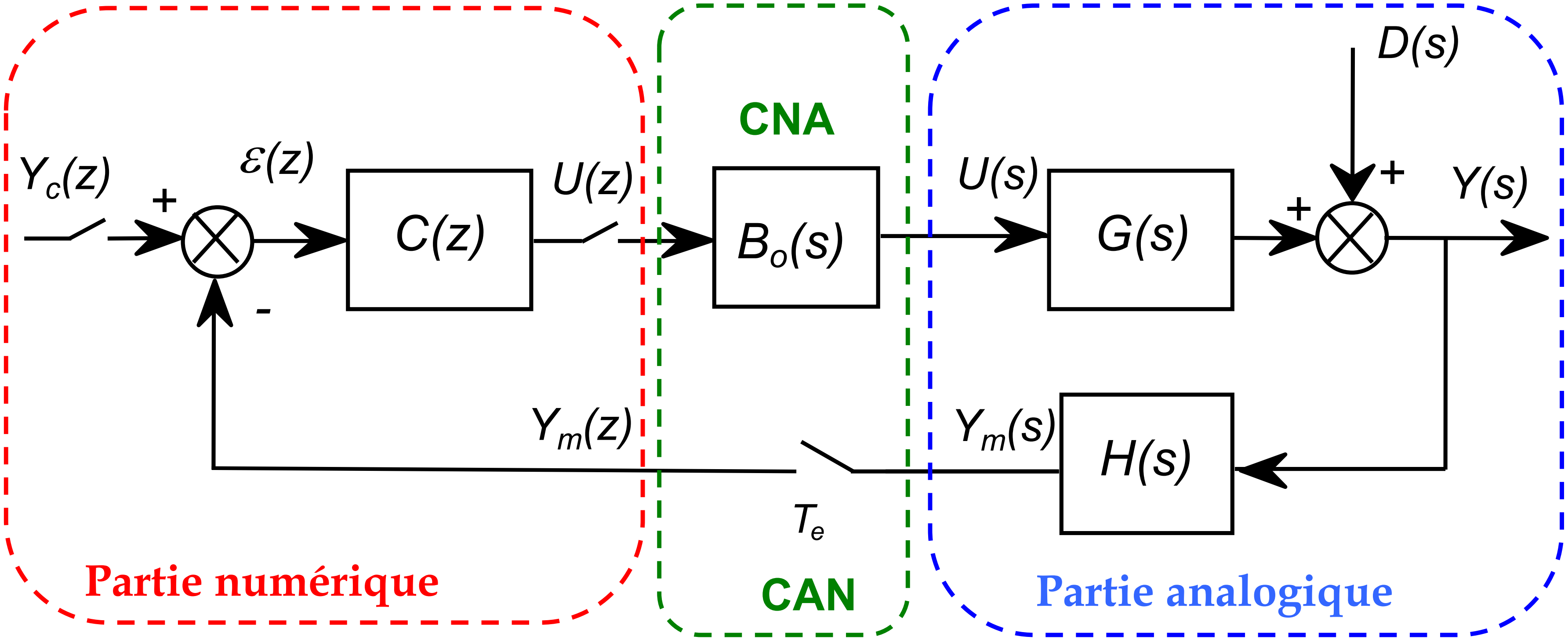
Systèmes échantillonnés

Hugues GARNIER

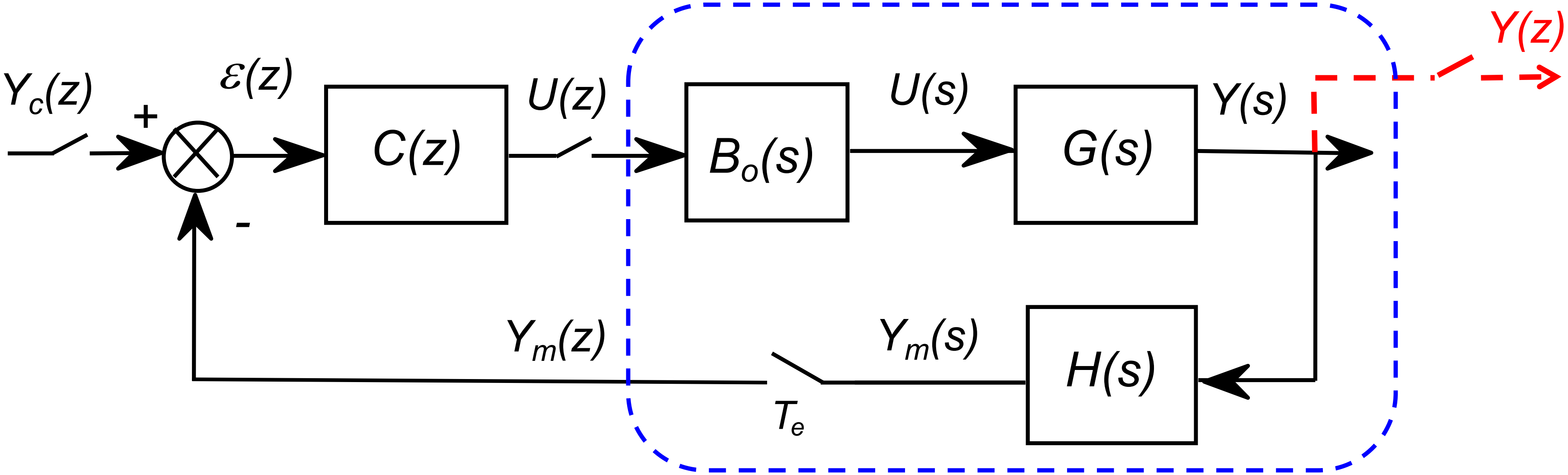
hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Rappel - Schéma de régulation numérique



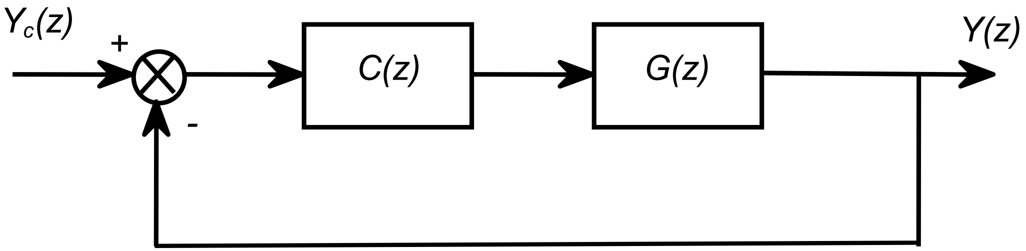
- Une stratégie de régulation numérique fait intervenir deux parties : la première analogique, la seconde numérique
- Pour faire l'analyse, il est plus facile de convertir la partie analogique en numérique

Schéma de régulation numérique



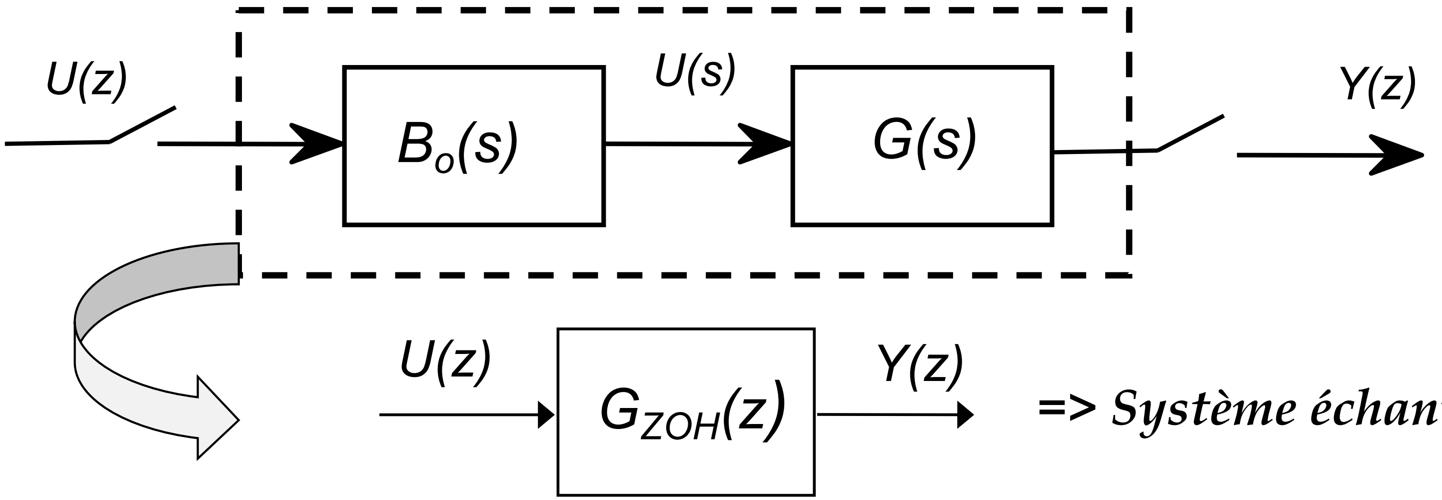
• L'analyse des performances de la régulation numérique dans le domaine discret passe par :

- l'ajout d'un **échantillonneur *fictif*** au niveau de la sortie
- la définition d'un système à temps discret $G(z)$ constitué du bloqueur $B_o(s)$, de $G(s)$ et de l'échantillonneur appelé ***système échantillonné***



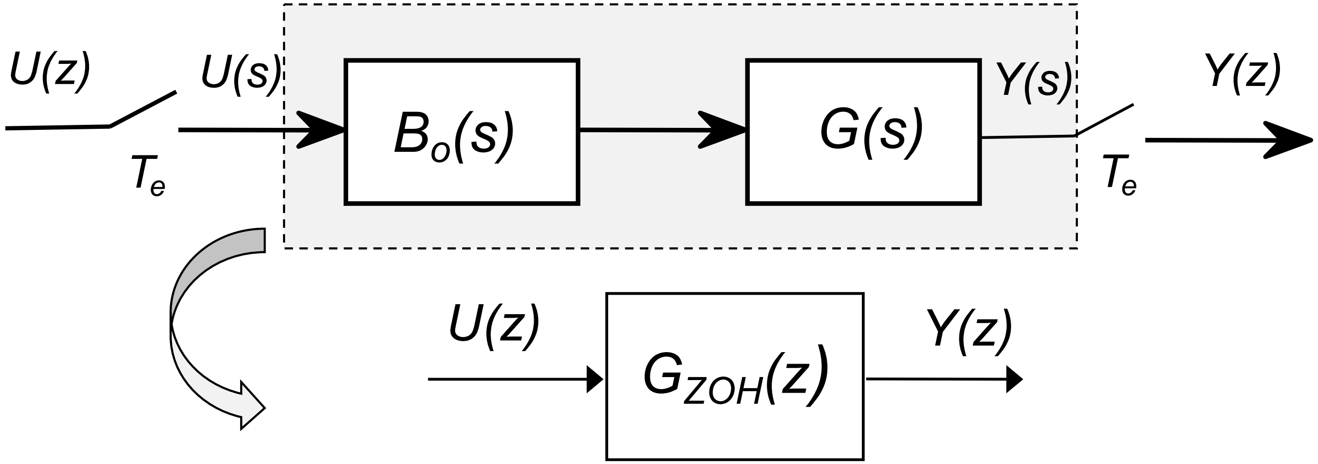
Système échantillonné

- Un **système échantillonné** est constitué de la mise en cascade
  - du bloqueur d'ordre 0 modélisé par $B_o(s)$
  - du système à temps continu modélisé par $G(s)$ (on suppose souvent $H(s)=1$)
  - de l'échantillonneur
- Les signaux d'entrée/sortie du système échantillonné sont ***des transformées en z de signaux à temps discret***



=> *Système échantillonné*

Fonction de transfert d'un système échantillonné



$$Y(z) = Z\left(y(kT_e)\right) = Z\left(y(t)\big|_{t=kT_e}\right) \qquad y(t) = L^{-1}\left(Y(s)\right) \qquad Y(s) = B_o(s)G(s)U(s)$$

$$Y(z) = Z\left(L^{-1}\left(B_o(s)G(s)\right)\big|_{t=kT_e}\right)U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G_{ZOH}(z) = Z\left(L^{-1}\left(B_o(s)G(s)\right)\big|_{t=kT_e}\right)$$

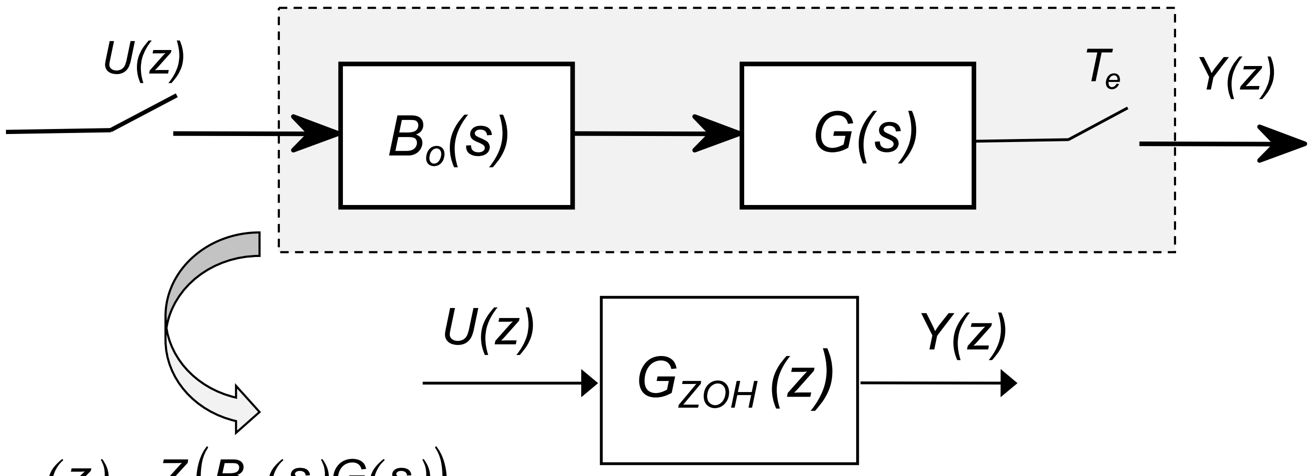
Pour simplifier les notations

$$G_{ZOH}(z) = Z\left(B_o(s)G(s)\right)$$

Attention !! $G_{ZOH}(z)$ n'est pas égale à $Z(G(s))$!!

$$G_{ZOH}(z) \neq Z\left(G(s)\right)$$

Fonction de transfert d'un système échantillonné



$$G_{ZOH}(z) = Z\left(B_o(s)G(s)\right)$$

$$G_{ZOH}(z) = Z\left(\left(\frac{1-e^{-T_e s}}{s}\right)G(s)\right)$$

$$G_{ZOH}(z) = Z\left(\frac{G(s)}{s} - e^{-T_e s}\frac{G(s)}{s}\right)$$

$$G_{ZOH}(z) = Z\left(\frac{G(s)}{s}\right) - Z\left(e^{-T_e s}\frac{G(s)}{s}\right)$$

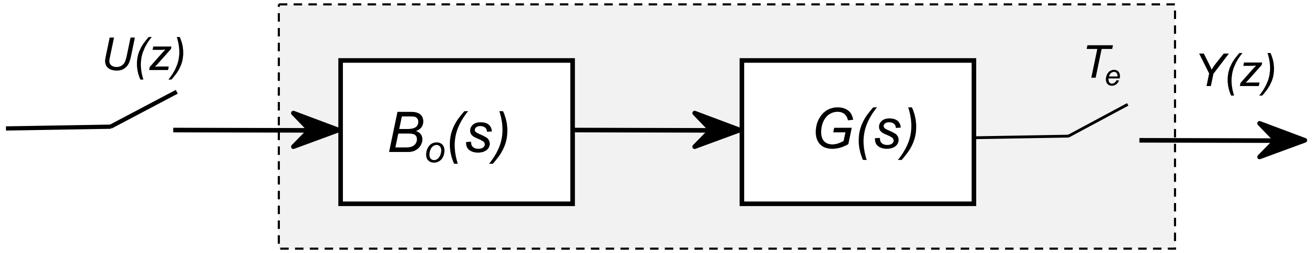
$$G_{ZOH}(z) = Z\left(\frac{G(s)}{s}\right) - z^{-1}Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

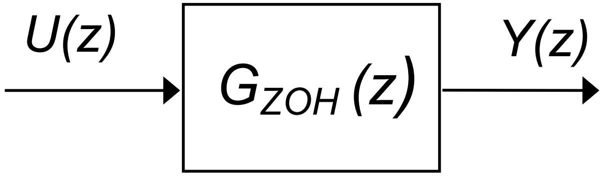
Rappel : $B_o(s) = \dfrac{1-e^{-T_e s}}{s}$

$$G_{ZOH}(z) = \left(1-z^{-1}\right)Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

$$G_{ZOH}(z) = \frac{z-1}{z}Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

Fonction de transfert d'un système échantillonné

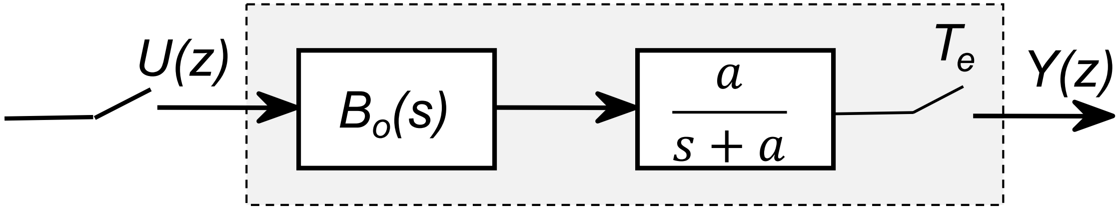


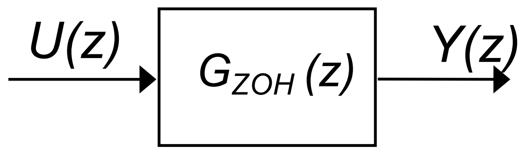


$$G_{ZOH}(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

$$G_{ZOH}(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

Calcul de fonction de transfert échantillonnée
Exemple n° 1





$$G_{ZOH}(z)=\left(1-z^{-1}\right)Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

$$G_{ZOH}(z)=\frac{z-1}{z}Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

Il faut décomposer en éléments simples G(s)/s
puis utiliser la table de T. en Z

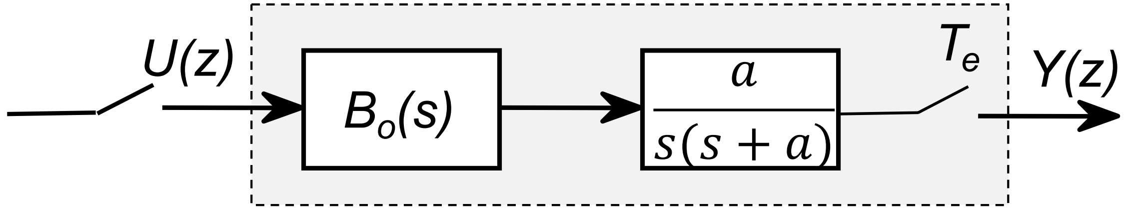
Let $G(s)=\frac{a}{s+a}$; then $\underset{ZOH}{G}(z)=(1-z^{-1})\,z\left\{\frac{a}{s(s+a)}\right\}=(1-z^{-1})z\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right\}$.

By using the z-transform table, we obtain: $\underset{ZOH}{G}(z)=\frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)=\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$.

As an example, let $G(s)=\frac{1}{s+1}$, $T=0.2s$. Then, the pulse transfer function is obtained as: $\underset{ZOH}{G}(z)=\frac{0.181}{z-0.819}$, or $\underset{ZOH}{G}(z)=\frac{1-e^{-0.2}}{z-e^{-0.2}}$.

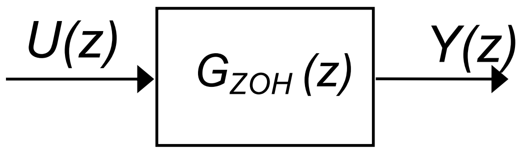
Calcul de fonction de transfert échantillonnée
Exemple n° 2

- *Degré du dénominateur n=2; degré du numérateur : m=0)*



$$G_{ZOH}(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

$$G_{ZOH}(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$



Il faut décomposer en éléments simples G(s)/s puis utiliser la table de T. en Z

Let $G(s) = \frac{a}{s(s+a)}$; then $\underset{ZOH}{G(z)} = (1 - z^{-1})\, \mathrm{z}\left\{\frac{a}{s^2(s+a)}\right\} = (1 - z^{-1})\mathrm{z}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1/a}{s} + \frac{1/a}{s+a}\right\}.$

By using the z-transform table, we obtain: $\underset{ZOH}{G(z)} = \frac{z-1}{z}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{1}{a}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}}\right)\right] = \frac{aT(z-e^{-aT})-(z-1)(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}.$

As an example, let $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, $T = 0.2s$; then, the pulse transfer function is obtained as: $\underset{ZOH}{G(z)} = \frac{0.0187(z+0.936)}{(z-1)(z-0.819)}.$

1 zéro de discrétisation

Attention !! *G(s)* ne possède aucun zéro mais $G_{ZOH}(z)$ possède un zéro appelé zéro de discrétisation (lorsque *n-m* ≥ *2)*
L'ordre *n* est, en revanche, conservé (ici *n* =2)

Fonctions de transfert échantillonnées de quelques systèmes usuels

$G(s)$	$G_{ZOH}(z)$	
$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{T_e z^{-1}}{1-z^{-1}}$	
$\dfrac{K}{1+Ts}$	$\dfrac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}$	$a_1 = -e^{-T_e/T}$ $b_1 = K(1+a_1)$
$\dfrac{K}{1+Ts}e^{-\tau s}$ $\tau = nT_e$	$\dfrac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}} z^{-n}$	$a_1 = -e^{-T_e/T}$ $b_1 = K(1+a_1)$

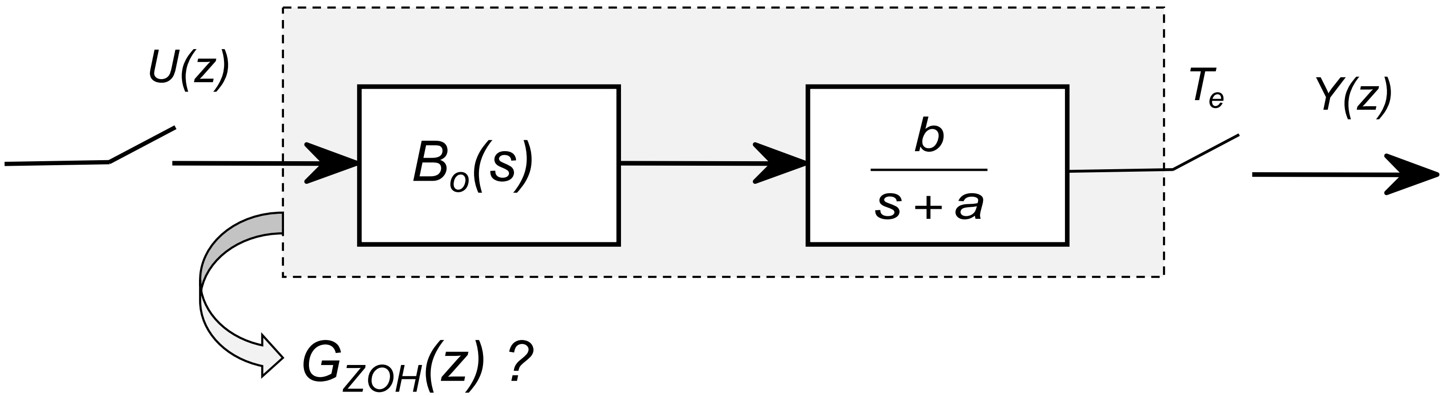
Aujourd'hui, il est facile d'utiliser Matlab !

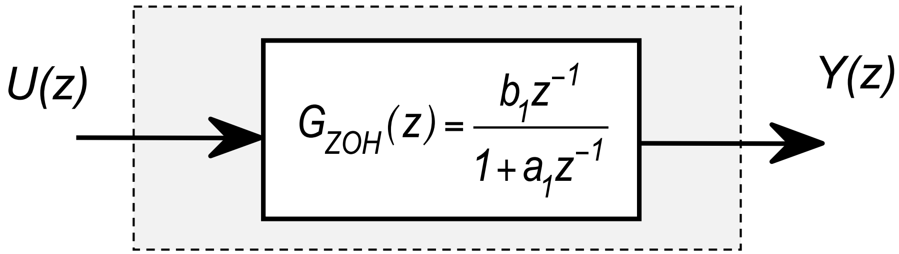
Command Window

```
>> help c2d
 c2d  Converts continuous-time dynamic system to discrete time.

    SYSD = c2d(SYSC,TS,METHOD) computes a discrete-time model SYSD with
    sample time TS that approximates the continuous-time model SYSC.
    The string METHOD selects the discretization method among the following:
       'zoh'           Zero-order hold on the inputs
       'foh'           Linear interpolation of inputs
       'impulse'       Impulse-invariant discretization
       'tustin'        Bilinear (Tustin) approximation.
       'matched'       Matched pole-zero method (for SISO systems only).
       'least-squares' Least-squares minimization of the error between
                       frequency responses of the continuous and discrete
                       systems (for SISO systems only).
    The default is 'zoh' when METHOD is omitted. The sample time TS should
    be specified in the time units of SYSC (see "TimeUnit" property).
```

Fonction de transfert échantillonnée d'un système du premier ordre

- Déterminer la fonction de transfert échantillonnée du système



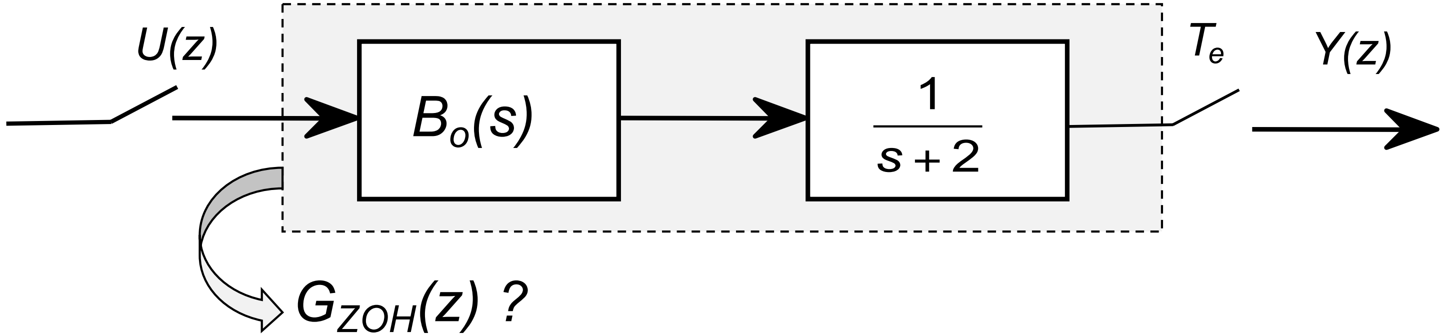


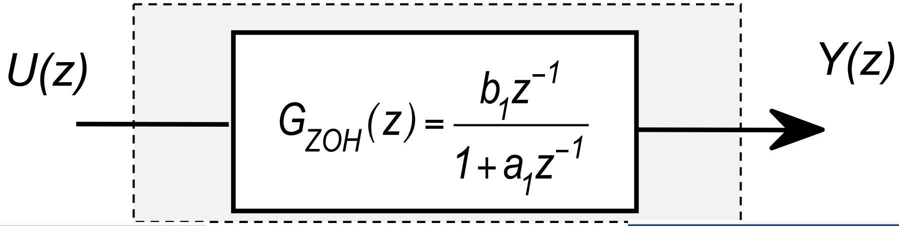
$$\begin{cases} a_1 = -e^{-aT_e} \\ b_1 = \dfrac{b}{a}\left(1 + a_1\right) \end{cases}$$

$G_{ZOH}(z)$ dépend du choix de T_e

Fonction de transfert échantillonnée - Exemple

- Déterminer la fonction de transfert échantillonnée du système ci-dessous lorsque T_e=0,1s et T_e=0,01s






```
>> s=tf('s');
>> Gc=1/(s+2);
```

Command Window

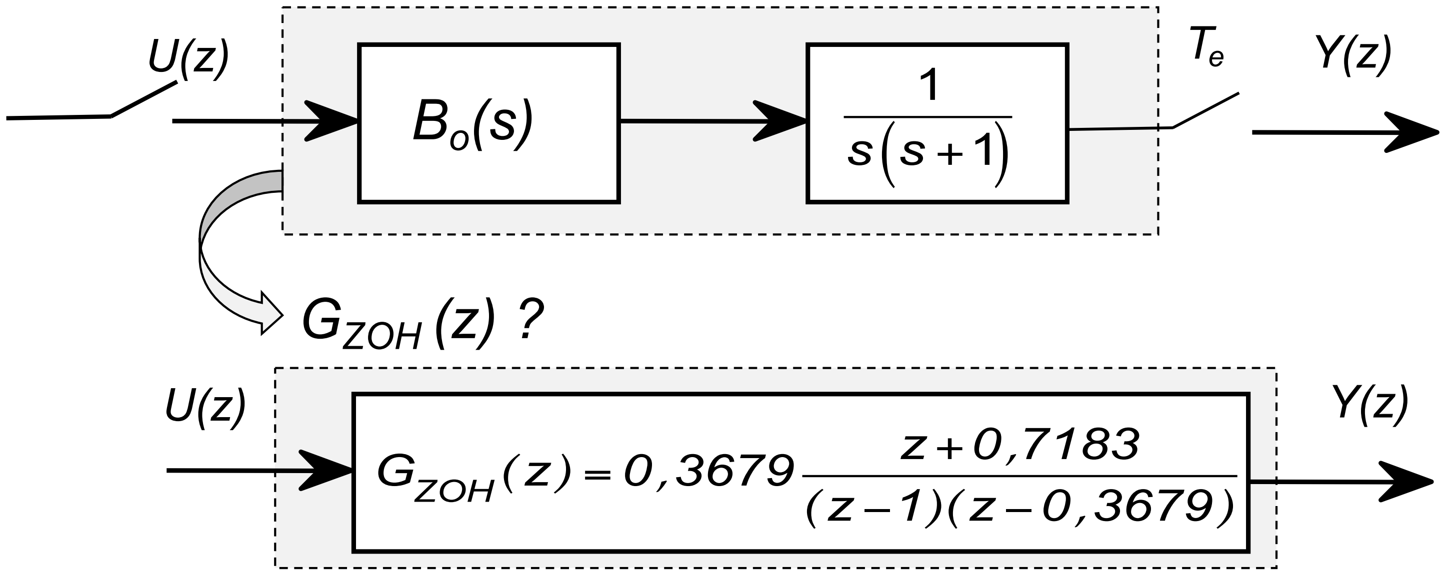
```
>> Te=0.1;
>> Gd=c2d(Gc,Te,'zoh')

Gd =

   0.09063
  ----------
  z - 0.8187

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Command Window

```
>> Te=0.01;
>> Gd=c2d(Gc,Te,'zoh')

Gd =

   0.009901
  ----------
  z - 0.9802

Sample time: 0.01 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Fonction de transfert échantillonnée - Exemple

- Déterminer la fonction de transfert échantillonnée du système ci-dessous lorsque T_e=1s

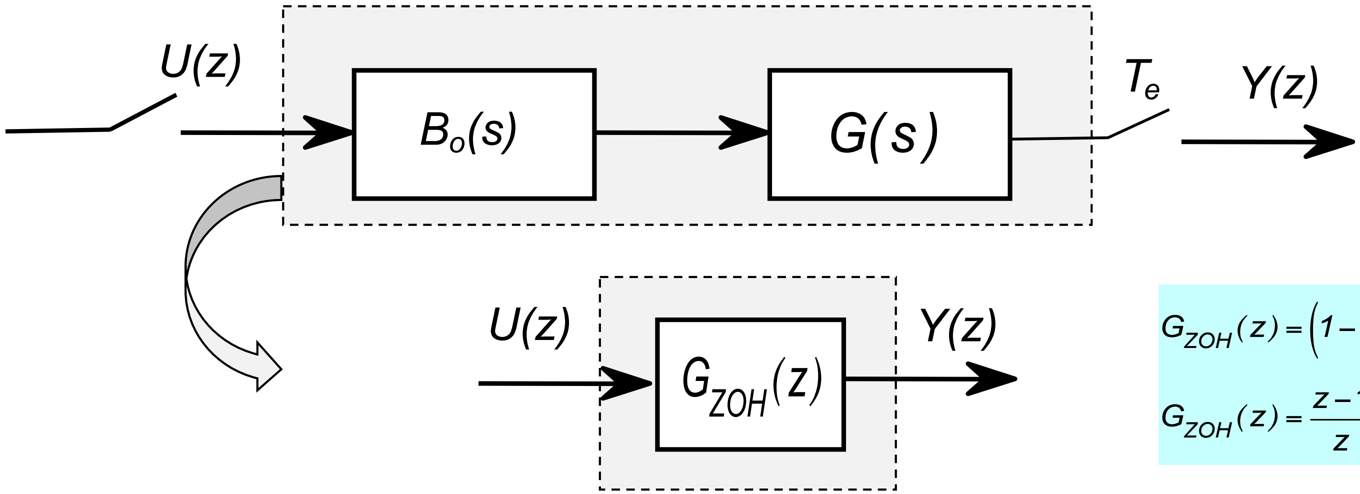


- Vérification sous Matlab

```
s=tf('s');
G=1/(s*(s+1));
Te=1;
Gd=c2d(G,Te,'zoh')
```

```
Command Window

>> Gd=c2d(G,Te,'zoh')

Gd =

    0.3679 z + 0.2642
  ----------------------
  z^2 - 1.368 z + 0.3679

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Propriétés des fonctions de transfert échantillonnées



$$G_{ZOH}(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$
$$G_{ZOH}(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

- ✓ Un système linéaire continu reste linéaire après discrétisation par ZOH
- ✓ L'ordre du système est conservé
- ✓ Les paramètres de la fonction de transfert échantillonnée sont dépendants de la période d'échantillonnage T_e
- ✓ Les pôles p_d du système échantillonné se déduisent des pôles p_c du système continu par la formule

$$p_d = e^{p_c T_e}$$

H. Garnier