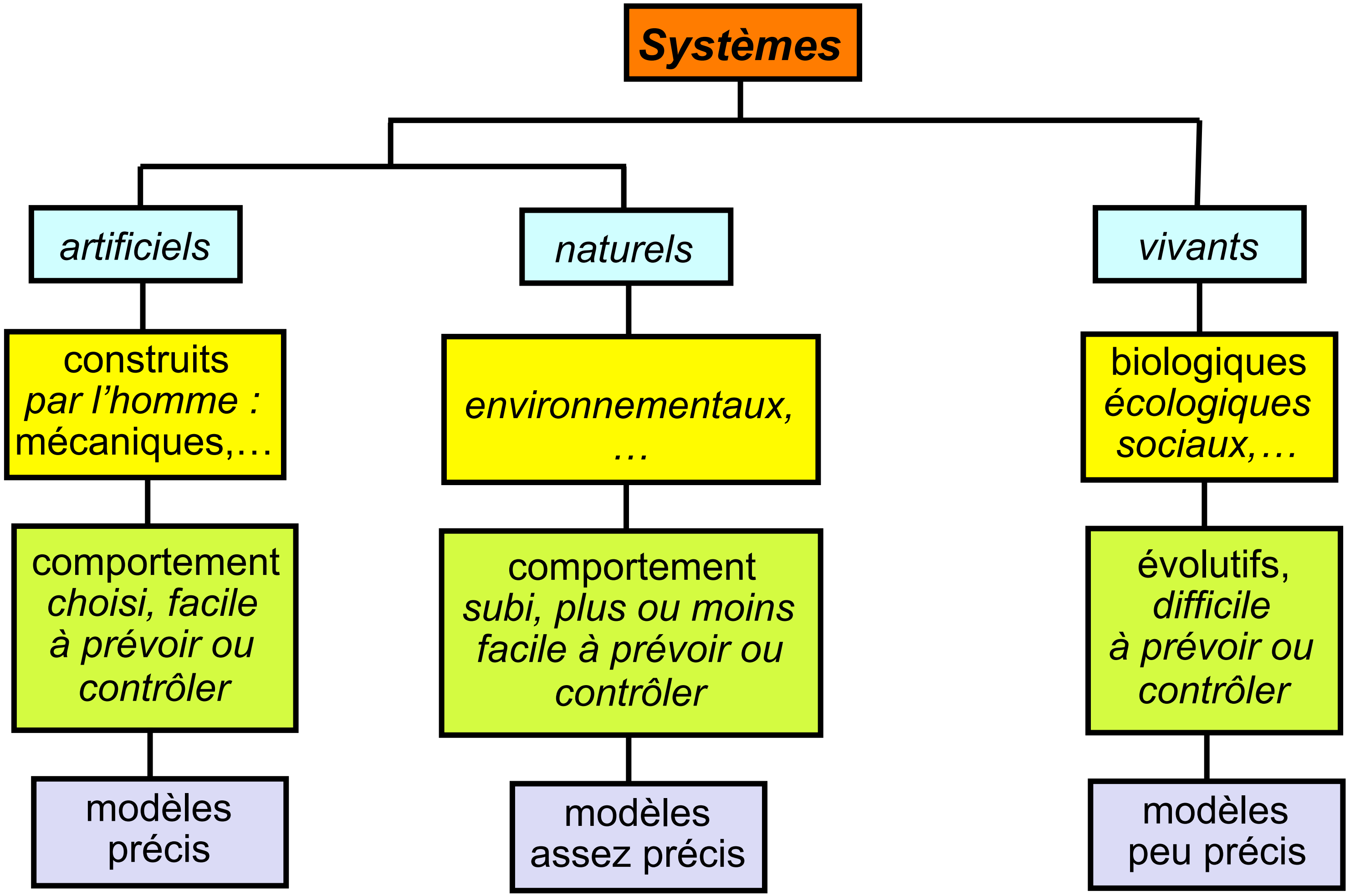
- ***C'est l'objet que l'on désire étudier possédant un ou des signaux d'entrée et un ou des signaux de sortie***

  Exemples : voiture, avion, circuit électrique, bras de robot,…

- En automatique, on représente un système par un schéma fonctionnel



Classification des systèmes



Définition - ***Système statique* (ou instantanée)**

- ***C'est un système dont l'état* (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) *à un instant donné ne dépend que de l'entrée à cet instant***

  - Un système statique est dit ***sans mémoire*** car sa sortie à l'instant *t* ne dépend que des valeurs de l'entrée à l'instant *t*

- L'étude d'un système statique nécessite la connaissance de :
  - sa loi d'évolution, qui prend la forme d'une ***équation algébrique*** du type ***y(t)=f [x(t)]***

- Exemples **:** $y(t)=R\,x(t)$ $\qquad y(t)=\dfrac{2x^2(t)}{5\cos\big(x(t)\big)+1}$

Définition - ***Système dynamique***

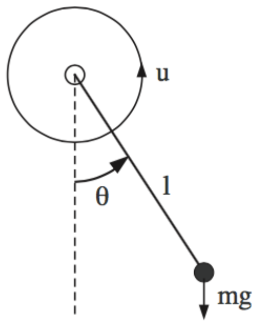
- ***C'est un système dont l'état** (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système)* ***évolue en fonction du temps***
  - Un système dynamique est dit ***à mémoire*** car sa sortie dépend de ses valeurs et de celles de l'entrée dans le passé

- L'étude d'un système dynamique nécessite la connaissance de :
  - sa loi d'évolution, qui prend la forme d'une ***équation différentielle***
  - son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant *t=0*

- Exemple : bras de robot rigide

$$ml^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgl \sin\theta(t) = u(t)$$

$$\theta(0) = 15°; \dot{\theta}(0) = 0$$



Système linéaire invariant dans le temps *(LTI)* et causal

- Un système dynamique d'entrée *x(t)* et de sortie *y(t)* décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \qquad n \geq m$$

est ***linéaire, invariant dans le temps (LTI)*** et ***causal***

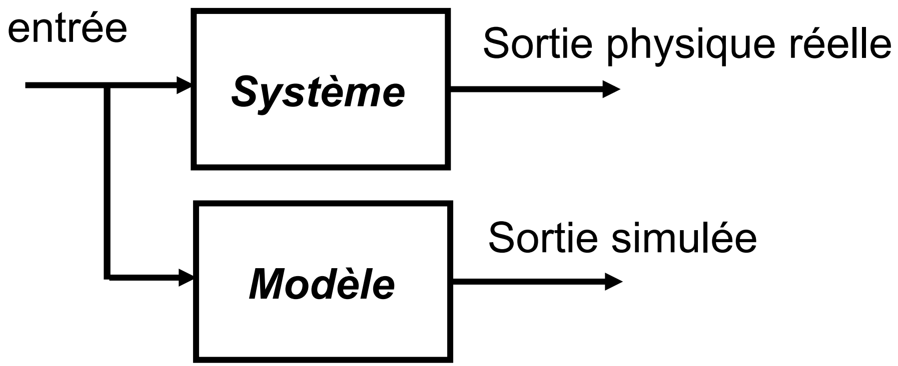
***« Linear systems are important because we can solve them »**, Richard Feynman*

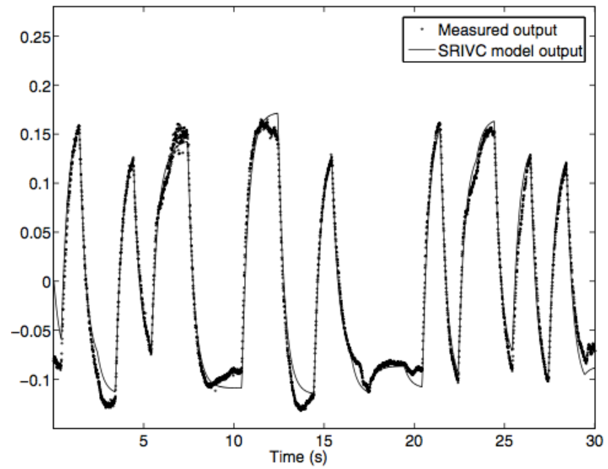
Dans la suite du cours, on supposera que les systèmes dynamiques sont LTI et causal

Visionner la vidéo de Brian Douglas : Control Systems Lectures-LTI Systems

Définition - *Modèle*

- ***C'est un ensemble de relations mathématiques entre le ou les signaux d'entrée et le ou les signaux de sortie d'un système***
  - Il doit approcher le comportement réel du système





  - Sa complexité/précision dépend de son utilisation

Visionner la vidéo de Brian Douglas : Control Systems Lectures-Modeling Physical Systems, An Overview

Fonction de transfert

- Définition : *c'est le rapport de la transformée de Laplace de la sortie du système Y(s) sur la transformée de Laplace de l'entrée X(s) lorsque les conditions initiales sont nulles*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Lorsque les conditions initiales des signaux d'entrée/sortie sont nulles

- Remarque importante :

En Automatique continue, on représente souvent un système par sa fonction de transfert G(s)

Visionner la vidéo de Brian Douglas : Control Systems Lectures-Transfer functions

Fonction de transfert - Propriétés

- Ce concept de fonction de transfert ne s'applique qu'aux systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI)
- *G(s)* ne dépend que du système. Elle ne dépend ni de l'entrée, ni des conditions initiales des signaux d'E/S
- *La fonction de transfert d'un système s'écrit*
  - *<u>souvent</u> comme une **fonction rationnelle** : rapport de 2 polynômes*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n}$$

  - *<u>mais pas toujours !</u>*
    - Ex : système linéaire invariant dans le temps avec retard pur

$$\dot{y}(t) = x(t-\tau) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{e^{-\tau s}}{s}$$

Ordre d'un système

- Soit un système linéaire décrit par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- Définition
  - ***L'ordre n*** *d'un système est le degré le plus élevé du polynôme du dénominateur de G(s), le cas échéant après élimination des facteurs communs au numérateur et au dénominateur*
  - Exemples

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_o^2}; \quad n = 2 \qquad\qquad G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s} = \frac{1}{s+2}; \quad n = 1$$

Gain statique d'un système

- Soit un système linéaire décrit par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n}$$

- Définition
  - ***Le gain statique** d'un système est la valeur de G(s) pour s=0*

$$K = \lim_{s \to 0} G(s)$$

    - Pour un <u>*système stable*</u>, on a aussi $K = \dfrac{\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)}{\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)}$

  - Il est parfois utile de définir d'autres gains :
    - ***Gain en vitesse*** $K_v = \lim\limits_{s \to 0} sG(s)$
    - ***Gain en accélération*** $K_a = \lim\limits_{s \to 0} s^2 G(s)$

Exemple

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

$K = 2$

$K_v = 0$

$K_a = 0$

Pôles et zéros d'une fonction de transfert

- Soit une fonction de transfert *G(s)*

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+\ldots+a_1 s+a_0}=C\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

- Définitions
  - ***zéros*** $\boldsymbol{z_j}$: racines du numérateur *N(s)=0*
  - ***pôles*** $\boldsymbol{p_i}$: racines du dénominateur *D(s)=0*
  - On trace souvent le ***diagramme des pôles/zéros***
  - Ils peuvent être réels ou complexes
  - S'ils sont complexes, ils apparaissent en paires conjuguées
  - Exemple $G(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega_o^2}=\dfrac{s}{(s+j\omega_o)(s-j\omega_o)}$

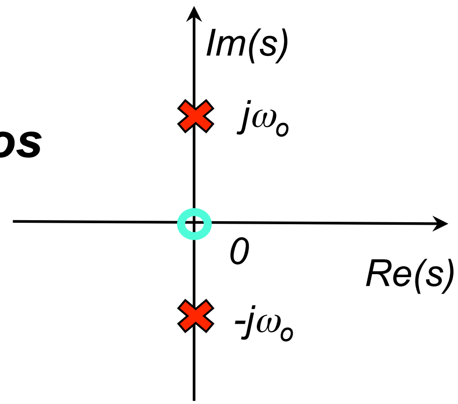
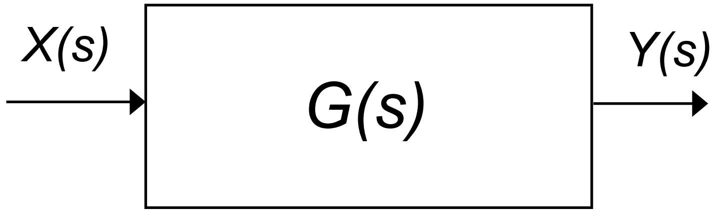


Diagramme des pôles/zéros

H. Garnier

Schéma-bloc ou schéma fonctionnel

*En **Automatique**, on représente un système par un schéma-bloc qui relie la transformée de Laplace de l'entrée X(s) à la transformée de Laplace de la sortie Y(s) via sa fonction de transfert G(s)*



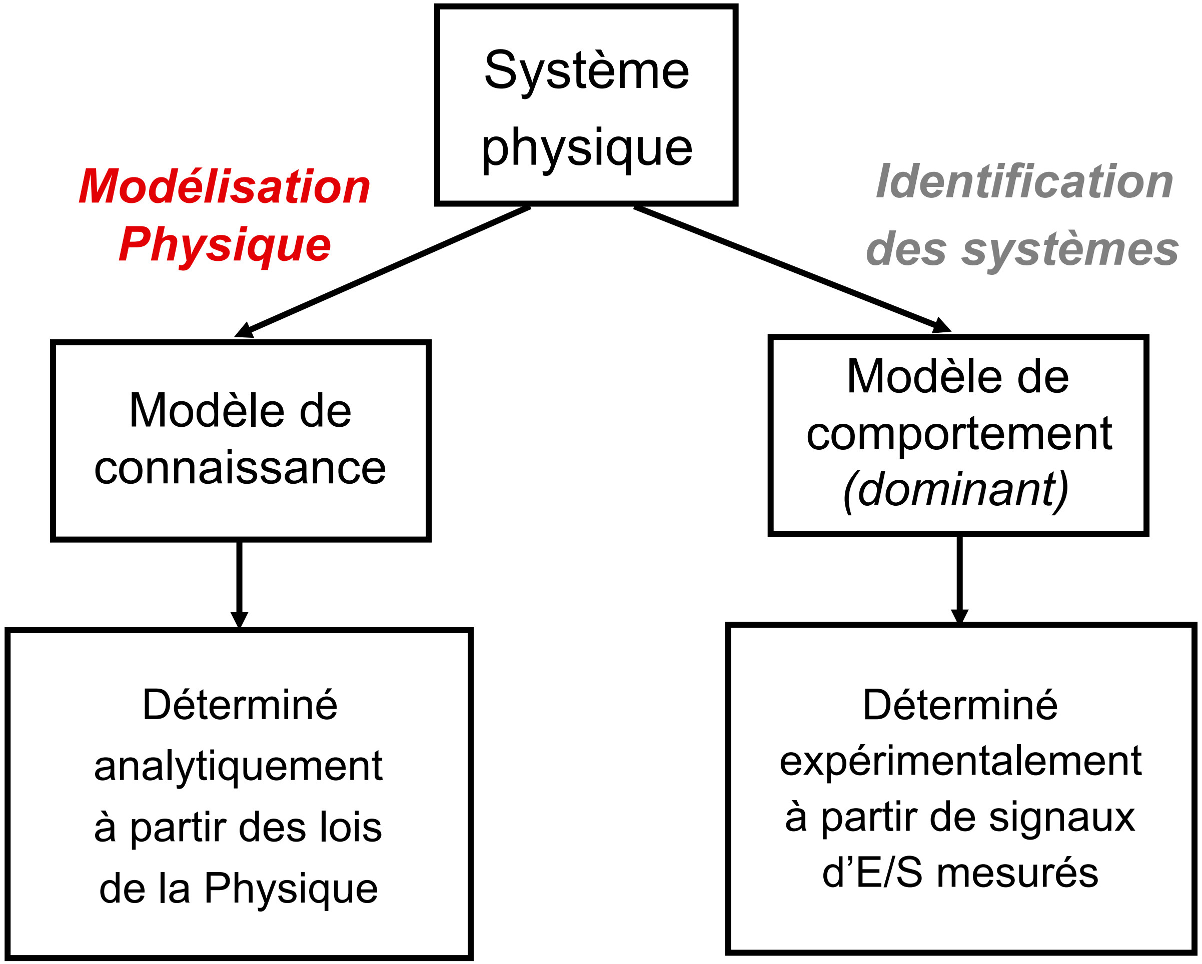
Du schéma-bloc, on peut en déduire les relations

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

ou

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

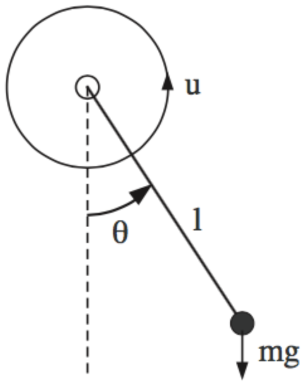
Types de modèles & d'approches de modélisation



H. Garnier

Modèle de connaissance d'un bras de robot rigide linéarisé

Domaine temporel



$$ml^2\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+mgl\,\theta(t)=u(t)$$

Domaine de Laplace

G(s) ?

$$ml^2\,L\left(\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\right)+mgl\,L\big(\theta(t)\big)=L\big(u(t)\big)$$

$$ml^2\left(s^2\Theta(s)\right)+mgl\theta(s)=U(s)$$

$$\left(ml^2s^2+mgl\right)\Theta(s)=U(s)$$

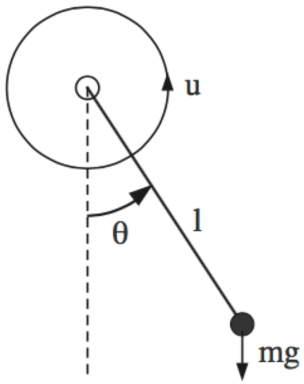
$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{ml^2s^2+mgl}$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{ml\left(ls^2+g\right)}}$$

$$n=2;\quad K=\frac{1}{mgl};\quad p_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

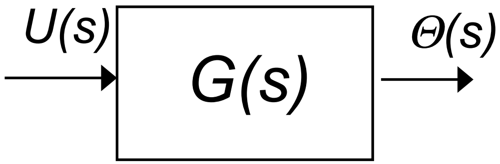
Modèle de connaissance d'un bras de robot rigide

Représentation en Physique



$$ml^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgl\,\theta(t) = u(t)$$

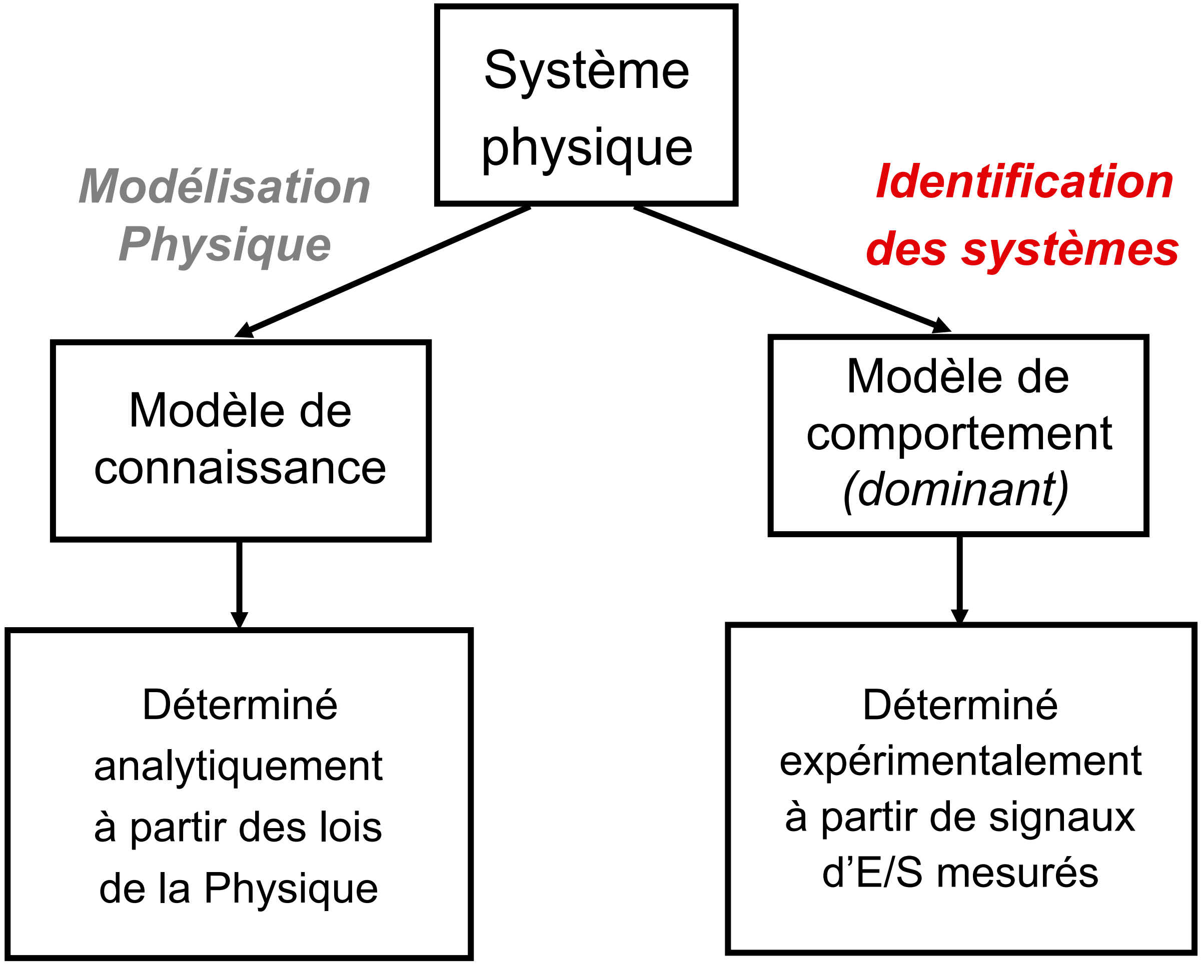
Représentation en Automatique



$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{ml\left(ls^2 + g\right)}$$

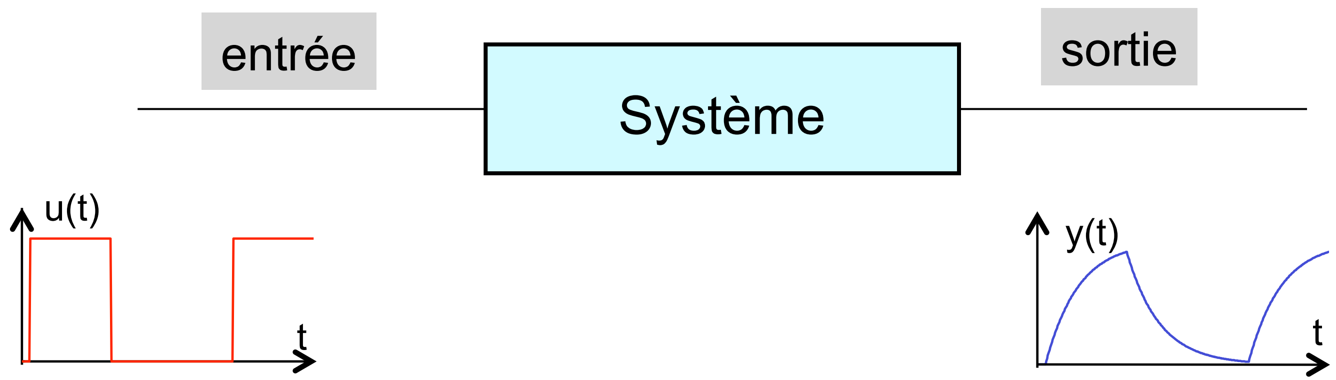
H. Garnier

Types de modèles & d'approches de modélisation



Méthode de base par déterminer un modèle de comportement d'un système dynamique

- On envoie un échelon (ou une suite d'échelon) à l'entrée du système et on relève expérimentalement la réponse du système
  - Identification de modèles « simples » d'ordre 1 ou 2 avec retard pur à partir de la ***réponse indicielle***
- Avantages
  - Très facile à réaliser en pratique



H. Garnier

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

POLYTECH NANCY

Rappel : Identification d'un modèle du 1er ordre à partir de la réponse indicielle

Modèle du premier ordre

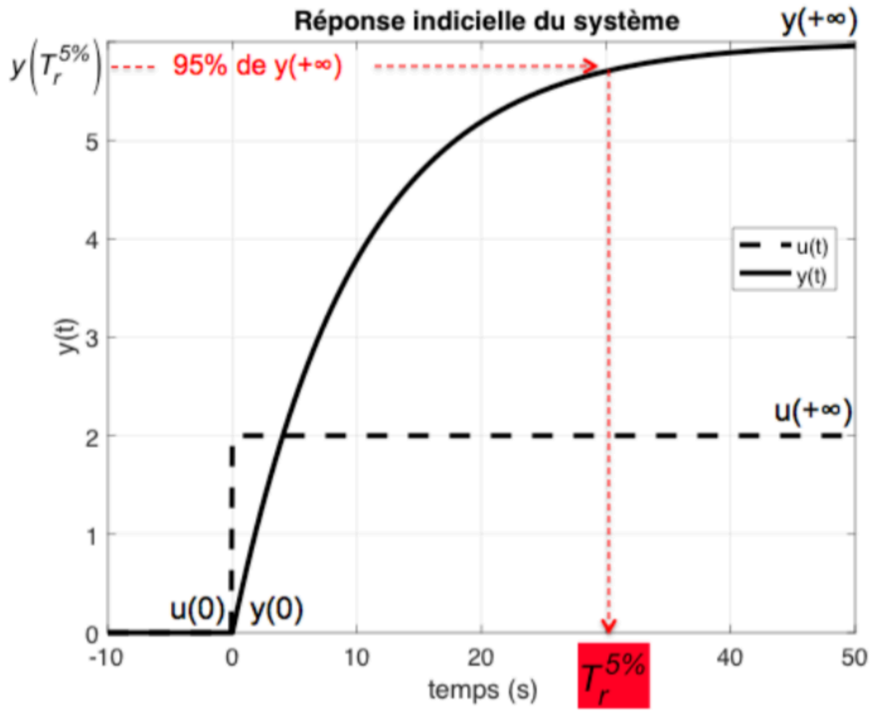
$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

1. Relever les valeurs finale et initiale de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

2. Relever $y(T_r^{5\%})$, en déduire $T_r^{5\%}$ puis T :

$$T = \frac{T_r^{5\%}}{3}$$



H. Garnier

Rappel : Identification d'un modèle du 2e ordre sous-amorti à partir de la réponse indicielle

Modèle du second ordre pseudo-périodique

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}$$

1. Relever les valeurs finales et initiales de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

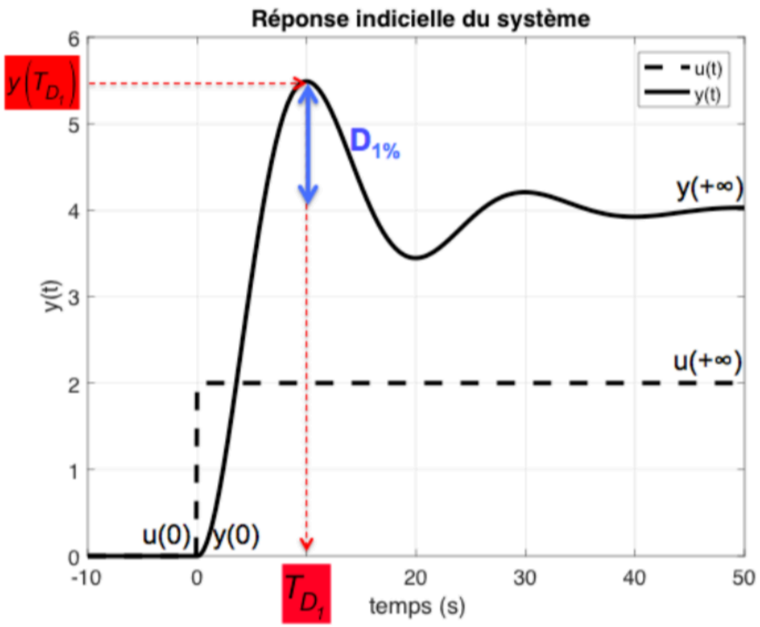
2. Relever les valeurs finale et initiale de la réponse ainsi que celle du premier dépassement $y(t_{D_1})$. On en déduit D_1, puis z :

$$D_1 = \frac{y(T_{D_1}) - y(\infty)}{y(\infty) - y(0)}$$

$$z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{(\ln(D_1))^2 + \pi^2}}$$

3. Relever l'instant du premier dépassement T_{D_1}. On en déduit ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T_{D_1}\sqrt{1 - z^2}}$$



Rappel : Identification d'un modèle du 1er ordre à retard pur à partir de la réponse indicielle

Modèle de Broïda

Broïda a proposé d'approcher la réponse apériodique de tout système d'ordre n par un premier ordre avec retard pur

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$$

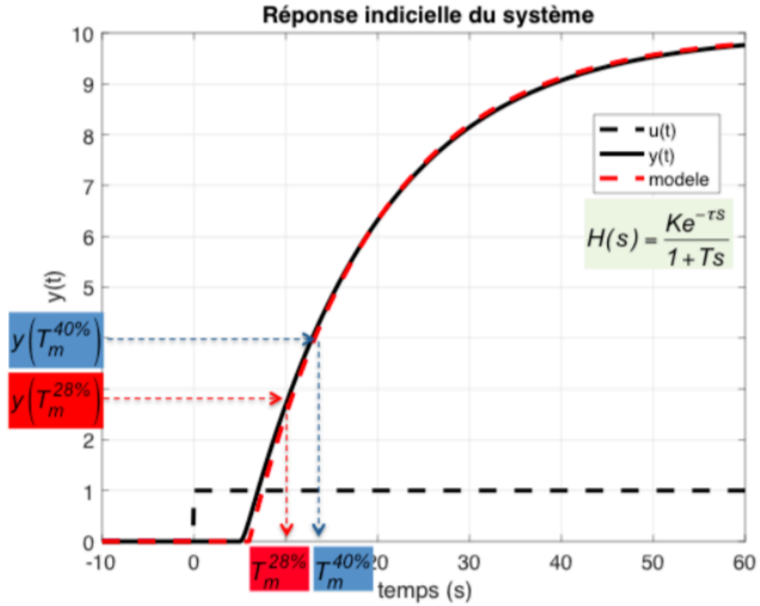
1. Relever les valeurs finales et initiales de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

2. Relever $y(T_m^{28\%})$ et $y(T_m^{40\%})$, en déduire $T_m^{28\%}$ et $T_m^{40\%}$ puis :

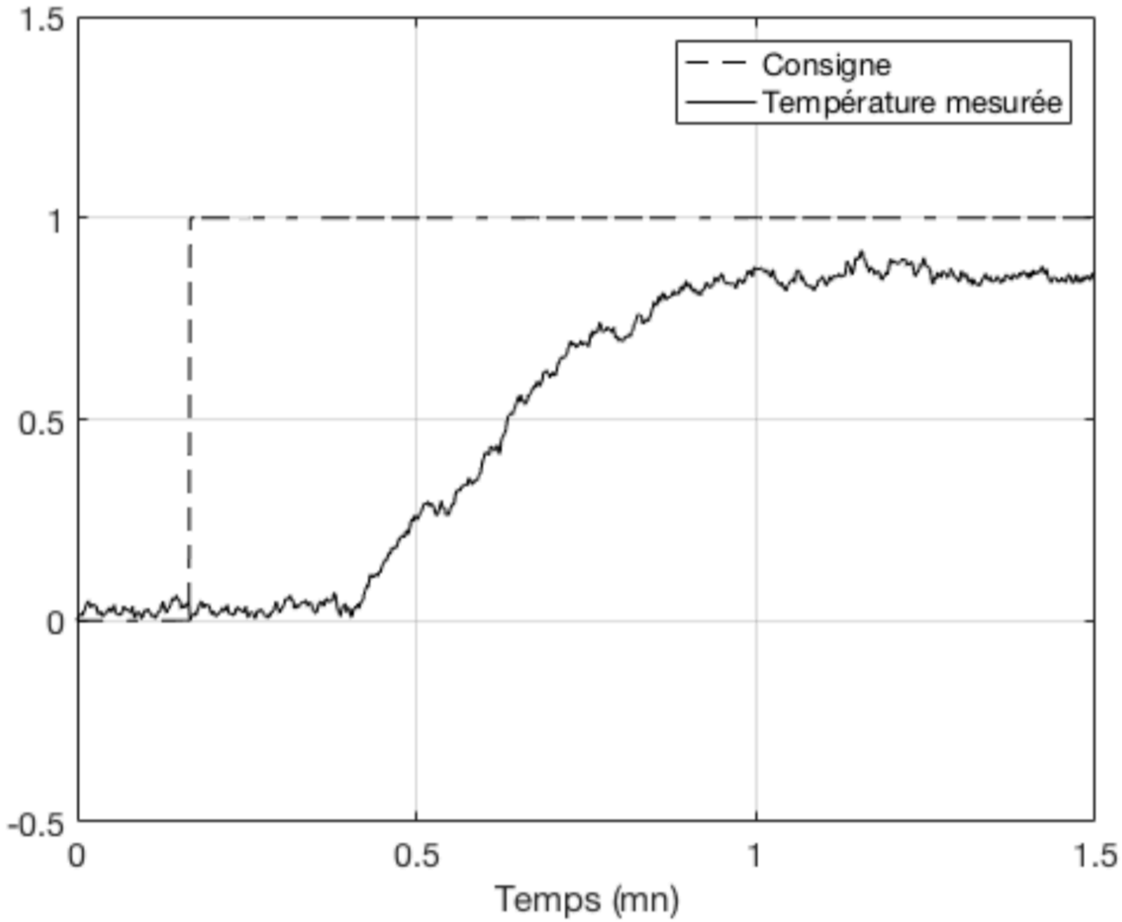
$$\tau = 2,8T_m^{28\%} - 1,8T_m^{40\%}$$

$$T = 5,5\left(T_m^{40\%} - T_m^{28\%}\right)$$

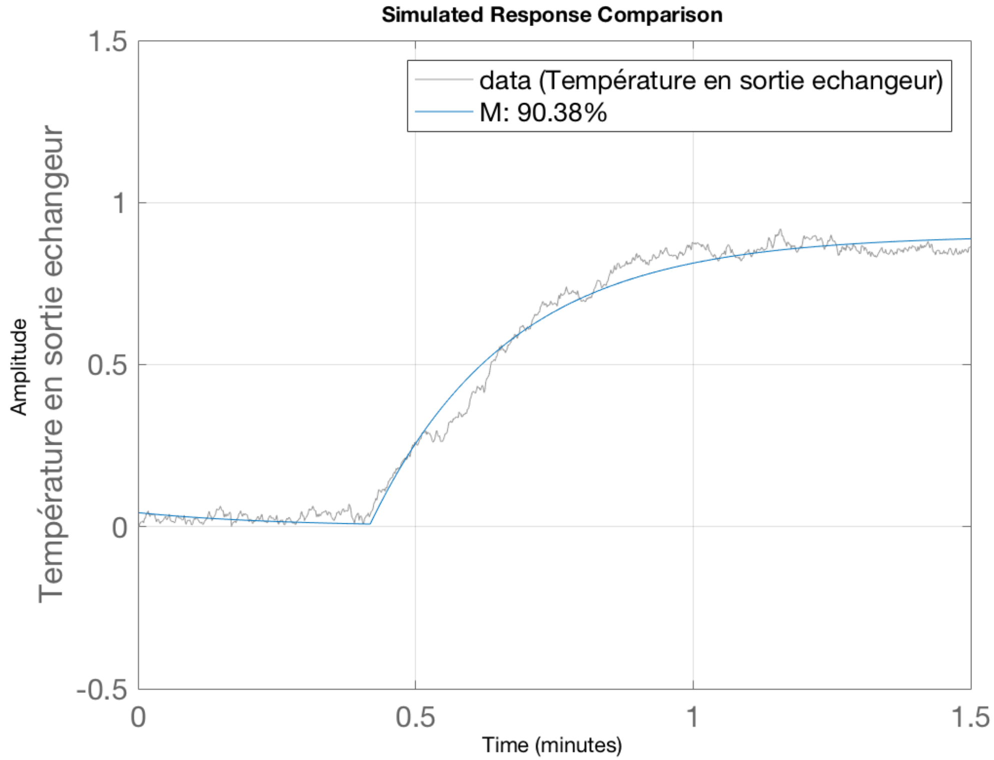


Ces méthodes simples fournissent, en général, des modèles de comportement dominant assez grossiers.

Identification d’un échangeur de chaleur à partir d’un essai indiciel



Identification d'un échangeur de chaleur à partir d'un essai indiciel



- Il existe aujourd'hui des méthodes qui déterminent directement les paramètres de modèles à partir de l'enregistrement de données d'entrée/sortie : *programme de la suite du cours…*