



Transformée en Z

Hugues GARNIER

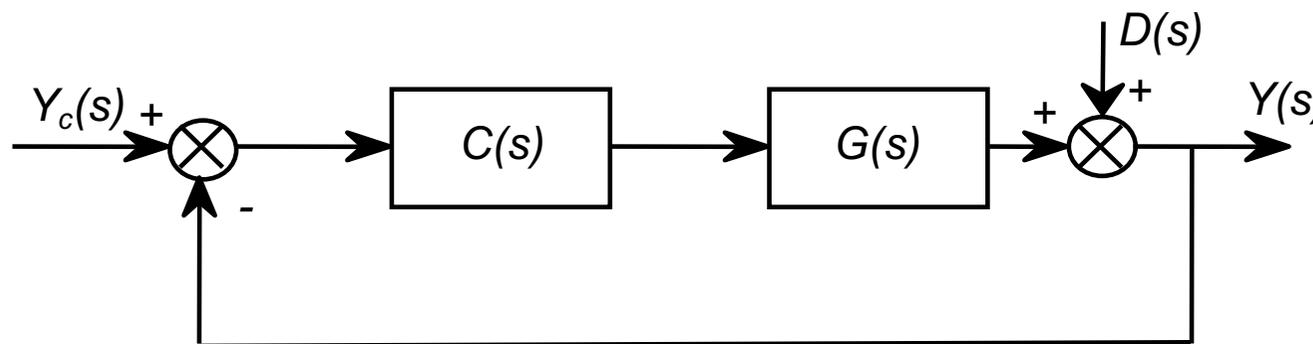
hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Intérêts de la transformée de Laplace (*rappels*)

- Permet de déterminer la solution d'une *équation différentielle* à coefficients constants
 - Ex: résoudre

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0, \quad y(0) = 0; \dot{y}(0) = 1$$

- Est l'outil mathématique qui facilite *l'analyse des boucles de régulation continue*



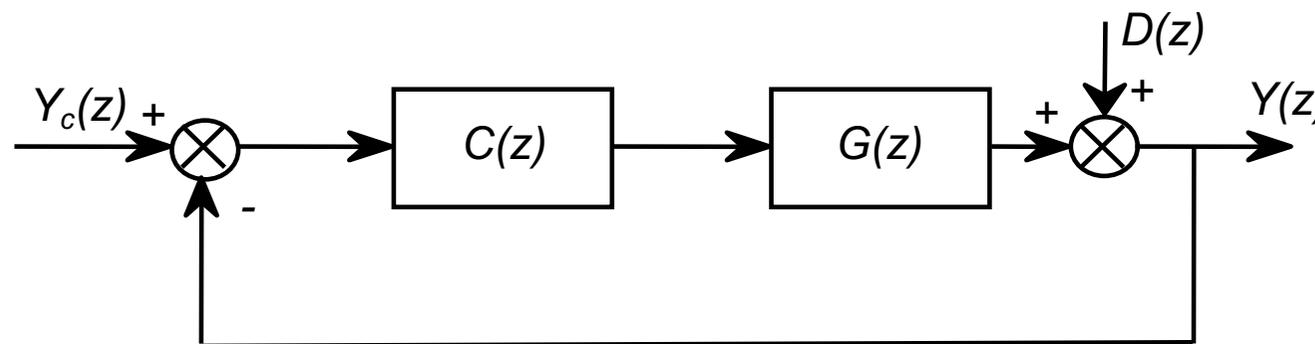
$$Y(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)} Y_c(s) + \frac{1}{1 + F_{BO}(s)} D(s)$$

Intérêts de la transformée en Z

- Permet de déterminer la solution d'une *équation aux différences* à coefficients constants
 - Ex : résoudre

$$y(k) - 4y(k - 1) + 3y(k - 2) = 1, \quad y(-1) = y(-2) = 0$$

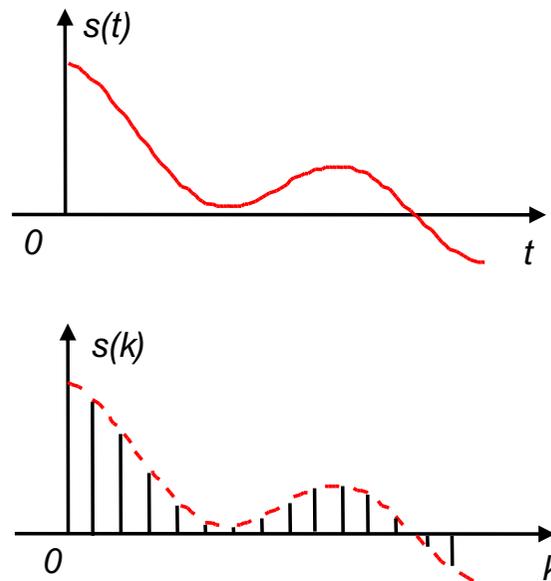
- Est l'outil mathématique qui facilite *l'analyse des boucles de régulation numérique*



$$Y(z) = \frac{F_{BO}(z)}{1 + F_{BO}(z)} Y_c(z) + \frac{1}{1 + F_{BO}(z)} D(z)$$

Signal numérique

- Un signal numérique (ou *signal à temps discret*) sera noté $s(k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- Il est défini uniquement pour des valeurs discrètes du temps
- Il peut résulter de l'échantillonnage d'un signal à temps continu : les valeurs représentent les échantillons du signal



Signal numérique

- *Définition*

- Un signal numérique (ou signal à temps discret) $s(k)$ est une *suite numérique*, c'est à dire une liste ordonnée de nombres :

$$s(0) = 1, s(1) = 2, s(2) = 4, \dots$$

- *Mode de représentation*

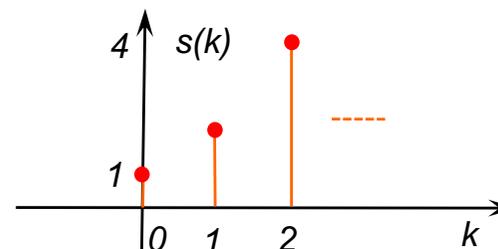
- par une **expression analytique**

$$s(k) = 2^k, k \geq 0$$

- par une **relation de récurrence**

$$s(k) = 2 \times s(k - 1), k \geq 1 \text{ avec } s(0) = 1$$

- par une **représentation graphique**



Equations aux différences

- **Définition**

Soit un signal numérique $s(0), s(1), \dots, s(k), \dots$

Une équation reliant le $k^{\text{ième}}$ terme à ses prédécesseurs est appelée **équation de récurrence** ou **équation aux différences**

$$s(k) - 4s(k-1) + 3s(k-2) = 1 \quad s(-1) = s(-2) = 0$$

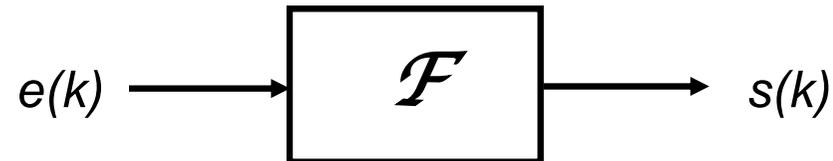
- **Résoudre une équation aux différences** consiste à déterminer la solution (le signal numérique) $s(k)$ qui vérifie l'équation. On montre

$$s(k) = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1) \quad k \geq 0$$

- Il existe plusieurs méthodes pour résoudre les équations aux différences
 - L'une d'entre elles s'appuie sur la **transformée en Z**

Systeme numérique

- Un système numérique ou à temps discret est défini comme un opérateur entre *deux signaux à temps discret*. Il est décrit par une équation aux différences



$$s(k) = \mathcal{F}(s(k-1), (s(k-2), \dots, e(k), e(k-1), \dots))$$

\mathcal{F} : est un *systeme numérique* qui sera supposé dans la suite

- linéaire
- invariant dans le temps
- causal

Outil d'analyse des caractéristiques d'un système numérique linéaire

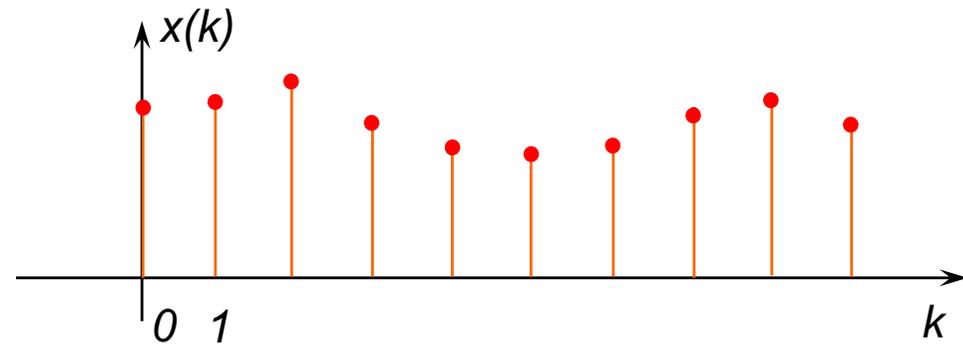
- Un système numérique linéaire peut être décrit mathématiquement par :
 - une équation aux différences
 - un produit de convolution
 - sa fonction de transfert
- *L'outil mathématique* exploité pour faciliter son analyse est :

la transformée en Z

Transformée en Z

- Soit un signal numérique $x(k)$ causal. *La transformée en Z* est définie par :

$$Z(x(k)) = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k}$$



où

- z est la variable de la transformée en Z
- $z = r e^{j\theta} = \alpha + j\beta$

- On dit que $X(z)$ est la transformée en Z du signal $x(k)$

Lien entre transformée de Fourier et transformée en Z

- La transformée en Z définie précédemment est en fait la transformée en Z monolatère

Il existe en effet la transformée en Z bilatère définie par :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}$$

- Il existe une relation entre la **transformée en Z bilatère** et la **transformée de Fourier** d'un signal à temps discret :

$$X(f) = X(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f T_e}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f k T_e}$$

- Avec T_e la période d'échantillonnage du signal

Lien entre transformée de Laplace et transformée en Z

Pour un signal échantillonné $x(kT_e)=x(k)$, la *transformée de Laplace* est donnée par :

$$X_e(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)e^{-ksT_e} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \left(e^{-sT_e} \right)^k$$

En posant $z=e^{sT_e}$

$$X(z) = Z(x_e(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k}$$

La *transformée en Z* peut donc être vue comme la *transformée de Laplace* appliquée à un signal échantillonné (*idéalement*) dans laquelle on a effectué le changement de variable :

$$z=e^{sT_e}$$

Série entière (*rappels*)

- **Définition**

On appelle *série entière* de la variable x **toute somme** (finie ou infinie) des éléments d'une suite numérique de terme général $u_k = a_k x^k$ où a_k est un réel et k un *entier* naturel

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

Sur tout intervalle où elle est convergente, une série entière a pour somme une fonction. Une série entière est donc une fonction de la forme :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

- **Remarques**

- une série entière ne converge pas nécessairement pour tout x
- il existe un entier R appelé *rayon ou région de convergence* tel que la série entière converge pour $|x| < R$ et diverge pour $|x| > R$

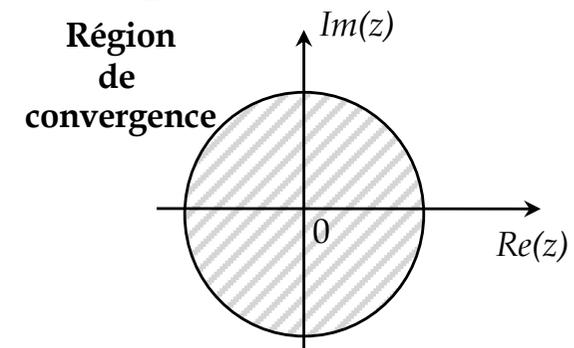
Région de convergence

- La transformée en Z d'un signal $x(k)$ est définie par une **série entière** (*somme infinie des termes d'une suite numérique*)

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) (z^{-1})^k$$

- Quand cette somme est finie, la série est dite convergente et $X(z)$ existe
- C'est le cas pour certaines valeurs de la variable z qui définissent la Région de Convergence (RdC)

$$\text{RdC} = \left\{ z = \alpha + j\beta \text{ telles que } \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)z^{-k}| < \infty \right\}$$



- RdC ne contient pas de pôle de $X(z)$. Elle correspond, en général, pour les signaux causaux à l'extérieur d'un cercle $|z| > a$
- Pour les signaux physiques (qui ont une durée d'existence finie) :
RdC = ensemble du plan complexe avec l'exclusion possible de $z=0$ ou $z=\infty$

Région de convergence - Exemple

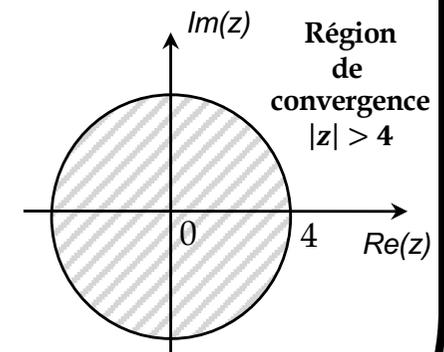
- Soit le signal numérique dont les premières valeurs sont :
 $x(0) = 1, x(1) = 4, x(2) = 16, x(3) = 64, x(4) = 256 \dots$

En appliquant la définition de la transformée en z , déterminer $X(z)$. A quelle condition la série obtenue converge-t-elle ? Cette condition étant supposée respectée, donner la valeur de $X(z)$.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

$$X(z) = 1 + 4z^{-1} + 4^2 z^{-2} + \dots = \left(\frac{4}{z}\right)^0 + \left(\frac{4}{z}\right)^1 + \left(\frac{4}{z}\right)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{z}\right)^k$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{4}{z}} = \frac{z}{z-4} \quad \text{si } |z| > 4$$



Rappel : somme d'une suite géométrique de raison q $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$

Transformée en Z - Exemple

- Soit le signal à temps discret à durée d'existence finie défini par :

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 2, \quad x(2) = 3, \quad x(k > 2) = 0$$

En appliquant la définition de la transformée en Z, déterminer $X(z)$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1}$$

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2}$$

Forme courante d'une transformée en Z

- La transformée en Z peut s'écrire sous 2 formes :

- *Série entière (forme peu pratique)* : obtenue à partir de la définition

On obtient une série entière en puissance négative de z pondérée par $x(k)$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(i)z^{-i} + \dots$$

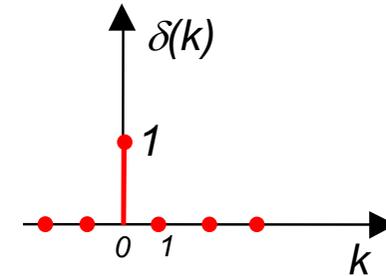
- *Fonction rationnelle (forme la plus courante)* en puissance positive de z ou en puissance négative de z (z^{-i})

$$\text{Exemple : } X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1} + z^{-2}} \quad \text{ou} \quad X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1}$$

Signaux à temps discret usuels

- *Impulsion unité ou impulsion de Kronecker*

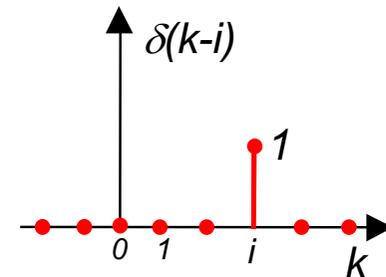
$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases}$$



Elle ne doit pas être confondue avec l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ qui est un signal à temps continu. Elle est bien plus facile à manipuler !

- *Impulsion de Kronecker retardée*

$$\delta(k-i) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = i \\ 0 & \text{pour } k \neq i \end{cases}$$

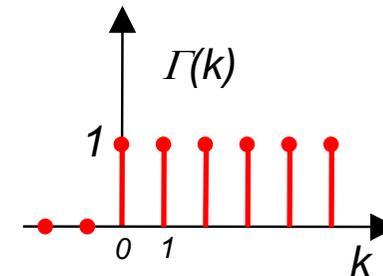


- Tout signal $s(k)$ peut s'écrire : $s(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s(i)\delta(k-i)$

Signaux à temps discret usuels

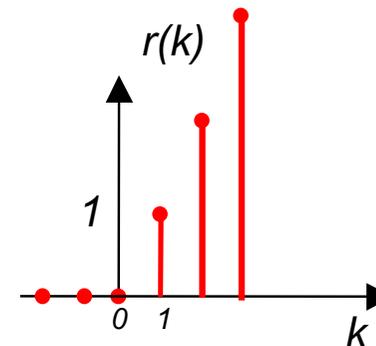
- *Echelon unité*

$$\Gamma(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}$$



- *Rampe unité*

$$r(k) = \begin{cases} k & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}$$

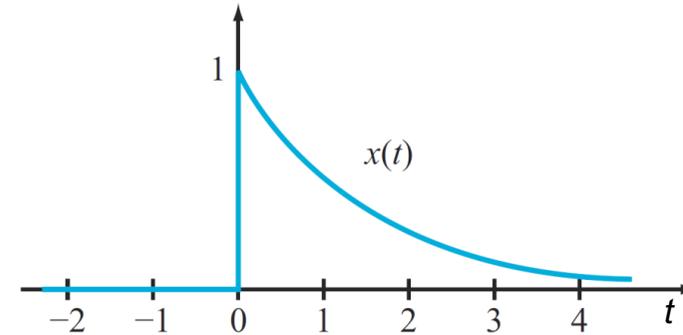


Signaux à temps discret usuels

- Rappel : signal exponentiel à temps continu et causal (nul si $t < 0$)

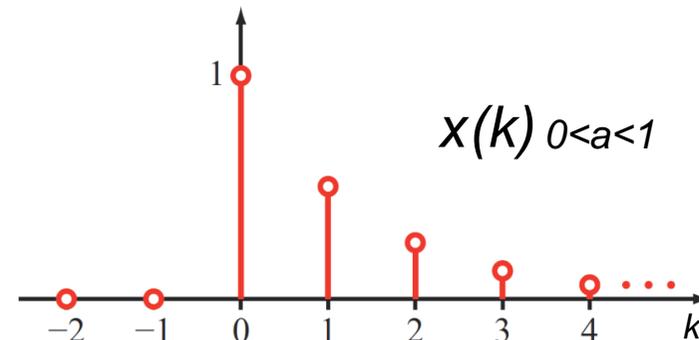
$$x(t) = e^{-\alpha t} \Gamma(t)$$

rend causal le signal



- **Signal géométrique à temps discret** (ou exponentiel de base a) et causal

$$x(k) = a^k \Gamma(k)$$

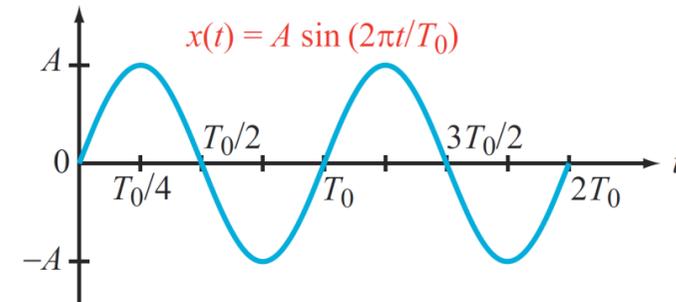


Signal sinusoïdal à temps discret

- Rappel : signal sinusoïdal à *temps continu*

$$x(t) = A \sin(\omega_o t + \phi_o)$$

période: $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$, ω_o en rad/s



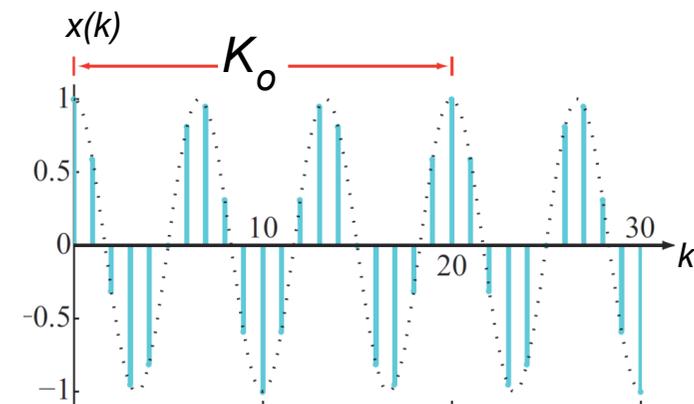
- *Signal sinusoïdal à temps discret*

$$x(k) = A \sin(\Omega_o k + \phi_o)$$

$x(k)$ périodique de période $K_o = \frac{2\pi}{\Omega_o}$, $K_o \in \mathbb{Z}$

si $\Omega_o = \frac{M}{N} 2\pi$ avec M et N entiers, Ω_o en rad

K_o plus petit entier >0 tel que $\frac{M}{N}$ entier



Un signal sinusoïdal à temps discret n'est pas toujours périodique !

Transformée en Z de signaux usuels

- *Impulsion unité* $Z(\delta(k)) = 1$

$$Z(\delta(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = \delta(0)z^{-0} + \delta(1)z^{-1} + \dots = 1$$

- *Echelon unité* $Z(\Gamma(k)) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

$$Z(\Gamma(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k$$

$$Z(\Gamma(k)) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{si} \quad |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$$

Somme d'une suite
géométrique de raison z^{-1}

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{si} \quad |q| < 1$$

Transformée en Z de signaux usuels

- *Signal géométrique (causal)*

$$\mathbf{Z}\left(a^k \Gamma(k)\right) = \frac{z}{z-a}$$

$$\text{si } a = e^{bT_e}, \quad \mathbf{Z}\left(\left(e^{bT_e}\right)^k \Gamma(k)\right) = \frac{z}{z - e^{bT_e}}$$

- *Signaux sinusoidaux (causaux)*

$$\mathbf{Z}\left(\sin\left(\omega_o k T_e\right) \Gamma(k)\right) = \frac{z \sin\left(\omega_o T_e\right)}{z^2 - 2 \cos\left(\omega_o T_e\right) z + 1}$$

$$\mathbf{Z}\left(\cos\left(\omega_o k T_e\right) \Gamma(k)\right) = \frac{z\left(z - \cos\left(\omega_o T_e\right)\right)}{z^2 - 2 \cos\left(\omega_o T_e\right) z + 1}$$

Table de transformées en z

$x(k)$	$X(z)$
$\delta(k)$	1
$\delta(k-i)$	z^{-i}
$\Gamma(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$r(k) = kT_e \Gamma(k)$	$\frac{zT_e}{(z-1)^2}$
$(kT_e)^2 \Gamma(k)$	$\frac{z(z+1)T_e^2}{(z-1)^3}$
$a^k \Gamma(k)$	$\frac{z}{z-a}$

Table de transformées en z

$x(k)$	$X(z)$
$(kT_e)a^k \Gamma(k)$	$\frac{azT_e}{(z-a)^2}$
$(kT_e)^2 a^k \Gamma(k)$	$\frac{az(z+a)T_e^2}{(z-a)^3}$
$\sin(\omega_o kT_e) \Gamma(k)$	$\frac{z \sin(\omega_o T_e)}{z^2 - 2\cos(\omega_o T_e)z + 1}$
$\cos(\omega_o kT_e) \Gamma(k)$	$\frac{z(z - \cos(\omega_o T_e))}{z^2 - 2\cos(\omega_o T_e)z + 1}$

Propriétés de la transformée en Z *les plus importantes*

- *Linéarité*

$$\mathcal{Z}(a x(k) + b y(k)) = a X(z) + b Y(z)$$

- *Retard temporel*

$$\mathcal{Z}(x(k-i)) = z^{-i} X(z)$$

$$\mathcal{Z}(x(k-1)) = z^{-1} X(z)$$

$$\mathcal{Z}(x(k-2)) = z^{-2} X(z)$$

- *Avance temporelle*

$$\mathcal{Z}(x(k+i)) = z^i \left[X(z) - \sum_{k=0}^{i-1} x(k) z^{-k} \right]$$

$$\mathcal{Z}(x(k+1)) = zX(z) - zx(0)$$

Conditions initiales
du signal $x(k)$



Propriétés de la transformée en Z

- *Produit de convolution temporel*

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) y(k-i)$$

$$\mathcal{Z}(x(k) * y(k)) = X(z) \times Y(z)$$

- *Théorème de la valeur initiale*

$$\lim_{k \rightarrow 0} (x(k)) = \lim_{z \rightarrow +\infty} (X(z))$$

- *Théorème de la valeur finale*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (x(k)) = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)X(z))$$

Si les limites existent

Transformée en Z inverse

- *La transformée en Z inverse permet de retrouver les échantillons du signal*

$$Z^{-1}(S(z)) = s(k)$$

- *Plusieurs méthodes existent :*

1. Décomposition en somme de fonctions rationnelles et utilisation de tables

$$S(z) = A_1 \frac{z}{z - a_1} + A_2 \frac{z}{z - a_2} + \dots$$

$$s(k) = Z^{-1}(S(z)) = Z^{-1}\left(A_1 \frac{z}{z - a_1} + A_2 \frac{z}{z - a_2} + \dots\right)$$

$$s(k) = A_1 Z^{-1}\left[\frac{z}{z - a_1}\right] + A_2 Z^{-1}\left[\frac{z}{z - a_2}\right] + \dots \quad \text{car la transformée en Z inverse est linéaire}$$

$$s(k) = A_1 (a_1)^k \Gamma(k) + A_2 (a_2)^k \Gamma(k) + \dots \quad \text{car } Z\left(a^k \Gamma(k)\right) = \frac{z}{z - a}$$

Attention, ce n'est pas une décomposition en éléments simples habituelles. Présence d'un z au numérateur !

Transformée en Z inverse - Exemple

Trouver l'original $x(k)$ de la transformée ci-dessous :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

En déduire les valeurs de $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.

Transformée en Z inverse - Exemple

Trouver l'original $x(k)$ de la transformée ci-dessous :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = A_1 \frac{z}{z-1} + A_2 \frac{z}{z-2}$$

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = -1$$

$$A_2 = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z-2}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z-2}{z} \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = 2$$

$$x(k) = Z^{-1}(X(z)) = -Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] + 2Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right]$$

$$x(k) = -\Gamma(k) + 2 \times 2^k \Gamma(k) = (-1 + 2^{k+1})\Gamma(k)$$

$$k=0, \quad x(0) = 1; \quad k=2, \quad x(2) = 7$$

$$k=1, \quad x(1) = 3; \quad k=3, \quad x(3) = 15$$

Transformée en Z inverse

2. Division polynomiale

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^{n_b} + b_1 z^{n_b-1} + \dots + b_{n_b}}{a_0 z^{n_a} + a_1 z^{n_a-1} + \dots + a_{n_a}}$$

Il suffit de diviser $B(z)$ par $A(z)$ définis en puissance positive de z pour obtenir une série en puissance décroissante de z^{-1} dont les coefficients sont les valeurs $x(k)$ recherchées.

$$\begin{array}{l|l} B(z) & A(z) \\ \hline & X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots \end{array}$$

Par identification, on en déduit : $x(0), x(1), x(2), x(3), \dots$

Transformée en Z inverse

2. Division polynomiale - Exemple

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 z^2 & z^2 - 3z + 2 \\
 -z^2 + 3z - 2 & \hline
 3z + 2 & 1 + 3z^{-1} + 7z^{-2} + 15z^{-3} + \dots + x(i)z^{-i} + \dots \\
 \vdots & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 & X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots + x(i)z^{-i} + \dots
 \end{array}$$

Par identification, on en déduit : $x(0) = 1, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 7, \quad x(3) = 15, \dots$

Résolution d'équations aux différences l'aide de la transformée en Z

- La procédure de résolution est la suivante :
 1. Appliquer la transformée en Z aux 2 membres de l'équation aux différences en $x(k)$
 2. Calculer $X(z)$ en utilisant les propriétés de la transformée en Z
 3. Décomposer $X(z)$ en fonctions rationnelles simples
 4. Utiliser la table de transformées pour obtenir $x(k)$ par transformée inverse

Intérêts de la transformée en Z

- Permet de déterminer la solution d'une équation aux différences

- Résoudre

$$y(k) - 4y(k-1) + 3y(k-2) = 1$$

$$y(k) = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1)\Gamma(k)$$

- Facilite l'analyse des systèmes à temps discret

- Déterminer la réponse à un échelon d'un système numérique. Cela revient à résoudre une équation aux différences

$$s(k) = -\frac{1}{2}s(k-1) + e(k), \quad e(k) = \Gamma(k)$$

$$s(k) = \frac{1}{3}\left(2 + (-0,5)^k\right)\Gamma(k)$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z+0,5}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-(-0,5)}\right) = (-0,5)^k \Gamma(k)$$